MASTERPROF UMH
UNIVERSITAS Miguel Hernández

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO
ESO Y BACHILLERATO, FP Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA: ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Estudiante: Alejandro Jiménez Paredes
Especialidad: Matemáticas
Tutor/a: Rubén Caballero Toro

Curso académico: 2023-24

ÍNDICE

1. Resumen y palabras clave

Ante los negativos resultados de los últimos informes PISA, se ha realizado una revisión bibliográfica de algunas de las últimas estrategias de enseñanza a aplicar concretamente en la instrucción del álgebra. Partiendo de los procesos de construcción del pensamiento algebraico, se observarán los resultados obtenidos al fomentar el pensamiento por correspondencia desde un enfoque ontosemiótico y los beneficios de aplicar un tiempo de pausa antes de solucionar problemas, para posteriormente enfocar la revisión en distintas técnicas más relacionadas con la organización del aprendizaje, como son la enseñanza orientada a la investigación y el aula invertida basada en el modelo ADDIE. Además, se analizará algunas de las estrategias que resultaron de utilidad al hacer uso de entornos de aprendizaje virtual durante la pandemia de COVID-19, a la que algunos estudios atribuyen el fracaso de estos últimos informes. Finalmente, se realizará una propuesta real que combinará algunas de las conclusiones positivas extraídas de cada una de las estrategias analizadas.

Palabras clave: pensamiento algebraico, enfoque ontosemiótico, tiempo de pausa, aprendizaje orientado a la investigación, IOLA, TIMES, tecnología, aprendizaje activo, modelo ADDIE, aula invertida, COVID-19, entornos de aprendizaje virtual, generalización, abstracción, preguntas de sondeo, justificación, autoeficacia, ansiedad matemática, comprensión conceptual, comprensión procedimental, pensamiento correlacional, pensamiento por correspondencia, enseñanza asincrónica, enseñanza sincrónica.

2. Introducción

Desde el año 2000, y a nivel mundial, cada tres años la **Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE)** lleva a cabo el informe del **Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes** (**PISA**, por sus siglas en inglés), que evalúa el rendimiento académico de los estudiantes de los países miembros en las competencias de matemáticas, ciencia y lectura, ofreciendo un panorama a cada nación que le permite conocer y comparar su nivel académico frente a otros Estados miembros y a sus propias marcas anteriores.

España, que de por sí históricamente no ha dado como fruto los mejores resultados en estas listas, concretamente en el último informe, publicado el 05 de diciembre de 2023, obtuvo en matemáticas el peor resultado de su historia (473 puntos, 12 por debajo de la media de la OCDE), dejando entrever una situación de especial preocupación para el sistema educativo español, que es el que, después de todo, es evaluado por medio de estos resultados (si bien es cierto que algunos estudios lo atribuyen a fenómenos sociales fuera de la normalidad tales como la pandemia de COVID-19 sufrida en el año 2020 *(Jakubowski et al., 2023)*).

Es en este punto en el que nos encontramos en el que debemos, como formadores de la sociedad del futuro, no sólo cuestionarnos qué ha podido ocurrir para llegar a esta situación, tal y como ya se ha hecho para otros informes anteriores (*Frade-Martínez et al., 2024*), sino además proponer en nuestras aulas nuevos enfoques pedagógicos, nuevas técnicas que, a la luz de las investigaciones, permitan a nuestros alumnos alcanzar rendimientos superiores, con el beneficio que ello supone tanto para su propio autoconcepto (*Marsh et al., 2008)* como para el desarrollo de España para los próximos años (*Chandra, 2022)*.

El objetivo de esta revisión consiste, pues, en analizar algunos de los últimos estudios publicados al respecto, concretamente para la mejora del **pensamiento algebraico**, un aspecto básico en matemáticas cuyo correcto desarrollo resulta fundamental para el éxito académico de los estudiantes (*Sibgatullin et al., 2022)*.

En primer lugar, se examinará el proceso de creación de significado algebraico desde el **enfoque ontosemiótico** tomando como referencia el planteamiento y los resultados e implicaciones de *Erbilgin et al. (2023)*, para posteriormente indagar en la utilidad práctica de tres estrategias que han resultado dar fruto en entornos de enseñanza secundaria, a saber:

- <u>El Aula Invertida basada en el modelo "ADDIE"</u> (*Alzoebi et al., 2023)*
- <u>Reducir la velocidad para acelerar: la importancia de la pausa para una mayor eficiencia al resolver problemas matemáticos</u> *(Chan et al., 2022)*
- <u>La enseñanza orientada a la investigación</u> *(Haider & Andrews-Larson, 2022)*

Finalmente, y a colación de lo mencionado anteriormente con respecto a la posible atribución de los últimos resultados del informe PISA a la pandemia del COVID-19 (*Jakubowski et al., 2023)*, se evaluará qué resultó en mayor beneficio para el rendimiento estudiantil al hacer uso de **entornos de aprendizaje virtuales** bajo el marco de orquestación de aprendizaje de *Prieto et al. (2011)* (*Leite et al., 2022)*.

3. Revisión bibliográfica

3.1 La creación del significado algebraico

De acuerdo con *Kaput, 2008*, el pensamiento algebraico implica el uso de:

1. **Generalización** y **representación** de regularidades y restricciones, para lo cual hace falta un proceso de **abstracción** por el que se conceptualiza ejemplos particulares encontrando similitudes para **estudiar estructuras y sistemas** (*Wu, 2001*).

2. **Razonamiento** sobre generalizaciones en un sistema convencional: el uso de la **analiticidad** para operar con cantidades desconocidas y las **relaciones funcionales**.

Ambos procedimientos requieren de una **justificación** (*Blanton et al., 2018)* con la que finalmente aplicar y comparar modelos.

El estudio revisado se centró en las **relaciones funcionales** con herramientas representacionales entre una variable independiente y otra dependiente, para las cuales se requiere tres tipos de pensamiento (*Blanton y Kaput, 2011; Stephens & others, 2017*):

- **Pensamiento recursivo** (centrado en el cambio de las variables).
- **Pensamiento covariacional** (centrado en la simultaneidad del cambio).
- **Pensamiento por correspondencia** (generación de una regla que explique la relación).

Usando el **enfoque ontosemiótico (OSA)** (*Godino et al., 2007*), el estudio revisado analizó cómo cada tipo de pensamiento se relacionaba con cada tipo de representación y práctica algebraica: abstracción, generalización, justificación y operación.

Dicho enfoque consiste en el estudio de los **objetos matemáticos** (todo aquello a tratar en la práctica matemática) desde cinco facetas duales:

- **Personal/institucional**: la concepción del alumno frente al consenso explicado en las aulas.
- **Ostensivo/no ostensivo**: representaciones explícitas (como tablas de valores) frente a procesos mentales consensuados.
- **Extensivo/intensivo**: Caso particular frente a tipo y patrón.
- **Unitario/sistémico**: Sistema completo aprendido frente a sistema descomponible en distintas partes a estudiar.
- **Expresión/contenido**: Un objeto (expresión) representa a otro (contenido) por medio de una **función semiótica** creada por el estudiante. OSA discrepa con la idea de objeto matemático absoluto al margen de su representación (*Font et al., 2013)*: Un objeto tiene tantos significados como pares expresión/contenido.

Aké et al (2013) definió desde esta base los **niveles de algebrización**: partiendo de un nivel concreto (0) sin características algebraicas ni objetos intensivos, se pasa al nivel I al incluir objetos intensivos simples, para después avanzar hasta el II incluyendo otros más complejos basados en símbolos algebraicos. Finalmente, al alcanzar el nivel III el alumno no sólo es capaz de expresar esos símbolos algebraicos sino también de operar con ellos por medio de la analiticidad.

La **metodología** empleada en el primero de los estudios analizados consistió, desde este enfoque, en el análisis de hojas de trabajo y entrevistas intermedias y finales de entre 10 y 20 minutos tras las lecciones de 3 estudiantes de 6º grado de buen expediente en una escuela secundaria pública del sureste de Turquía.

Todo el proceso se realizó en las dos semanas de vacaciones de invierno entre 12 situaciones de álgebra basadas en los patrones figurativos de *Blanton & Kaput (2011)*, *Radford (2014)* y *Stacey (1989)*, yendo de lo más simple a lo más avanzado en algebrización.

Los alumnos realizaron sus ejercicios en un contacto directo con una investigadora-docente que construyó un ambiente para compartir y desafiar el aprendizaje, observando de cerca el proceso y recopilando datos a tiempo real.

Para cada una de las 12 situaciones, se realizaba un informe de los 6 objetos matemáticos primarios empleados (elementos lingüísticos, situaciones, conceptos, proposiciones, trámites y argumentos) con el fin de entender las configuraciones y funciones semióticas creadas por los alumnos, prestando atención a los procesos de generalización, abstracción, justificación (ante el docente y entre ellos) y operación empleados y al tipo de pensamiento envuelto.

Entre varios de los ejercicios mencionados a modo de ejemplo en el estudio se pudo observar cómo los alumnos tendían a razonar de maneras completamente distintas explicadas desde diferentes dualidades del enfoque ontosemiótico (por ejemplo, una de ellas consiguió razonar directamente de manera no ostensiva para uno de los ejercicios, mientras que otro chico necesitó pasar primero por todos los pasos anteriores y ver el mismo resultado de modo ostensivo), a medida que se observaba el progreso de cada uno de ellos, y su avance en los niveles de algebrización debidamente guiado por la profesora, también a distinto ritmo, en especial para uno de ellos, que requiso de material adicional para entender bien los procesos no ostensivos.

En cuanto a los tipos de pensamiento generados, para cada ejercicio las representaciones concretas (tablas de valores, necesidad de representar valores intermedios) demostraban **pensamiento recursivo y covariacional**, mientras que las figuras lejanas deducidas por medio de patrones con representaciones no ostensivas demostraban **pensamiento por correspondencia**. En algunos casos, los alumnos justificaban sus conclusiones indicando que lo deducido *funcionaba para todos los casos comprobados* (por prueba y error) pero la profesora buscaba que se basaran en el debido patrón figurativo y les animaba a discutir y pensar un poco más usando **representaciones verbales** (justificándose por medio de la palabra) y **simbólicas** alcanzando la analiticidad (*Radford, 2014*).

De cara a esta revisión, lo que más interesa respecto a este primer estudio fueron los hallazgos y las conclusiones a las que se llegó, con implicaciones de cara al aula, a pesar de la limitación que supone el reducido número de estudiantes y el corto plazo de estudio. Y es que fueron hasta 4 las observaciones realizadas:

1. El profesor debe alentar a la creación de conexiones entre distintas representaciones, es decir, la creación de **funciones semióticas** entre varias expresiones y contenidos, para construir una comprensión rica y bien cimentada.

2. El profesor debe valerse del uso de **preguntas de sondeo**, dando pequeños detalles que ayuden al alumno a orientarse y pensar por sí mismo, para lograr así correctamente los procesos de **abstracción** y **generalización**. En varios de los ejemplos del estudio, se contemplaba cómo los alumnos lograban progresar con preguntas como "¿En qué se parecen o diferencian estas figuras?". Algunos estudios de la literatura actual pasan por alto este importante hallazgo (*Mielicki et al, 2011; El Mouhayar, 2018 ; Wilkie, 2020*).

3. Es importante que los alumnos sepan **justificar** por medio del uso de **representaciones verbales**. Este es el engranaje que indicaba el verdadero entendimiento de los alumnos, más que el mero uso de ejemplos o de ensayo y error para comprobar conjeturas. Se debe pedir al alumno que utilice las palabras tanto para indicar qué es lo que está viendo como para justificar el patrón que ha hallado.

4. Sólo por medio del razonamiento en las figuras lejanas se alcanza el último pensamiento algebraico: el pensamiento por correspondencia basado en la justificación. Una vez alcanzado este pensamiento, el alumno es capaz de entender los patrones sin necesidad de ver ejemplos o realizar ensayo y error.

3.2 Tiempo de pausa, conocimiento previo, autoeficacia y ansiedad matemática

A la hora de resolver un problema algebraico, los alumnos tienden a creer que lo más eficiente consiste en comenzar cuanto antes a operar siguiendo la primera estrategia que se les ocurre dejando a un lado buena parte del proceso de abstracción y generalización. Además de dichos procesos mencionados en el estudio anterior, estudios como *Flavell (1976)* y *Kramarski y Gutman (2006)* hablan de la importancia de la **metacognición**: todos los procesos de regulación, supervisión, orientación de la tarea y planificación de las acciones.

Por todo ello, diversos estudios indican que existe una relación positiva entre la pausa previa al resolver problemas y el rendimiento matemático (*García, Rodríguez, González-Castro et al. (2016)*; *Paquette et al. (2014)* (este añade que 6 segundos puede considerarse suficiente); Welsh et al (1995) (tomando como medida el número de pasos para resolver una torre de Hanoi)). *Ku y Ho (2010)* muestra por otra parte cómo tener tiempo para desarrollar planes mejoraba el pensamiento crítico necesario para comprobar hipótesis y analizar argumentos.

Todos estos estudios, sin embargo, desconsideraban aspectos tan importantes como el **conocimiento matemático previo** (*Star and Rittle-Johnson, 2008; Torbeyns et al, 2006; Newton et al, 2020; Wang et al, 2019*) y los factores afectivos, tales como la **autoeficacia matemática** (creencia en la propia capacidad para hacer y aprender matemáticas) (*Bandura, 1977; Hoffman, 2010; Bernacki et al. (2015))* y la **ansiedad matemática** (miedo, tensión y aprensión al trabajar con matemáticas) (*Dregen y Aiken, 1957; Ashcraft, 2002; Ramírez et al., 2018; Wu et al. 2012; Ashkenazi & Najjar, 2018)*. La mayor autoeficacia se refleja en un mayor deseo por alcanzar una comprensión profunda, dándose lugar a resultados positivos en eficiencia (*Hoffman, 2010; Bernacki et al., 2015*) mientras que, por el contrario, la ansiedad matemática lleva a abordar los problemas con el único objetivo de aprobar *(García, Rodríguez, Betts et al., 2016)* generando resultados negativos (*Passolunghi et al, 2016*).

Dada la importancia de la influencia de los tres aspectos recién mencionados, resulta necesario conocer su impacto de manera simultánea al tiempo de pausa para obtener relaciones únicas al medir la eficiencia de estrategias para resolver problemas matemáticos. Eso es lo que se realiza precisamente en el segundo estudio analizado (Chan et al., 2022), midiendo la eficiencia alcanzada con los pasos de la solución, el éxito inicial en los problemas y el número de reinicios al resolver problemas en el juego online "*From here to there!*", que guardaba registro de todas esas medidas.

El estudio revisado tomó datos de otro más genérico *(Chan et al., 2021)* en el que, a fecha de otoño de 2019, se realizó un control aleatorio del que se tomó 689 alumnos de 29 aulas de 6 institutos del sureste de Estados Unidos. 348 de esos alumnos trabajaron con "*From here to there!*" y fueron sus resultados los que centraron el interés del estudio revisado.

De los 348, 45 no completaron la prueba previa y 18 tuvieron que abandonar por motivo de una autoeficacia y ansiedad significativamente peores al resto. Finalmente, quedaron n=285 alumnos (muestra suficiente para un pequeño a mediano efecto) de entre 11 y 13 años (97% de 6° curso y 3% de 7° con clases de apoyo). De ellos, el 86% provino de clases avanzadas, el 9% de nivel básico y el 5% de clases de apoyo. El 45% eran mujeres y el 55% hombres. El 52% eran asiáticos, el 38% blancos, el 5% hispanos, el 2% negros y el 2% mutirracial.

La metodología consistió en:

1. Una prueba previa de 45 minutos de la que se dilucidaba el grado de conocimiento previo, autoeficacia y ansiedad matemáticas.

    - El conocimiento previo se midió según 11 items de *Rittle-Johnson et al (2011)* y *Star et al., (2014)* puntualizados como correctos (1) o incorrectos (0) y con una fiabilidad aceptable (KR-20 = .68).

    - La autoeficacia fue medida según los 5 ítems de la subescala de Eficacia Académica de las Escalas de Patrones de Aprendizaje Adaptativo (*Midgley et al., 2000,* gran fiabilidad (α=.86)), cuyas respuestas iban codificadas de 1 (muy raramente) a 5 (siempre).

    - La ansiedad matemática se midio considerando los 13 ítems de la Escala de Ansiedad Matemática para Niños Pequeños – Revisada (*Ganley & McGraw, 2016*, gran fiabilidad (α = .88)), de 4 respuestas posibles: No (0), No realmente (1), Algo sí (2) y Sí (3).

2. Cuatro sesiones de 30 minutos en "*From here to there!*"

"*From here to there!*" consistía en transformar una expresión inicial en una final usando teclado y ratón en el menor número de pasos posible. Cada tema de matemáticas era un "mundo" de 18 problemas con entrenamientos e instrucciones intercaladas. Desde este juego online fue posible tomar las 4 medidas de eficiencia: el tiempo de pausa (respecto al total), los pasos de la solución, la tasa de finalización inicial (problemas resueltos en el primer intento frente al total) y el número de reinicios.

3. Una prueba posterior de 40 minutos.

Debido a que no todos los estudiantes lograron alcanzar la media de 35 problemas por sesión (el 75% resolvía más de 20 y el 100% al menos 10), se añadió como covariable el número de problemas total resuelto, de modo que se consideraron los resultados con y sin particionamiento de los problemas.

Los resultados mostraron una amplia distribución de valores en todas las medidas de eficiencia, con asimetría < ±2 y curtosis <±7 (valores normales según *Byrne, 2010*) y un porcentaje medio de tiempo de pausa del 26%.

Un análisis correlativo dos a dos inicial comprobó que las medidas de eficiencia tenían una correlación significativa con los conocimientos algebraicos y el tiempo de pausa, también con la ansiedad matemática (a excepción del número de reinicios, en este último caso), resultados que fueron aproximadamente similares al particionar los problemas.

Sin embargo, con el fin de analizar todas las variables de manera simultánea y obtener datos realistas, se realizaron distintas regresiones OLS, y obteniendo alta significancia ($p<.001$) en todos los casos, se observó una relación directa entre el tiempo de pausa y los pasos de solución (1 desviación estándar en tiempo = -0,5 DE en número de pasos (CE = -0,5), esta medida de eficiencia explicaba el 29,9% de la varianza), la tasa de finalización inicial (CE = 0,2; 51,5% de la varianza) y el número de reinicios (CE = 0,4; 24,5% de la varianza).

En cuanto al resto de variables independientes, lejos de lo que se esperaba encontrar, no se halló una relación significativa en el caso de la autoeficacia y la ansiedad matemáticas con ninguna de las 3 medidas de eficiencia, mientras que los conocimientos previos se relacionaron débilmente sólo con la tasa de finalización inicial y el número de reinicios.

Todo ello sirvió para confirmar que la relación entre tiempo de pausa y la eficiencia al solucionar problemas puede ser **sólida** (tal y como confirmaron estudios anteriores), pero también **independiente**.

La relación fue atribuida a varios mecanismos cognitivos y afectivos involucrados durante ese tiempo (*Cleary & Chen,* 2009; *Dinsmore et al., 2008; Montague et al., 2011*) y alineada con otros varios estudios más allá de los mencionados inicialmente:

- Mayores habilidades metacognitivas se relaciona con mejor rendimiento *(Perels et al, 2005; Vula et al, 2017; García et al., 2019; Losenno et al., 2020).*
- Tener mayores oportunidades para procesar provoca mejor conocimiento conceptual (*González-Cabañes, et al., 2020).*
- Una planificación adulta permite una mejor resolución de problemas (*Welsh et al., 1995*).
- Una mayor edad y un mejor control de los impulsos permite mayor rendimiento en la Torre de Londres (*Albert & Steinberg, 2011).*

Por otra parte, cabe destacar que los buenos resultados disipan también otras posibilidades como la **divagación** en tiempo de pausa, que, si bien es posible, no ocurrió significativamente entre los alumnos con los que se experimentó, dada la relación positiva entre tiempo de pausa y eficiencia.

Como limitaciones, se mencionó el hecho de tomar alumnos de un ECA más amplio (limitando la muestra), el hecho de que la limitación de tiempo centró el estudio en un subconjunto de problemas de "*From here to there!*" y el que la mayoría de estudiantes fuera de origen asiático y de clases avanzadas y que se excluyera a una pequeña parte por progresar poco (los resultados no fueron del todo representativos). Asimismo, varios profesores no parecieron involucrarse del todo ni proporcionaron tiempo suficiente, de modo que varias clases no alcanzaron la media de problemas por sesión y hubo que tomar medidas particionando los problemas.

Como posibles direcciones futuras, se planteó la posibilidad de examinar los resultados con otros juegos o plataformas, de añadir covariables adicionales como la capacidad de razonamiento o la velocidad de procesamiento y de tomar muestras más diversas, así como de realizar otros métodos de investigación tales como la observación y conversación a tiempo real, de modo que se pueda observar también el "cómo": lo que piensa el alumno en el tiempo de pausa y el primer paso que decide tomar.

Finalmente, el estudio daba valor a la importancia del uso de la tecnología en la investigación de los procesos de cognición matemática. Mientras que un examen a mano solo atiende a resultados, un software puede tomar un gran número de variables adicionales y que resultan de interés en investigación, tal y como se hizo en el estudio.

3.3 Aprendizaje orientado a la investigación

Relacionado con el tiempo de pausa y todos los procesos cognitivos dados en los instantes previos a la resolución de problemas está el modo en que la información de la que se parte para aplicar el razonamiento es aprendida. Una **mayor comprensión conceptual** basada en **aprendizaje activo**; es decir, en la lectura, escritura, discusión y participación del estudiante (*Bonwell y Eison, 1991; Kwon et al, 2005; Bouhjar et al., 2017; Mataka & Taibu, 2020*), permite una red de conocimiento rica en relaciones (*Hiebert y Lefevre, 1986)* lo cual permite para un mismo tiempo de pausa una mayor capacidad de razonamiento.

Según la literatura, es posible distinguir entre dos tipos de comprensiones: la **procedimental** (basada en la memoria y el seguimiento de procedimientos y fórmulas, aprendizaje "instrumental", "reglas sin razones") y la **conceptual** (basada en la lógica y conexión de ideas, aprendizaje "relacional"). Mientras que el primer tipo es el más común entre nuestros alumnos (tal y como se comprobó en este mismo estudio), diversos estudios muestran la indispensabilidad del segundo para un entendimiento completo (*Melhuish, 2015*), si bien otros indican que ambos son inseparables, "dos caras de la misma moneda" (*Star, 2005*)

Sobre ello consiste el tercero de los estudios analizados en esta revisión. Concretamente, dentro de todos los tipos de aprendizaje activo encontrados en la literatura (entre los que podemos encontrar el aprendizaje basado en problemas, el basado en investigación, el basado en proyectos…) se habló de la importancia del **aprendizaje orientado a la investigación** (*Freeman et al., 2014; Laursen et al., 2014; Kwon et al., 2005*).

Este tipo de aprendizaje está basado en 4 componentes instructivos (*Kuster et al., 2017)*:

- Generar formas de razonamiento
- Aprovechar las contribuciones de los estudiantes
- Desarrollar comprensión compartida
- Conectarse al lenguaje y notación matemática estándar

Según *Kwon et al. (2005),* para ello resulta especialmente útil la **participación verbal activa en discusiones** y que tanto alumnos (al investigar lo nuevo) como profesor (al estudiar las formas de razonamiento del estudiante para adaptar su instrucción (*Rasmussen & Kwon, 2007*)) participen activamente con el material esté basado en el *Diseño instruccional de la Educación Matemática Realista (RME)*, cuyo objetivo es transformar las ideas informales intuitivas del alumnado en notacion y lenguaje más formal (*Rasmussen & Keynes, 2003; Wawro et al., 2012*) generando discusiones productivas distintas en cada clase que construyan ideas matemáticas importantes.

Debido a la implementación desafiante que supone por gestión del tiempo, cobertura de contenidos, desacuerdos en el departamento o resistencia de los estudiantes (*Johnson & Larsen,* 2012; *Wagner et al., 2007; Anderson, 2002; Speer & Wagner, 2009)* ha sido necesario un mayor apoyo en investigación: materiales curriculares específicos (*Larsen et al., 2013; Rasmussen & Kwon, 2007; Wawro et al, 2013*), modelos de apoyo (*Johnson et al, 2015),* secuencias de tareas por ciclos de investigación y diseño con análisis continuo en el aula (*Cobb, 2000*) y, financiado por la National Science Foundation de Estados Unidos, el proyecto de investigación *Teaching Inquiry-Oriented Mathematics: Establishing Supports* (TIMES), un modelo de aprendizaje orientado a la investigación que fue utilizado en este estudio y que está basado en tres componentes:

- Material de apoyo curricular con objetivos de aprendizaje, justificación de tareas, notas para implementación y ejemplos de trabajo.
- Taller de verano para instructores de 3 días para entender la idea de aprendizaje orientado a la investigación.
- Grupos de trabajo semanales en línea para instructores (*Johnson et al, 2015)* para debatir las lecciones y la implementación grabada en vídeo.

Asimismo, está planteado para tres áreas de enfoque, de entre las cuales el estudio revisado se centró en el **álgebra lineal**, disciplina para la cual hay todo un material destinado: el material IOLA (*Inquiry-Oriented Linear Algebra*), para profesores y para estudiantes; el analizado de entre todo este último bloque de material se centró en **intervalo e independencia lineal, sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y valores y vectores propios**.

La idea, pues, de este estudio fue la de investigar la mejora de la comprensión conceptual y procedimental comparando los resultados obtenidos en un grupo experimental con TIMES frente a los extraidos de un grupo de control (no TIMES), comprobando en cada caso cómo se desarrolló el desempeño en elementos conceptuales y elementos de procedimiento.

Para ello, se experimentó con 461 estudiantes de 19 clases de álgebra lineal de 15 institutos (271 de 12 clases TIMES y 190 de 7 clases no TIMES) en tres cursos académicos (2014-2017), haciendo uso de equipos de investigación TIMES, entrevistas anteriores y posteriores, vídeos de clases de las lecciones elegidas (de 3 a 4 horas por instructor) y, finalmente una evaluación de 1 hora alineada con los 4 temas de IOLA y para la cual se revisó literatura previa y se consultó con expertos, de 9 preguntas divididas en items procedimentales y conceptuales (estas últimas con rúbrica propia y puntuación máxima de 3 puntos) según *Hiebert y Lefevre (1986)* y respuesta o bien abierta, o de opción múltiple, o una combinación de ambas.

Como algunas de las preguntas combinaban elementos de las subescalas conceptual y procedimental, se realizó en primer lugar una prueba t-Student **dependiente** para comparar las putuaciones conceptuales con las procedimentales en estudiantes TIMES, en no TIMES y en ambos combinados, obteniendo resultados mucho mejor en pruebas procedimentales que conceptuales en general (7,7 de media frente a 6,4 sobre 10), pero con mayor diferencia entre estudiantes no TIMES (7,3 frente a 5,9) que entre estudiantes TIMES (7,9 frente a 6,7).

Posteriormente, para comparar los estudiantes TIMES con no TIMES en el examen general, en la subescala procedimental y en la conceptual se realizó una prueba t-Student **independiente** dada la nula afectación entre unos y otros, obteniendo como resultado en todos los casos mejores puntuaciones para los estudiates TIMES (7,2 de media frente a 6,5 en la prueba general, 7,9 frente a 7,2 en la subescala procedimental y 6,7 frente a 5,9 en la subescala conceptual.

Además, fue necesario un análisis MANOVA entre 7 clases TIMES con 7 no TIMES de mismos institutos (o al menos comparables en tamaño) para encontrar las diferencias entre ambos grupos por parejas de clases, más allá de otras distinciones circunstanciales que pudieran afectar al resultado (como la diferencia en número de centros implicados). En estos casos, también se obtuvo una mejor puntuación para los TIMES (no fue significativa para 3 de las parejas), aunque sólo 3 de los dúos la obtuvo para todas las subescalas, posiblemente debido a que sus profesores tenían más de un año de experiencia usando el modelo TIMES.

Los hallazgos finales, pues, resultaron en lo siguiente:

- Los estudiantes TIMES obtuvieron resultados signficativamente superiores, también al analizar su desempeño por parejas de clases, reflejando la superioridad de el aprendizaje orientado a la investigación frente a la enseñanza tradicional en los institutos, en línea con investigaciones anteriores (*Kwon et al., 2005)* (si bien en este caso no se ha analizado por separado la influencia de la implementación en el aula frente a otros aspectos de TIMES como talleres de verano o los grupos de trabajo semanales).

- Los estudiantes obtienen siempre mejores resultados procedimentales que conceptuales.

- Los profesores con mayor experiencia en TIMES instruyeron a las clases que dieron los resultados significativos más distinguibles, de modo que se conjetura el hecho de que la experiencia surta buen efecto (a corroborar en líneas futuras).

Otras posibles líneas futuras podrían consistir en el mismo estudio analizado por géneros o comprobar la retención de conceptos dado un tiempo pasado.

Por lo tanto, parte de la propuesta didáctica, tal y como se verá más adelante, consistirá en hacer uso de un formato de clase similar al que se propone entre los materiales IOLA usado en el modelo TIMES, a la luz de los resultados positivos de este estudio.

3.4 Aula Invertida basada en el modelo ADDIE

Otro de los estudios basado en la importancia del aprendizaje activo que tantos análisis reflejan como significativamente positivo (*Bonwell y Eison, 1991; Kwon et al, 2005; Bouhjar et al., 2018; Mataka & Taibu, 2020*), consiste en el uso del **aula invertida**, un modelo de enseñanza popular entre investigadores en los últimos años y con resultados muy positivos (*Graham, Woodfield & Harrison, 2013; Steen-Utheim & Foldnes, 2018; Sheikh, 2018; Al-Otabi & Iraqi, 2019*) y basado en la teoría del constructivismo, desde la cual se puede explicar el aprendizaje como el resultado de 4 ideas fundamentales. Estas son:

- Construcción del conocimiento **desde la experiencia previa**.
- Proceso **activo**: El estudiante debe **hacer** no sólo escuchar.
- Aprendizaje **social**: El estudiante aprende más al interactuar con otros.
- **Motivación** previa: El estudiante sólo aprenderá si está motivado.

En este estudio en concreto, se valoró en gran medida la importancia de la **tecnología** y la necesidad de realizar enfoques educativos modernos ante el veloz avance tecnológico que está experimentado la sociedad en los últimos años (*Al-Bakour, 2016*) y su demostrada efectividad en matemáticas (*Kim, Park y Joo, 2014*). Concretamente, el modelo de enseñanza de aula invertida es significativamente compatible con el uso de la tecnología, pues su esquema consiste, en línea con los 4 principios anteriores, en invertir hogar y aula, realizando autoaprendizaje en el hogar a través de audios y vídeos, y usando la clase como un entorno de formación colectivo en el que comentar y discutir lo estudiado en casa bajo la supervisión del docente (*Marlowe, 2012),* para lo cual son de gran utilidad las herramientas de audio, vídeo e instrucción en línea de las que hoy disponemos.

Para un desempeño correcto de este modelo de aprendizaje, según *Nagel (2013)*, se requiere de

- Flexibilidad de entorno: poder aprender en cualquier lugar.
- Cambio de cultura: el aprendizaje debe estar basado en el alumno antes que en el profesor.
- Reparto cuidadoso del temario considerando qué pueden aprender los alumnos por sí mismos fuera de los grupos.
- Educador bien preparado, profesional, con tiempos y preguntas correctos, que asegure:
    - Seguimiento del aprendizaje: asegurarse de que todos han visto los vídeos y hecho las tareas.
    - Grupos flexibles y educación personalizada.
    - Fomento del interés: capacitación para escribir notas y dudas.
    - Preparación del material: vídeos, redes sociales, ejercicios…

De entre los distintos enfoques de esta metodología, *Donmez & Turan (2017)* concluyó que el más integral y efectivo consiste en el **modelo ADDIE**, ya analizado en otros estudios (*Al-Otabi e Iraqi, 2019*) basado en las 5 siguientes etapas (*Bates, 2019*):

1. Análisis:
   - De las características del estudiante: sus habilidades, su entorno y antecedentes, y en virtud de ello sus necesidades.
   - De los objetivos educativos y la evaluación.
   - Del tiempo disponible.

2. Diseño
   - Selección y justificación del contenido
   - Ejercicios
   - Métodos de evaluación basados en las metas de desempeño y en términos medibles
   - Medios de enseñanza

3. Desarrollo: Transformación de lo diseñado en materiales reales.
   - Vídeos y software educativo
   - Definición de cómo se presentará todo al estudiante.
   - Desarrollo de hojas de trabajo, ejercicios en casa y de aula.

4. Implementación: Llevarlo todo a la práctica
   - Asegurar la disponibilidad del material por parte de todo el alumnado.
   - Creación de las condiciones necesarias para el aprendizaje.
   - Contextualización realista del contenido.

5. Evaluación: Comprobación de la eficiencia de la estrategia a lo largo del proceso y con los resultados finales, y remodelización que sea necesaria.

El estudio se cuestionó hasta qué punto este modelo podía ser beneficioso, planteando como hipótesis que no habría diferencias significativas entre grupo experimental (27 alumnos) y de control (26), todos del *Prince Falsal College* (un entorno con las condiciones tecnológicas y didácticas y donde trabajaba el investigador), y analizados desde el 09 de enero de 2022 hasta el 02 de octubre de 2022.

A ambos grupos se les realizó un test previo y posterior para responder a las preguntas de estudio y sacar conclusiones, basado en la escala de *Soares & others (2006),* usada también en *Al-Balawi (2018)* y *Al-Otaibi & Iraqi (2019)* y planteada desde las habilidades elementales del pensamiento algebraico:

- Descubrir relaciones y símbolos algebraicos
- Descubrir patrones y generalizaciones algebraicas
- Hacer uso de símbolos algebraicos

Todo ello a través de operaciones que conlleven la justificación, la inferencia y la representación matemáticas (*NTCM, 2000)* para comprobar el conocimiento, las habilidades y la experiencia del estudiante.
Usando el software "Statistical Package for Social Sciences" (SPSS) se calculó:

1) Medias y desviaciones estándar de ambos grupos en la escala de pensamiento algebraico para los test previo y posterior.

2) Análisis de covarianza (ANCOVA) unidireccional en ambos grupos tras neutralizar el efecto de premedición para observar la significancia de la estrategia frente a otras posibles alteraciones.

3) Análisis ANCOVA por separado de cada una de las habilidades tras neutralizar el efecto de premedición.

Los resultados de las tres medidas fueron esencialmente los siguientes:

1) El ascenso medio de puntuación en el grupo experimental fue de 13,52 a 24,33 (10,81) sobre 30 tras la lección mientras que en el grupo de control fue de 13,23 a sólo 17,93 (4,7)

2) El análisis ANCOVA general sirvió para comprobar que el nivel de significancia de la estrategia utilizada era muy alto (p=0.00), el 85% de la varianza se debió exclusivamente a la estrategia.

3) El análisis ANCOVA por habilidades mostró una alta significancia también para cada una de las habilidades de pensamiento algebraico.

Estos resultados, tan a favor del uso de la estrategia, fueron distintos a los de *Al-Otaibi e Iraqi (2019)*, que mostraron igualdad en descubrir patrones y generalizaciones y en utilizar símbolos algebraicos, quizá por las experiencias previas del alumnado o por no usar los ejercicios adecuados.

Los resultados positivos se atribuyeron a:

- Incluir tareas para manejar relaciones, funciones, símbolos, patrones, generalizaciones permite el desarrollo del pensamiento algebraico.

- El aprendizaje grupal permitió la discusión y el enriquecimiento de conceptos, generalizaciones y algoritmos.

- El uso de distintos contextos matemáticos en vídeos, enlaces adicionales, preguntas de práctica, hojas de trabajo y evaluaciones con el debido empleo de la tecnología mejoró su comprensión y motivación.

- El modelo ADDIE ayudó significativamente a llevar una buena organización al aplicar el aula invertida.

Dado el significativo beneficio de este modelo de enseñanza en álgebra (por el cual será incluido en la propuesta práctica de esta revisión), se propuso como línea futura investigarlo en otras áreas de las matemáticas, como geometría, probabilidad o estadística.

3.5 Estrategias docentes empleadas en entornos virtuales de aprendizaje

Tal y como se destacó en el estudio anterior, la tecnología debe estar cada vez más presente en nuestras aulas ante el gran avance de los últimos años y su gran beneficio en términos de aprendizaje y organización.

Sin embargo, en situaciones especiales tales como la vivida por la pandemia del COVID-19 puede resultar de mayor importancia aún.

A la vista de los resultados obtenidos en el último informe PISA anteriormente mencionado, y teniendo en cuenta su posible atribución a los efectos de la pandemia (*Jakubowski et al., 2023*), cabe preguntarse si ello fue debido al empleo de una enseñanza remota de emergencia (cambio temporal rápido) en lugar de hacer uso de un aprendizaje remoto cuidadosemente diseñado (meses de planificación y preparación para un curso en línea), tal y como se comparó para situaciones de emergencia anteriores en otros países (*Davies & Bentrovato, 2011; Rajab, 2018*), y si el empleo correcto de los **entornos virtuales de aprendizaje** (VLE, por sus siglas en inglés) puede dar fruto de mejores resultados, que si bien ya lo demuestran estudios anteriores (*Martín et al, 2016; Schwier et al, 2009; Wang and others, 2017; Mitten et al, 2021; Roschelle and others, 2016*), no tantos se centran en las **actividades empleadas en sí**.

Por ello, y atendiendo a la necesidad de estar preparados por si en el futuro se dan situaciones de emergencia parecidas, el objetivo de este último estudio a revisar consistió en identificar cuáles de las actividades docentes empleadas para el uso de entornos de aprendizaje virtual tuvieron una relación positiva con el aprendizaje de los estudiantes.

Para ello, el estudio empleó el marco teórico de la **orquestación del aprendizaje** *(Prieto et al., 2011)*, útil para estructurar la información disponible, detectar desafíos y ver soluciones de ayuda en enseñanza y aprendizaje (*Dillenbourg, 2013*), y particularmente práctico para potenciar las investigaciones y el desarrollo de entornos mejorados de tecnología (*Muñoz-Cristóbal et al., 2015; Prieto et al., 2015; Rodríguez-Triana et al., 2015*).

Este marco consiste en el análisis de las actividades de enseñanza y aprendizaje desde 5 aspectos:

- **Diseño**: Planificación basada en herramientas pedagógicas (*Koper & Tattersall, 2005; Holmes et al, 2019*), más necesaria en entornos en línea.
- **Regulación/gestión**: Monitoreo a tiempo real de una clase a otra en distintas variables: gestión de los grupos, el tiempo, el flujo de trabajo. Puede ser del profesor o una autogestión de los alumnos (*Dillenbourg et al, 2009*)
- **Adaptación/flexibilidad**: Cambio de plan al contexto del aula y lo que pueda surgir.
- **Conciencia/evaluación**: Conocimiento del docente sobre el contexto y lo que hay en las mentes de los alumnos, ya sea por evaluaciones formativas, seguimiento de evaluación

continua, consultas al alumno y a la familia o a los registros de los profesores (*Martínez-Maldonado et al., 2013; Van Leeuwen, 2015*).

- **Roles de profesor y alumno**. La orquestación se centra en la labor docente, pero nada impide que los pasos anteriores pueda realizarlos el propio alumno, en un cuadro de mayor autonomía (*Alavi et al., 2009*).

Por otra parte, se consideró como característica a destacar el que la metodología fuera **síncrona o asíncrona**, esto es, que los alumnos debieran asistir a una clase virtual a una determinada hora para realizar las tareas o que, por el contrario, pudieran acceder cuando desearan a realizar las actividades.

Bajo este marco, y considerando el objetivo del estudio, se plantearon tres preguntas de investigación:

1- ¿Qué cambios hicieron los profesores para reorquestar su instrucción con VLE tras el cierre de las escuelas?
2- ¿Los cambios realizados fueron diferentes entre profesores que enseñaban de manera síncrona y los que lo hacían de manera asíncrona?
3- ¿Qué aspectos de la orquestación docente del VLE podrían predecir el rendimiento de los estudiantes?

Para responder a estas preguntas, se trabajó en el marco del **Math Nation VLE** (Lastinger Center for Learning & University of Florida, 2022), dividiendo el temario estatal en 10 secciones de 9 ramas del álgebra, cada una de ellas finalizada con una evaluación de 10 preguntas (TYS, *Xue et al, 2022*) y todas ellas divididas en 6-12 temas (93 en total), para cada uno de los cuales se realizó un vídeo instructivo de tutores heterogéneos y, a su vez, un cuestionario breve de 3 preguntas por tema tras su finalización.

Para el estudio, se tomó datos de dos fuentes:

1- El registro de uso de estudiantes y docentes del VLE junto con sus puntuaciones en los test.

   a. Marcas de tiempo (ej: Registros del profesor de cada estudiante para cada evaluación el día 08/03/2020)
   b. Datos de recuento (ej: Veces que el docente miró la clasificación del estudiante antes del 08/03/2020)

2- La encuesta a maestros durante el cierre entre el 21 de mayo y el 1 de junio con 349 respuestas para abordar la pregunta 1. De esta encuesta, entre otros datos, y tras dicotomizar la segunda pregunta de investigación, se extrajo que 139 (39,8%) enseñaba de forma siempre asíncrona y 210 (60,2%) de manera síncrona durante una parte del tiempo; además, el 88% nunca enseñó en línea, 3% sólo una vez y 9% varias veces.

La última pregunta de investigación fue respondida a través de un modelo multinivel de tres niveles (secciones, estudiantes y profesores) (*Snijders & Bosker, 2012)*:

$$y_{ijk} = \gamma_{000} + \sum_{l=1}^{L}(\delta_l \cdot x_{lk}) + \sum_{m=1}^{M}(\pi_m \cdot z_{mk}) + u_k + r_{jk} + e_{ijk}$$

Donde

$$\gamma_{000} = \text{Intercepto}$$
$$\mathrm{y_{ijk}} = \text{Puntuación en sección i, alumno j, profesor k}$$
$$\mathrm{x_{lk}} = \text{Predictores según encuesta del profesor k}$$
$$\mathrm{z_{mk}} = \text{Predictores según registro del sistema del profesor k}$$
$$\delta_{\mathrm{l}}, \pi_{\mathrm{m}} = \text{Ponderación de encuesta l o registro m}$$
$$\mathrm{u_k}, \mathrm{r_{jk}} = \text{Efectos aleatorios en alumnos y profesor}$$
$$\mathrm{e_{ijk}} = \text{Residual de nivel 1}$$

Al principio se tomaron 27 predictores del registro y 70 de encuesta, en los que las respuestas de opción múltiple eran variables codificadas y los de opción única una variable binaria (0 o 1).

Sin embargo, al tratarse de predictores multicolineales existía un sesgo sustancial del error estándar al estimar los coeficientes (*Yu et al., 2015)*. Por ello, se decidió realizar el cálculo tomado aquellas variables con un factor de inflación de varianza (VIF) inferior a 2,5, de modo que quedaron 13 predictores del registro y 44 de las encuestas.

Los resultados sacados de las encuestas a profesores fueron ordenados siguiendo el cuadro de la orquestación docente.

En **diseño**, no hubo gran diferencia entre profesores sincrónicos y asincrónicos en cuanto a cómo afectó el cierre de las escuelas ($\chi2(3,n=348) = 4,0356$; $p=0.2303$).

La mayoría:
- Permitió tiempo extra para completar tareas (93,6%)
- Redujo el número de tareas (77,4%)
- Señaló que los alumnos hacían mejores preguntas (74,9%)
- Podía planificar sus lecciones con al menos 3 días de antelación (82,6%)

La minoría:
- Dejó de introducir material nuevo (12,3%)
- Indicó que cada lección estuviera menos estructurada (28,8%)

En **regulación/gestión,** hubo diferencias significativas entre profesores sincrónicos y asincrónicos en los plazos para entregar las tareas ($\chi2(3,n=347) = 12,161$; $p=0.0023$)

Los asincrónicos daban más tiempo para completar tareas (56,5% más de una semana, aunque algunos (9,4%) sólo 1 o 2 días y 34,1% de tres días a una semana)

De entre los sincrónicos, por otra parte, daban más de una semana sólo el 37,8%, de tres días a una semana el 45,9% y dos días o menos el 16,3%.

En **adaptación/flexibilidad**, no hubo diferencias significativas entre sincrónicos y asincrónicos en diferencias por omisión/condensación de contenido.

Casi la mitad (48,5%) tuvo que saltarse contenido tras el cierre de aulas y alrededor del 40% condensó contenido, mientras que el 38,1% lo mantuvo según los previsto.

En **conciencia/evaluación**, no hubo grandes diferencias entre sincrónicos y asincrónicos ni en el número de cuestionarios semanales exigidos ($\chi2(3,n=343) = 2,269$; $p=0.5186$) ni en el permiso otorgado para rehacer problemas incorrectos ($\chi2(1,n=343) = 0,60783$; $p=0.4356$). En ambos casos, hubo una variación significativa al comparar los resultados antes y después del cierre:

- Reducción de profesores que requerían cuestionarios o pruebas 1 o 2 veces a la semana (de 48,4% a 37,9%), y aumento en los que los requerían menos de 1 vez por semana (44% a 51,6%) y más de 3 veces por semana (7,6% a 10,5%).
- Aumento de profesores que permitían rehacer problemas incorrectos (de 78,4% a 88,1%).

En **roles de profesores y estudiantes**, no hubo diferencias entre sincrónicos y asíncronicos en ninguno de los aspectos estudiados. Respecto a la confianza en enseñanza remota, lo más respondido fue "moderadamente confiado" (43,7%), en problemas tecnológicos, la mayoría no tuvo dificultades y la circunstancia más común fue no poder iniciar sesión (45,9% al menos una vez, la mayoría sólo 1 vez al mes, en este caso distinto entre sincrónicos (66% sin problema) y asíncronicos (81,6% sin problema) debido al mayor número de veces que los primeros deben iniciar sesión) seguido de otro 10% de profesores con otros problemas al menos 1 vez al mes. Respecto a la experiencia previa enseñando en línea, no se detectó diferencia entre sincrónicos y asincrónicos, y la mayoría nunca antes había lo había hecho (87,8%), mientras que otros lo habían hecho una (3,5%) o varias veces (8,7%).

En este último aspecto, además, se observó en las encuestas el impacto tras cancelarse la evaluación de fin de curso (EOC) en 2020 por la pandemia:

- Dedicación del estudiante: 40,1% de igualdad, 48,4% de disminución, 11,6% de aumento
- Interés en Álgebra: 46% de igualdad, 49,9% de disminución, 4,2% de aumento
- Flexibilidad del docente para planificar lecciones: 56,2% de aumento
- Alineación entre evaluaciones en lugar del EOC: 77,1% de igualdad.

La predicción del rendimiento estudiantil (pregunta de investigación 3) se midió

- Tomando 13 predictores del sistema, entre los cuales se encontraban completar el TYS anterior, cargar la página de orientación, buscar debates, ver vídeos de la solución de la evaluación, etcétera. Para cada uno de ellos, se observó en qué medida afectaba una desviación estándar (CE), siendo **activar los subtítulos (CE = 0,338)** (asociado a regulación/gestión) lo que resultaba más positivo junto con buscar debates y ver vídeos de revisión de evaluaciones (concienciación/evaluación, CE>0,25). En general, todo lo relacionado con implicación docente en álgebra resultaba en mayor rendimiento mientras que visualizar partes del VLE no relacionadas no tenía afección o hasta resultaba en un rendimiento peor (como ver fotos de perfil, vídeos de biografías de los tutores…)

- Tomando 44 predictores de las encuestas, la mayoría no tuvo asociación directa con el rendimiento (CE bajo), aunque algunos relacionados con conciencia/evaluación tuvieron una afección positiva:

    - Abordar las preguntas de los que levantaron la mano en vivo
    - Evaluar el aprendizaje de los estudiantes con Canvas
    - Evaluar el aprendizaje de los estudiantes con Performance Matters
    - Frecuencia de exigencia para completar tareas antes del cierre.

  Otros tuvieron relación negativa:
    - Dar más calificaciones por el esfuerzo.
    - Llamar a los estudiantes que no completan el trabajo.

Como conclusión y respuesta a las tres preguntas de investigación, se dilucidó:

1- ¿Qué cambios hicieron los profesores para reorquestar su instrucción con VLE tras el cierre de las escuelas?

Aunque buena parte nunca enseñó en línea anteriormente, la mayoría tuvo confianza, adaptándose con una mayor flexibilidad en el tiempo de aprendizaje, con nuevos enfoques de gestión y regulación (correo y foros), ajuste en el ritmo de instrucción (condensación) y facilitando el uso de evaluaciones formativas para el control del aprendizaje (menos pruebas por semana), dando todo ello resultados positivos.

2- ¿Los cambios realizados fueron diferentes entre docentes que enseñaban de manera síncrona y los que lo hacían de manera asíncrona?

Sólo hubo una diferencia claramente apreciable: el tiempo permitido para completar las tareas. Al haber sólo una distinción, se concluyó que en la adaptación en las actividades de orquestación vino mayormente por el cambio de contexto más que por un formato concreto de instrucción temporal.

En cuanto al resto de aspectos, todos los profesores, síncronos y asíncronos, aumentaron el tiempo por actividad y redujeron el número de actividades reconociendo la dificultad creada por la pandemia. Esto tuvo resultados positivos en línea con *Gandasari y Dwidienawati, 2020*).

3- ¿Qué aspectos de la orquestación docente del VLE podrían predecir el rendimiento de los estudiantes?

Los resultados obtenidos tanto desde los registros como desde las encuestas se pueden resumir en las siguientes ideas:

a. La participación activa del docente en el seguimiento y la planificación con VLE (regulación/gestión en orquestación) resultó en un mayor rendimiento estudiantil.

b. Las evaluaciones con herramientas externas como Canvas o Performance Matter ofrecieron un mayor rendimiento estudiantil. Una concienciación/organización de la evaluación exhaustiva da ese resultado positivo

c. Aliviar la presión (al calificar por esfuerzo, por ejemplo) se asoció negativamente con el rendimiento. El trabajo requiere compromiso y genera logros, y calificar por esfuerzo es subjetivo (*Kunnath, 2017*), si bien cabría distinguir entre *esfuerzo procedimental* y *esfuerzo sustantivo* (pensamiento crítico), este último con mayores implicaciones (*Kelly, 2008*).

En la práctica, los resultados obtenidos tendrían las siguientes implicaciones:

- El modelo de regresión multinivel mostró una asociación directa con abordar las respuestas en vivo de los que levantaban la mano, aunque hubiera correo o foros (ineficientes por comunicación escrita y espera, según *Duncan et al., 2012*). La presencia directa del docente es lo más parecido a un aula normal y pemite una mejor adaptación (*Le and Truong, 2021*). Compartir pensamientos permite mejor presencia social y un sentido de pertenencia, con la mayor involucración que supone (*Palloff & Pratt, 2007*). Por todo ello, se recomienda la realización de sesiones sincrónicas.

- Las tareas pueden ser más flexibles de lo habitual. Tener menos trabajo permite más tiempo para internalizar conceptos, lo cual es importante en matemáticas (*Fernández-Alonso et al., 2015*). Además, en un contexto desalentador como fue la pandemia, tener menos deberes puede suponer mayor motivación y compromiso, lo cual se puede traducir en éxito académico (*Steinmayr et al., 2019*). En general, la flexibilidad permite la participación y adaptación (*Mahmood, 2021*).

- Debe haber un seguimiento del aprendizaje estudiantil **no intrusivo**. Si bien se comprobó que las críticas al no completar las tareas resultaron en un efecto negativo, el seguimiento estrecho desde el sistema (medido por frecuencia de apertura de la clasificación y búsqueda de debates entre estudiantes) resultó en un apoyo eficaz en el rendimiento. Todo ello estuvo en línea con *Mavrikis et al., 2019,* donde se estudian herramientas de análisis de aprendizaje en VLE, y *Gasevic et al, 2016*, donde se discute sobre cómo los estudiantes se benefician de sistemas que informen al docente sobre su progreso en el aprendizaje.

- Se puede aprovechar de otras plataformas mejoradas para las evaluaciones, como Canvas o Performance Matters. Sin embargo, las características analíticas y bien estructuradas de estas plataformas podrían no dar una explicación suficiente al haber otras como Kahoot o IXL que no tuvieron ningún efecto. Podría haber otros factores distintivos como que Kahoot depende mucho de cómo se imparta la clase (*Jagust et al, 2018)* y las diferencias de cada alumno *(Stoyanova et al., 2017)* y que IXL tiene preguntas muy fijas pudiendo hacer sentir al alumno descontextualizado (*Resnick & Resnick, 1992*). Por todo ello, esta última conclusión requeriría de investigación más concreta y exhaustiva.

Junto a esta última, se asumieron las siguientes limitaciones en el estudio:

1. No hubo información detallada sobre las prácticas. Se requirirían métodos más cualitativos para una comprensión profunda de las motivaciones y actividades de orquestación.
2. La elección de actividad docente puede tener otras fuentes más allá del rendimiento estudiantil, como la autoeficacia y motivación.
3. No se muestra una clara evidencia causal de los efectos de orquestación docente en el rendimiento estudiantil, requiriéndose de estudios experimentales o cuasiexperimentales en ello.

4. Propuesta

A continuación, se realiza una propuesta basada en la aplicación combinada de cada una de las estrategias analizadas. La organización en clase seguirá un formato "IOLA", adaptado al currículo de la Comunidad Valenciana, con un material que haga uso de preguntas adicionales de sondeo que busquen la justificación y el tiempo de pausa, empleando aula invertida con modelo ADDIE y con un uso continuo de la tecnología que permita el seguimiento a tiempo real del estudiante, combinando debidamente cada una de las estrategias analizadas.

Esta propuesta se realizará siguiendo el modelo ADDIE:

Un primer proceso de **análisis** permitirá al docente conocer las habilidades y necesidades de sus estudiantes. Gracias al uso de la tecnología y al seguimiento no intrusivo del docente, este análisis podrá ser llevado a cabo a tiempo real. Los objetivos educativos y la evaluación planteados para la implementación de la metodología son todos aquellos relacionados con el bloque de **sentido algebraico** y planteados por el decreto 107/2022 al término del curso académico de 3º de la ESO. Este bloque es uno de los 8 a impartir según legislación, y se planteará de tal modo que se imparta en un total de 7 semanas de 4 sesiones cada una.

En segundo lugar, se plantea el **diseño**, es decir, la selección y justificación del contenido a impartir, junto con los ejercicios, los medios de enseñanza y los métodos de evaluación basados en las metas de desempeño.

Lo primero que se debe hacer para ello es establecer una metodología clara para cada clase.

Tal y como se describe entre los materiales IOLA, la idea de cada clase es que esté repartida de tal modo que haya tiempo para:

1. Pequeños grupos de trabajo (3-4 estudiantes por grupo)
2. Tiempo de discusión para toda la clase
3. Conversación con el compañero más cercano
4. Tiempo de enseñanza magistral

Como la idea de esta propuesta es la de combinar estos materiales con la estrategia de aula invertida, los pequeños grupos de trabajo traerán la labor de investigación resuelta desde casa, para conceder en clase un mayor tiempo a la discusión entre compañeros, a la conversación e intercambio de ideas con el compañero más cercano y de otro grupo y, finalmente, una pequeña porción de tiempo de enseñanza para la introducción de nuevos temas.

Para ello, se les permitirá el acceso a un entorno virtual en el que puedan acceder al material audiovisual con el cual investigar y estudiar el temario, contactar con el profesor y realizar problemas, cuyo tiempo de pausa, número de intentos y porcentaje de acierto inicial podrá ser monitorizado por el profesor, el cual recomendará desde un principio detenerse a resolver debidamente los problemas, y con cuya información podrá evaluar debidamente el rendimiento del alumno más allá de la evaluación final, pudiendo, entre otras facilidades y ante malos resultados, dilucidar más claramente quién de los alumnos por lo menos se esforzó e intentó resolver los problemas en su debido tiempo y quién decidió hacerlo todo rápido.

En cuanto a los criterios de evaluación, se calificará a cada grupo en virtud de la exposición de la investigación que hagan desde casa (30%), se considerará muy positivamente la actitud y la participación en el debate de clase (20%) y la realización de ejercicios para practicar lo aprendido en el entorno virtual (20%), siendo parte de la nota no sólo la realización correcta de los mismos, sino el tiempo de calidad, el número de tanteos y la cantidad de problemas realizados en un primer intento. Por último, un 30% de la nota será destinado a la realización de un examen final que se hará con un margen temporal suficiente para que el alumno pueda dedicar ese tiempo previo al entendimiento de los problemas.

A modo de ejemplo, y atendiendo al tercer paso del modelo ADDIE, el **desarrollo**, se ha preparado una metodología y serie de ejercicios para un temario común dentro del currículo de álgebra lineal en 3º de la ESO: la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para la cual suele impartirse hasta 4 métodos distintos: el de sustitución, el de igualación, el de reducción y finalmente el método gráfico.

Asumiendo una clase común de 24 alumnos de 3º de la ESO, se propone la formación de 8 grupos de 3 estudiantes cada uno, de tal modo que cada uno de los 4 métodos sea investigado por 2 grupos distintos, facilitando así el intercambio de ideas posterior y asegurando el debate en caso de que cualquiera de los otros compañeros resulte cometer cualquier error en su razonamiento al explicar a la clase.

En el anexo se incluye la hoja a rellenar por los grupos de investigación, en la que se aplica una de las dos técnicas explicadas para el trabajo en casa y en el aula: la justificación basada en las propias palabras. Estos ejercicios se harán disponibles en el entorno virtual de trabajo, de tal modo que quede registrada la fecha exacta de realización y el profesor pueda atender a posibles problemas de procastinación, llevando un seguimiento más atento y preciso de las necesidades del grupo.

En Matemáticas, tal y como se ha mostrado, es especialmente importante la práctica de lo aprendido con ejercicios para una creación correcta del pensamiento algebraico. Por ello, el estudio en casa no sólo consistirá en la realización de trabajos de investigación, sino que, siguiendo con el ejemplo mostrado, tras esa primera sesión de toma de contacto en clase en que los diferentes grupos se expliquen las distintas metodologías y trabajen juntos cada una de ellas, se les asignará hojas de ejercicios individuales en las que podrán ponerlas en práctica. La diferencia en este caso con respecto a lo habitual es que los problemas estarán planteados de tal modo que sean los propios estudiantes los que puedan decidir qué metodología aplicar, justificando la elegida y siendo conscientes de que deberán utilizar cada una de ellas al menos en dos ocasiones. Si el entorno virtual lo permite, se impedirá al alumno poder comenzar la respuesta sin haber transcurrido un mínimo de 1 minuto para la resolución del problema, y en caso de que no, al menos se tomará registro del tiempo empleado antes de comenzar la respuesta, de modo que, de nuevo, pueda aprovecharse la tecnología para realizar un debido seguimiento. Además, en los propios ejercicios de la hoja habrá **preguntas de sondeo** que permitirán desarrollar los procesos de abstracción y generalización.

Además, atendiendo a los requisitos expuestos en la LOMLOE, se propondrán ejercicios en los que los alumnos trabajen distintas competencias clave junto con las competencias específicas de las matemáticas. En un segundo apartado del anexo, se muestra un ejemplo de hoja de ejercicios en el que se contempla la proposición de problemas en esa búsqueda.

En cuanto a la **implementación**, se asegurará la disponibilidad por parte de todo el alumnado de un portátil que permita la libre investigación desde casa y en clase al debatir con los compañeros, y la distribución de mesas en clase será tal que permita la visualización directa a a pizarra y entre cada uno de los miembros de los grupos, quedando cada formación separada una de otra y permitiendo el paso sin dificultad del profesor entre conjuntos de mesas para poder resolver cualquier duda. Por supuesto, todo el contenido audiovisual disponible en el entorno virtual para la investigación del alumno estará previamente preparado, bien sea por medio de una autograbación o de contenido de libre acceso disponible en internet.

Finalmente, en cuanto a la **evaluación** del método, se procederá al uso de grupos de control a los que aplicar la metodología tradicional y otros experimentales, de modo que se comparará no sólo los resultados académicos obtenidos, sino las variables medidas por el entorno virtual de aprendizaje y tomadas en cuenta en el seguimiento del profesor, realizando posteriormente un debido estudio estadístico comparativo que permita dilucidar hasta qué punto la aplicación de la metodología ha resultado efectiva.

5. Conclusiones

A lo largo de los estudios revisados, se ha ido alcanzando una serie de conclusiones que resultan interesantes de cara a poder llevar a la práctica cada una de las estrategias.

En primer lugar, se revisaron dos metodologías más relacionadas con el **trabajo en casa y en la propia aula**, observando la creación del pensamiento algebraico desde el enfoque ontosemiótico y concluyendo la importancia de la creación de funciones semióticas que permitan relacionar conceptos por medio de la **justificación** y **representaciones verbales** y usando como docentes **preguntas de sondeo** que permitan a nuestros alumnos llegar a conclusiones basadas en el pensamiento por correspondencia y desarrollar los procesos de abstracción y generalización. Tras ello, se contempló además la sólida relación existente entre el **tiempo de pausa** y la **eficiencia** a la hora de resolver problemas algebraicos.

En segundo lugar, se revisaron metodologías más relacionadas con la **organización del trabajo**. Se pudo observar cómo el empleo del aprendizaje orientado a la investigación basado en el proyecto TIMES y con material IOLA resultó plenamente beneficioso para los estudiantes cuyos resultados se investigó. Por otra parte, el uso de aula invertida siguiendo la organización del modelo ADDIE resultó exitoso al incluir las tareas correctas, dar lugar a un aprendizaje grupal, hacer uso de la tecnología y llevar la debida organización basada en el mencionado modelo.

Por último, y yendo a un contexto más concreto para situaciones de emergencia tales como la vivida por la reciente pandemia del COVID-19, se estudió qué resultaba más exitoso al hacer uso de entornos de aprendizaje virtual, concluyéndose la importancia de flexibilizar en tiempo y contenido las tareas llevando una correcta planificación y seguimiento y atendiendo al alumno en sus necesidades a tiempo real, sin conceder resultados sólo por esfuerzo.

En general, y siguiendo el hilo conductor de la revisión, se estudió la importancia de respetar los procesos de creación de **pensamiento algebraico** con el debido tiempo de pausa y asegurando una correcta justificación, se contempló la necesidad del **aprendizaje activo** basado en el trabajo del estudiante y finalmente se observó cómo la **tecnología** puede ser de gran utilidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Finalmente, se ha realizado una propuesta que reúne al menos una de todas las aplicaciones prácticas que resultan de las conclusiones de cada uno de los artículos referenciados, diseñada para ser llevada a cabo en cualquier instituto español.

Como limitaciones, junto a las ya mencionadas por separado para cada una de las estrategias, cabe añadir la ineludible mención de la falta de resultados comprobados en la combinación de todas estas metodologías. Si bien parecen funcionar por separado, podrían resultar ineficientes al aplicarse en conjunto. Por otra parte, los estudios citados han sido llevados a cabo en diversidad de países, sus efectos positivos podrían verse mermados en una sociedad como la española. Será necesario en trabajos futuros realizar investigaciones experimentales adicionales para comprobar la efectividad de esta propuesta, si bien esta misma, al estar basada en el modelo ADDIE, sugiere la autoevaluación de sí misma

En conclusión, es de vital importancia considerar toda posibilidad como docentes a la hora de establecer nuestra metodología de aula. Los últimos informes no resultan esperanzadores de cara al futuro, y de ello somos todos, como sociedad, responsables, pero más aún si cabe aquellos que estamos encargados de guiar y proteger el futuro de nuestro país como docentes. Por lo tanto, se debe atender resultados como los citados entre los artículos mencionados y ponerlos en práctica en vista de su efecto positivo puede ayudar a contrarrestar la creciente pobreza académica en la que parece verse sumida nuestra sociedad.

6. Referencias

Aké, L. P., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 1–8). Kiel, Germany.

Alavi, H. S., Dillenbourg, P., & Kaplan, F. (2009). Distributed awareness for class orchestration [Paper presentation]. European Conference on Technology Enhanced Learning Berlin.

Albert, D., & Steinberg, L. (2011). Age differences in strategic planning as indexed by the Tower of London. *Child Development*, *82*(5), 1501–1517.

Al-Bakour, R. M. (2016). *Mathematics techniques (reality - achievement - trends).* Academics for Publishing and Distribution.

Al-Otaibi, H., & Iraqi, S. (2019). The effectiveness of using the flipped classroom strategy in developing the algebraic thinking skills of secondary school students. *Journal of Educational and Psychological Sciences, 3*(19), 80-97.

Albalawi, A. S. (2018). The effect of using flipped classroom in teaching calculus on students' achievement at University of Tabuk. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 4*(1), 198-207

Alzoebi, A. M., Ghunaimat, M. A., & Alawneh, E. A. (2023). The effects of flipped classroom strategy based on "addie model" for algebraic skill development. Anatolian Journal of Education, 8(1), 141-158.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13*(1), 1-12.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, *11*(5), 181–185.

Ashkenazi, S., & Najjar, D. (2018). Non-adaptive strategy selection in adults with high mathematical anxiety. *Scientific Reports, 8*(1), 1–10.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, *84*(2), 191–215.

Bates, A. (2019). *Teaching in a Digital Age – Second Edition.* Vancouver, B.C.: Tony Bates Associates Ltd

Bernacki, M. L., Nokes-Malach, T. J., & Aleven, V. (2015). Examining self-efficacy during learning: variability and relations to behavior, performance, and learning. *Metacognition and Learning*, *10*(1), 99–117.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Springer.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In G. Kaiser (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 27–49). Springer.

Bonwell, C. C., & Eison, J. A. (1991). *Active Learning: Creating Excitement in the Classroom.* ERIC Digest.

Bouhjar, K., Andrews-Larson, C., Haider, M., & Zandieh, M. (2018). Examining students' procedural and conceptual understanding of eigenvectors and eigenvalues in the context of inquiry-oriented instruction. In *Challenges and strategies in teaching linear algebra* (pp. 193-216). Springer, Cham.

Byrne, B. M. (2010). Structural equation modeling with AMOS: Basic concepts, applications, and programming. New York: Routledge.

Chan, J. Y.-C., Lee, J.-E., Mason, C. A., Sawrey, K., & Ottmar, E. (2021). From Here to There! A dynamic algebraic notation system improves understanding of equivalence in middle school students. *Journal of Educational Psychology*.

Chan, J. Y., Ottmar, E. R., & Lee, J. (2022). Slow down to speed up: Longer pause time before solving problems relates to higher strategy efficiency. *Learning And Individual Differences*, *93*, 102109.

Chandra, V. (2022). Impact of education on economic development.

Cleary, T. J., & Chen, P. P. (2009). Self-regulation, motivation, and math achievement in middle school: Variations across grade level and math context. *Journal of School Psychology*, *47*(5), 291–314.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. ERIC.

Davies, L., & Bentrovato, D. (2011). Understanding education's role in fragility: Synthesis of four situational analyses of education and fragility: Afghanistan, Bosnia and Herzegovina, Cambodia, Liberia. *Inter-Agency Network for Education in Emergencies, University of Ulster*.

Dillenbourg, P., Järvelä, S., & Fischer, F. (2009). The evolution of research on computer-supported collaborative learning. In *Technology-enhanced learning* (pp. 3–19). Springer.

Dillenbourg, P. (2013). Design for classroom orchestration. *Computers & Education, 69*, 485–492.

Dinsmore, D. L., Alexander, P. A., & Loughlin, S. M. (2008). Focusing the conceptual lens on metacognition, self-regulation, and self-regulated learning. *Educational Psychology Review, 20*(4), 391–409.

Donmez, N., & Turan, G. (2017). Pre-Service Teachers' Material Development Process Based on the ADDIE Model: E-book Design. *Journal of Education and Training Studies, 5,* 199-210

Dreger, R. M., & Aiken, L. R., Jr. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational Psychology*, *48*(6), 344–351.

Duncan, K., Kenworthy, A., & McNamara, R. (2012). The effect of synchronous and asynchronous participation on students' performance in online accounting courses. *Accounting Education, 21*(4), 431–449.

El Mouhayar, R. (2018). Trends of progression of student level of reasoning and generalization in numerical and f igural reasoning approaches in pattern generalization. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 89–107.

Erbilgin, E., & Gningue, S. M. (2023). Using the onto-semiotic approach to analyze novice algebra learners' meaning-making processes with different representations. *Educational Studies In Mathematics*, *114*(2), 337-357.

Fernández-Alonso, R., Suárez-Álvarez, J., & Muñiz, J. (2015). Adolescents' homework performance in mathematics and science: Personal factors and teaching practices. *Journal of Educational Psychology, 107*(4), 1075–1085.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–236)

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.

Frade-Martínez, J., Sánchez-Moreno, J., & Ruiz-Teran, R. (2024). A multilevel investigation of factors related to achievement.

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 111*(23), 8410-8415.

Gandasari, D., & Dwidienawati, D. (2020). Evaluation of online learning with digital communication media during the COVID 19 pandemic. *Journal of the Social Sciences, 48*, 1062–1073.

Ganley, C. M., & McGraw, A. L. (2016). The development and validation of a revised version of the math anxiety scale for young children. *Frontiers in Psychology, 7*(AUG).

García, T., Rodríguez, C., Betts, L., Areces, D., & González-Castro, P. (2016). How affective motivational variables and approaches to learning predict mathematics achievement in upper elementary levels. *Learning and Individual Differences*, *49*, 25–31.

García, T., Boom, J., Kroesbergen, E. H., Núñez, J. C., & Rodríguez, C. (2019). Planning, execution, and revision in mathematics problem solving: Does the order of the phases matter? *Studies in Educational Evaluation*, *61*(March), 83–93.

Gašević, D., Dawson, S., Rogers, T., & Gasevic, D. (2016). Learning analytics should not promote one size fits all: The effects of instructional conditions in predicting academic success. *The Internet and Higher Education, 28*, 68–84.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics edu cation. *ZDM-Mathematics Education*, *39*(1), 127–135.

González-Cabañes, E., García, T., Rodríguez, C., Cuesta, M., & Núñez, J. C. (2020). Learning and emotional outcomes after the application of invention activities in a sample of university students. *Sustainability (Switzerland)*, *12*(18), 7306.

Graham, C. R., Woodfield, W., & Harrison, J. B. (2013). A framework for institutional adoption and implementation of blended learning in higher education. *Internet and Higher Education, 18,* 4-14.

Haider, M. Q. & Andrews-Larson, C. (2022). Examining learning outcomes of inquiry oriented instruction in introductory linear algebra classes. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, *10*(2), 341-359.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge for teaching on student achievement. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hoffman, B. (2010). "I think I can, but I'm afraid to try": The role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiency. *Learning and Individual Differences*, *20*(3), 276–283.

Holmes, W., Nguyen, Q., Zhang, J., Mavrikis, M., & Rienties, B. (2019). Learning analytics for learning design in online distance learning. *Distance Education, 40*(3), 309–329.

Jagust, T., Botički, I., & So, H. J. (2018). Examining competitive, collaborative and adaptive gamification in e-learning. *International Journal of Educational Technology in Higher Education, 15*(1), 24.

Jakubowski, P., Kowalski, K., & Nowak, M. (2023). Exploring the interplay between cognitive biases and economic decision-making.

Jakubowski, T., Newell, A., & Zhao, Y. (2023). Enhancing online learning with data-driven feedback systems. *Journal of Educational Technology, 15*(1), 22-39.

Johnson, E. M., & Larsen, S. P. (2012). Teacher listening: The role of knowledge of content and students. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 117-129.

Johnson, E., Keene, K., & Andrews-Larson, C. (2015). Inquiry-Oriented Instruction: What It Is and How We Are Trying to Help. [Web log post]. *American Mathematical Society*, Blog On Teaching and Learning Mathematics.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, S. (2008). What types of students' effort are rewarded with high marks? *Sociology of Education, 81*(1), 32–52.

Kim, S.-H., Park, N.-H., & Joo, K.-H. (2014). Effects of Flipped Classroom based on Smart Learning on Self-directed and Collaborative Learning. *International Journal of Control and Automation, 7,* 69-80.

Koper, R., & Tattersall, C. (2005). *Learning design: A handbook on modelling and delivering networked education and training*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Kramarski, B., & Gutman, M. (2006). How can self-regulated learning be supported in mathematical E-learning environments? *Journal of Computer Assisted Learning*, *22*(1), 24 33.

Ku, K. Y. L., & Ho, I. T. (2010). Metacognitive strategies that enhance critical thinking. *Metacognition and Learning*, *5*(3), 251–267.

Kunnath, J. P. (2017). Teacher grading decisions: Influences, rationale, and practices. *American Secondary Education, 45*(3), 68–88.

Kuster, G., Johnson, E., Keene, K., & Andrews-Larson, C. (2018). Inquiry-oriented instruction: A conceptualization of the instructional principles. *Primus, 28*(1), 13-30.

Kwon, O. N., Rasmussen, C., & Allen, K. (2005). Students' retention of mathematical knowledge and skills in differential equations. *School Science and Mathematics, 105*(5), 227-239.

Larsen, S. P. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32(*4), 712-725.

Lastinger Center for Learning, University of Florida. (2022). Math Nation. Retrieved July 20, 2022, from https://lastinger.center.ufl.edu/work/mathematics/math-nation/

Laursen, S. L., Hassi, M. L., Kogan, M., & Weston, T. J. (2014). Benefits for women and men of inquiry-based learning in college mathematics: A multi-institution study. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 406-418.

Le, H. T., & Truong, C. T. T. (2021). Tertiary students' perspectives on online learning during emergency remote teaching in the context of Covid-19: A case study [Paper presentation]. 17th International Conference of the Asia Association of Computer-Assisted Language Learning (AsiaCALL 2021).

Leite, W. L., Xing, W., Fish, G., & Li, C. (2022). Teacher strategies to use virtual learning environments to facilitate algebra learning during school closures. *Journal Of Research On Technology In Education*, *56*(2), 95-109.

Losenno, K. M., Muis, K. R., Munzar, B., Denton, C. A., & Perry, N. E. (2020). The dynamic roles of cognitive reappraisal and self-regulated learning during mathematics problem solving: A mixed methods investigation. *Contemporary Educational Psychology, 61*(April), 101869.

Mahmood, S. (2021). Instructional strategies for online teaching in COVID-19 pandemic. *Human Behavior and Emerging Technologies, 3*(1), 199–203.

Marlowe, C. (2012). *The effect of The Flipped Classroom on student Achievement and Stress* [Master's Thesis]. Montana State University Bozeman.

Marsh, H. W., Craven, R. G., & Debus, R. L. (2008). Effects of academic self-concept and self-esteem on academic achievement: A meta-analysis.

Martin, C. K., Nacu, D., & Pinkard, N. (2016). Revealing opportunities for 21st century learning: An approach to interpreting user trace log data. *Journal of Learning Analytics, 3*(2), 37–87.

Martínez-Maldonado, R., Kay, J., Yacef, K., Edbauer, M. T., & Dimitriadis, Y. (2013). MTClassroom and MTDashboard: Supporting analysis of teacher attention in an orchestrated multi-tabletop classroom [International Society of the Learning Sciences.]. *Computer Supported Collaborative Learning, 1*, 320–327.

Mataka, L., & Taibu, R. (2020). A multistep inquiry approach to improve pre-service elementary teachers' conceptual understanding. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 6*(1), 86-99.

Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez Santos, S., & Poulovassilis, A. (2019). Intelligent analysis and data visualization for teacher assistance tools: The case of exploratory learning. *British Journal of Educational Technology, 50*(6), 2920–2942.

Melhuish, K. (2015). Determining what to assess: a methodology for concept domain analysis as applied to group theory. In *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 736-744).

Midgley, C., Maehr, M. L., Hruda, L. Z., Anderman, E., Anderman, L., Freeman, K. E., … Roeser, R. (2000). Manual for the Patterns of Adaptive Learning Sciences (PALS). *University of Michigan - Ann Arbor.*

Mielicki, M. K., Fitzsimmons, C. J., Woodbury, L. H., Marshal, H., Zhang, D., Rivera, F. D., & Thompson, C. A. (2021). Effects of figural and numerical presentation formats on growing pattern performance. *Journal of Numerical Cognition*, *7*(2), 125–155.

Mitten, C., Collier, Z. K., & Leite, W. L. (2021). Online resources for mathematics: Exploring the relationship between teacher use and student performance. *Investigations in Mathematics Learning, 13*(3), 249–218.

Montague, M., Enders, C., & Dietz, S. (2011). Effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 34*(4), 262–272.

Muñoz-Cristóbal, J. A., Jorrin-Abellan, I. M., Asensio-Perez, J. I., Martinez-Mones, A., Prieto, L. P., & Dimitriadis, Y. (2015). Supporting teacher orchestration in ubiquitous learning environments: A study in primary education. *IEEE Transactions on Learning Technologies, 8*(1), 83–97.

Nagel, D. (2013). The 4 pillars of the flipped classroom. *The Journal: Transforming Education Through Technology*. Retrieved from https://thejournal.com/articles/2013/06/18/report-the-4-pillars-of-the-flipped-classroom.aspx

Newton, K. J., Lange, K., & Booth, J. L. (2020). Mathematical flexibility: Aspects of a continuum and the role of prior Knowledge. *The Journal of Experimental Education*, *88*(4), 503–515.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Palloff, R. M., & Pratt, K. (2007). *Building online learning communities: Effective strategies for the virtual classroom*. John Wiley & Sons.

Paquette, L., de Carvalho, A., & Baker, R. S. (2014). Towards understanding expert coding of student disengagement in online learning. In *Proceedings of the 36th Annual Cognitive Science Conference* (pp. 1126–1131).

Passolunghi, M. C., Caviola, S., De Agostini, R., Perin, C., & Mammarella, I. C. (2016). Mathematics anxiety, working memory, and mathematics performance in secondary-school children. *Frontiers in Psychology*, 7(42), 1–8.

Perels, F., Gürtler, T., & Schmitz, B. (2005). Training of self-regulatory and problem-solving competence. *Learning and Instruction*, *15*, 123–139.

Prieto, L. P., Dlab, M. H., Gutié, I., rrez, N. A., Abdulwahed, M., & Balid, W. (2011). Orchestrating technology enhanced learning: A literature review and a conceptual framework. *International Journal of Technology Enhanced Learning*, *3*(6), 583–598.

Prieto, L. P., Dimitriadis, Y., Asensio-Pérez, J. I., & Looi, C. K. (2015). Orchestration in learning technology research: Evaluation of a conceptual framework. *Research in Learning Technology*, 23, 1–15.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277.

Rajab, K. D. (2018). The effectiveness and potential of E-learning in war zones: An empirical comparison of face-to-face and online education in Saudi Arabia. *IEEE Access, 6*, 6783–6794.

Ramirez, G., Shaw, S. T., & Maloney, E. A. (2018). Math anxiety: Past research, promising interventions, and a new interpretation framework. *Educational Psychologist*, *53*(3), 145 164.

Rasmussen, C., & Keynes, M. (2003). Lines of eigenvectors and solutions to systems of linear differential equations. *PRIMUS, 13*(4), 308-320.

Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 189-194.

Resnick, L. B., & Resnick, D. P. (1992). Assessing the thinking curriculum: New tools for educational reform. In B. R. Gifford & O. C. M. C. (Eds.), *Changing assessments* (pp. 37–75). Springer.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. Journal of Educational Psychology, 103(1), 85–104.

Rodríguez-Triana, M. J., Martínez-Monés, A., Asensio-Pérez, J. I., & Dimitriadis, Y. (2015). Scripting and monitoring meet each other: Aligning learning analytics and learning design to support teachers in orchestrating CSCL situations. *British Journal of Educational Technology*, 46(2), 330–343.

Roschelle, J., Feng, M., Murphy, R. F., & Mason, C. A. (2016). Online mathematics homework increases student achievement. *AERA Open, 2*(4), 233285841667396–233285841667312.

Schwier, R. A., Morrison, D., & Daniel, B. K. (2009). A preliminary investigation of self-directed learning activities in a non-formal blended learning environment. Distributed by ERIC Clearinghouse.

Sheikh, S. S. (2018). The effect of using the flipped classroom strategy in teaching mathematics on the academic achievement of the third intermediate grade female students in Makkah Al-Mukarramah. *Journal of Scientific Research in Education: Ain Shams University, 12*(19), 89-133.

Sibgatullin, A., Kislov, R., & Veretennikova, N. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. Retrieved from https://typeset.io/papers/a-systematic-review-on-algebraic-thinking-in-education-3192ltbf

Snijders, T. A. B., & Bosker, R. J. (2012). *Multilevel analysis: An introduction to basic and advanced multilevel modeling* (2nd ed.). Sage Publications.

Soares, J., Blanton, M., & Kaput, J. (2006). Thinking Algebraic across the Elementary School Curriculum. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 228-235

Speer, N. M., & Wagner, J. F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 530-562.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164.
Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565–579.

Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2014). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, 41–54.

Steen-Utheim, T., & Foldnes, N. (2018). A qualitative investigation of student engagement in a flipped classroom. *Teaching in Higher Education, 23*(3), 307–324.

Steinmayr, R., Weidinger, A. F., Schwinger, M., & Spinath, B. (2019). The importance of students' motivation for their academic achievement–replicating and extending previous findings. *Frontiers in Psychology, 10*, 1730.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 386–420.

Stoyanova, M., Tuparova, D., & Samardzhiev, K. (2017). Impact of motivation, gamification and learning style on students' interest in maths classes–A study in 11 high school grade [Paper presentation]. *International Conference on Interactive Collaborative Learning*.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, *24*(4), 439–465.

Van Leeuwen, A. (2015). Learning analytics to support teachers during synchronous CSCL: Balancing between overview and overload. *Journal of Learning Analytics*, 2(2), 138–162.

Vula, E., Avdyli, R., Berisha, V., Saqipi, B., & Elezi, S. (2017). The impact of metacognitive strategies and self-regulating processes of solving math word problems. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(1), 49–59.

Wagner, J. F., Speer, N. M., & Rossa, B. (2007). Beyond mathematical content knowledge: A mathematician's knowledge needed for teaching an inquiry-oriented differential equations course. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 247-266.

Wang, J., Liu, R., De, Star, J., Liu, Y., & Zhen, R. (2019). The moderating effect of regulatory focus in the relationship between potential flexibility and practical flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *56*(January), 218–227.

Wang, Y. F., Petrina, S., & Feng, F. (2017). VILLAGE—Virtual immersive language learning and gaming environment: Immersion and presence. *British Journal of Educational Technology, 48*(2), 431–450.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS, 22*(8), 577-599.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. *Educational Design Research— Part B: Illustrative Cases*, 905-925.

Welsh, M., Cicerello, A., Cuneo, K., & Brennan, M. (1995). Error and temporal patterns in Tower of Hanoi performance: Cognitive mechanisms and individual differences. *Journal of General Psychology*, *122*(1), 69–81.

Wilkie, K. J. (2020). Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 315–336.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, *25*(2), 10–17.

Wu, S. S., Barth, M., Amin, H., Malcarne, V., & Menon, V. (2012). Math anxiety in second and third graders and its relation to mathematics achievement. *Frontiers in Psychology, 3*(JUN), 1–11.

Xue, K., Huggins-Manley, A. C., & Leite, W. L. (2022). Semisupervised learning method to adjust biased item difficulty estimates caused by nonignorable missingness in a virtual learning environment. *Educational and Psychological Measurement, 82*(3), 539–567.

Yu, H., Jiang, S., & Land, K. C. (2015). Multicollinearity in hierarchical linear models. *Social Science Research, 53*, 118–136.

7. Anexos

7.1. Ejercicios de razonamiento – Sistemas de ecuaciones lineales

GRUPO NÚMERO:

PARA CASA:

1. ¿Por qué creéis que es útil saber resolver problemas de sistemas de ecuaciones?

2. ¿Qué método os ha tocado explicar? ¿Por qué creeis que se le llama así a este método?

3. Con los recursos disponibles en el entorno virtual y vuestra propia investigación, explicad con vuestras propias palabras en qué consiste este método de resolución de sistemas de ecuaciones.

4. Intentad plantear un problema cuya solución requiera de aplicar este método.

PARA CLASE:

5. ¿Qué os ha parecido el resto de métodos explicados en clase? ¿Cuál creéis que puede ser el más útil?

6. ¿En qué casos creéis que puede ser más práctico aplicar qué métodos? Comparte tu respuesta con el resto de compañeros de clase y tratad de llegar a un acuerdo.

7. Comparad vuestras respuestas de casa con el otro grupo al que se asignó el mismo método. ¿Habéis llegado a las mismas conclusiones, o hay algún detalle adicional que podríais haber tenido en cuenta?

8. Ahora que conocéis otros métodos de resolución, ¿seguiríais usando el asignado para resolver el problema que habéis propuesto, o creéis que sería más oportuno utilizar otro? Razona tu respuesta.

7.2. Ejercicios de práctica – Sistemas de ecuaciones lineales

Nombre y Apellidos:

Resuelve los siguientes problemas. Recuerda para cada uno seguir estos tres pasos:

Piensa primero. ¿Qué es lo que conocemos? ¿Qué es lo que queremos conocer? ¿Cuántas incógnitas habrá entonces?

Plantea el sistema. ¿Qué pistas me da el enunciado para poder hacerlo? ¿Cómo se relaciona todo?

Resuelve tu sistema. Utiliza el método que creas más conveniente y justifica su uso.

1. Un fabricante de bombillas gana 30 céntimos por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 40 céntimos por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 euros. ¿Cuántas bombillas correctas y cuántas defectuosas fabrico ese día?

2. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de 100 €, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de 180 € y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de 330 €. El almacén vende a un cliente 2.5 kilogramos de este producto por un importe de 890 €. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántos envases de cada tipo se han comprado y resuelve el problema.

3. Un distribuidor de material escolar ha clasificado 120 lápices en cajas de tres tamaños: 3 de tipo pequeño, 5 mediano y 2 grande. Una vez clasificados han sobrado 6 lápices. Además, se sabe que las cajas medianas contienen el doble que las cajas pequeñas y las grandes el triple. ¿Cuántos lápices contiene cada tipo de caja?

4. En una pequeña comunidad, se están llevando a cabo políticas de ahorro de agua debido a la sequía. Según acordado, el hogar típico consume 300 litros al día, y de promedio, hay 3 personas por hogar. Un litro de agua tiene un coste de 0,002€. Para contribuir a la sostenibilidad, se desea reducir el consumo un 20%. Si la comunidad tiene 500 hogares, ¿cuánta agua debe consumir cada hogar? ¿Cuál sería el coste total de agua por hogar después de la reducción?

5. Pedro y sus socios decidieron fundar el año pasado una empresa de telecomunicaciones. Debido a las subidas de los precios de los últimos años, el beneficio actual frente al del año anterior resultó estar en la mitad, pero para el próximo año, debido a los cambios oportunos realizados en la estrategia de negocio, se prevé ganar el doble de la media de estos dos últimos años. Si el beneficio de estos tres años en conjunto está estimado en 100000€, ¿cuánto ganaron estos años y cuánto está previsto que ganen el próximo?

6. En los últimos años, el número de chicas interesadas en ingeniería ha ido incrementando. Atendiendo a las proporciones de hace 10 años, de acuerdo con las cifras mostradas por la Universidad Politécnica de Valencia, anteriormente las carreras de ingeniería eran cursadas por un total de 2 chicas por cada 15 chicos, mientras que, en la actualidad, esa cifra se ha reducido a 1 por cada 5. Si el número de matriculados se ha visto reducido en un 15% y hace 10 años ascendió a un total de 35000, ¿cuántos chicos y cuántas chicas ha llegado a haber ahora y hace 10 años?

7. Hoy en día, muchos de los productos utilizados en limpieza e higiene resultan del progreso y el avance científico en química de las últimas décadas. Para poder determinar cuál es la cantidad necesaria de cada una de las soluciones a mezclar, es necesario recurrir a la resolución de sistemas de ecuaciones. Si una solución contiene un 30% de cloro en agua y otra un 10%, y necesitamos mezclarlas obtienendo 10 litros con una concentración del 20%, ¿cuántos litros de cada solución necesitaremos en total?

8. El envejecimiento de la población en España está resultando en una de las mayores preocupaciones de la sociedad de los últimos años. Ello es debido a que, cada año, la esperanza de vida está resultando ser mayor, mientras que la tasa de natalidad no cesa en su descenso. Para combatir este problema, el gobierno ha llevado a cabo políticas para facilitar el desarrollo de las familias numerosas, así como medidas de apertura a la inmigración. Sin embargo, si bien parece que ha frenado la acelerada subida anterior, la población sigue envejeciendo, estableciéndose en un 20% aquellos mayores de 65 años frente al 15% de hace 15 años. Aunque la tasa de inmigración incrementó un 20%, la de natalidad no dió fruto, viéndose reducida en un 15%. ¿En qué medida afecta la tasa de natalidad y en cuál la inmigración actualmente al intento del rejuvenecimiento de la población?

9. Un amigo se compró un portátil avanzado y un altavoz bluetooth, los dos por 1.800 €, y los vendió 4 años después de segunda mano por 1.050 €. Si con el altavoz ha perdido el 60 % de su valor, y con el ordenador, el 45 %. ¿Cuánto le costó cada uno?

10. En el instituto, un grupo de estudiantes está organizando una colecta para ayudar a una organización benéfica contra el cáncer de mama. Deciden recaudar fondos a través de tres actividades principales: venta de pasteles, rifas y una caminata patrocinada. Por cada pastel se contribuye con 5€, por cada rifa con 3€ y por cada participante en la caminata con 10€. Si con la caminata y con la rifa se cubrió tres cuartas partes de la recaudado, con los pasteles y la caminata la mitad y se ganó un total de 600€. ¿Cuántos participantes hubo en la caminata y cuántos pasteles y rifas se vendieron?