UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE

El Módulo de Lipschitz en la Programación Lineal

Autor: Javier Maciá Davó

Tutora: M.J.Cánovas

1 de julio de 2025

Índice

Capítulo 1: Introducción **3**
1.1 Antecedentes históricos . . . 3
1.2 Contexto . . . 4
Ejemplo: Problema de producción de PL . . . 6
1.3 Constante de Lipschitz . . . 8

Capítulo 2: Propiedad de Aubin y Módulo de Lipschitz del Conjunto Factible **11**
2.1 Introducción . . . 11
2.2 Módulo de Lipschitz . . . 11
2.3 Fórmula Operativa para el Módulo de Lipschitz . . . 12
Cálculo de la distancia mínima al conjunto convexo . . . 17

Capítulo 3: Ejemplo académico **22**

Bibliografía **26**

Resumen

El presente trabajo de fin de grado trata sobre el módulo y la constante de Lipschitz así como su aplicación al análisis de sensibilidad y estabilidad en el campo de la optimización o programación lineal paramétrica. Se estructura en tres capítulos principales abarcando desde el contexto histórico hasta la implementación computacional y finalizando con un ejemplo de aplicación práctica. En el primer capítulo, se presenta el contexto histórico necesario, destacando la relevancia de la continuidad de Lipschitz en el campo de la optimización matemática, presentando conceptos fundamentales como el conjunto factible, soluciones óptimas y se muestra un clásico problema de la programación lineal a modo de ejemplo. En el segundo capítulo se profundiza en la propiedad de Aubin y en la definición del módulo de Lipschitz en multifunciones, donde se evalúa como varía el conjunto factible ante pequeñas perturbaciones en los parámetros del problema. Además, se presenta una fórmula operativa y su implementación en MATLAB. Finalmente, en el tercer capítulo se presenta un ejemplo práctico real en el que se plantea y formula el problema para finalmente obtener el módulo de Lipschitz correspondiente e ilustrar el significado dentro del ámbito empresarial.

Capítulo 1: Introducción

El presente trabajo de fin de grado se centra en el módulo y la constante de Lipschitz, así como su cálculo y aplicación en el ámbito del análisis de sensibilidad y estabilidad en el campo de la optimización.

Para contextualizar adecuadamente el trabajo, se proporcionará unos breves antecedentes históricos, además de definiciones y notaciones sobre conceptos clave requeridos para una correcta comprensión. A lo largo del trabajo se verán también términos referentes a la programación lineal (PL para abreviar), teoría de números, álgebra lineal y análisis.

1.1 Antecedentes históricos

Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) fue un matemático reconocido en el siglo XIX y no tuvo la oportunidad de contribuir directamente a los problemas de PL. Sin embargo, su trabajo en la condición de continuidad de Lipschitz es aplicable en el marco del análisis de sensibilidad y estabilidad de sistemas de desigualdades lineales parametrizados. Sus principales campos de trabajo fueron el análisis, geometría diferencial, física matemática y otros campos como la teoría de números y el álgebra lineal. Concretamente, el módulo y la constante de Lipschitz surgen de su trabajo en los campos de análisis y teoría de números. Además, realizó sus estudios en Königsberg y Berlín, donde consiguió sorprender al matemático Dirichlet (director de su tesis) gracias a su razonamiento y perspectiva que poseía sobre las matemáticas. Finalmente, fue habilitado como profesor en la universidad de Bonn y trabajaría allí el resto de su vida.

Por otra parte, en lo que a la programación lineal se refiere, surgió como uno de los avances matemáticos ocasionados por la Segunda Guerra Mundial, donde investigadores de diferentes ramas de la ciencia, incluyendo las matemáticas, la desarrollaron con el fin de planificar y optimizar los recursos. Años más tarde, en 1947, el matemático estadounidense George B. Dantzig daría con un método de resolución exacta para los problemas de PL, denominado como método SIMPLEX, el cual fue seleccionado como uno de los algoritmos más importantes del siglo XX.

1.2 Contexto

En la actualidad tanto las empresas como el público en general debemos tomar decisiones acerca de cómo gestionar nuestros propios recursos. En el caso del público, la mayoría de las decisiones son triviales y no requieren de mucho esfuerzo o cálculo. Sin embargo, en el caso de las empresas nos encontramos ante otro tipo de tesitura. En las empresas gestionar los recursos es algo fundamental para la eficiencia y correcto funcionamiento y progreso de la entidad, es por esto que cobra importancia la investigación operativa, ya que proporciona un método científico sobre el que respaldar sólidamente la toma de decisiones. En los problemas de PL se busca hallar aquellas soluciones óptimas para un problema en cuestión, minimizando o maximizando el objetivo principal, como puede ser maximizar beneficios o minimizar costes, atendiendo a una serie de criterios o condiciones como pueden ser costes variables, riesgo o volatiliad (en el caso de inversión en bolsa), tiempos de producción, etc. Es por esto que los problemas de PL tienen tanto valor en la industria, puede tener en cuenta infinidades de condiciones y variables y proporcionar las mejores opciones a tener en cuenta (aunque en el caso de este trabajo nos centraremos en la programación finita), lo que se traduce en una ventaja estratégica.

A lo largo de la historia de la programación matemática, han existido varios problemas de PL conocidos que sirven como ejemplo en la docencia actual para ilustrar los distintos tipos de problemas de optimización, como puede ser el problema de la dieta, el cual consiste en minimizar el coste de la dieta teniendo en cuenta una cantidad equilibrada de nutrientes que requiere el cuerpo humano. Otro ejemplo que se emplea bastante es el problema del viajero (Programación Binaria), el cual trata de minimizar la distancia a recorrer entre distintas ciudades, pasando una sola vez por cada una de ellas y volver a la ciudad de origen. A simple vista puede parecer un problema no muy complejo, pero cuando el número de ciudades aumenta, el número de combinaciones posibles hace que sea complejo en numerosas ocasiones la obtención de las soluciones óptimas.

Como se ha mencionado anteriormente, el actual trabajo se centrará en la programación lineal finita parametrizada, por lo que los problemas serán de la forma

$$\begin{array}{lll} \pi(c,b) & \text{minimizar} & c'x \\ & \text{sujeto a:} & Ax \leq b \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión del problema, $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coeficientes de la función objetivo, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de coeficientes de las restricciones, y $b \in \mathbb{R}^m$ es el vector que limita las restricciones.Véase la monografía de Bertismas y Tsitsiklis [1] para detalles sobre la teoría y los métodos de programación lineal. En caso de necesitar representar independientemente las desigualdades lineales parametrizadas, se empleará

$$\sigma(b) := \{a_i'x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

donde a_i' representa la i-ésima fila de A, y b_i la i-ésima coordenada del vector b, para $i = 1, \ldots, m$.

Continuando con la notación, en lo relacionado con $b \in \mathbb{R}^m$ se tiene el conjunto factible

$$\mathcal{F}(b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

que representa el conjunto de soluciones que cumplen con las desigualdades definidas en $\sigma(b)$. Además cuando $\mathcal{F}(b) \neq \emptyset$ se dice que $\sigma(b)$ es consistente. Para $(c, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, se define el valor óptimo de $\pi(c, b)$ como

$$\vartheta(c, b) := \inf\{c'x : x \in \mathcal{F}(b)\},$$

Además se dice que $\pi(c, b)$ es acotado cuando $\vartheta(c, b)$ es finito. Por último, también cabe definir el conjunto de soluciones óptimas o conjunto óptimo de $\pi(c, b)$, definido como

$$\mathcal{S}(c, b) := \{x \in \mathcal{F}(b) : c'x = \vartheta(c, b)\}.$$

Diremos que el problema $\pi(c, b)$ es resoluble cuando su conjunto es no vacío, esto es $\mathcal{S}(c, b) \neq \emptyset$. De lo que se deduce que un problema resoluble debe estar acotado.

A continuación se presentará un problema de PL básico como ejemplo.

Ejemplo: Problema de producción de PL

Una empresa que produce dos tipos de productos quiere maximizar sus beneficios teniendo en cuenta que la unidad de cada producto requiere una cantidad de tiempo y genera una ganancia diferente. Además, también se sabe que la cantidad de horas de producción no pueden sobrepasar las 100 horas.

Producto	**Ganancia(€)**	**Tiempo producción (horas)**	**Máxima producción** (uds)
P_1	3	1	70
P_2	5	2	50

Table 1: Datos de los productos y sus restricciones.

Para maximizar las ganancias de la producción de dos productos P_1 y P_2 bajo las condiciones dadas, se deberá plantear el problema de la siguiente forma:

Función Objetivo:

$$\text{Maximizar } c = 3x_1 + 5x_2$$

sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 100 \quad \text{(Tiempo máximo de producción)} \tag{1}$$
$$x_1 \leq 70 \quad \text{(Producción máxima de } P_1\text{)} \tag{2}$$
$$x_2 \leq 50 \quad \text{(Producción máxima de } P_2\text{)} \tag{3}$$
$$x_i \geq 0 \quad , \; i \in \{1, 2\} \quad \text{(No negatividad)} \tag{4}$$

donde:

- x_1 = número de unidades producidas de P_1
- x_2 = número de unidades producidas de P_2

Que representando gráficamente las restricciones, se obtiene:

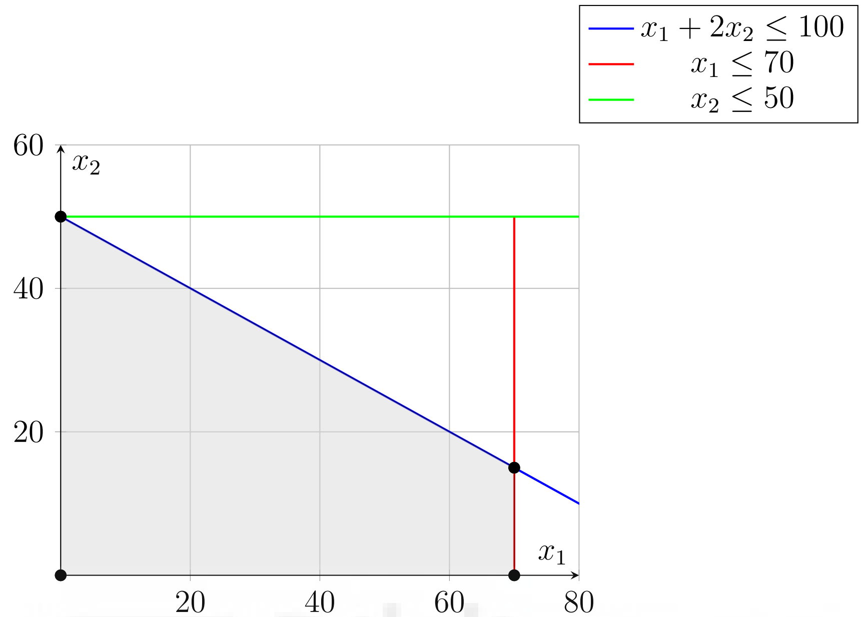


Figure 1: Gráfica de las restricciones y puntos del conjunto factible.

Observando la gráfica, el área sombreada corresponde al conjunto de soluciones que cumplen con las restricciones, es decir, el conjunto factible. Mientras que las intersecciones de las rectas muestran las soluciones potenciales.

Para la obtención de la solución se procederá al cálculo del valor óptimo en dichos puntos.

Cálculo del Valor Óptimo:

Los puntos extremos del conjunto factible (candidatos a óptimos) son: $(0,0)$, $(0,50)$, $(70,0)$ y $(70,15)$.

Evaluamos la función objetivo $c = 3x_1 + 5x_2$ en cada uno de estos puntos:

- En $(0,0)$: $3(0) + 5(0) = 0$
- En $(0,50)$: $3(0) + 5(50) = 250$
- En $(70,0)$: $3(70) + 5(0) = 210$

- En $(70, 15)$: $3(70) + 5(15) = 210 + 75 = 285$

Valor Óptimo: Al tratarse de un problema de maximización, el valor óptimo será el máximo valor que se obtenga con los puntos considerados. Por tanto, la máxima ganancia se obtiene en el punto (70, 15) con un valor óptimo de:

$$v_{\text{óptimo}} = 285\,€.$$

Por tanto, el conjunto óptimo estaría formado únicamente por el punto (70,15).

Finalmente se obtiene que la combinación óptima de productos a producir sería: 70 productos tipo 1 y 15 productos tipo 2. Obteniendo así una ganancia de 285€.

Una vez visualizado un problema de PL e introducidas las premisas necesarias para el contenido que acontece, podemos empezar a plantearnos cuestiones de interés. Como por ejemplo, ¿Cómo varía nuestro problema cuando realizamos una perturbación parcial en el vector b del miembro derecho de las restricciones (RHS, del inglés right-hand side)?¿Y en A? Para responder a estas cuestiones nos deberemos preguntar primero si existe algún modo de cuantificar dicha perturbación es decir, ¿cuánto varía nuestro problema cuando provocamos un cambio en el RHS o en A? Y lo que es más importante ¿Qué utilidad puede llegar a tener en un caso real?

1.3 Constante de Lipschitz

Con la finalidad de poder contestar dichas cuestiones surge la constante de Lipschitz, la cual encuentra su utilidad cuantificando la tasa de variación de una función en respuesta a cambios en su entrada (perturbaciones en b, en el caso de este trabajo). En términos generales, una función Lipschitz continua no varía abruptamente, esto es que existe límite superior para la tasa de variación de la función. Para mayor formalidad, se tiene que la definición de constante de Lipschitz es la siguiente:

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que f es Lipschitz continua en S si existe una constante

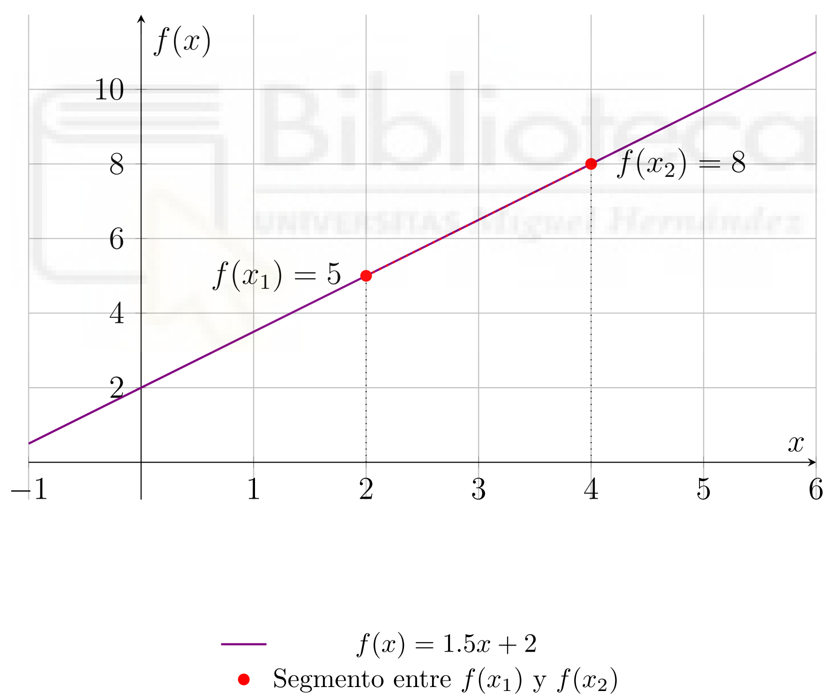
$L \geq 0$ tal que para todos los puntos $x, y \in S$ se cumple:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

donde L es la constante de Lipschitz de la función f, y $\|x - y\|$ es una norma (en este caso se empleará la norma ecuclídea) que mide la distancia entre los puntos x y y en el espacio $\mathbb{R}^n$.

Para ilustrar el concepto de constante de Lipschitz, consideremos una función lineal $f(x) = 1.5x + 2$ y varios puntos de ejemplo en el dominio. Usaremos esta función para calcular la constante de Lipschitz y mostrar cómo se verifica la condición de continuidad Lipschitz.

Ejemplo de Continuidad Lipschitz



Cálculo de la Constante de Lipschitz:

Para verificar la condición de Lipschitz, calculamos la constante L de la siguiente forma:

$$L = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|1.5x_1 + 2 - 1.5x_2 - 2|}{|x_1 - x_2|} = \frac{1.5 \cdot |x_1 - x_2|}{x_1 - x_2} = 1.5. \quad \forall x_1 \neq x_2$$

Esto indica que la función $f(x)$ es Lipschitz continua y por tanto se puede calcular la constante o cota superior de variación, que en este caso es $L = 1.5$. Por tanto, la variación de la función está acotada por $1.5 \cdot |x_2 - x_1|$ para cualquier par de puntos en el intervalo observado. O en otras palabras, por cada unidad que aumente el parámetro x, el valor de la función aumentará en 1,5.

En resumen, la constante de Lipschitz nos permite evaluar cómo varía una función al realizar cambios en su entrada. Sin embargo, para el contexto en el que estamos trabajando, es necesario poder aplicarla también a conjuntos de soluciones. Es por esto que más adelante extenderemos el concepto de continuidad controlada a las multifunciones o mappings multivaluados mediante la propiedad de Aubin-Lipschitz, la cual garantiza que ante pequeñas perturbaciones en el parámetro, el conjunto de soluciones no se disperse abruptamente. Esta propiedad es de vital importancia para el análisis de estabilidad ya que asegura la robustez de las soluciones factibles u óptimas.

Capítulo 2: Propiedad de Aubin y Módulo de Lipschitz del Conjunto Factible

2.1 Introducción

Consideramos la multifunción *conjunto factible* $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\mathcal{F}(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

donde A es una matriz fija de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ es considerado como parámetro.

Obsérvese que, en este contexto, estamos trabajando con perturbaciones del miembro derecho de la restricción.

En cuanto a la topología de $\mathbb{R}^m$, lo suponemos dotado de la norma del supremo, $\|\cdot\|_\infty$, dada por:

$$\|b\|_\infty = \max\{|b_i| \mid i = 1, \ldots, m\},$$

y el espacio de la variable $\mathbb{R}^n$, de la norma euclidiana, que denotamos simplemente por $\|\cdot\|$.

2.2 Módulo de Lipschitz

El objetivo de esta sección es, en términos informales, analizar la variación de soluciones factibles respecto de perturbaciones de los parámetros. Esta idea se formaliza a través de la **propiedad de Aubin** (también llamada *pseudo-Lipschitz*), que definimos a continuación:

Definición. Sea $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ y sea $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{b})$. Se dice que $\mathcal{F}(b)$ tiene la propiedad de Aubin en $(\bar{b}, \bar{x})$ si existen una constante $K \geq 0$ y entornos U y V de $\bar{x}$ y $\bar{b}$, respectivamente, tal que:

$$d(x^2, \mathcal{F}(b^1)) \leq K\|b^2 - b^1\|_\infty, \quad \forall b^1, b^2 \in V,\ x^2 \in \mathcal{F}(b^2) \cap W. \qquad (1)$$

Nota: $d(x, \mathcal{F}(b))$ denota la distancia de x al conjunto $\mathcal{F}(b)$, definida como:

$$d(x, \mathcal{F}(b)) = \inf_{y \in \mathcal{F}(b)} \|x - y\|.$$

El *módulo de Lipschitz* que denotamos por lip $\mathcal{F}(\bar{b}, \bar{x})$, es el ínfimo de las constantes $K \geq 0$ que verifican la desigualdad (1) para determinados entornos. Alternativamente, este módulo se puede escribir como sigue:

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{b}, \bar{x}) = \limsup_{\substack{b^1, b^2 \to \bar{b} \\ x^2 \to \bar{x} \\ x^2 \in \mathcal{F}(b^2)}} \frac{d(x^2, \mathcal{F}(b^1))}{\|b^2 - b^1\|_\infty}. \tag{2}$$

2.3 Fórmula Operativa para el Módulo de Lipschitz

Para culminar el capítulo, tan solo habría que implementar en MATLAB la fórmula del módulo de Lipschitz. Sin embargo, nos encontramos ante la tesitura de que aplicarla supone un coste computacional alto. La fórmula (2) es difícilmente implementable en la práctica, dado que involucra a elementos (parámetros y puntos) en un entorno del parámetro $\bar{b}$ y el punto $\bar{x}$. Es por ello que la obtención de fórmulas más operativas, basadas exclusivamente en los elementos nominales ($\bar{b}$ y $\bar{x}$) tiene un notable interés. En relación con este comentario, el siguiente teorema proporciona una fórmula exacta para el cálculo del módulo de Lipschitz basada únicamente en los datos nominales.

Por tanto buscamos una fórmula operativa que permita calcular el módulo de Lipschitz y el siguiente teorema proporciona dicha fórmula que puede encontrarse en M.J.Cánovas, A.L.Dontchev, M.A.López y J.Parra [2]:

Teorema. Sea $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in F(\bar{b})$, se tiene que:

$$\text{lip } F(\bar{b}, \bar{x}) = \frac{1}{d(0, C_b(\bar{x}))},$$

donde $d(0, C_b(\bar{x}))$ representa la distancia del origen al conjunto convexo $C_b(\bar{x})$

En lo que sigue, empleamos la siguiente notación:

$$I_b(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid a_i' \bar{x} = b_i\},$$

es el llamado *conjunto de índices activos* y $C_b(\bar{x})$ denota la envoltura convexa de $\{a_i \mid i \in I_b(\bar{x})\}$, esto es:

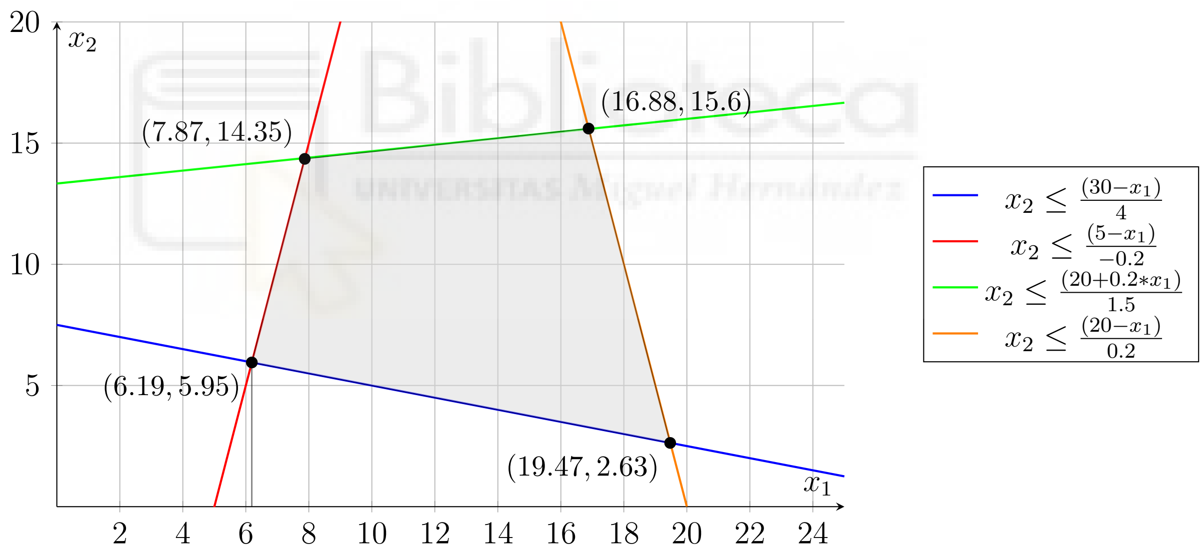
$$C_b(\bar{x}) = \text{conv}\{a_i \mid i \in I_b(\bar{x})\}.$$

Recuérdese que para un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$, conv C es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de C, esto es:

$$\operatorname{conv} C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,\middle|\, \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ x^i \in C,\ i = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dirigimos al lector al libro clásico de Rockafellar [3] para un tratamiento exhaustivo de la teoría y diferentes aplicaciones del análisis convexo.

Al representar gráficamente se observaría que los índices activos son aquellos índices de las restricciones que cumplen la igualdad en dicho punto. Asimismo, el conjunto factible es un conjunto convexo (en el siguiente ejemplo), dado que está acotado. Gráficamente:



Una vez explicados todos los conceptos y premisas anteriores, se puede dar pie a la explicación del código de la fórmula operativa del módulo de Lipschitz. Código en el cuál se utilizará como ejemplo el mismo sistema de inecuaciones que en el ejemplo previo de la envoltura convexa.

Para su mejor comprensión, se reescribirá el sistema de ecuaciones de la siguiente forma, asimismo se incluirá la función objetivo a minimizar además de las cotas de no negatividad:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} \quad & -x_1 - 4x_2 \leq -30 \\
& -x_1 + 0.2x_2 \leq -5 \\
& -0.2x_1 + 1.5x_2 \leq 20 \\
& x_1 + 0.2x_2 \leq 20
\end{aligned}$$

De esta forma queda representada la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

A continuación se presenta el código MATLAB que proporciona el cálculo del módulo de Lipschitz. Nuestro código calcula el módulo de Lispchitz del conjunto factible en un punto fijo que seleccionamos previamente. Para seleccionar dicho, incorporamos al modelo una función objetivo y obtenemos una solución óptima del problema correspondiente. Así pues, el módulo de Lipschitz obtenido nos medirá la variación local del conjunto factible alrededor del punto óptimo elegido. Así pues, el cógigo consta de tres partes:

1. Parte 1: Cálculo de una solución optima, donde se determina una solución del problema de PL y se obtienen los índices activos correspondientes.

2. Parte 2: calculo de la distancia del origen al conjunto $C_b(x)$

3. Parte 3: obtención del módulo de Lipschitz como inverso de la medida obtenida en el paso 2

Para la resolución del problema primal hay que definir el vector c a minimizar, la matriz de coeficientes A y el vector de términos independientes b, además de indicar las cotas de no negatividad que en este caso no hay. Por lo que atendiendo al sistema descrito anteriormente se tiene

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0.2 \\ -0.2 & 1.5 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -30 \\ -5 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{lb} = [\,], \quad \mathrm{ub} = [\,].$$

Por lo que se emplearía la función linprog() de MATLAB donde los parámetros son los definidos anteriormente. La función linprog permite resolver problemas de optimización empleando el método SIMPLEX, sirve tanto para sistema de desigualdades (A y b) como de igualdades (Aeq y beq). Los parámetros de la función son los siguientes linprog(c, A, b, Aeq, beq, lb, ub) donde lb y ub son las cotas de no negatividad. Por lo que, una vez obtenida la salida de la primera parte, habremos obtenido los índices activos necesarios para la resolución del sistema dual, dado que si se sutituyen los valores óptimos en el sistema, aquellas inecuaciones que más se aproximen al término independiente serán los índices activos, para ello se calculará la diferencia entre el valor de la restricción y el término independiente. Esta diferencia deberá ser muy próxima a cero por lo que para el cálculo se empleará un epsilon de $\varepsilon = 10^{-6}$. Por tanto se tiene:

Código MATLAB

```
c = [-1 -1]';
A = [-1 -4; -1 0.2; -0.2 1.5; 1 0.2];
b = [-30;-5;20;20];
lb = [];
ub = [];
[x,v,e,o,l] = linprog(c,A,b,[],[],lb,ub);

disp('------ 1. Primal ------');
x
disp('valor')
v

epsilon = 1e-6;
residuo = b - A*x; % residuos de las restricciones
indices_activos = find(residuo < epsilon); % encontrar
    restricciones activas

disp('Las restricciones activas son: ');
disp(indices_activos);
```

Y como salida o resultado se obtendría

Salida del código

```
------ 1. Primal ------

x =

   16.8831
   15.5844

valor

v =

  -32.4675

Las restricciones activas son:
     3
     4
```

Como se muestra en la salida, el punto óptimo que minimiza la función objetivo es el punto (16.8831; 15.5844), el cual corresponde con un valor óptimo de -32.4875. Punto en el cuál se encuentra la intersección de la tercera y cuarta restricción (restricciones activas).

Una vez obtenidas las restricciones activas necesarias para definir los puntos de la envoltura convexa, se procede a calcular la distancia mínima del orígen de ordenadas al conjunto convexo. Para calcular dicha distancia se empleará la norma euclídea, por lo que el problema de minimización será cuadrático.

Cálculo de la distancia mínima al conjunto convexo

En este caso se requiere resolver

$$\min_x \ d(0,x) \ = \ \|x\|_2 \quad \text{s.a.} \quad x \in \text{conv}\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Como

$$d(0,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x'x},$$

es equivalente a

$$\min\ x'x \quad \text{s.a.} \quad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Se define el problema cuadrático

$$\min\ \frac{1}{2}\, z' H\, z + f^T z \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} A_{\text{eq}}\, z = b_{\text{eq}}, \\ z \geq \ell. \end{cases}$$

Que atendiendo a $f = \mathbf{0}_{n+k}$, se tiene

$$f' z = 0,$$

por lo que la función objetivo quedaría como

$$\min\ \frac{1}{2}\, z' H\, z$$

Se divide la variable $z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Matrices y vectores del sistema

$$H \ = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \qquad f = \mathbf{0}_{n+k},$$

$$A_{\text{eq}} \ = \begin{pmatrix} -\,I_n & A_{\text{dual}} \\ 0_{1\times n} & \mathbf{1}_{1\times k} \end{pmatrix}, \qquad b_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\ell = \begin{pmatrix} -\infty\, \mathbf{1}_n \\ 0_k \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo se tiene $n = 2$ y $k = 2$,

$$A_{\text{dual}} = \begin{pmatrix} -0.2 & 1.5 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix},$$

luego

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & -1 & 1.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, en MATLAB se llama a la función

```
z = quadprog(H, f, [], [], Aeq, beq, lb, []);
x_opt = z(1:n);
```

y la solución buscada es x_{opt}. Por lo que si transcribimos todo a MATLAB, se tendría lo siguiente:

Código MATLAB (Minimizacón de la distancia a la envoltura convexa)

```
% Calculo de la distancia del origen a la envoltura
    convexa de los a_i asociados a los indices activos
A_dual = A(indices_activos, :);
b_dual = b(indices_activos);
n = size(A, 2);
k = size(indices_activos, 1);
k = k(1);
H = [eye(n), zeros(n, k);zeros(k, n), zeros(k, k)]; %
    matriz identidad para el dual
f = zeros(n+k, 1);                    % vector cero
A_eq = [-eye(n), A_dual'; zeros(1, n), ones(1, k)];
b_eq = [zeros(n, 1); 1];
lb_dual = [-inf*ones(1, n), zeros(1, k)];
z = quadprog(H, f, [], [], A_eq, b_eq, lb_dual, []); %
    solucion dual
Solucion = z(1:n);
disp('Solucion optima:')
disp(Solucion)
disp('Distancia:')
% norm(Solucion) es la distancia desde el eje de
    ordenadas hasta el punto
% que esta mas cerca del eje.
norm(Solucion)
```

Código del cual daría como resultado la siguiente salida

Salida MATLAB

```
A_dual =
   -0.2000    1.5000
    1.0000    0.2000
b_dual =
    20
    20
n = 2
k = 2
H =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
f =
     0
     0
     0
     0
A_eq =
   -1.0000         0   -0.2000    1.0000
         0   -1.0000    1.5000    0.2000
         0         0    1.0000    1.0000
b_eq =
     0
     0
     1
lb_dual =
  -Inf  -Inf     0     0

Minimum found that satisfies the constraints.
Optimization completed because the objective function is
    non-decreasing in
feasible directions, to within the value of the
   optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the
    constraint tolerance.

<stopping criteria details>
solucion optima
    0.6396
    0.5904
Distancia
ans = 0.8705
```

De lo que finalmente, al obtener la distancia se puede proceder al cálculo del módulo de Lipschitz dado que atendiendo a la fórmula

$$\operatorname{lip} F(\bar{b}, \bar{x}) = \frac{1}{d(0, C_b(\bar{x}))}$$

daría como resultado el siguiente código

Cálculo del módulo de Lipschitz

```
disp('------ 4. Calculo del Modulo de Lipschitz ------')
    ;
disp(1/norm(Solucion));
```

código al que corresponde la siguiente salida

Salida MATLAB (Módulo de Lipschitz)

```
------ 4. Calculo del Modulo de Lipschitz ------
    1.1488
```

Por lo que finalmente se obtiene que el módulo de Lipschitz para el problema del ejemplo sería de 1.1488, indicando que tras una perturbación de magnitud δ el valor objetivo variaría como máximo en $1.1488 \cdot \delta$.

Capítulo 3: Ejemplo académico

Una vez dado el contexto, esquematizado y explicado el cálculo y resolución del módulo de Lipschitz, es posible que surjan cuestiones como cuál es la finalidad de uso, en qué campos aplicar, etc. En este último capítulo se procederá a mostrar un ejemplo práctico de aplicación real. Para dicho caso emplearemos el contexto de producción empresarial con el fin de mostrar una perspectiva empresarial, distinta de lo matemático como se venía viendo. El ejemplo dice así:

Una empresa fabrica dos productos, P1 y P2, cuyos costos unitarios de producción son 5€ y 4€ respectivamente. Según está definido el proceso de producción, es de vital importancia cumplir los siguientes requisitos:

- **Materiales:** Cada unidad de P1 consume 2 kg de materia prima, y cada unidad de P2 consume 1 kg. Además, se dispone de máximos 100 kg por día.
- **Capacidad de producción:** Por limitaciones técnicas, no se pueden fabricar más de 40 unidades de P1, ni más de 60 unidades de P2 diarias.
- **Demanda mínima:** La producción total diaria (P1 + P2) debe ser al menos de 30 unidades para cumplir con contratos establecidos.

Se pide determinar cuántas unidades de P1 y P2 deben producirse diariamente para minimizar el costo total de producción, garantizando que se satisfagan todos los requisitos.

Solución:

Para la resolución del problema planteado primero habrá que definir el sistema de inecuaciones junto con el objetivo a minimizar. Por lo que la formulación del problema sería la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1 \leq 40 \\
& x_2 \leq 60 \\
& -x_1 - x_2 \leq -30 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Formulación en Matlab

```
% Definicion de parametros para linprog
c = [5; 4];              % Vector de costos
A = [2, 1; -1, -1];      % Restricciones:
                         %   [2x1 + x2 <= 100]
                         %   [-x1 -x2 <= -30] (equivale a x1
                            +x2>=30)
b = [100; -30];          % Limites de las restricciones
lb = [0; 0];             % Cotas inferiores (no negatividad)
ub = [40; 60];           % Cotas superiores (maximos por
    producto)
```

Una vez formulado e introducido los parámetros en MATLAB, la solución obtenida sería la siguiente:

Solución obtenida

```
Optimal solution found.

------ 1. Solucion Primal ------

x =
         0
   30.0000

valor

v = 120.0000

Las restricciones activas son: 2

Y sus valores lambda correspondientes: 4

A_dual = -1    -1

b_dual = -30

n = 2

k = 1

H =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0

f =
     0
     0
     0

A_eq =
    -1     0    -1
     0    -1    -1
     0     0     1

b_eq =
     0
     0
     1

lb_dual =
  -Inf  -Inf     0
```

Solución obtenida

```
Solution found during presolve.

Some combination of the bounds, linear constraints, and
    linear terms
in the objective function immediately lead to the
    solution.

solucion optima
     -1
     -1
Distancia
ans =1.4142

------ 4. Calculo del modulo de Lipschitz ------
     0.7071
```

De lo que se concluye que el número de unidades fabricadas de los productos P1 y P2 que minimizan los costes de producción son 0 unidades fabricadas de P1 y 30 unidades de P2, de lo que resulta un valor óptimo de 120 euros. Correspondiendo con un módulo de Lipschitz de 0.7071, lo que indica que la tasa máxima de variación de las soluciones factibles alrededor de (0,30), con respecto a perturbaciones del miembro derecho de las restricciones es de 0.7071.

Bibliografía

[1] D. BERTSIMAS, J. N. TSITSIKLIS, INTRODUCTION TO LINEAR OPTIMIZATION, ATHENA SCIENTIFIC, NASHUA, NH, 1997.

[2] M. J. CÁNOVAS, A. L. DONTCHEV, M. A. LÓPEZ, J. PARRA, METRIC REGULARITY OF SEMIINFINITE CONSTRAINT SYSTEMS, MATH. PROGRAM. SER. B, 104 (2005), PP. 329–346.

[3] R. T. ROCKAFELLAR, CONVEX ANALYSIS, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON, NJ, 1970.