



TRABAJO FIN DE MÁSTER

**MÉTODO DE PÓLYA PARA
LA ENSEÑANZA DE
FUNCIONES EN 3º DE ESO
MEDIANTE PROBLEMAS
REALES**

Estudiante: Marta Peláez Valdivieso

Especialidad: Matemáticas

Tutor académico: M^a Carmen Perea Marco

Curso académico: 2023-24



MASTERPROF UMH
UNIVERSITAS *Miguel Hernández*

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO
ESO Y BACHILLERATO, FP Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS**





RESUMEN

El presente Trabajo Final de Máster surge con la idea de implementar el método propuesto por George Pólya, que es una oportunidad para explorar y comprender un enfoque que consideramos fundamental en la resolución de problemas matemáticos. Este enfoque propone un método de manera estructura y sistemática para ayudar al alumnado en el abordaje de problemas complejos, guiando al alumnado a través de sencillos pasos que son, comprender el problema, idear un plan, ejecutar dicho plan y revisar la solución obtenida.

Más allá de la resolución de problemas en matemáticas, desarrollamos un pensamiento crítico y creativo al resolver las situaciones difíciles que se plantean. Este método también se desarrolla y es aplicable en otras disciplinas como puedan ser la ingeniería o la física, indirectamente tratadas en el actual Trabajo Final de Máster para contextualizar el mismo, dentro de un marco de aprendizaje y respeto sobre el medioambiente.

En este Trabajo Final de Máster, profundizamos en la teoría del método Pólya y exploramos sus aplicaciones prácticas, analizando su efectividad en contextos educativos y profesionales. De esta manera, se enriquecen tanto los conocimientos del alumno como los del propio docente, contribuyendo a la investigación en educación matemática. En conclusión, esta propuesta ofrece una excelente oportunidad para mejorar habilidades y conocimientos, y para contribuir al avance de la educación matemática. Además, puede servir como punto de partida para desarrollar otros saberes o abordar problemas de mayor dificultad.

ABSTRACT

This Master's Final Project arises with the idea of implementing the method proposed by George Pólya, which is an opportunity to explore and understand an approach that we consider fundamental in solving mathematical problems. This approach proposes a in a structured and systematic method to help students in tackling complex problems, guiding students through simple steps: understanding the problem, devising a plan, executing that plan and reviewing the obtained solution.

Beyond solving problems in mathematics, we develop critical and creative thinking when solving difficult situations that arise. This method is also developed and applicable in other disciplines such as engineering or physics, indirectly addressed in the current Master's Final Project to contextualize it, within a framework of learning and respect for the environment.

In this Master's Final Project, we delve into the theory of Pólya's method and explore its practical applications, analyzing its effectiveness in both educational and professional contexts. This approach enriches the knowledge of both students and teachers, contributing to research in mathematics education. In conclusion, this proposal offers an excellent opportunity to enhance skills and knowledge, and to advance mathematics education. Additionally, it can serve as a starting point for developing other knowledge areas or tackling more complex problems.





PALABRAS CLAVE

Funciones, Gráficas, Pólya, Resolución de problemas matemáticos, Pensamiento crítico, ODS, Sostenibilidad, Climatización, Agua caliente, Fotovoltaica.





Contenido

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 CONTEXTO Y JUSTIFICACIÓN.....	1
1.2 OBJETIVOS.....	5
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. OBSTÁCULOS Y ERRORES.....	6
2.2. MÉTODO DE PÓLYA.....	6
3. MARCO LEGISLATIVO	10
4. METODOLOGÍA	13
4.1 SELECCIÓN DE PROBLEMAS COTIDIANOS.....	13
4.2 RECURSOS DIDÁCTICOS Y TEMPORALIZACIÓN.....	14
5. RESULTADOS	15
6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	32
7. CONTRIBUCIONES Y/O APLICACIONES PRÁCTICAS	33
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34



1. INTRODUCCIÓN

En el presente Trabajo de Fin de Master pretendemos desarrollar una propuesta de aprendizaje del bloque de funciones a través del método de George Pólya. Esto se hará con ejemplos mediante una serie de problemas para alumnado de tercero de Educación Secundaria Obligatoria. Dichos problemas se plantearán con aplicación clara y directa en la vida real con ejemplos cotidianos, atendiendo a uno de los saberes básicos que han de aprender en esta etapa educativa, en nuestro caso hemos escogido desarrollar Relaciones y funciones correspondientes al Bloque 5. La contextualización de estos problemas en la vida real se realiza centrado principalmente en la sostenibilidad a través principalmente de la generación de energía sostenible y la concienciación de lo que supone un recurso natural tan imprescindible como el agua.

Para reforzar este contexto es importante matizar que nos encontramos en la zona del levante español, lo cual indica el alto grado de energía solar que encontramos y la importancia del aprovechamiento de la energía solar. Es importante también el empleo de sistemas de climatización eficiente, y de calentamiento de agua sanitaria. En estos puntos se usarán datos reales por lo que se podrá tener un orden de magnitud de la energía consumida, y de cuánto dinero puede suponer climatizar una vivienda o calentar el agua.

Por otro lado, se realizarán cálculos de volumen de agua en una piscina, relacionando estos valores con su equivalente en volumen de agua empleado en una ducha. En un medio ambiente de sequía como es en el que nos encontramos es muy importante conocer y estar concienciado de los volúmenes de agua que gastan para diferentes usos.

Este contexto queda justificado en primer lugar a través de la Constitución de 1978 y seguidamente LOMLOE en la que se establece tanto los saberes básicos a tratar en esta etapa educativa como la resolución de problemas y la manera de contextualizarlos en la vida real y los Objetivos de desarrollo sostenible recogidos en la agenda 2030.

1.1 CONTEXTO Y JUSTIFICACIÓN

Para desarrollar un método en la resolución de problemas matemáticos, desarrollamos la idea de vivienda sostenible, mediante varios ejemplos que ponen de manifiesto la importancia de reducir el consumo energético y que además se ve reflejado en un ahorro económico además de energético. Además, ayuda a proteger el medio ambiente.

Elaboramos una serie de problemas con relación en la vida real, centrados principalmente en sostenibilidad, desarrollando la idea de vivienda sostenible, mediante varios ejemplos que ponen de manifiesto la importancia de reducir el consumo energético y que además se ve reflejado en un ahorro económico además de energético. También reforzamos la importancia de un recurso vital como es el agua y damos un orden de magnitud del volumen de una piscina doméstica o una olímpica. Todo ello contribuye además a proteger el medio ambiente. En este caso los problemas se enfocarán desde el punto de vista de

las funciones, pues los saberes básicos que se van a tratar están desarrollados para funciones.

En este caso los problemas se enfocarán desde el punto de vista de las funciones, pues los saberes básicos que se van a tratar están desarrollados para funciones con el enfoque de resolución matemático mediante problemas propuesto por George Pólya, contextualizado como hemos comentado en un entorno de sostenibilidad y concienciación de la protección del medio ambiente.

En cuanto a la justificación, todo lo comentado anteriormente aparece en la LOMLOE, que cita textualmente estos puntos que recogemos a continuación.

- Disposición adicional sexta. Educación para el desarrollo sostenible y para la ciudadanía mundial. Tal como se establece en el cuarto Objetivo de Desarrollo Sostenible y de la Agenda 2030, la educación para el desarrollo sostenible y para la ciudadanía mundial se tendrá en cuenta en los procesos de formación del profesorado y en el acceso a la función docente. De acuerdo con lo anterior, para el año 2022 los conocimientos, habilidades y actitudes relativos a la educación para el desarrollo sostenible y para la ciudadanía mundial habrán sido incorporados al sistema de acceso a la función docente. Asimismo, en 2025 todo el personal docente deberá haber recibido cualificación en las metas establecidas en la Agenda 2030.
- Dieciocho. Se modifican los apartados 1, 2 y 6 del artículo 26, quedando redactados en los siguientes términos: «1. Los centros elaborarán sus propuestas pedagógicas para todo el alumnado de esta etapa atendiendo a su diversidad. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo. Las Administraciones educativas determinarán las condiciones específicas en que podrá configurarse una oferta organizada por ámbitos y dirigida a todo el alumnado o al alumno o alumna para quienes se considere que su avance se puede ver beneficiado de este modo. 2. En esta etapa se prestará una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias establecidas y se fomentará la correcta expresión oral y escrita y el uso de las matemáticas. A fin de promover el hábito de la lectura, se dedicará un tiempo a la misma en la práctica docente de todas las materias. Para fomentar la integración de las competencias trabajadas, se dedicará un tiempo del horario lectivo a la realización de proyectos significativos y relevantes y a la resolución colaborativa de problemas, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión y la responsabilidad.»
- «Artículo 144. Evaluaciones de diagnóstico. 1. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa y los organismos correspondientes de las Administraciones educativas colaborarán en la realización de un marco común de evaluación que sirva como referencia de las evaluaciones de diagnóstico contempladas en los artículos 21 y 29 de esta Ley. Los centros docentes realizarán una evaluación a todos sus alumnos y alumnas en cuarto curso de educación primaria y en segundo curso de educación secundaria obligatoria, según dispongan las Administraciones

educativas. La finalidad de esta evaluación será diagnóstica y en ella se comprobará al menos el grado de dominio de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática. Los centros educativos tendrán en cuenta los resultados de estas evaluaciones en el diseño de sus planes de mejora

- «Disposición adicional vigésima quinta. Fomento de la igualdad efectiva entre hombres y mujeres. 1. Con el fin de favorecer la igualdad de derechos y oportunidades y fomentar la igualdad efectiva entre hombres y mujeres, los centros sostenidos parcial o totalmente con fondos públicos desarrollarán el principio de coeducación en todas las etapas educativas, de conformidad con lo dispuesto por la Ley Orgánica 3/2007, de 22 de marzo, para la igualdad efectiva de mujeres y hombres, y no separarán al alumnado por su género. 2. Con objeto de favorecer la igualdad de derechos y oportunidades y, para garantizar la efectividad del principio contenido en el apartado l) del artículo 1, los centros educativos incorporarán medidas para desarrollar la igualdad efectiva entre hombres y mujeres en los respectivos planes de acción tutorial y de convivencia. 3. Los centros educativos deberán necesariamente incluir y justificar en su proyecto educativo las medidas que desarrollan para favorecer y formar en igualdad en todas las etapas educativas, incluyendo la educación para la eliminación de la violencia de género, el respeto por las identidades, culturas, sexualidades y su diversidad, y la participación activa para hacer realidad la igualdad. 4. En todo caso, las Administraciones educativas impulsarán el incremento de la presencia de alumnas en estudios del ámbito de las ciencias, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas, así como en las enseñanzas de formación profesional con menor demanda femenina. Del mismo modo, las Administraciones educativas también promoverán la presencia de alumnado masculino en aquellos estudios en los que exista de forma notoria una mayor matrícula de mujeres que de hombres. 5. Las Administraciones educativas promoverán que los currículos y los libros de texto y demás materiales educativos fomenten el igual valor de mujeres y hombres y no contengan estereotipos sexistas o discriminatorios. Asimismo, incluirán estos contenidos en los programas de formación inicial del profesorado.»

A la vista de lo mencionado resaltamos la importancia tanto de los objetivos de desarrollo sostenible como del papel fundamental que juegan las matemáticas en este proceso.

Se tiene en cuenta también la atención a la diversidad, por lo que se plantean problemas con diferentes niveles de complejidad. Esto permite trabajar y desarrollar los mismos conceptos, adaptándose a las distintas capacidades del alumnado y proporcionando retos adecuados a sus necesidades.

Tal como menciona la LOMLOE en su disposición adicional Sexta, se deben abordar los puntos necesarios para desarrollar los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) en cumplimiento de la Agenda 2030:

- ODS 1: Poner fin a la pobreza en todas sus formas en todo el mundo.
- ODS 2: Poner fin al hambre.

- ODS 3: Garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades.
- ODS 4: Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.
- ODS 5: Lograr la igualdad entre los géneros y empoderar a todas las mujeres y las niñas.
- ODS 6: Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos.
- ODS 7: Garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna.
- ODS 8: Promover el crecimiento económico inclusivo y sostenible, el empleo y el trabajo decente para todos.
- ODS 9: Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización sostenible y fomentar la innovación.
- ODS 10: Reducir la desigualdad en y entre los países
- ODS 11: Lograr que las ciudades sean más inclusivas, seguras, resilientes y sostenibles
- ODS 12: Garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles
- ODS 13: Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos
- ODS 14: Conservar y utilizar sosteniblemente los océanos, los mares y los recursos marinos
- ODS 15: Gestionar sosteniblemente los bosques, luchar contra la desertificación, detener e invertir la degradación de las tierras, detener la pérdida de biodiversidad
- ODS 16: Promover sociedades justas, pacíficas e inclusivas
- ODS 17: Revitalizar la Alianza Mundial para el Desarrollo Sostenible



Ilustración 1: ODS en la agenda 2030

De esta lista trabajaremos las metas que pertenecen a los puntos siguientes.

- **ODS 4:** Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.

Meta 4.4 Aumento de las competencias para acceder al empleo.

Meta 4.7 Fomentar la educación Global para el Desarrollo Sostenible.

Meta 4.C Mejorar la cualificación de docentes.

- **ODS 6:** Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos.

Meta 6.4 Aumentar el uso eficiente de recursos hídricos.

- **ODS 7:** Garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna.

Meta 7.1: Garantizar acceso universal a energía

Meta 7.2: Aumento de las energías renovables

Meta 7.3: Duplicar la tasa de eficiencia energética

- **ODS 11:** Lograr que las ciudades sean más inclusivas, seguras, resilientes y sostenibles

Meta 11.6 Reducción del impacto ambiental en ciudades.

- **ODS 12:** Garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles.

Meta 12.2 Uso eficiente de recursos naturales.

- **ODS 13:** Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos

Meta 13.3 Mejora de la Educación y sensibilización medioambientales.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo del presente trabajo es elaborar una guía que pueda servir tanto para el alumnado como para el docente.

Por un lado, se trata del aprendizaje de un método de resolución de problemas complejos mediante el método Pólya para el alumnado. Favorecer el pensamiento es clave y según (Meneses,2019). Los estudiantes presentan dificultad para establecer la relación que existe entre la pregunta del problema y los datos proporcionados, dificultándoseles diseñar estrategias que les permitan encontrar la solución. Este es uno de los pasos fundamentales de Pólya. Trabajar para relacionar estos dos conceptos favorece la capacidad de resolución de problemas cada vez más complejos.

Por otro lado, se considera una guía para que el docente pueda elaborar los problemas con la consecución, y pistas necesarias para que el alumnado mediante el pensamiento crítico pueda comprender el problema, elaborar su plan, ejecutarlo y analizarlo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. OBSTÁCULOS Y ERRORES

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria enfrenta numerosos obstáculos y errores que pueden afectar significativamente la comprensión de los estudiantes. Según Socas (1997), las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas a menudo se originan en el microsistema educativo, incluyendo factores relacionados con el alumno, la materia, el profesor y la institución escolar. Estas dificultades pueden manifestarse en errores comunes como la mala interpretación de símbolos matemáticos, el manejo inadecuado de conceptos y procedimientos, y la transferencia incorrecta entre representaciones matemáticas (Radatz, 1980). Además, estudios recientes como el de González y Gómez (2013) señalan que muchos estudiantes tienen problemas para comprender y aplicar conceptos fundamentales como la pendiente y la intersección de funciones lineales, lo que sugiere una necesidad de enfoques didácticos más efectivos que aborden estas deficiencias desde una perspectiva integradora y práctica. Para superar estos obstáculos, es esencial que los docentes adopten estrategias de enseñanza que promuevan un entendimiento profundo y contextualizado de los conceptos matemáticos, facilitando así una mejor resolución de problemas y una mayor retención del conocimiento.

En la investigación desarrollada por Socas, M. (1997) clasifican los errores en categorías como cálculos incorrectos, asociaciones erróneas y deficiencias en la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos. Los resultados obtenidos por Alpizar Vargas y otros (2018) muestran problemas en la interpretación de la pendiente y la intersección en las gráficas de funciones, así como en la diferenciación entre variables e incógnitas.

2.2. MÉTODO DE PÓLYA

George Pólya es un reconocido matemático de mediados del siglo XX que aún en la actualidad sigue siendo un referente y se continúa desarrollando el método que creó hace casi 80 años. Estudios prueban la efectividad del método como el de (Rojas,2020) en el que los estudiantes que realizaron el método de Pólya lo valoraron muy positivamente.

George Pólya, reconocido matemático del siglo XX propone un enfoque en la resolución de problemas a la hora de enseñar matemáticas. Esta importancia radica en favorecer el desarrollo de la creatividad y el pensamiento, así como la habilidad para abordar problemas complejos de manera efectiva.

Pólya, enfatizó la importancia de enseñar como pensar a los alumnos, no únicamente que pensar, a la hora de enfrentarse a cuestiones matemáticas. En el mencionado enfoque se trabajan diferentes cuestiones.

Pensamiento crítico: En la resolución de problemas se requiere que analicemos, sinteticemos y evaluemos información de forma lógico y meticulosa. Al afrontar los problemas matemáticos, los estudiantes emplean el pensamiento crítico y cuestionan sus suposiciones.

Creatividad: Al resolver problemas matemáticos se encuentran soluciones originales y pueden salirse de lo común. Los alumnos desarrollan su creatividad explorando diferentes enfoques en la resolución de un problema, buscando conexiones inesperadas entre conceptos.

Persistencia: En multitud de problemas matemáticos no encontraremos soluciones directas y se requiere de tiempo y esfuerzo para su resolución. Enfrentándose a desafíos con cierta dificultad, los estudiantes aprenden a perseverar y a no rendirse con facilidad.

Transferencia de habilidades: Las habilidades que se desarrollan en la resolución de problemas matemáticos van más allá de las matemáticas y se pueden aplicar en diversas áreas cotidianas y de la vida en general, desde resolver problemas cotidianos hasta analizar situaciones complejas en campos más específicos como pueden ser la ciencia, ingeniería o economía

En conclusión, con la enseñanza de matemáticas enfocada en la resolución de problemas según la metodología de George Pólya, no solo ayudamos a los alumnos a dominar conceptos matemáticos, sino que también promovemos el desarrollo de habilidades cognitivas y la capacidad para enfrentar con confianza y creatividad diversos desafíos

El método de resolución de problemas de George Pólya, es altamente reconocido por su efectividad para el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo del pensamiento creativo y crítico en el alumnado.

Consiste en 4 pasos a seguir para guiar al alumnado en la resolución de cada problema de manera sistemática y reflexiva. Estos pasos son Seleccionar un tema, formular el problema. Una guía paso a paso y solución y reflexión. Detallamos cada uno de esos pasos. Hay que tener en cuenta que estos 4 son los pasos del alumno para su resolución, como docentes tenemos que ir más allá, ya que para que ellos puedan llegar a la resolución del problema por este método debemos realizar un trabajo previo y final posterior al suyo. Así pues, a nivel docente planteamos 4 puntos, en los que dentro del tercero encontramos los 4 pasos propiamente dicho de George Pólya para el alumnado.

Instrucciones:

1. **Seleccionar un Tema:** Elegir un tema matemático apropiado para el nivel de los estudiantes a los que vamos a dirigir el problema (por ejemplo, álgebra, geometría, cálculo, etc.)

Formular el Problema: Diseñar un problema que no sea directamente resoluble con una fórmula o método estándar que requiera de reflexión y análisis por parte del estudiante. la creación de enunciados es crucial en la formación matemática (Ortega, 2011)

1. **Guía Paso a Paso:**

- **Comprender el Problema:** En esta etapa el alumnado lee cuidadosamente el enunciado del problema para comprender el objetivo de lo que se les está pidiendo. Identificar incógnitas, y las condiciones del problema. Se enfatiza la necesidad de hacer preguntas, incluso aunque estas puedan parecer obvias Se pueden escribir preguntas o

pistas que guíen y ayuden a los estudiantes a comprender el objetivo del problema.

- **Elaborar un Plan:** Una vez comprendido el problema se debe idear un plan para su resolución. Esto implica considerar distintos enfoques, estrategias y herramientas que les puedan resultar útiles. Pueden pensar en problemas similares ya resueltos. Se han de proporcionar sugerencias que ayuden a los estudiantes a desarrollar una posible estrategia a seguir, pero sin darles la solución.
- **Ejecutar el Plan:** Con el plan en mente los alumnos deben proceder a implementarlo, realizando a los cálculos, dibujo, diagrama u otros apoyos visuales que puedan ser útiles. Diseñar el problema de tal manera que los estudiantes puedan aplicar sus habilidades matemáticas para resolverlo.
- **Mirar hacia Atrás:** Una vez que el alumno ha llegado a una solución al problema planteado se debe el trabajo para verificar su validez. Pólya enfatizó lo importante que es reflexionar sobre el proceso, en la búsqueda de cualquier posible error cometido, y si es el caso retroceder, revisar y corregir, empleando si es necesario una estrategia diferente. Incluir preguntas para que los estudiantes reflexionen evaluando la solución a la que han llegado y consideren otras estrategias a seguir.

2. **Solución y Reflexión:** Proporciona una solución detallada al problema y explica cómo cada paso de Pólya se aplica en la resolución. Incluye también reflexiones sobre posibles variaciones o extensiones del problema.

Para el desarrollo de este trabajo tenemos en cuenta su bibliografía, que como bien hemos comentado, se sigue empleando y es un referente en la actualidad. Las obras más importantes de Pólya son:

“How to solve it” (1945) Se trata del trabajo más conocido de George Pólya, en el cual expone su método para la resolución de problemas matemáticos de forma efectiva, el que conocemos como el método Pólya. En el libro se describen los pasos a seguir en el método Pólya para que los alumnos puedan abordar y resolver cualquier problema matemático de forma reflexiva y sistemática.

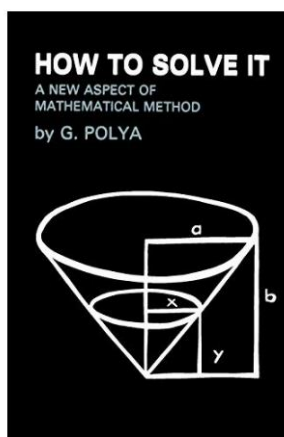


Ilustración 2: How to solve it by G. Pólya

“Mathematics and Plausible Reasoning” (1954): en este libro George Pólya desarrolla el proceso de razonamiento plausible aplicado a las matemáticas, en el que se emplean conjeturas y argumentos heurísticos para su aplicación en problemas difíciles. Pólya mantiene la idea de que la intuición y el razonamiento lógico son imprescindibles para resolver problemas matemáticos

“Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving” (1962). En este libro George Pólya amplía los conceptos que fueron presentados 17 años antes en su primer libro “How to solve it” al tiempo que ofrece más ideas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje matemático en la resolución de problemas. Pólya ofrece más ejemplos concretos y técnicas prácticas para la mejora de habilidades de los estudiantes para resolver problemas.

Además de los libros Pólya escribió un gran número de artículos sobre una variedad de temas relacionado con las matemáticas, en el que se incluye la teoría de números, geometría o probabilidad entre otros. En los artículos a menudo contenían ejemplos de su método y enfoque para resolver problemas y aplicaciones en el campo docente.

A lo largo del tiempo se ha continuado con el desarrollo y aplicación del método de Pólya en la enseñanza de las matemáticas. En la búsqueda de trabajos académicos y libros más recientes sobre la enseñanza en la resolución de problemas matemáticos proporcionamos una visión más actualizada de cómo aplicar el método de Pólya en la educación de las matemáticas modernas.

3. MARCO LEGISLATIVO

Según el Decreto 107-2022 de la Conselleria de Educació apartado Pto 4, pág 13 del Anexo III (Matemáticas) Encontramos la relación de saberes básicos que se han de abordar en esta etapa educativa. De la que hacemos referencia. En el caso del bloque 5 relaciones funciones los saberes básicos son los siguientes:

Relaciones y funciones	Bloque 5	Variable. Variación y relación entre variables.
		Funciones lineales. Construcción e interpretación de la tabla de valores y de su gráfica.
		Identificación de la ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y de los puntos de corte con los ejes.
		Análisis e interpretación de funciones no lineales a partir de su gráfica.
		Programas informáticos de geometría dinámica e iniciación a las calculadoras gráficas.
		Contribución de la humanidad al desarrollo del análisis y de sus aplicaciones, incorporando la perspectiva de género. Valoración de los usos sociales y científicos del análisis matemático.
		Perseverancia y flexibilidad en el cambio de estrategias, técnicas o métodos asociados a las relaciones y a las funciones.

Tabla 1: Saberes Básicos Bloque 5

En el caso que nos ocupa trabajaremos los apartados: Variable. Variación y relación entre variables. Funciones lineales. Construcción e interpretación de la tabla de valores y de su gráfica. Identificación de la ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y de los puntos de corte con los ejes. Análisis e interpretación de funciones no lineales a partir de su gráfica.

Variable. Variación y relación entre variables.	PROBLEMA 1,2 Y 3
Funciones lineales. Construcción e interpretación de la tabla de valores y de su gráfica.	PROBLEMA 1,2 Y 3
Identificación de la ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y de los puntos de corte con los ejes.	PROBLEMA 4
Análisis e interpretación de funciones no lineales a partir de su gráfica.	PROBLEMA 4
Perseverancia y flexibilidad en el cambio de estrategias, técnicas o métodos asociados a las relaciones y a las funciones.	PROBLEMA 1,2, 3, Y 4

Tabla 2: Relación entre saberes básicos y problema propuestos

Según la Página 27 del Anexo I del Real Decreto 217/2022 del Ministerio de Educación encontramos las competencias clave a seguir:

Artículo 11. Competencias clave y Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica.

1. A efectos de este real decreto, las competencias clave son las siguientes:

- a. Competencia en comunicación lingüística.
- b. Competencia plurilingüe.
- c. Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.
- d. Competencia digital.
- e. Competencia personal, social y de aprender a aprender.
- f. Competencia ciudadana.
- g. Competencia emprendedora.
- h. Competencia en conciencia y expresión culturales.

De todas ellas trabajaremos las siguientes, con sus diferentes sub apartados.

Competencias Clave	Descriptorios operativos
3. Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)	STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
	STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.
4. Competencia digital (CD)	CD1. Realiza búsquedas en internet atendiendo a criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y archivándolos, para recuperarlos, referenciarlos y reutilizarlos, respetando la propiedad intelectual.
	CD4. Identifica riesgos y adopta medidas preventivas al usar las tecnologías digitales para proteger los dispositivos, los datos personales, la salud y el medioambiente, y para tomar conciencia de la importancia y necesidad de hacer un uso crítico, legal, seguro, saludable y sostenible de dichas tecnologías.
	CD5. Desarrolla aplicaciones informáticas sencillas y soluciones tecnológicas creativas y sostenibles para resolver problemas concretos o responder a retos propuestos, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.
5. Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)	CPSAA4. Realiza autoevaluaciones sobre su proceso de aprendizaje, buscando fuentes fiables para validar, sustentar y contrastar la información y para obtener conclusiones relevantes.
6. Competencia ciudadana (CC)	CC4. Comprende las relaciones sistémicas de interdependencia, ecoddependencia e interconexión entre actuaciones locales y globales, y adopta, de forma consciente y motivada, un estilo de vida sostenible y ecosocialmente responsable.

Desarrollamos los criterios de evaluación de las competencias específicas a tratar adaptados al caso que hemos escogido.

En cuanto a las competencias clave que hallamos del Pto 6, pág 25 del Anexo III (Matemáticas) del Decreto 107-2022 de la Conselleria de Educació, escogemos las competencias específicas con los criterios de Evaluación que se van a trabajar

Competencias específicas (CE)		Criterios de Evaluación (CrE)	
CE1	Resolución de problemas	1.1	Extraer la información necesaria del enunciado de problemas sencillos del ámbito social o de iniciación al ámbito profesional y científico, y estructurar el proceso de resolución en distintas etapas.
		1.2	Resolver problemas sencillos del ámbito social o de iniciación a los ámbitos profesional y científico movilizandando de manera adecuada y justificada los conceptos y procedimientos necesarios.
		1.3	Comparar la solución obtenida con la de sus compañeros y compañeras, valorando si se requiere una revisión o rectificación del proceso de resolución seguido
		1.4	Generalizar la resolución de algunos problemas sencillos para solucionar problemas similares o más complejos.
CE2	Razonamiento y conexiones	2.3	Conectar diferentes conceptos y procedimientos matemáticos adecuados al nivel madurativo, cognitivo y evolutivo del alumnado, argumentando el razonamiento empleado
CE4	Pensamiento computacional	4.1	Conocer aspectos básicos de la hoja de cálculo y de programas de cálculo simbólico.
		4.2	Reproducir y diseñar algoritmos sencillos mediante programación por bloques para resolver situaciones problemáticas del ámbito social o de iniciación a los ámbitos profesional y científico.
CE5	Representaciones	5.1	Manejar las representaciones icónico-manipulativas, numéricas, simbólico-algebraicas, tabulares, funcionales, geométricas y gráficas de objetos matemáticos respetando las reglas que las rigen.
CE7	Relevancia social, cultural y científica	7.3	Valorar las matemáticas como vehículo para la resolución de problemas cotidianos del ámbito social y cultural.

4. METODOLOGÍA

4.1 SELECCIÓN DE PROBLEMAS COTIDIANOS

Se plantean 6 problemas en los que se piden en dificultad progresiva atender los saberes básicos correspondientes al bloque 5 de Relaciones y funciones al mismo tiempo que se desarrollan diferentes puntos de la vida cotidiana

Para contextualizar el enfoque propuesto, como hemos mencionado se plantean una serie de problemas relacionados con la optimización del consumo energético, por su relevancia actual que también promueve la conciencia medioambiental y la responsabilidad social.

Problema 1: Sustitución de Máquina de Aire Acondicionado

Se plantea la idea de comprar o no una máquina de aire acondicionado nueva en sustitución de la actual, considerando el precio, la mejora en el rendimiento y el menor consumo de la nueva máquina, así como el tiempo de amortización. Este problema está diseñado para alumnos con mayor dificultad de aprendizaje, proporcionando un contexto accesible y relevante.

Problema 1B: Comparación de Máquinas de Aire Acondicionado

Se plantea nuevamente la compra de una máquina nueva, pero en este caso se comparan dos o más máquinas diferentes para determinar si es más económico a largo plazo comprar una máquina de aire con un rendimiento superior, a pesar de su mayor coste inicial. Este problema atiende a alumnos con necesidades educativas especiales, presentando una versión simplificada del problema anterior.

Problema 2: Instalación Solar Fotovoltaica

Se traslada un caso real de una instalación solar fotovoltaica, considerando la inversión inicial y el ahorro mensual. Los alumnos deberán hallar el ahorro anual, el ahorro acumulado y analizar qué ocurre cuando la recta corta el eje de coordenadas, integrando así el concepto de funciones lineales en un contexto práctico y realista.

Problema 3: Comparación de Termo y Aerotermo

Se estudia la compra de un termo para calentar agua caliente en comparación con un aparato de tecnología superior y más económico. Este problema permite a los alumnos ser conscientes del coste mensual de calentar el agua en términos económicos, energéticos y de volumen de agua, y considerar la variabilidad climática en diferentes regiones del país. Es un buen problema para finalizar con funciones lineales, proporcionando un reto adecuado para alumnos con mayores capacidades.

Problema 4: Cálculo de Áreas y Volúmenes de una Piscina

Se plantea calcular áreas y volúmenes de una piscina y comparar ese volumen con el agua utilizada en duchas equivalentes, destacando la magnitud que representa y el volumen de agua que puede evaporarse. Este problema ayuda a los alumnos a aplicar conceptos de funciones no lineales en un contexto tangible

Problema 4B: Evaporación de Agua en una Piscina

Este problema es una extensión del anterior, con mayor complejidad para alumnos con capacidades especiales. Se calcula el volumen de agua evaporada semanalmente en función del radio de la piscina, proporcionando un desafío adicional en el manejo de funciones no lineales.

4.2 RECURSOS DIDÁCTICOS Y TEMPORALIZACIÓN

Se plantean los problemas en progresión, marcando los pasos propuestos por George Pólya y en orden de dificultad ascendente, de manera que la resolución de un problema pueda ayudar en el planteamiento del siguiente. También se tienen en cuenta variantes de los problemas de mayor y menor dificultad atendiendo a la diversidad en el aula.

Se realizarán tanto clases magistrales, como clases dedicadas a la resolución de los problemas en los que los estudiantes pasarán a ser los protagonistas y el profesor pasará a tener el papel de guía. En esta fase se contará con sesiones en laboratorio de informática para que puedas representar las funciones en Excel, formular los distintos problemas y sus gráficas y puedan comprobar fácilmente diferentes resultados combinando las distintas variables intervinientes. Según el estudio (Molina,2019) la enseñanza de las matemáticas se ha enriquecido gracias a las TICS, por lo que entendemos es una herramienta fundamental.

Se tomarán también recursos didácticos reales como puedan ser las facturas de la luz para su explicación, así como fichas técnicas de productos reales de los que sacaremos datos para desarrollar los problemas.

Se dedicarán 5 sesiones para impartir esta serie de problemas, con un problema específico abordado en cada sesión. Además, la última de ellas será una clase adicional para finalizar las gráficas y explorar diversas variaciones de los ejercicios propuestos.

Sesión 1: Se introducirán los conceptos necesarios para el posterior seguimiento de los problemas planteados. Esto incluye saberes básicos transversales de ciencia y tecnología que de forma simplificada se les explicará y planteará para su posterior utilización.

Sesión 2: Se realizarán los problemas 1 y 2 con sus variantes de dificultad reducida, trabajando las funciones lineales, gráficas, hojas de cálculo.

Sesión 3: Se realizará el problema 3, explicando previamente los fundamentos del proceso de calentamiento del agua y los factores que intervienen en este punto

Sesión 4: Se realizará el problema 4, funciones no lineales a través de las piscinas, siendo primordial en este punto remarcar la importancia del agua como recurso

Sesión 5: Sesión de repaso y variables con las gráficas en Excel y probando variables, y casos reales de cada alumno con fichas de productos reales que hayan buscado los mismos.

5. RESULTADOS

En el presente apartado se desarrolla cada uno de los problemas en su totalidad, instrucciones a seguir, enunciado, pasos del método de Pólya, y reflexiones. También se solucionan los problemas con indicaciones que pueden ser de utilidad a nivel docente

PROBLEMA 1 SUSTITUCIÓN DE MÁQUINA DE AIRE ACONDICIONADO

Paso 1: Elegir tema: Funciones lineales Caso más sencillo, atendiendo a la diversidad.

Paso 2: Enunciar el problema: Disponemos de una máquina de aire acondicionado y estamos valorando si comprar una nueva. La máquina nueva tiene un rendimiento de 415 % mientras que la antigua tiene un rendimiento de 202%. Con la máquina nueva gastaríamos menos en la factura de la luz cada, con lo que ahorramos, pero habría que hacer una inversión al principio.

Usamos el aire acondicionado 4 horas al día durante los 4 meses de invierno y 4 horas al día durante los 4 meses de verano.

Queremos saber cuántos años tardaríamos en comenzar a ahorrar.

Datos:

Precio de la luz, Ratio Precio máquinas, rendimiento de las máquinas.

Maquina actual: 7.000 w, rendimiento 202%

Maquina nueva: 7.000 w, rendimiento 412%, precio: 1.800€

- ¿Cuál es la función del consumo eléctrico de cada máquina cada día? ¿y cada mes? ¿y cada año?
- ¿Cuál es la función del gasto económico de cada máquina cada año?
- Dibujad las dos gráficas superpuestas
- ¿después de cuánto tiempo sale rentable la compra de la máquina nueva?

Paso 3: Guía Paso a Paso:

- **Comprender el Problema:** Con los datos proporcionados, se ve la progresión de necesidades hasta llegar al punto final. Primero necesidad térmica, consumo de electricidad a través de la eficiencia del sistema, y el paso del consumo de energía al económico a través del precio de la luz.
- **Elaborar un Plan:** El alumno debe tener claro los conceptos que relacionan unas variables con otras.
- **Ejecutar el Plan:** Con todo ello en mente, se ha de ejecutar cada paso planificado, de forma que cada paso que das te prepara para dar el siguiente paso.
- **Mirar hacia Atrás:** En este caso proponemos realizar una gráfica en Excel para la toma de decisiones, igual que en el caso anterior se anima al alumno a investigar y trasladar el problema a su ejemplo particular.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿Cuál es la función del consumo eléctrico de cada máquina cada día? ¿y cada mes? ¿y cada año?

$$f(\text{día}) = d \frac{P}{\eta} h$$

$$f(\text{mes}) = m 30 \frac{P}{\eta} h$$

$$f(\text{año}) = au 30 \frac{P}{\eta} h$$

Siendo:

- d: días
- m: meses
- a: años
- u: meses de uso al año
- P: Potencia eléctrica en W
- h: horas de uso al día
- η : rendimiento

La secuencia de las preguntas conduce y facilita el seguimiento paso a paso de las variables que intervienen en las funciones. En este caso la función es la misma para las dos máquinas, aunque con valores distintos

- ¿Cuál es la función del gasto económico de cada máquina cada año?

Para la máquina actual la función es

$$f(\text{año}) = au 30 \frac{P}{\eta} hp$$

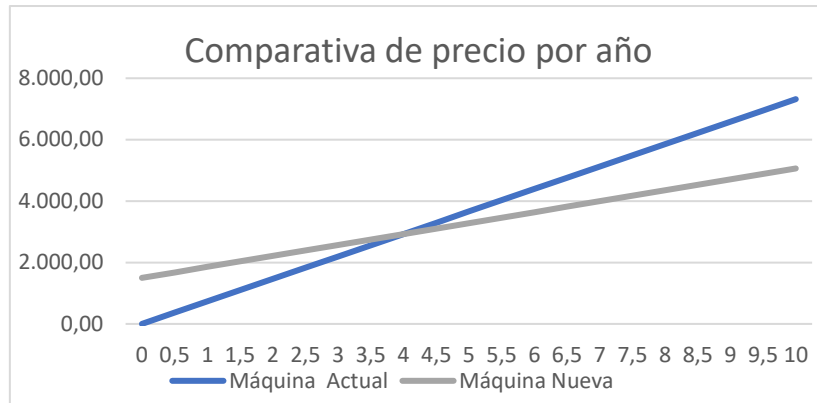
Para la máquina nueva hay que tener en cuenta el precio de la máquina que compramos, por lo que la función es:

$$f(\text{año}) = G + au 30 \frac{P}{\eta} hp$$

Siendo:

- p: precio de la energía en €/kwh
- G: precio de la máquina en €

- Dibujad las dos gráficas superpuestas



Gráfica 1:Comparativa de precios.

- ¿después de cuánto tiempo sale rentable la compra de la máquina nueva?

$$f(\text{año}) = G + au30 \frac{P}{\eta} hp = au30 \frac{P'}{\eta'} hp$$

Se despeja de esta función la variable a, años

$$a = \frac{G}{30uhp \left(\frac{P'}{\eta'} - \frac{P}{\eta} \right)}$$

El elaborar la gráfica a partir de los datos obtenidos ayuda a a ver visualmente en qué punto se empieza a producir un ahorro y es el momento en el cual comienza a ser rentable. De esta forma al calcularlo mediante fórmulas o ecuaciones resulta sencillo auto comprobar que el resultado es correcto.

Al elaborar la tabla de Excel, podemos hacer todas las variables y cambios que queramos y analizarlos rápidamente gracias a la gráfica creada y ayudar en la toma de decisiones de un caso real

PROBLEMA 1B: COMPARACIÓN DE MÁQUINAS DE AIRE ACONDICIONADO

Paso 1: Elegir tema. En este caso funciones lineales

Paso 2: Enunciar el problema: queremos comprar una máquina de aire acondicionado y estamos valorando qué modelo comprar. Una de ellas tiene un rendimiento mayor, pero es más cara. ahorraremos más con ese modelo y gastaríamos menos en la factura de la luz cada, pero habría que hacer una inversión superior al principio.

En nuestra zona, tenemos un clima parecido durante todo el año, y usamos el aire acondicionado una media de 2 horas al día. Vivimos en una casa de 95 m²

Queremos saber cuántos años tardaríamos en comenzar a ahorrar.

- ¿De qué potencia debería ser la máquina?
- ¿Cuál es la función del consumo eléctrico de cada máquina cada día? ¿y cada mes? ¿y cada año?
- ¿Cuál es la función del gasto económico de cada máquina cada año?
- Dibujad las dos gráficas superpuestas a partir de datos en Excel
- ¿Tiene alguna ventaja comprar el modelo de mejor rendimiento?
- ¿puedes repetir este problema para tu habitación? Realiza diferentes cambios sobre las variables

Datos:

Ratio empleado $R=100 \text{ W/m}^2$

Precio de la luz $p=0,18 \text{ €/kwh}$,

Maquina uno: rendimiento $\eta=315\%$, precio:1.800€

Maquina dos: rendimiento $\eta=452\%$, precio:2.400€

Paso 3: Guía Paso a Paso:

- **Comprender el Problema:** En este caso el problema es una versión algo más compleja del problema anterior, se atiende a los mismos conceptos, pero incluyendo alguna variable más.
- **Elaborar un Plan:** Se ha de elaborar un plan en el que se tengan claros qué factores relaciona cada concepto con el siguiente, y trazar sus funciones, tablas de valores, gráficas.
- **Ejecutar el Plan:** Con todo ello en mente, se ha de ejecutar cada paso planificado, de forma que cada paso que das te prepara para dar el siguiente paso.
- **Mirar hacia Atrás:** Al llegar a la solución, y tratarse de un caso real, se invita a rehacer el ejercicio, con tablas de datos y gráficas se pueden rehacer muy fácilmente y “jugar” con estos datos para hacerlos reales a su propia situación. ¿qué necesito para mi habitación?, paso mucho tiempo en el comedor, en casa solo ponemos el aire unos días de invierno...cada uno podrá llevárselo a su vivencia y estudiar su propia situación con sus propias conclusiones.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿De qué potencia debería ser la máquina?

$$f(x) = RS$$

Siendo:

- R: Ratio de w/m²
- S: superficie de la vivienda en m²

- ¿Cuál es la función del consumo eléctrico de cada máquina cada día? ¿y cada mes? ¿y cada año?

$$f(\text{día}) = d \frac{P}{\eta} h$$

$$f(\text{mes}) = m 30 \frac{P}{\eta} h$$

$$f(\text{año}) = au 30 \frac{P}{\eta} h$$

Siendo:

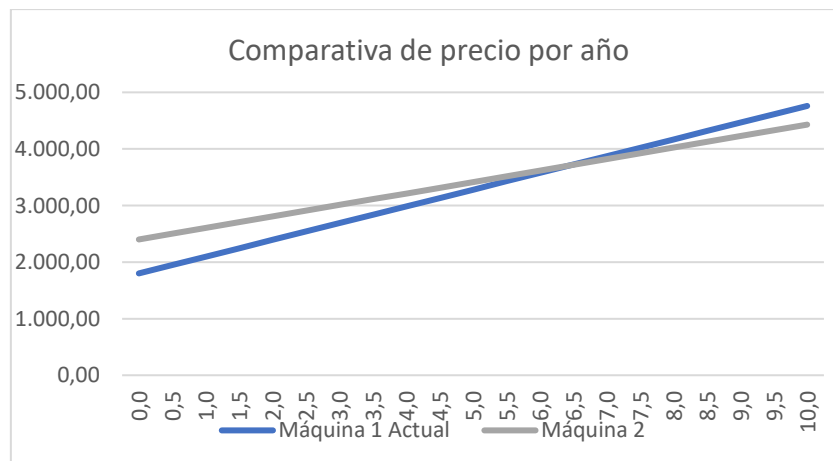
- d: días
- m: meses
- a: años
- u: meses de uso al año
- P: Potencia eléctrica en W
- h: horas de uso al día
- η: rendimiento

- ¿Cuál es la función del gasto económico de cada máquina cada año?

$$f(\text{año}) = G + au 30 \frac{P}{\eta} hp$$

$$f(\text{año}) = G' + au 30 \frac{P'}{\eta'} hp$$

- Dibujad las dos gráficas superpuestas a partir de datos en Excel



Gráfica 2: Comparativa de precios por año

- ¿A partir de qué momento la máquina de aire acondicionado de mejor rendimiento comienza a ser rentable?

Para esto igualamos las dos funciones, y se puede comprobar visualmente que el resultado sea corriente.

- ¿Tiene alguna ventaja comprar el modelo de mejor rendimiento?

Se requiere con esta pregunta analizar la respuesta y la gráfica y comentar las conclusiones

- ¿puedes repetir este problema para tu habitación? Realiza diferentes cambios sobre las variables

Con esta pregunta se refuerza la anterior al poder comprobar cómo cambia la gráfica, muy visualmente al modificar las diferentes variables.



PROBLEMA 2: INSTALACIÓN SOLAR FOTOVOLTAICA

Paso 1: Elegir tema. Corte con el eje de coordenadas.

Paso 2: Enunciar el problema: Tenemos los datos de ahorro mensual de una vivienda que dispone de instalación solar fotovoltaica desde Enero de 2023. Sabemos que la instalación costó 7.500 €. Queremos hallar la función del ahorro anual y conocer en qué momento se recupera el dinero invertido.

MES	Ahorro
Enero	85,00 €
Febrero	100,00 €
Marzo	160,00 €
Abril	160,00 €
Mayo	160,00 €
Junio	150,00 €
Julio	200,00 €
Agosto	200,00 €
Septiembre	150,00 €
Octubre	130,00 €
Noviembre	100,00 €
Diciembre	100,00 €



Gráfica 3: Ahorro mensual debido a la instalación fotovoltaica

- ¿Cuál es el ahorro año a año?
- ¿Cuál es la función que representa el ahorro acumulado año a año?
- Dibuja su gráfica
- ¿Cómo localizamos en la gráfica el momento en el que ya se ha recuperado la inversión?
- ¿En qué año se ha recuperado la inversión?
- ¿Cuánto habré ahorrado al cabo de los 10 años?

Paso 3: Guía Paso a Paso

- **Comprender el Problema:** El alumno debe como primer punto convertir los datos anuales en datos mensuales, entender qué es el ahorro acumulado, y tener en cuenta que el año cero se realiza una inversión. Se ha de tener especial cuidado con este punto ya que según un estudio realizado por (Alpizar,2018) omitir el signo negativo es una de los errores más extendidos en el estudio de funciones. Con la función y la gráfica extraer conclusiones.
- **Elaborar un Plan:** El plan consiste en hallar la función anual teniendo en cuenta que hay un factor negativo y partimos desde el eje y negativo.

- **Ejecutar el Plan:** Con este detalle claro paso a paso se ejecuta el plan, mediante la función y la gráfica y respondiendo a cada pregunta.
- **Mirar hacia Atrás:** Con los resultados obtenidos de deberá mirar hacia atrás y analizar si el procedimiento ha sido correcto y si el resultado obtenido es coherente.

Con todo ello además del desarrollo y graficas de funciones lineales, se hace al alumno consciente de los volúmenes de agua que empleados, y la comparación con otros usos más relevantes, invitándoles a que comparen con otros usos diarios y necesarios.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿Cuál es el ahorro año a año?

El ahorro anual es la suma del ahorro que se produce mes a mes

- ¿Cuál es la función que representa el ahorro acumulado año a año?
-

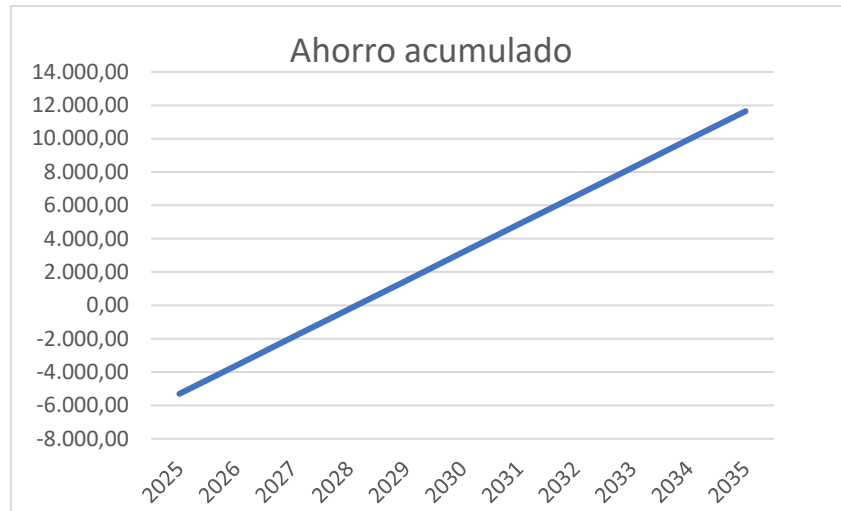
$$A = -G + 1695a$$

Siendo:

- a: número de años
- G: coste de la inversión en €

- Dibuja su gráfica y tabla de valores para 10 años

Años	Ahorro anual(€)	Ahorro acumulado (€)
2024	1.695,00	-5.305,00
2025	1.695,00	-3.610,00
2026	1.695,00	-1.915,00
2027	1.695,00	-220,00
2028	1.695,00	1.475,00
2029	1.695,00	3.170,00
2030	1.695,00	4.865,00
2031	1.695,00	6.560,00
2032	1.695,00	8.255,00
2033	1.695,00	9.950,00



Gráfica 4: Ahorro acumulado año a año debido a la instalación fotovoltaica

- ¿Cómo localizamos en la gráfica el momento en el que ya se ha recuperado la inversión?

La inversión se ha recuperado en el momento en el que el ahorro acumulado comienza a ser negativo.

- ¿En qué año se ha recuperado la inversión?

Esto corresponde a la vista de la gráfica, aproximadamente al año 2028

- ¿Cuánto habré ahorrado al cabo de los 10 años?

Esto corresponde a la vista de la gráfica, aproximadamente 10.000 euros.

PROBLEMA 3: COMPARACIÓN DE TERMO Y AEROTERMO

Paso 1: Elegir tema: funciones lineales

Paso 2: Enunciar el problema: queremos comprar un termo nuevo, y sabemos que existe un termo más eficiente que funciona mediante aerotermia, que consumo mucho menos, aunque es más caro que un termo convencional.

Queremos tomar una decisión al respecto y queremos un buen estudio

En casa vivimos 4 personas y se estima que se gastan 28 litros de agua caliente a 60 grados por persona Según el CTE HE4 de 2019. Proporcionamos una tabla con la temperatura del agua para cada mes en cada localidad. Según el IDAE, Guía técnicas agua caliente sanitaria centralizada

- ¿Cuántos litros de agua caliente se gastan?
- ¿Cuánta energía térmica se gasta a lo largo del año?
- ¿Cuánta energía eléctrica se gasta con un termo? ¿Y con un aerotermo?
- ¿Cuánto pagaría al año en cada caso?
- ¿Cuánto tardaría en pagarlo?
- Dibuja una gráfica en Excel con lo que se paga cada año de luz en cada caso.
- Reflexiona sobre las conclusiones. ¿Cómo calientas el agua en casa? ¿Tienes algún familiar que viva en otra provincia? ¿Gasta más o menos en calentar el agua?

Datos:

Precio de la luz 0,21 €/kwh,

Termo convencional: rendimiento 100%, precio:425€

Aerotermo: rendimiento 385% precio:2.100€

Paso 3: Guía Paso a Paso:

- **Comprender el Problema:** En este caso el primer punto en comprender qué volumen de agua caliente se consume en un hogar, a partir de ahí se trata de relacionar los conceptos de energía igual que en el ejercicio anterior. En este caso incluimos una diferencia más, el clima, dependiendo de la zona el agua a calentar estará a una temperatura diferente, en este caso se proporciona directamente el dato, aunque se les proporciona las tablas completas para su posterior consulta si lo desean
- **Elaborar un Plan:** Se deberá conocer el consumo en litros, y el gasto energético que supone. Se entiende que este paso puede ser algo complejo para el curso que nos ocupa por lo que se dará una versión simplificada
- **Ejecutar el Plan:** Teniendo claros los conceptos anteriores podemos ejecutar el plan tal como lo hemos concebido. Importantes las gráficas en las que muy visualmente vemos
- **Mirar hacia Atrás:** Repasamos los pasos y la coherencia de los resultados obtenidos.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿Cuántos litros de agua caliente se gastan?
 - $V = 4 \text{ personas} \times 28 \frac{\text{litros}}{\text{persona}} = 112 \text{ litros}$
- ¿Cuánta energía térmica se gasta a lo largo del año?
 - $E = C_p V (60 - T) \times 365$

Al ser La T^a del agua fría 15 grados

- $E = 2135,98 \text{ Kwh}$

Siendo:

- V: Volumen en litros
- E; Energía térmica en kwh
- Cp: Calor específico del agua 0,001161 Kwh/°C
- E_{elec}; Energía eléctrica en kwh

- ¿Cuánta energía eléctrica se gasta con un termo? ¿Y con un aerotermo?

- $E_{elec} = \frac{E}{\eta} \text{ kwh} = \frac{2135,98 \text{ Kwh}}{1} = 2135,98 \text{ Kwh}$

- $E_{elec} = \frac{E}{\eta} \text{ kwh} = \frac{2135,98 \text{ Kwh}}{3,85} = 562,10 \text{ kwh}$

Siendo:

- η: rendimiento

- ¿Cuánto pagaría al año en cada caso?

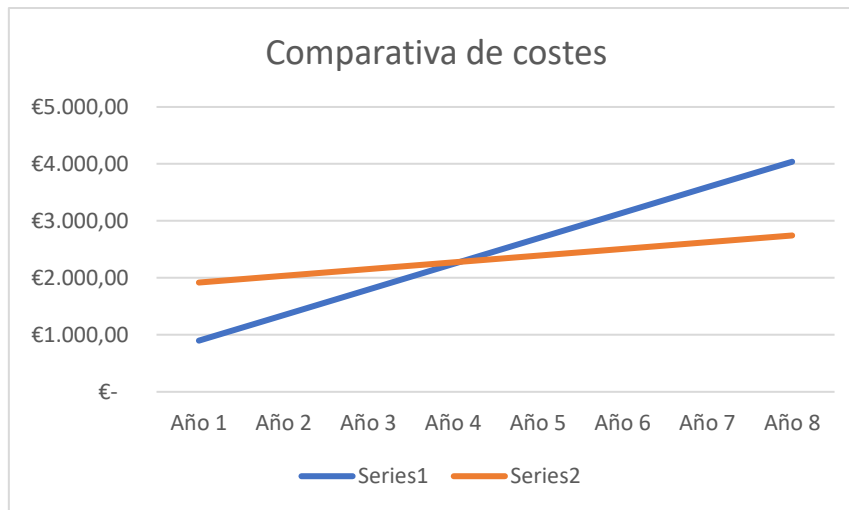
- $P = p E_{elec} = 0,21 \frac{\text{€}}{\text{kwh}} 2135,98 \text{ Kwh} = 448,56 \text{ €}$

- $P = p E_{elec} = 0,21 \frac{\text{€}}{\text{kwh}} 562,10 \text{ kwh} = 118,04 \text{ €}$

Siendo:

- p: precio de la energía en €/kwh

- Dibuja una gráfica en Excel con lo que se paga cada año de luz en cada caso



Gráfica 5: Comparativa de costes entre aerotermo y termo.

- ¿Cuánto tardaría en pagarlo?

Se aprecia en la gráfica que en el cuarto año el aerotermo ya presenta ventajas económicas con respecto al termo convencional

- Reflexiona sobre las conclusiones. ¿Cómo calientas el agua en casa?
¿Tienes algún familiar que viva en otra provincia? ¿Gasta más o menos en calentar el agua?

Con esta pregunta final se pretende la reflexión, curiosidad, comparación, entender que en otras zonas el consumo energético puede variar.

PROBLEMA 4: CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE UNA PISCINA

Paso 1: Elegir tema. En este caso funciones no lineales.

Paso 2: Enunciar el problema: Queremos hacer una piscina redonda en la casa. Estamos valorando de qué radio Tendrá una profundidad media de 1,5 metros.

Tenemos la duda de cuanto hacerla de ancho. Entre 3 y 5 metros.

- ¿Cuál es la función que representa el volumen?
- ¿Qué volumen tendría con un radio de 2 metros? ¿Y de 4 metros?
- Dibuja una gráfica que represente dicha función.
- ¿Cuánto tardaría la piscina en llenarse con una manguera de 0,2 l/s?
- Tenemos una piscina de radio 2,5 metros ¿Si una ducha de 10 minutos son aproximadamente 120 litros cuantas duchas se pueden realizar con ese volumen de agua? Hallad la gráfica que representa la cantidad de duchas a las que equivale el volumen de la piscina.
- ¿Cuál es el volumen de agua de una piscina olímpica? Medidas 50 metros de largo, 25 metros de ancho y 1,8 de alto. ¿A cuántas duchas equivale?

Paso 3: Guía Paso a Paso

- **Comprender el Problema:** El alumno debe como primer punto hallar la función del volumen con las variables que intervienen en ello. A partir de ello puede hallar el resto de puntos del problema, pues todos acaban dependiendo del volumen.
- **Elaborar un Plan:** Después tendrá que hallar tanto la función escrita como la gráfica, una vez hecho esto se podrá comprobar los resultados hallados numéricamente con la gráfica.
- **Ejecutar el Plan:** Después tendrá que ejecutar cada uno de los puntos que le facilitará la ejecución del siguiente. Tanto la función escrita como la gráfica, una vez hecho esto se podrá comprobar los resultados hallados numéricamente con la gráfica
- **Mirar hacia Atrás:** Con los resultados obtenidos de deberá mirar hacia atrás y analizar si el procedimiento ha sido correcto y si el resultado obtenido es coherente.
 Con todo ello además del desarrollo y graficas de funciones no lineales, se hace al alumno consciente de los volúmenes de agua que empleados, y la comparación con otros usos más relevantes, invitándoles a que comparen con otros usos diarios y necesarios.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿Cuál es la función que representa el volumen?

$$V(r) = \pi r^2 h$$

Siendo:

- V: Volumen de la piscina en m³

- r: radio de la piscina en m
- h: altura de la piscina en m

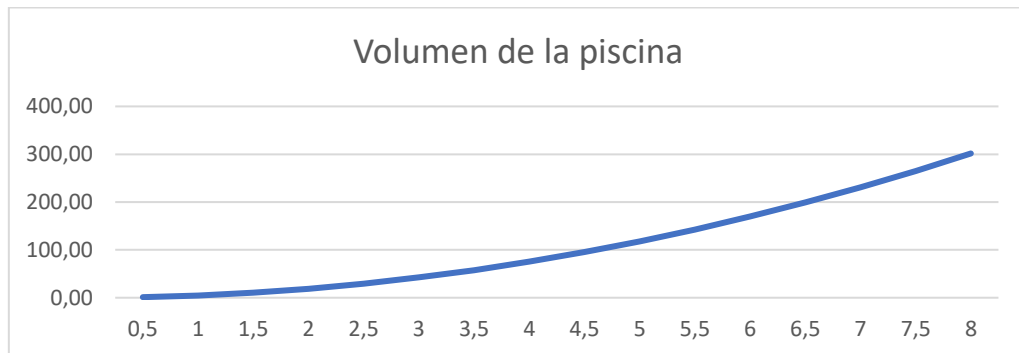
- ¿Qué volumen tendría con un radio de 2 metros? ¿Y de 4 metros?

Una vez hallada la función es fácil sustituir valores

$$V(2) = \pi r^2 h$$

$$V(4) = \pi r^2 h$$

- Dibuja una gráfica que represente dicha función.



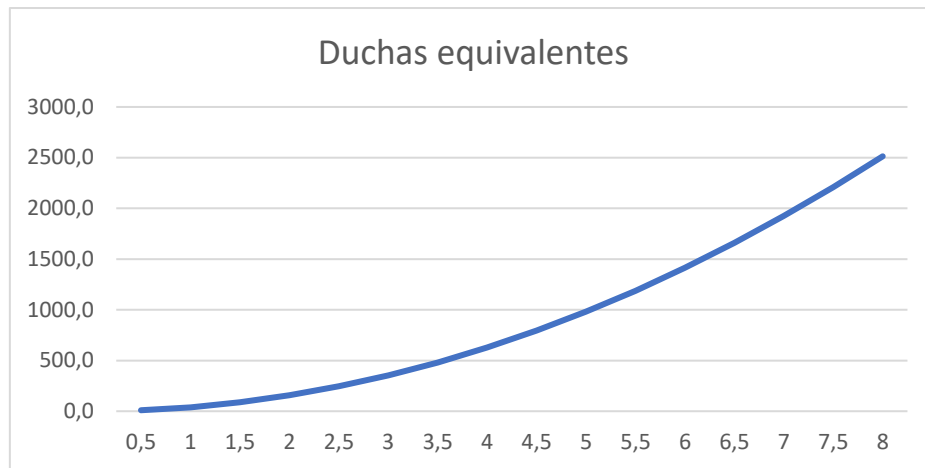
Gráfica 6: Volumen de la piscina en función del radio.

- ¿Cuánto tardaría la piscina en llenarse con una manguera de 0,2 l/s?
¿Cuál es su gráfica?



Gráfica 7: Horas que tardarían en llenar la piscina en función del radio

- Tenemos una piscina de radio 2,5 metros ¿Si una ducha de 10 minutos son aproximadamente 120 litros cuantas duchas se pueden realizar con ese volumen de agua? Hallad la gráfica que representa la cantidad de duchas a las que equivale el volumen de la piscina.



Gráfica 8: Duchas que se podrían servir con el agua de la piscina en función del radio

Hallamos la función y extraemos el valor de la cantidad de duchas para cada caso

$$D = \frac{1.000 \pi r^2 h}{120}$$

- ¿Cuál es el volumen de agua de una piscina olímpica? Medidas 50 metros de largo, 25 metros de ancho y 1,8 de alto. ¿A cuántas duchas equivale?

$$V = lbh$$

$$D = \frac{1.000 lbh}{120}$$

Con esta pregunta se pone de manifiesto el gran volumen de agua que supone una instalación de esta envergadura

PROBLEMA 4B: EVAPORACIÓN DE AGUA EN UNA PISCINA

Paso 1: Elegir tema. Funciones no lineales.

Paso 2: Enunciar el problema Semanalmente se evaporan unos 2,5 centímetros de agua. Queremos saber el volumen que representa en función del radio.

- ¿Cuál es la función que representa el volumen semanal de pérdidas?
- ¿Cuánta agua se pierde en una piscina de 2 metros de radio? ¿Y en 3 metros?
- Dibuja una gráfica que represente dicha función.
- ¿Cuánta agua se pierde en un día en una piscina de 4 metros de radio?

Paso 3: Guía Paso a Paso:

- **Comprender el Problema:** El problema parte del mismo principio que el anterior, puesto que es una ampliación, se ha de entender el concepto de la evaporación y que depende del área. A partir de aquí hallar la función
- **Elaborar un Plan:** El estudiante se puede apoyar en el apartado anterior para elaborar un plan partiendo de lo elaborado y ejecutado.
- **Ejecutar el Plan:** Se ejecuta el plan de la misma forma que anteriormente, a partir de la nueva función
- **Mirar hacia Atrás:** Cuando se ha finalizado se debe analizar, los pasos seguidos, el resultado y la coherencia del mismo.

Paso 4: Solución y Reflexión:

- ¿Cuál es la función que representa el volumen semanal de pérdidas?

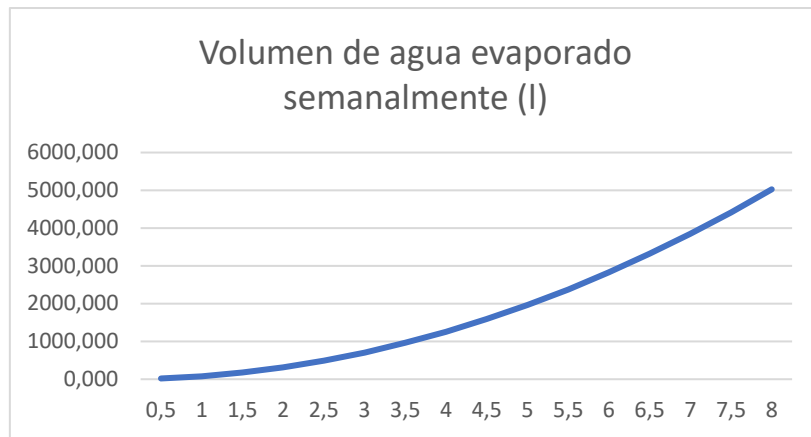
$$V(r) = \frac{2'5\pi r^2}{100}$$

Siendo:

- V: Volumen de agua evaporada semanalmente en m³
- r: radio de la piscina en m
- ¿Cuánta agua se pierde en una piscina de 2 metros de radio? ¿Y en 3 metros?

Simplemente el alumno puede hallar el volumen de perdidas sustituyendo los valores en la función

- Dibuja una gráfica que represente dicha función.



Gráfica 9: Volumen de agua evaporado semanalmente dependiendo del radio

- ¿Cuánta agua se pierde en un día en una piscina de 4 metros de radio?

A la vista de la gráfica comprobamos que el volumen evaporado es 1256 litros



6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente estudio se ha desarrollado un método de resolución de problemas complejos, siguiendo los pasos propuestos por George Pólya. El punto más a tener en cuenta que refuerza el aprendizaje es la contextualización en casos reales y cotidianos, pues acerca al estudiante a la realidad y ayuda a la interacción entre el asentamiento de los saberes básicos, la resolución de problemas, los conceptos transversales y la realidad de cada alumno.

Además del aprendizaje sobre las matemáticas encontramos el desarrollo de conocimiento y concienciación sobre el medio ambiente. Y el desarrollo de una capacidad de acercamiento a problemas cotidianos y la toma de decisiones sobre problemas reales que van a encontrar en algún momento en la economía familiar del propio alumno. El método de desarrollo de problemas favorece el pensamiento crítico.

Si bien se ha centrado en algo muy concreto, se puede extender el concepto a problemas de otros saberes básicos y de mayor grado de complejidad para cursos superiores, contextualizando en cualquier otro factor de la vida real.



7. CONTRIBUCIONES Y/O APLICACIONES PRÁCTICAS

Con los problemas trabajados se pueden llevar de forma muy precisa a la realidad y al caso particular de cada uno, poniendo uno de los ejemplos, conociendo la función con las variables que intervienen se puede trasladar los datos de uno mismo para estudiar su propio caso real y analizar sus necesidades y estimar qué es lo que más le conviene hacer.

Por ejemplo, en el caso de la máquina de climatización recapitulamos del trabajo realizado los puntos más importantes

$$P(S) = RS$$

$$f(\text{año}) = au30 \frac{P}{\eta} h$$

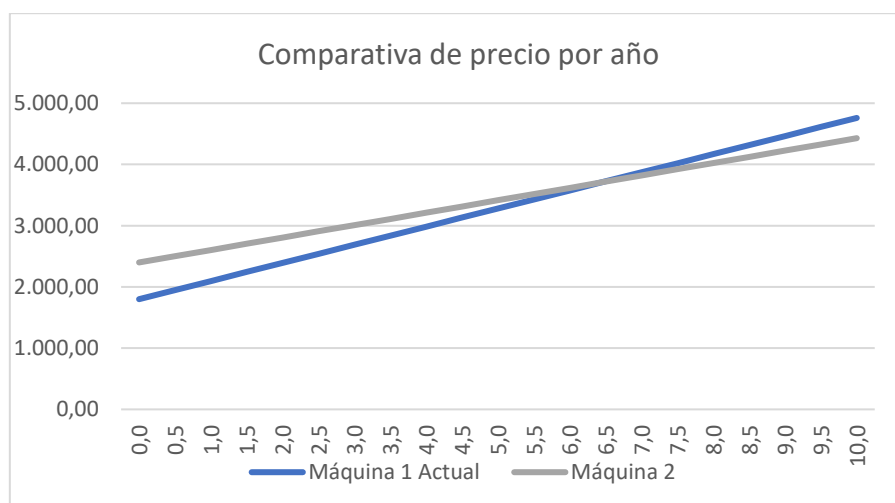
Teniendo claras la superficie y el uso que le damos, en resumen, la cantidad de horas al año, y el rendimiento del sistema que queremos comprar podemos saber el consumo eléctrico necesario, y por tanto el coste anual

Siendo:

- R: Ratio de w/m2
- S: superficie de la vivienda en m2
- d:días
- m:meses
- a:años
- u:meses de uso al año
- P: Potencia eléctrica en W
- h: horas de uso al día
- η: rendimiento

$$f(\text{año}) = G + au30 \frac{P}{\eta} hp$$

Introduciendo todos los datos conseguimos hallar la recta de cada máquina, y poder comparar todos los aparatos que deseemos hasta hallar el que más nos interese analizando todos los datos.



Gráfica 10: Comparativa de coste acumulado anual

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alpízar Vargas, M., Fernández Álvarez, H., Morales Reyes, J. y Quesada Segura, S. (2018). Dificultad y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal.
- Código técnico de la edificación, Documento Básico HE Ahorro de energía. HE4 paginas 52-56
<https://www.codigotecnico.org/pdf/Documentos/HE/DcmHE.pdf>
- Constitución española (BOE núm. 311, de 29 de diciembre de 1978).
- Decreto 107-2022 de la Conselleria de Educació apartado Pto 4, pág 13 del Anexo III (Matemáticas)
- González, M., & Gómez, P. (2013). Análisis cognitivo: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/files/475/12342212.pdf>
- Instituto para la Diversificación y Ahorro de la Energía IDAE, Guía técnicas agua caliente sanitaria centralizada
https://www.idae.es/uploads/documentos/documentos_08_Guia_tecnica_agua_caliente_sanitaria_central_906c75b2.pdf
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE núm. 295, de 10 de diciembre de 2013).
<http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>
- Meneses, M. & Peñaloza, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. Zona Proxima, 31, 7-25. Boscán Mielles, M.M. y Klever Montero, K.L. Escenarios Vol. 10, No. 2, Julio-Diciembre de 2012, págs. 7-19
- Ministerio de Derechos Sociales, Consumo y Agenda 2030. Metas de los Objetivos de Desarrollo Sostenible.
<https://www.mdsocialesa2030.gob.es/agenda2030/documentos/metad-ods.pdf>
- Molina Ayuso, A., Adamuz Povedano, N. y Bracho López, R. Aula Abierta Universidad de Oviedo, volumen 49, nº1, enero-marzo, 2020, págs. 83-90
- Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. Educatio Siglo XXI, Vol. 29 nº 2 · 2011, pp. 99-116
- Plaza Gálvez, L.F., González Granada, J.R. y Vasyunkina, O. (2020) Obstáculos en la enseñanza – Aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática. Sección 2 /Propuestas para la enseñanzas de las matemáticas Vol 33, Número 1 , año 2020
- Pólya, G. (1945). “How to solve it” “Como resolver problemas”
- Pólya, G. (1954). “Mathematics and Plausible Reasoning”.

Pólya, G. (1962). "Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving".

Radatz, H. (1980). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(3), 163-172.

Rojas Bello, R.R., Marysol del Rosario E.(2020). "Application of Pólya's problem solving in the study of angles in fourth grade students". *Perspectivas*, vol. 5, no. 2, pp. 6-12, 2020.

Real Decreto 217/2022 del Ministerio de Educación Página 27 del Anexo

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori, Barcelona.

