

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática



**MODELOS GEOESTADÍSTICOS
PARA EL ESTUDIO DE
ÍNDICES BIOCLIMÁTICOS**

TESIS DOCTORAL

Presentada por: Xavier Barber i Vallés

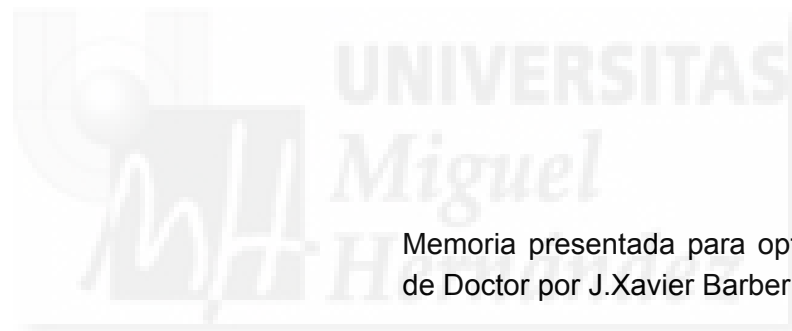
Dirigida por: Javier Morales Socuéllamos

Antonio López Quílez

Mayo 2009

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ
Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática

MODELOS GEOESTADÍSTICOS
PARA EL ESTUDIO DE
ÍNDICES BIOCLIMÁTICOS



Memoria presentada para optar al grado
de Doctor por J.Xavier Barber Vallés.

Elx, 19 de mayo de 2009

D. Javier Morales Socuéllamos, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche y D. Antonio López Quílez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat de València

CERTIFICAN:

Que la presente memoria *Modelos Geoestadísticos para el Estudio de Índices Bioclimáticos*, ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, por el licenciado D. J.Xavier Barber Vallés, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autorizan la presentación de la referida tesis doctoral ante la comisión de Doctorado de la Universidad Miguel Hernández, firmando el presente certificado.

Elx, 19 de mayo de 2009

Javier Morales Socuéllamos

Antonio López Quílez

D. José María Amigó García, Profesor Titular de Universidad y director del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández

CERTIFICA

Que la presente memoria *Modelos Geoestadísticos para el Estudio de Índices Bioclimáticos*, realizada bajo la dirección de Javier Morales Socuéllamos y Antonio López Quílez, en el Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, por el licenciado D. J.Xavier Barber Vallés, constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifica en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la comisión de Doctorado de la Universidad Miguel Hernández, firmando el presente certificado.

Elx, 19 de mayo de 2009

José María Amigó García

Qui fora vaixell per a anar per la mar,
i amb el sol a la cara
poder contemplar la pau i quiétude
que sols tu pots donar.
Què tres paraules en venen al cap!
pau, mar i sol:
els meus dos grans amors.

"[t]oday's posterior distribution is tomorrow's prior"
Lindley



AGRAÏMENTS

En primer lloc vull agrair a la veritable Alma d'aquest treball, a la persona que m'ha demostrat que amb esforç i constància hi arriben els resultats. Va ser ell qui em digués truca a Murcia i digues que si, allà per el 97; i arran d'allò he arribat fins ací. Gracies Toni.

Cronològicament parlant ara es el torn de Fernando, en acabar la seua primera clase em vaig dir: "*Xavieret (com em crida ell), aquesta es la teua professió, deixa't de tanta festa i estudia per a ser com ell*". Després conegué a la gent de la *Consejería de Salud* de Murcia, la Tormo em va ficar el cuquet de la recerca dins dels ossos, així con la gent de la FCAET, Rosario Navalón al front, que tan bé em varen acollir mentre feia l'objecció.

Després començà el periple per l'empresa privada—gràcies Eloy—, fins a setembre del 2003, gràcies CheChe per acollir-me a la teua empresa en quedar-me sense feina després de la fallida en l'Ajuntament.

Ara li toca el torn al Vioque, ell també es mereix aparèixer en aquestes línees, encara que la meua quasi Tesi no va anar endavant, durant dos anys vaig aprendre moltes coses.

Faré un punt i apart perquè al que li toca ara se'l mereix, al *Target*, aquell xic llarg i estirat que em va explicar tot allò que no sabia de la UMH, em portà a Oriola, i sempre disposat a fer qualsevol favor sense demanar res a canvi, ja no queda gent com ell.

I que dir de la parella, sense ells ara estaria fent regressió logística no condicionada a uns Casos i Controls de l'any *catapun*, Javi y Asun, amb vosaltres dos estic tant agust, sou per a mi una font inegotable de saviesa. Si Toni es un mirall, vosaltres sou per a mi un espill de cos sencer, em feu enveja en tot menys en el nombre de fills...

I els amics de València, i dic bé, els amics; el terme companys es queda curt. Migue i Pal que sense quasi conèixer-me en van donar les Claus de sa casa, la Carme —els seus consell i la seua forma de vore la vida em guien freqüentment en moments difícils—, el Senyor Bars (la meua primera parella de fet Bayesiana), la Toia, la Susa, la Hüge, l'Stefano, el León, l'Alberto i la meua preferida: l'*estrenà*. I en

falten dos, un l'Antonio, encara recorde la conversa que varen tenir en l'Aquari durant la visita del *BISP*, causant d'un punt d'inflexió per a la meua llavor de recerca, y... oh AMIC!! amb majúscules, el meu David, la porta sempre oberta de ta casa i del teu cor, Benidorm ens va unir, però el *Fibow* ens va fer germans de sang.

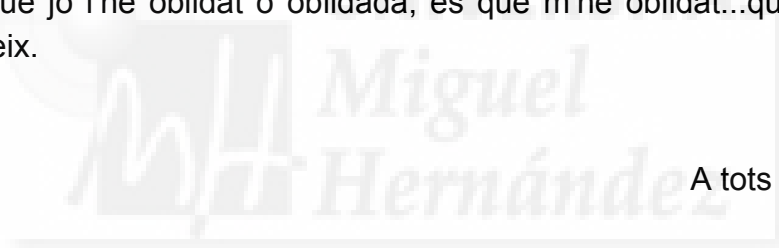
També donar les Gràcies a altres companys sobre tot a un, al *Rockero Indomable*, sense ell part d'aquesta Tesi estaria sense música de fons.

Natxo i Marisa, seré breu com ens agrada i sense gran lloances: Gràcies.

I per al final allò més important: Pare, Mare gràcies per l'esforç que vareu fer entre el 1990 i el 1996, gràcies a eixe esforç hui estic ací, com veieu vareu fer una bona inversió a llarg termini.

Marisol, que dir-te que no sàpigues ja, tu millor que ningú saps l' il·lusió que em fa arribar ací, tu millor que ningú saps el que m'ha costat, bé el que ens ha costat.

I si em deixe algú i ell o ella creu que deuria estar-hi, no es perquè jo l'he oblidat o oblidada, és que m'he oblidat...que no és el mateix.



A tots GRÀCIES.

Contenido

CAPÍTULO 1. BIOCLIMATOLOGÍA	1
1.1. Introducción	1
1.2. Ecología de los sistemas terrestres	2
1.2.1. Definiciones básicas	4
1.3. Bioclimatología e índices bioclimáticos	10
1.3.1. Contexto histórico	10
1.3.2. Índices bioclimáticos	11
1.3.3. Índices ombrotérmicos	12
1.3.4. Índices de termicidad	13
1.3.5. Índices de continentalidad	14
1.4. Clasificación bioclimática de la Tierra	14
1.4.1. ¿Qué clasificación elegir?	15
1.4.2. Clasificación de Rivas–Martínez	17
1.5. La isla de Chipre	23
1.5.1. Geografía física	23
1.5.2. El banco de datos	26
CAPÍTULO 2. DATOS ESPACIALES	31
2.1. Estadística espacial	31
2.1.1. Introducción	31
2.1.2. Datos espaciales	34
2.2. Modelo geoestadístico	37
2.2.1. Procesos estocásticos espaciales	38
2.2.2. Estacionariedad	38

2.2.3. Modelos de variograma	40
2.2.4. Descomposición de la variabilidad del proceso ...	43
2.2.5. Estimación del variograma	44
2.3. Predicción espacial	46
2.3.1. Superficies de tendencia	47
2.3.2. Kriging	48
2.4. Modelos geoestadísticos Bayesianos	50
2.4.1. Modelos Bayesianos para procesos Gaussianos estacionarios	50
CAPÍTULO 3. MODELIZACIÓN UNIVARIANTE DE LOS ÍNDICES BIOCLIMÁTICOS	57
3.1. Introducción	57
3.2. Modelos jerárquicos espaciales univariantes para índices bioclimáticos	57
3.2.1. Modelo habitual	58
3.2.2. Modelo reparametrizado	58
3.3. Distribuciones previas	59
3.3.1. Distribuciones previas sobre la variabilidad	59
3.3.2. Distribución previa uniforme para la desviación típica	63
3.3.3. Distribuciones previas sobre β	64
3.4. Distribución posterior	65
3.4.1. Modelo jerárquico habitual	65
3.4.2. Modelo reparametrizado	69
3.5. Predicción espacial	72
3.5.1. Distribución predictiva	72
3.5.2. Consideraciones sobre la computación en paralelo	74
3.5.3. Mapas de predicción espacial	76
3.5.4. Distribución de probabilidad espacial de un índice bioclimático	76

3.6. Análisis de los índices bioclimáticos.....	78
3.6.1. Análisis preliminar de la tendencia	78
3.6.2. Modelos espaciales jerárquicos Bayesianos	82
3.6.3. Conclusiones	123
 CAPÍTULO 4. MODELIZACIÓN MULTIVARIANTE	125
 4.1. Introducción	125
 4.2. Modelos multivariantes espaciales	127
4.2.1. Modelos separables	129
4.2.2. Kriging con flujo externo	130
4.2.3. Modelos corregeionalizados	131
 4.3. Inferencia y predicción en el modelo lineal corregeionalizado condicionado.....	139
4.3.1. Inferencia.....	139
4.3.2. Predicción.....	140
 4.4. Modelización multivariante para clasificaciones bioclimáticas.....	142
4.4.1. Análisis preliminar	143
4.4.2. El modelo ombrotermia-continentalidad	143
4.4.3. Distribuciones previas.....	144
 4.5. Clasificación bioclimática de la isla de Chipre ...	148
4.5.1. Mapas predictivos.....	149
4.5.2. Distribución espacial de probabilidad	154
4.5.3. Conclusiones	156
 CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO	159
 5.1. Conclusiones	159
 5.2. Líneas de trabajo futuro	160
5.2.1. Modelización espacio-temporal	160

5.2.2. Comparación de Modelos.....	160
5.2.3. Inferencia de la distribución posterior vía computación en paralelo	161
ANEXO I. MODELOS DE VARIOGRAMA.....	165
ANEXO II. CÓDIGO DE LOS MODELOS HABITUALES: SPBAYES.....	169
ANEXO III. CÓDIGO DE LOS MODELOS REPARAMETRIZADOS.....	171
ANEXO IV. CÁLCULO MATRICIAL EN LA OBTENCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA	173
ANEXO V. CÓDIGO C PARA LA PREDICCIÓN EN PARALELO	177
ANEXO VI. MODELOS ESTIMADOS.....	187
ANEXO VII. MAPAS PREDICTIVOS (MODELIZACIÓN UNIVARIANTE)	189
ANEXO VIII. MAPAS PREDICTIVOS (MODELIZACIÓN MULTIVARIANTE)	209
ANEXO IX. DISTRIBUCIONES ESPACIALES DE PROBABILIDAD (MODELIZACIÓN UNIVARIANTE)	215
ANEXO X. DISTRIBUCIONES ESPACIALES DE PROBABILIDAD (MODELIZACIÓN MULTIVARIANTE) ...	241
BIBLIOGRAFÍA.....	247

Figuras

FIGURA 1.1. REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA CLIMÁTICO.	5
FIGURA 1.2. ZONAS CLIMÁTICAS SEGÚN LATITUD.	5
FIGURA 1.3. TIPOS DE VEGETACIÓN SEGÚN LATITUD	6
FIGURA 1.4. GRADIENTE TÉRMICO.....	7
FIGURA 1.5. FACTORES CLIMÁTICOS QUE INFLUYEN EN EL CONTROL DEL CLIMA.	7
FIGURA 1.6. EFECTO DEL FACTOR HUMANO EN EL CLIMA	8
FIGURA 1.7. PISOS DE VEGETACIÓN.....	9
FIGURA 1.8. EJEMPLO DE MAPA BIOCLIMÁTICO DE EUROPA	12
FIGURA 1.9. LOCALIZACIÓN DE LA ISLA DE CHIPRE	24
FIGURA 1.10. MAPA FÍSICO DE CHIPRE	25
FIGURA 1.11. MAPA FÍSICO EN 3D DE LA ISLA	25
FIGURA 1.12. LOCALIZACIÓN DE LAS 59 ESTACIONES METEOROLÓGICAS	27
FIGURA 1.13. ÍNDICE DE OMBROTERMIA EN LA ISLA DE CHIPRE	28
FIGURA 1.14. ÍNDICE DE TERMICIDAD EN LA ISLA DE CHIPRE	28
FIGURA 1.15. ÍNDICE DE CONTINENTALIDAD EN LA ISLA DE CHIPRE	29
FIGURA 2.1. DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UN SEMIVARIOGRAMA	42
FIGURA 3.1. LOCALIZACIÓN DE COTAS DE ALTURA (EN ROJO) Y ESTACIONES METEOROLÓGICAS (EN NEGRO).	74
FIGURA 3.2. ÍNDICE DE OMBROTERMIA VS. ALTURA Y RESIDUOS VS. AJUSTADOS	79
FIGURA 3.3. ÍNDICE DE TERMICIDAD VS. ALTURA Y RESIDUOS VS. AJUSTADOS	79
FIGURA 3.4. ÍNDICE DE CONTINENTALIDAD VS. ALTURA Y RESIDUOS VS. AJUSTADOS	80

FIGURA 3.5. HISTOGRAMAS DE LOS RESIDUOS TRAS EL AJUSTE LINEAL	80
FIGURA 3.6. AJUSTES TRAS LAS TRANSFORMACIONES DE BOX-COX DE LOS ÍNDICES	80
FIGURA 3.6. CURVAS DE NIVEL DE ISLA DE CHIPRE	81
FIGURA 3.7. VARIOGRAMA DEL ÍNDICE DE TERMICIDAD	83
FIGURA 3.8. VARIOGRAMA DEL ÍNDICE DE OMBROTERMIA	83
FIGURA 3.9. VARIOGRAMA PARA EL ÍNDICE DE CONTINENTALIDAD.....	84
FIGURA 3.10. MEDIANAS ACUMULADAS DE TRES CADENAS DE SIMULACIÓN	84
FIGURA 3.11. OMBROTERMIA: RC PARA σ^2 EN SP1, W1, RW1, SP2, W2 Y RW2.....	87
FIGURA 3.12. OMBROTERMIA: RC PARA τ^2 EN SP1, W1 Y RW1	87
FIGURA 3.13. OMBROTERMIA: VARIOGRAMAS AJUSTADOS PARA SP1, W1, RW1.....	88
FIGURA 3.14. OMBROTERMIA: VARIOGRAMAS AJUSTADOS PARA SP2, W2 Y RW2	89
FIGURA 3.15. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP1	91
FIGURA 3.16. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W1.....	92
FIGURA 3.17. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW1	93
FIGURA 3.18. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP2	94
FIGURA 3.19. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W2.....	95
FIGURA 3.20. OMBROTERMIA: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW2	96
FIGURA 3.21. OMBROTERMIA: DEP PARA EL MODELO SP1	97
FIGURA 3.22. OMBROTERMIA: DEP PARA EL MODELO SP2.....	97
FIGURA 3.23. TERMICIDAD: RC PARA σ^2 DE SP1, W1, RW1, SP2, W2, Y RW2.....	100
FIGURA 3.24. TERMICIDAD: RC PARA τ^2 DE SP1, W1, RW1.....	100
FIGURA 3.25. TERMICIDAD: VARIOGRAMAS AJUSTADOS PARA SP1, W1 Y RW1	101
FIGURA 3.26. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP1	102

FIGURA 3.27. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W1.....	103
FIGURA 3.28. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW1	104
FIGURA 3.29. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP2	105
FIGURA 3.30. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W2.....	106
FIGURA 3.31. TERMICIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW2	107
FIGURA 3.32. TERMICIDAD: DEP PARA EL MODELO SP1	108
FIGURA 3.33. TERMICIDAD: DEP PARA EL MODELO SP2.....	108
FIGURA 3.34. CONTINENTALIDAD: RC PARA σ^2 DE SP1, W1, RW1, SP2, W2 Y RW2	111
FIGURA 3.35. CONTINENTALIDAD: RC PARA τ^2 DE SP1, W1 Y RW1.....	111
FIGURA 3.36. CONTINENTALIDAD: VARIOGRAMAS AJUSTADOS PARA SP1, W1 Y RW1	112
FIGURA 3.37. CONTINENTALIDAD: VARIOGRAMAS AJUSTADOS PARA SP2, W2 Y RW2	113
FIGURA 3.38. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP1	115
FIGURA 3.39. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W1	116
FIGURA 3.40. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW1.....	117
FIGURA 3.41. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO SP2.....	118
FIGURA 3.42. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO W2	119
FIGURA 3.43. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW2.....	120
FIGURA 3.44. CONTINENTALIDAD: MAPA DE PREDICCIÓN PARA EL MODELO RW2.....	121
FIGURA 3.45. CONTINENTALIDAD: DEP PARA EL MODELO SP1	122
FIGURA 3.46. CONTINENTALIDAD: DEP PARA EL MODELO SP2	122

FIGURA 4.1. GRÁFICO DE DISPERSIÓN DE LOS RESIDUOS PARA LOS MODELOS LINEALES DE CADA UNO DE LOS ÍNDICES BIOCLIMÁTICOS CON RESPECTO A LA ALTURA.	145
FIGURA 4.2. OMBROTERMIA: MAPA PREDICTIVO PARA EL MODELO MRW1	152
FIGURA 4.3. CONTINENTALIDAD: MAPA PREDICTIVO PARA EL MODELO MRW1	153
FIGURA 4.4. OMBROTERMIA: DEP DEL MODELO MRW1	155
FIGURA 4.5. CONTINENTALIDAD: DEP DEL MODELO MRW1	155



Tablas

TABLA 1.1. MACROBIOCLIMAS Y BIOCLIMAS SEGÚN RIVAS-MARTÍNEZ (2004A).	18
TABLA 1.2. TIPOS, SUBTIPOS Y NIVELES DEL ÍNDICE DE CONTINENTALIDAD.	19
TABLA 1.3. TIPOS, SUBTIPOS Y NIVELES DEL ÍNDICE DE OMBROTERMIA.	21
TABLA 1.4. COMPENSACIÓN PARA CALCULAR EL ITC	21
TABLA 1.5. HORIZONTES TERMOTÍPICOS SEGÚN EL IT-ITC.	22
TABLA 1.6. MACROBIOCLIMA MEDITERRÁNEO	23
TABLA 1.7. VALORES DE LOS ÍNDICES Y LAS ALTURAS DE LAS 59 ESTACIONES METEOROLÓGICAS.	30
TABLA 3.1. TIEMPOS DE EJECUCIÓN POR SIMULACIÓN DE LA POSTERIOR	75
TABLA 3.2. MEDIAS DE LOS ÍNDICES Y LA ALTITUD	78
TABLA 3.3. ESTIMACIÓN DE LOS MODELOS LINEALES $I_T \sim \beta_0 + \beta_1 \text{ALTITUD}$	81
TABLA 3.4. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES PREVIAS PARA LA VARIANZA	85
TABLA 3.5. OMBROTERMIA: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP1, W1 Y RW1	86
TABLA 3.6. OMBROTERMIA: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP2, W2 Y RW2	86
TABLA 3.7. TERMICIDAD: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP1, W1 Y RW1	99
TABLA 3.8. TERMICIDAD: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP2, W2 Y RW2	99
TABLA 3.9. CONTINENTALIDAD: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP1, W1 Y RW1	110

TABLA 3.10. CONTINENTALIDAD: INFERENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR PARA LOS MODELOS SP2, W2 Y RW2	110
TABLA 4.1. INFERENCIA SOBRE LOS PARÁMETROS DEL MODELO CORREGIONALIZADO MRW1	151



Capítulo 1. Bioclimatología

1.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos básicos relacionados con la bioclimatología, es decir, la interacción entre las características climáticas de una zona o región con los seres vivos (hombre, fauna y flora) que habitan en ella. En este trabajo sólo se hará referencia a la relación entre clima y vegetación.

El primer paso en el estudio de la bioclimatología de una zona o región es el establecimiento de clasificaciones del clima derivadas, en general, de registros meteorológicos estandarizados. Casi todas estas clasificaciones para determinar las áreas de distribución de los tipos de vegetación, coinciden en la importancia de las variables térmicas (temperaturas medias o mínimas, temperatura positiva o sumatorios de temperatura, duración del período de actividad vegetativa) y de las variables relacionadas con las disponibilidades hídricas anuales o estacionales (precipitación, balance hídrico). Para ello se han utilizado en algunos casos técnicas estadísticas sencillas como el análisis de correlaciones (Moreno et al., 1990; Gavilán y Fernández-González, 1997; Gavilán et al., 1998). Otros autores (Box, 1981; Woodward y Williams, 1987) proponen el uso de técnicas de análisis discriminante para caracterizar las regiones, de forma que resulta posible predecir, a nivel global, la distribución de los principales tipos de vegetación.

En la siguiente sección se introduce la terminología en bioclimatología, comenzando por las definiciones básicas de geobotánica y

climatología. En las dos siguientes secciones se presentan los conceptos de índices bioclimáticos y la clasificación bioclimática de la Tierra. Para terminar el capítulo se presenta el ejemplo sobre el que se va a trabajar a lo largo de esta memoria.

1.2. Ecología de los sistemas terrestres

En 1922 ante la falta de un valor etimológico que se correspondiese con la unión de la Geografía Botánica con la Ecología, Rübél (1922) acuñó el término **Geobotánica** como "la ciencia que estudia la relación de la vida vegetal y la biosfera". Más tarde, en 1929, Huget del Villar (1929) la definió como "la ciencia de la relación entre la vida vegetal y el medio terrestre" o "la Ciencia que estudia el hábitat de las plantas en la superficie terrestre".

Los **objetivos fundamentales de la Geobotánica** son el estudio de los siguientes aspectos de las especies y poblaciones vegetales:

- Composición, estructura y distribución espacial, tanto en su vertiente cuantitativa como cualitativa.
- Función, productividad y ciclos.
- Factores ecológicos: clima, suelo, etc.
- Origen, historia y transformaciones.
- Clasificación y ordenación de comunidades vegetales.

Es por tanto una ciencia que necesariamente debe ser integradora, ya que para lograr sus objetivos precisa utilizar datos aportados por múltiples disciplinas: Botánica, Ecología, Edafología, Geografía Física y Humana, Geología, Geomorfología, y por supuesto Estadística.

Se trata de una ciencia viva y en plena ebullición, de manera que muchos de los datos y resultados obtenidos a través de ella tienen importantes aplicaciones prácticas en otros campos como agricultura, lucha contra la erosión, cambio climático, silvicultura, ordenación del territorio, valoración del patrimonio natural, etc. (De la Torre-García, 2007).

La actividad científica de esta disciplina hace que a lo largo del siglo XX apareciesen diferentes teorías respecto al comportamiento de la vegetación, las primeras de ellas basadas en procesos deterministas con ciertas fluctuaciones, pero siempre dirigidos hacia un estado de equilibrio clímax (Clements, 1904, 1916; Gleason, 1927, 1939). No será hasta el

último tercio del siglo XX cuando se afirma que los paisajes eran sistemas dinámicos. Este dinamismo, como visión contemporánea de los cambios de la vegetación indican la ausencia de una premisa de estabilidad a largo plazo o de existencia de un punto final en la sucesión (Drury y Nisbet, 1973). Finalmente, la interpretación de los patrones observados en la naturaleza permite establecer que los procesos de cambio son producto de la acción de factores que actúan e interactúan a diferentes escalas espaciales y temporales en una forma relativamente jerárquica (Delcourt et al., 1983; Forman y Gordon, 1986; Zonneveld, 1995).

Se puede definir entonces la Geobotánica como la ciencia cuyos objetivos son la descripción, interpretación y predicción de tipos de distribución de poblaciones vegetales en el espacio y en el tiempo.

Básicamente el estado de la vegetación en un sitio y momento determinado viene dado por las variaciones temporales y espaciales, de forma que los procesos que actúan como **factores de cambio** son principalmente climáticos, regímenes de disturbios e interacciones poblacionales (Austin, 1981; Delcourt et al., 1983; Prentice, 1992).

Desde el punto de vista temporal, se puede hablar de procesos a corto, largo y medio plazo. Como ejemplo de corto plazo (fluctuación) se tiene el hecho de que una comunidad de cierta especie, se extienda frente a otras especies por una zona debido a algún factor (lluvia, erosión, etc.) durante un corto periodo de tiempo (una estación, un año, etc.); a largo plazo son los patrones de vegetación en milenios, y procesos en rangos de mediano plazo (décadas o centurias), como las sucesiones de comunidades vegetales (Glenn-Lewin y van del Maarel, 1992), sería el cambio a lo largo del tiempo en campos de cultivo abandonados y en otros espacios alterados por el hombre y ahora no utilizados, que pasan a estar recubiertos por vegetación espontánea. Sin embargo, lo que a pequeña o media escala puede ser considerado como fluctuación, puede ser al mismo tiempo un proceso de dinámica a gran escala (Heinselman, 1973; Bormann y Likens, 1979).

En el aspecto espacial, la dinámica de la vegetación puede ser concebida como un proceso de desarrollo y cambio del paisaje a escala regional o en un área muy pequeña. Una comunidad se constituye como un mosaico cambiante de parches de diferentes tamaños, edades, estructura y composición vegetal (Watt, 1947; Sousa, 1984; Picket y White, 1985; Martínez Romos et al., 1989). Esto significa que los patrones espaciales son de suma importancia para comprender los cambios ocurridos en las

comunidades y no pueden ser ignorados como un error aleatorio (Austin, 1981; Austin y Belvin, 1981).

Esta memoria abarcará el análisis espacial, dejando como futura línea de investigación el tratamiento estadístico de la evolución espacio-temporal de las fronteras bioclimáticas.

1.2.1. Definiciones básicas

Se define el **clima** como las estadísticas a largo plazo de los caracteres (elementos) que describen el tiempo atmosférico de una localidad o región. De forma habitual, se considera necesario para caracterizar el estado medio de la atmósfera de una región, un periodo mínimo de observación de 30 años consecutivos (Barry y Chorley, 1972; Viers, 1975; Fernández-García, 1996; Arozena-Concepción y Meaza-Rodríguez, 2000).

Se define como **sistema climático** el sistema constituido por la atmósfera, la hidrosfera (agua líquida que se encuentra sobre la superficie terrestre o por debajo de ella), la criosfera (nieve y hielo por encima y debajo de la superficie), la litosfera superficial (las rocas, el suelo y los sedimentos de la superficie terrestre) y la biosfera (la vida vegetal y animal en la Tierra), las cuales, bajo los efectos de la radiación solar recibida por la Tierra, determinan el clima de las diferentes regiones. Aunque el clima se relaciona fundamentalmente con los variados estados de la atmósfera, las otras partes del sistema climático también ejercen una función significativa en su formación, a través de interacciones con la atmósfera. En la Figura 1.1 se observa cómo el agua se convierte en vapor por la acción del calor y como al producirse las lluvias sobre la biosfera (ya que la vegetación atrae a las nubes) el agua vuelve al mar, ya sea superficial o subterráneamente, para que el ciclo se complete.

De forma global se establece el concepto de **zona climática** como una región de la tierra caracterizada por la distribución de los elementos climáticos conforme a la latitud. Se utilizan los términos clima polar, templado, subtropical, tropical y ecuatorial para designar las zonas climáticas que se suceden del Polo al Ecuador. A estas regiones climáticas se les denomina **biomas**. En la Figura 1.2 se observa la distribución de las diversas zonas climáticas o biomas de la Tierra y su relación con el tipo de vegetación y precipitación en cada una de ellas.

En la Figura 1.2 y la Figura 1.3 se puede apreciar que existe cierta similitud entre los Biomas y los tipos de vegetación. Esta relación entre clima y vegetación es el objeto principal de los estudios bioclimáticos.

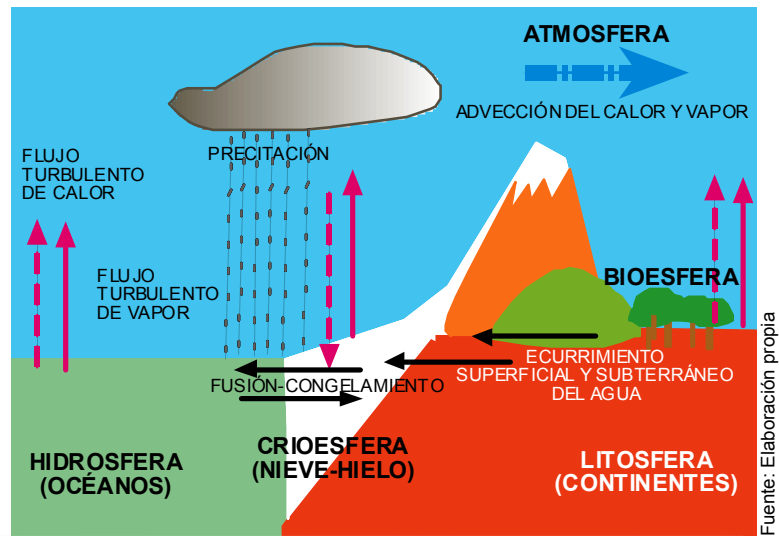


Figura 1.1. Representación de un Sistema Climático.

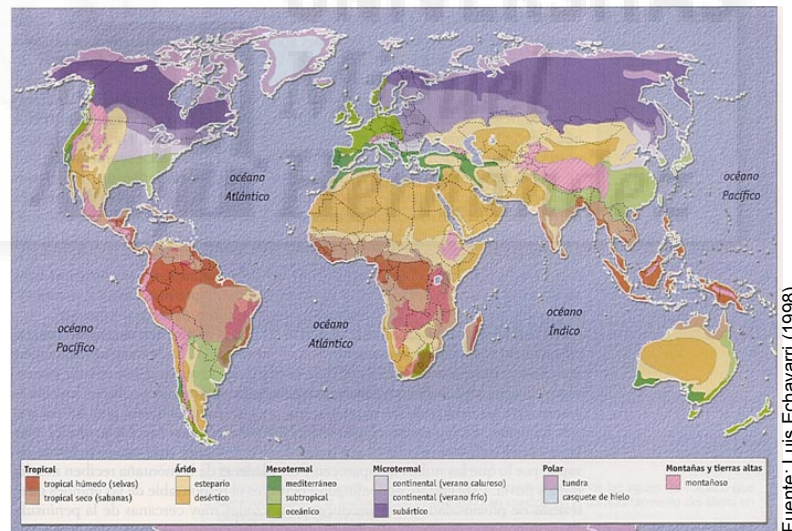


Figura 1.2. Zonas climáticas según latitud.

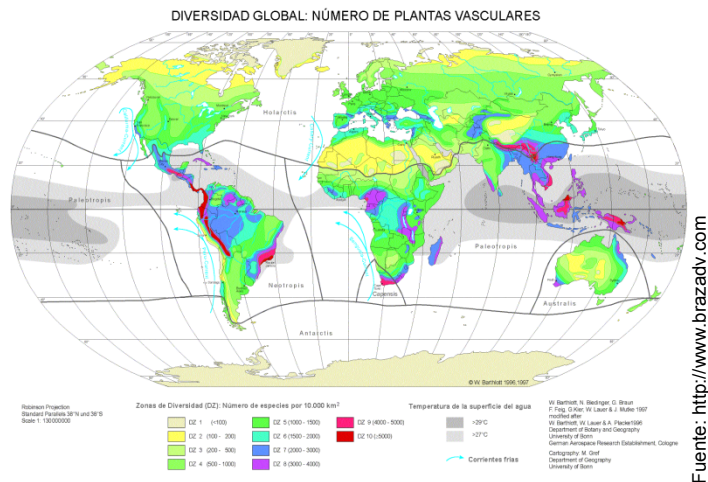


Figura 1.3. Tipos de vegetación según latitud

Como consecuencia de lo anterior, se definen los **factores climáticos** como aquellos que influyen en la caracterización de una zona. Entre estos factores climáticos, los considerados más relevantes son:

Latitud: El cambio de vegetación varía en función de la zona, así como por los efectos asimétricos que se derivan de su localización (costa oriental u occidental, hemisferio norte o sur, etc.).

Altitud: El descenso de la temperatura según se aumenta la altura o gradiente adiabático (descenso de 0.6° C por cada 100 metros más de altura), es un factor climático muy importante. Por tanto el relieve de una zona a estudio influirá en la distribución de la vegetación. En la Figura 1.4 se observa un claro cambio de vegetación en función de la altura. Se observa como existen tres zonas muy diferenciadas: la montaña, con un clima mucho más frío y con muy poca vegetación, la ladera de la montaña, donde aparecen formaciones boscosas, y por último el valle, donde se encuentra otro tipo de formación boscosa menos frondosa o vegetación tipo pradera natural. A este efecto se le conoce como el efecto montaña-ladera-valle.

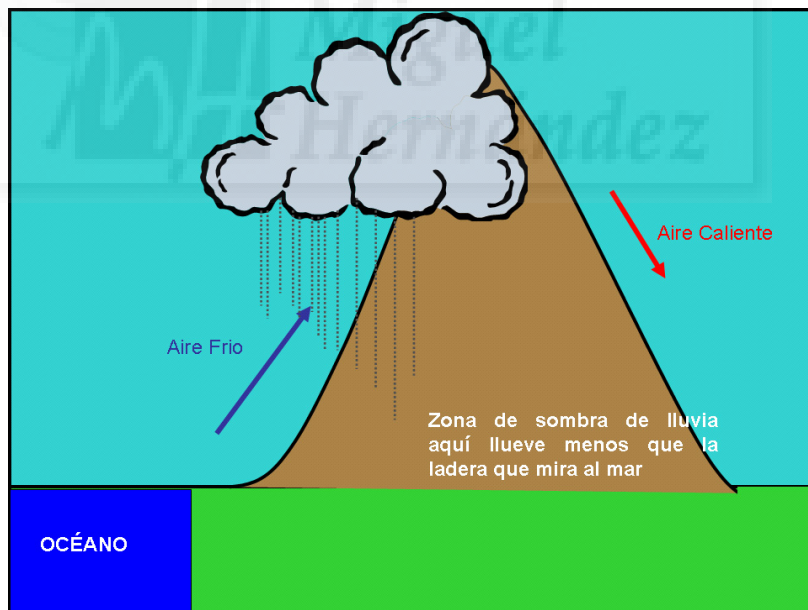
Continentalidad: La proximidad al mar u oceanidad de la zona a estudio, marca el tipo de clima y por consiguiente la vegetación asociada a esa zona. El dominio de masas frías y pesadas en invierno o masas recalentadas en verano marcará claramente la diferencia del clima según la distancia al mar de la zona. En la Figura 1.5 puede observarse como la lejanía del mar puede influir en el tipo

de clima, ya sea por sus altas temperaturas o por su bajo nivel de precipitación.



Fuente: Paisajes Pirenaicos (2001)

Figura 1.4. Gradiente Térmico



Fuente: Elaboración propia

Figura 1.5. Factores climáticos que influyen en el control del clima.

Factor humano: Debido por un lado a los asentamientos humanos, y por otro al cambio en la gestión del suelo de ciertas regiones, se han producido cambios en el clima de unas zonas, y por ende de vegetación y fauna. En la Figura 1.6 pueden apreciarse los efectos de la contaminación, el cambio del uso del suelo, la deforestación, etc.



Figura 1.6. Efecto del factor humano en el clima

Como consecuencia de todos estos factores, se producen variaciones en el clima que provocan una gran diversificación local en la vegetación de una zona. Se definen pues los **pisos de vegetación** como las franjas vegetales de aspecto relativamente homogéneo y composición característica que recubren las laderas montañosas, es decir, cada una de las series de vegetación que se escalonan y diferencian en una montaña. En la Figura 1.7 se representa la altitud como un factor de cambio en el clima y consecuentemente en la distribución de la vegetación (pisos de vegetación).

Una vez definidos los factores que pueden afectar al clima, el interés reside en obtener una **clasificación climática** o división de los climas de la Tierra en un sistema mundial de regiones contiguas, cada una de las cuales está caracterizada por una uniformidad relativa de los elementos climáticos.

Pueden citarse como ejemplos, la clasificación de los climas de Köppen (1918) y la de Thornthwaite (1933).

Se define el **tipo de clima** de una región, como la caracterización de la misma a través de un conjunto de valores medios y cambios estacionales de la temperatura, la precipitación y los elementos geográficos.

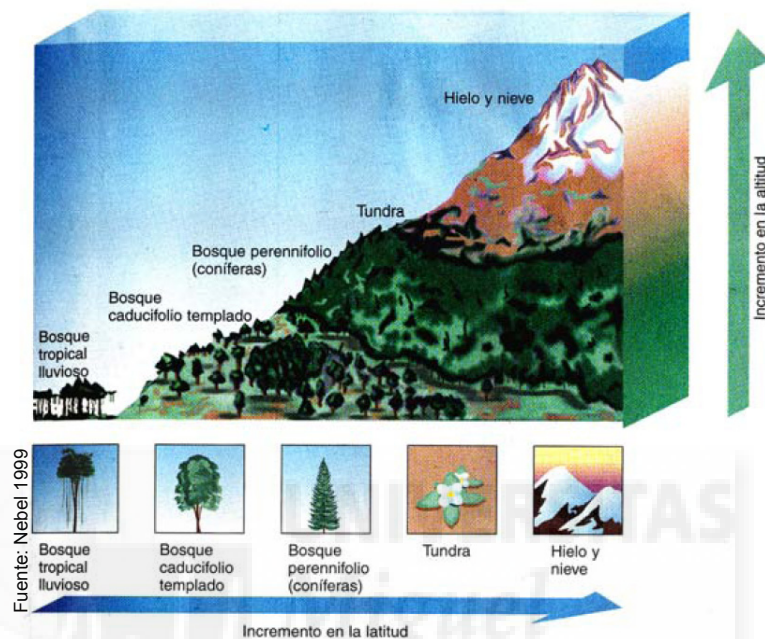


Figura 1.7. Pisos de vegetación.

El término **variabilidad climática** se utiliza a menudo para indicar desviaciones de las estadísticas climáticas a lo largo de un período de tiempo dado (por ejemplo, un mes, estación o año determinados) respecto a estadísticas climáticas a largo plazo relacionadas con el mismo período del calendario. En este sentido, la variabilidad climática se mide por esas desviaciones, denominadas habitualmente anomalías.

Parte de la variabilidad del clima que aparece como aleatoria se explica por la propia complejidad de los intercambios que tienen lugar en el sistema climático. Otra parte de la variabilidad observada, sin embargo, puede ser atribuida en su origen a procesos específicos.

La circulación atmosférica y oceánica son mecanismos de redistribución de energía, materia y momento angular. Los ciclos biogeoquímicos o el ciclo del agua están constituidos por flujos de

intercambio de materia y energía. Unos y otros intentan establecer estados de equilibrio.

Los patrones finales medios del comportamiento de la temperatura, el viento o la precipitación, son el resultado de estos procesos y su distribución geográfica, condicionada por diversos factores locales, como la latitud, la orientación o la continentalidad constituye el punto de partida para establecer la planificación de actividades como la agricultura y la gestión del agua y la energía.

1.3. Bioclimatología e índices bioclimáticos

Una vez estudiados los conceptos básicos relacionados con el clima, se procede a describir el conjunto de índices que son usados para caracterizar climáticamente a una región.

1.3.1. Contexto histórico

Desde principios de siglo XX se vienen estudiando por todo el mundo las relaciones entre clima y vegetación. A día de hoy, gracias al conocimiento cada vez más detallado de la distribución de la vegetación sobre la Tierra, se está consiguiendo determinar las fronteras bioclimáticas y vegetacionales, especificando los intervalos que discriminan estas fronteras. De este modo, progresivamente, se han ido delimitando y ajustando las denominadas zonas o unidades bioclimáticas.

Según consta en los diccionarios, la **bioclimatología** se define como “el estudio de las relaciones entre el clima (temperatura y precipitación) y los seres vivos (flora y fauna)”. Esta definición puede ampliarse utilizando la definición de Rivas Martínez (2004a):

“La Bioclimatología, que podría denominarse también Fitoclimatología, es una ciencia ecológica que estudia la reciprocidad entre el clima y la distribución de los seres vivos en la Tierra. Esta disciplina comenzó a estructurarse en base a relacionar los valores numéricos del clima (temperatura y precipitación) con los areales de las plantas y de sus formaciones vegetales, para añadir más adelante información de las estructuras de los ecosistemas; recientemente está incorporando conocimientos procedentes de la Fitosociología.”

Hasta el momento, los modelos establecidos han demostrado tener una elevada reciprocidad en el binomio clima-vegetación, lo que ha permitido realizar mapas bioclimáticos en toda la tierra. Una consecuencia práctica es haber conseguido valores predictivos, solamente conociendo una de las dos variables, es decir, bien los datos del clima, o bien los tipos de vegetación (Köppen, 1918; Thornthwaite, 1931, 1933; Köppen, 1936; Holdrige, 1967; Tuhkanen, 1980; Rivas-Martínez, 1981, 1983; Thornthwaite, 1984; Tuhkanen, 1984; Rivas-Martínez, 1985a, b; Rivas-Martínez et al., 1986; Rivas-Martínez, 1987a, b; Woodward, 1987; Rivas-Martínez, 1990; Rivas-Martínez et al., 1990; del-Arco et al., 1999; del-Arco et al., 2002; Rivas-Martínez, 2004b; del-Arco et al., 2006).

En la Figura 1.8 se observa un ejemplo de una clasificación bioclimática de Europa realizada por Rivas-Martínez (2004a). Los diferentes colores muestran comportamientos bioclimáticos diferentes.

La realización de estos mapas bioclimáticos es una tarea complicada debido a la no disponibilidad de información climática completa o al hecho de disponer de poca información poco fiable. Además, las técnicas estadísticas utilizadas para su elaboración son bastante imprecisas o con una alta variabilidad de resultados. En esta memoria se desarrolla una metodología basada en modelos jerárquicos espaciales Bayesianos para la creación de mapas bioclimáticos, lo que permite obtener un mapa predictivo de la clasificación bioclimática, así como el error de predicción asociado.

Además, los modelos planteados permiten utilizar la distribución de probabilidad espacial asociada a la clasificación bioclimática, para obtener fronteras probables (y no fijas como en los procedimientos utilizados hasta el momento) que facilitan el estudio de posibles evoluciones del clima. Esta aportación es totalmente novedosa en la literatura y permitirá obtener mapas predictivos de gran utilidad para los biólogos, ecólogos, etc.

1.3.2. Índices bioclimáticos

El procedimiento utilizado para la elaboración de mapas bioclimáticos estriba en la utilización de **índices bioclimáticos**. Estos índices son valores obtenidos mediante expresiones matemáticas que combinan de manera variada algunos parámetros climáticos y ciertos factores como la altitud o latitud, y que se usan comúnmente para caracterizar la variedad climática de un territorio o bioma. Esto posibilita

reconocer áreas, climáticamente homogéneas que posiblemente puedan contar con tipos de vegetación (especies, comunidades, series) parecidas.

A continuación se describen los tres grandes grupos de índices utilizados habitualmente en el establecimiento de una clasificación bioclimática. Cada grupo se refiere a una o varias características climáticas que lo diferencia del resto.



Figura 1.8. Ejemplo de mapa bioclimático de Europa

1.3.3. Índices ombrotérmicos

Se define como **ombrotermia** la parte del clima que se refiere a las precipitaciones. La cantidad de lluvia que cae en una localidad se expresa en litros por metro cuadrado, o lo que es igual, en milímetros de altura. Más que el valor medio de la precipitación medida en pluviómetro, se suele medir la efectividad de las precipitaciones, dependiendo de la torrencialidad y las temperaturas. La torrencialidad es un fenómeno que afecta al suelo, pudiendo provocar unos fuertes corrimientos de tierra y graves problemas de erosión. Y por otro lado, fuertes variaciones en las temperaturas máximas pueden provocar pérdidas hídricas y deben ser tenidas en cuenta.

Los índices ombrotérmicos (I_o) más importantes se obtienen combinando de diferentes formas la precipitación anual (utilizando la media

de los últimos años) y las temperaturas (medias, máximas o mínimas anuales medias de los últimos años). Los más importantes son el índice de pluviosidad de Lang (1925), el Coeficiente pluviométrico o Índice de Emberger (1932), el índice de Dantin Cereceda-Revenga Carbonell (1940), el índice de aridez de Martonne (1942), el índice de aridez mensual de Birot (1950) y el índice ombrotérmico anual de Rivas Martínez (1985).

Otro grupo de I_o se constituyen para distinguir si un mes es seco o no. Entre estos índices cabe destacar el *índice de aridez de Gaussen (1954)* y el *diagrama ombrotérmico (1954)*.

De entre estos dos últimos índices, el diagrama ombrotérmico ha sido muy utilizado en la literatura ya que permite realizar gráficamente un análisis termométrico y pluviométrico de una región. En este caso se considera como mes seco aquél en que las precipitaciones medias tienen un valor menor que el doble de la temperatura media mensual (Carballeira, 1987). Para su representación las escalas se eligen de forma que los valores de la temperatura (°C) se corresponden con los del doble de la precipitación (mm.); se identifican así los periodos secos como aquellos en los que la curva de precipitación queda por debajo de la de temperatura.

Por último existe un conjunto de índices en los que aparece el concepto de evotranspiración, que se define como la pérdida de humedad de una superficie por evaporación directa, junto con la pérdida de agua por transpiración de la vegetación. Entre los índices más habituales se encuentran el índice de *Thornthwaite (1948)*, el índice de *eficacia pluviométrica (1931)*, el índice de *eficiencia térmica (1948)*, el *Índice global de humedad (1948)*, el índice de *aridez de la UNEP*, el índice de *erosión potencial de Fournier (1960)*, y el índice de *mediterraneidad* de Rivas-Martínez (1985).

1.3.4. Índices de termicidad

La variación de la temperatura (termicidad) a lo largo de las estaciones del año en una zona es uno de los factores que más influyen en la caracterización de un clima, ya que la distribución vegetacional está muy afectada por la termicidad de la zona. Los índices de termicidad (I_t) se obtienen a partir de la temperatura media anual y de las temperaturas máximas y mínimas.

Los tres principales índices de termicidad son la temperatura básica de Montero y González (1987), la biotemperatura de L.R. Holdridge (1987), y el índice de termicidad de Rivas-Martínez (1983).

1.3.5. Índices de continentalidad

Los índices de continentalidad (I_c) recogen la variación de la oscilación anual de la temperatura. De hecho, el grado de continentalidad es directamente proporcional a la máxima diferencia térmica a lo largo del año. En contraposición, se utiliza el índice de oceanidad. Es bien conocido que los mares, lagos y océanos no helados tienden a amortiguar el contraste de la temperatura (disminución de la continentalidad). Además, con el alejamiento de las costas (disminución de la oceanidad), tierra adentro, se provocan mayores contrastes en temperatura (aumenta continentalidad).

Los índices más empleados para expresar la continentalidad/oceanidad se pueden aglutinar en dos grupos: sencillos y compensados. Son sencillos aquellos que expresan únicamente la diferencia entre las temperaturas extremas, y compensados aquellos en que a la amplitud u oscilación de la temperatura anual se adiciona una cantidad en función de la altitud o de la latitud.

Los principales índices de continentalidad son el índice de *continentalidad de Gorezynski (1920)* que compensa por latitud, el índice de *continentalidad de Conrad (1946)* que generaliza el anterior añadiendo una escala decimal entre 0 y 100, el índice de *continentalidad de Currey (1974)* que también se compensa por latitud pero que está especialmente diseñado para climas más septentrionales y el índice de *continentalidad de Rivas-Martínez (1985)* que es un índice simple sin compensación pero que para la mayoría de las regiones aporta una información suficientemente discriminadora.

1.4. Clasificación bioclimática de la Tierra

Las razones por las cuales se establece una clasificación bioclimática son las de llegar a disponer de una tipología bioclimática fácilmente cuantificable a partir de los índices planteados en el apartado anterior que muestre una relación ajustada entre los modelos vegetacionales y los valores del clima. Esta clasificación resulta de gran importancia en los programas de estudio y conservación de la biodiversidad, así como en la obtención de recursos agrícolas y forestales, sin olvidar el estudio del cambio climático.

Las clasificaciones bioclimáticas de la tierra asignan a diferentes puntos de una región bajo estudio un cierto bioclima a partir del cálculo de un conjunto de índices bioclimáticos.

Las clasificaciones bioclimáticas que hasta ahora se han propuesto con intención globalizadora no han sido demasiado numerosas. Entre las más conocidas y útiles pueden destacarse las de Köppen (1918, 1931), Thornthwaite (1931, 1933), Gaussen (1954, 1955), Troll y Paffen (1964), Holdridge (1967) y Walter (1970, 1976).

En la subsección siguiente se presenta la clasificación bioclimática de Rivas-Martínez (1983) que es el objetivo de estudio de esta memoria.

1.4.1. ¿Qué clasificación elegir?

El motivo por el cual se ha seleccionado la clasificación bioclimática de Rivas-Martínez es debido a que aporta mejoras sobre clasificaciones anteriores—extractos de Rivas-Martínez (2004a, b)— respecto a:

- Se garantiza una más estrecha y recíproca relación entre el clima la vegetación y los territorios geográficos, es decir, entre los bioclimas, las series de vegetación y sus respectivas unidades biogeográficas. Este hecho es posible porque se añadirá la información, así como los conocimientos útiles de la fitosociología y el paisaje. Esta estrecha relación entre los valores del clima y la formación de la vegetación es siempre cuantificable, expresándola con parámetros y fácilmente calculable por los índices bioclimáticos.
- Toma en consideración la existencia de un mayor conocimiento detallado del patrón distribucional de la vegetación en la Tierra, así como las modificaciones en la apariencia y la composición de la vegetación potencial natural y su sustitución en etapas. Esto da oportunidad de reconocer bioclimáticamente las fronteras vegetacionales con gran precisión y objetividad. Una vez que los límites o fronteras de la vegetación se han determinado y se asignan, el umbral del clima que los discriminan puede calcularse estadísticamente. Con todo esto, las zonas de las unidades bioclimáticas se han ido progresivamente delimitando y ajustando. Como consecuencia práctica, el sistema ha alcanzado un valor predictivo recíproco de todos los lugares en la Tierra con conocer sólo una de las dos variables, ya sea los datos climáticos o los tipos de vegetación.

- En casi todos los bioclimas, existen una serie de variaciones estacionales en los patrones de las precipitaciones que permiten reconocer las variantes bioclimáticas. Además, dentro de cada bioclima, las variaciones térmicas y ombrotérmicas permiten la posibilidad de distinguir los cinturones bioclimáticos: termotipos y ombrotipos.
- Se toma en consideración la latitud y la disposición de la radiación solar y estacional (fotoperíodo) para determinar los macrobioclimas y, por tanto, introduce nuevos conceptos en el sistema de clasificación.
- Se considera el patrón de las precipitaciones a lo largo de todo el año; viendo como lo que es más importante para la planta es la distribución mensual de lluvia, más incluso que la anual.
- Considera que existe un macrobioclima Mediterráneo muy amplio, cuyo patrón de precipitaciones es lo contrario de los tropicales y templados.
- Considera la altitud de las montañas con sus variaciones de temperatura y precipitaciones respecto a sus laderas y valles.
- Incluye más tipos de bioclima desértico que en otras clasificaciones, distinguiendo mejor entre comunidades vegetales de tipo Mediterráneo y de tipo Desértico.
- Los rasgos históricos de la geobiosfera también se consideran para la creación de las fronteras bioclimáticas.

Como respuesta definitiva para la cuestión de por qué elegir esta clasificación, se ha llegado a la conclusión que esta clasificación es la idónea porque: (a) recopila los mejores métodos e ideas de los anteriores sistemas de clasificaciones o, (b) propone las correspondientes enmiendas para los más comunes y evidentes inconvenientes, y (c) tal vez la más importante, se ha desarrollado teniendo siempre presente la idea de hacer coincidir en la medida de lo posible las distribuciones de las plantas con características climáticas; este hecho hace que sea realmente útil en la investigación sobre medio ambiente y la gestión del suelo.

Por lo tanto, parece, por el momento, que éste es el mejor sistema de clasificación bioclimática de estudios, especialmente, las relacionadas con comunidades de plantas y la vegetación. En la cuenca del Mediterráneo se sabe que los estudios de Rivas-Martínez se acoplan muy bien a esta clasificación, y además otros estudios en todo mundo también recogen

buenos resultados aplicando esta clasificación (Peinado et al., 1994; Rivas-Martínez et al., 1997; Amigo y Ramírez, 1998; Rivas-Martínez et al., 2000; Barber et al., 2001; Rivas-Martínez, 2004a, b).

1.4.2. Clasificación de Rivas–Martínez

Para establecer esta clasificación bioclimática, se utilizan datos del clima fácilmente accesibles como son la temperatura (T) y la pluviometría (P). Estos parámetros, ya sean tratados como magnitud única, o realizando sumas de valores que cumplan ciertas condiciones (p.e. suma de días con temperatura positiva= T_p), son usados para establecer los diferentes tipos de microclimas, bioclimas y variantes bioclimáticas de la tierra. En todos los casos la temperatura se expresa en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$) y la precipitación en milímetros (mm.).

El macrobioclima es la unidad tipológica suprema del sistema de clasificación bioclimática. Se trata de un modelo biofísico delimitado por ciertos valores climáticos y vegetacionales, que posee una amplia jurisdicción territorial y que está relacionado con los grandes tipos de climas, de biomas y de regiones biogeográficas que se admiten en la Tierra. Los cinco macrobioclimas que contempla esta clasificación son: tropical, mediterráneo, templado, boreal y polar.

Los bioclimas son las unidades subordinadas a su respectivo macrobioclima, representado por un conjunto de formaciones de comunidades vegetales propias. En esta clasificación se consideran 28 bioclimas que presentan en la Tabla 1.1 junto con sus respectivos macrobioclimas.

Por otro lado, dentro de cada macrobioclima se establecen diferentes variantes ombrotérmicas, es decir, diferentes pisos bioclimáticos según la temperatura (infra, termo, meso, supra, oro, crioro y gélido) y diferentes pisos bioclimáticos según pluviometría (ultrahiperárido, hiperárido, árido, semiárido, seco, subhúmedo, húmedo, hiperhúmedo y ultrahiperhúmedo).

Tabla 1.1. Macrobioclimas y bioclimas según Rivas-Martínez (2004a).

Macrobioclima	Macrobioclima	Macrobioclima
Bioclima	Bioclima	Bioclima
Tropical	Pluvial	Pluviestacional Oceánico
	Pluviestacional	Pluviestacional
	Xérico	Continental
	Desértico	Xérico oceánico
	Hiperdesértico	Xérico continental
Mediterráneo	Desértico	Desértico
	Oceánico	Oceánico
	Desértico	Continental
	Hiperdesértico oceánico	Hiperdesértico oceánico
	Hiperdesértico Continental	Hiperdesértico Continental
Templado	Hiperoceánico	Hiperoceánico
	Oceánico	Oceánico
	Continental	Subcontinental
	Xérico	Continental
		Hipercontinental
	Xérico	
		Polar
		Hiperoceánico
		Oceánico
		Continental
		Xérico
		Pergélido

A continuación se enumeran los Índices bioclimáticos que se utilizan para obtener la "Clasificación Bioclimática de la Tierra" de Rivas-Martínez (2004a) dada en la anterior tabla.

Índice de continentalidad

El *índice de Continentalidad* de Rivas-Martínez (1983, 1985a) se define como:

$$Ic = T_{\max} - T_{\min} \quad (1.1)$$

donde T_{\max} es el promedio para una serie cronológica de años de la temperatura media del mes más cálido en cada uno de ellos, y T_{\min} su análogo para el mes más frío. Para este cálculo se utilizarán datos de un periodo no inferior a 25 años, y siempre en escala de grados centígrados.

Como se deriva de su definición, el objetivo primordial de este índice es la simplicidad, ya que no presenta efecto de compensación, premiando la facilidad y accesibilidad de los datos frente a una pequeña pérdida de precisión. En la Tabla 1.2 se observan los diferentes tipos y subtipos.

Índice de Ombrotermia

Se define el *índice Ombrotérmico* de Rivas-Martínez (1985b) como:

$$I_o = 10 \left(P_p / T_p \right), \quad (1.2)$$

donde P_p es la suma de la precipitación media (en mm.) de los meses cuya temperatura media es superior a cero grados centígrados, y T_p es la suma de las temperaturas medias mensuales superiores a cero grados centígrados, expresadas en décimas de grado.

Tabla 1.2. Tipos, subtipos y niveles del índice de continentalidad.

Tipos	Subtipos y niveles	Ic
Hiperoceánico	Ultrahiperoceánico acusado	0-2.0
	Ultrahiperoceánico atenuado	2.0-4.0
	Euhiperoceánico acusado	4.0-6.0
	Euhiperoceánico atenuado	6.0-8.0
	Subhiperoceánico acusado	8.0-10.0
	Subhiperoceánico atenuado	10.0-11.0
Oceánico	Semihiperoceánico acusado	11.0-13.0
	Semihiperoceánico atenuado	13.0-14.0
	Euoceánico acusado	14.0-16.0
	Euoceánico atenuado	16.0-17.0
	Semicontinental atenuado	17.0-19.0
	Semicontinental acusado	19.0-21.0
Continental	Subcontinental atenuado	21.0-24.0
	Subcontinental acusado	24.0-28.0
	Eucontinental atenuado	28.0-37.0
	Eucontinental acusado	37.0-46.0
	Hipercontinental atenuado	46.0-56.0
	Hipercontinental acusado	56.0-66.0

Con este índice se consigue distinguir los tipos ómbricos y los horizontes ombrotérmicos en todos los macrobioclimas de la Tierra, es decir, separar entre zonas o regiones húmedas y zonas o regiones secas. En la Tabla 1.3 se muestran los diferentes tipos y horizontes ómbricos, caracterizados por la diferente humedad de la zona.

Índice de termicidad

Se define el *índice de Termicidad* de Rivas-Martínez(1985b) como:

$$It = (T + m + M)10, \quad (1.3)$$

donde T es la suma en décimas de grado de la temperatura media anual, m es la temperatura media de las mínimas del mes más frío y M es la temperatura media de las máximas del mes más frío.

El índice de termicidad es, por lo tanto, un índice que pondera la intensidad del frío, que se considera factor limitante del desarrollo para muchas plantas y comunidades vegetales. La correlación entre los valores de este índice y la vegetación es bastante satisfactoria en los climas cálidos y templados.

La bondad de este índice se basa en que el valor de las mínimas del mes más frío y su corrección en cuanto a su duración a lo largo del día, con la media de las máximas también del mes más frío, opera como factor limitante en la ley del mínimo. Esta ley, enunciada por Liebig (1840), dice que,

“Las comunidades de organismos no se adaptan a las condiciones medias de sus hábitats, sino a las condiciones mínimas para el mantenimiento de la vida. El crecimiento está limitado no tanto por la abundancia de todos los factores necesarios como por la disponibilidad mínima de cualquiera de ellos.”

En el caso del índice de termicidad, el factor mínimo o limitante es la temperatura mínima.

En las zonas extratropicales de la Tierra (al norte y al sur del paralelo 23° N y S), se utiliza el *índice de Termicidad Compensado* (I_{tc}) con el fin de tratar de ponderar el valor del índice de termicidad (It) con el "exceso" de frío o el exceso de templanza que acaece durante la estación fría en los territorios de clima continental e hiperoceánico respectivamente. El objetivo es que su continentalidad pueda ser comparable.

Si el índice de continentalidad está comprendido entre 8 y 18, el valor del I_{tc} se considera igual al del It . Por el contrario, si el índice de continentalidad no alcanza o supera los valores mencionados, hay que compensar el índice de termicidad adicionando o sustrayendo un valor de

compensación (C_i), dado en la Tabla 1.4, se define el *índice de Termicidad Compensado* como:

$$I_{tc} = \begin{cases} I_t & \text{si } 8 \leq I_c \leq 18, \\ I_t + C_i & \text{si } I_c < 8 \text{ o si } I_c > 18, i = 0, \dots, 4. \end{cases} \quad (1.4)$$

Tabla 1.3. Tipos, subtipos y niveles del índice de ombrotermia.

Tipos ómbricos	Horizontes ómbricos	Io
Ultrahiperárido		<0.1
Hiperrárido	Superior	0.1-0.2
	Inferior	0.2-0.3
Árido	Superior	0.3-0.6
	Inferior	0.6-1.0
Semiárido	Superior	1.0-1.5
	Inferior	1.5-2.0
Seco	Superior	2.0-2.8
	Inferior	2.8-3.6
Subhúmedo	Superior	3.6-4.8
	Inferior	4.8-6.0
Húmedo	Inferior	6.0-9.0
	Superior	9.0-12.0
Hiperhúmedo	Inferior	12.0-18.0
	Superior	18.0-24
Ultrahiperhúmedo		>24.0

Para valores muy bajos ($I_c < 8$) del índice de continentalidad, la termicidad se compensa disminuyendo su índice, mientras que para valores muy altos se incrementa la termicidad considerablemente ($I_c > 28$).

Tabla 1.4. Compensación para calcular el I_{tc}

I _c	Valor máximo
$I_c \leq 8$	$C_0 = - 80$
$18 < I_c \leq 21$	$C_1 = + 15$
$21 < I_c \leq 28$	$C_2 = + 105$
$28 < I_c \leq 46$	$C_3 = + 450$
$46 < I_c \leq 65$	$C_4 = + 570$

Los pisos bioclimáticos que origina el índice de termicidad varían de un macrobioclima a otro, por lo que se tienen diferentes sub-clasificaciones de los horizontes termotípicos en cada uno de los macrobioclimas de la Tierra: Infra, termo, meso, supra, oro, crioro y gélido en lo macrobioclimas tropicales, mediterráneos y templados; termo, meso, supra, oro, crioro y

gélido para los bioclimas boreales, y meso, supra y gélido en los polares. Estas diferenciaciones se deben a la propia fórmula matemática del índice, pues no en todas las regiones el comportamiento de las máximas y mínimas es similar. En la Tabla 1.5 se presenta el termotipo correspondiente al macrobioclima mediterráneo, que es el considerado en esta memoria.

Tabla 1.5. Horizontes termotípicos según el It-Itc.

Horizontes termotípicos	It, Itc
Inframediterráneo inferior	515-580
Inframediterráneo superior	450-515
Termomediterráneo inferior	400-450
Termomediterráneo superior	350-400
Mesomediterráneo inferior	285-350
Mesomediterráneo superior	220-285
Supramediterráneo inferior	150-220
Supramediterráneo superior	120-150
Oromediterráneo y Crioromediterráneo	<120

Relación entre los índices

En la clasificación bioclimática que se utiliza desde hace años en Geobotánica, las jerarquías tipológicas de expresión latitudinal son los macrobioclimas (5), bioclimas (28) y variantes bioclimáticas, en tanto que en su aspecto altitudinal son los pisos bioclimáticos o representación ombrotermotípica.

Como se ha visto en los apartados anteriores, cuando se habla de clasificación bioclimática se utilizan los índices de forma individual y no de forma conjunta. Un tratamiento conjunto de los tres índices implicaría unir la continentalidad, la pluviosidad y la temperatura, aportando una información más completa de las condiciones climáticas de la zona que ayudaría a explicar mejor la relación entre el clima y vegetación.

En la Tabla 1.6 se muestra la relación existente entre los niveles del índice de continentalidad y de ombrotermia. Por otro lado, Rivas-Martínez (2004a) muestra las claves para determinar los macrobioclimas, los bioclimas y las variantes bioclimáticas que dependen de la continentalidad y la termicidad, sin obviar la ombrotermia.

Dadas estas relaciones entre índices, un estudio conjunto se considera necesario para determinar el mapa bioclimático de una zona o región a estudio.

Tabla 1.6. Macrobioclima Mediterráneo

Bioclima	Pisos bioclimáticos: ombrotermia			Piso bioclimáticos: termotipos		
	Ic	Io	Tipo	It(ltc)	Tp	Tipo
Hiperdesértico Continental	≤12	<0.2	Ultrahiperárido	-	1-190	Crioromedit. sup.
Hiperdesértico Oceánico	>21			-	191-450	Crioromedit. inf.
Desértico Continental	≤12	0.2-0.4	Hiperárido	-	451-675	Oromedit. sup.
		0.4-1.0	Árido	-	1-190	Crioromedit. sup.
Desértico Ocea.	>21	0.2-0.4	Hiperárido	-	676-900	Oromedit. inf.
		0.4-1.0	Árido	120-150	901-1200	Supramedit. sup.
Xérico Continental	≤12	1.0-2.0	Semiárido	150-220	1201-1500	Supramedit. inf.
Xérico Ocea.	>21			220-285	1501-1825	Mesomedit. sup.
Pluviestacional Continental	≤12	2.0-3.6	Seco	285-350	1826-2150	Mesomedit. inf.
		3.6-6.0	Subhúmedo	350-400	2151-2300	Termomedit. sup.
		6.0-12.0	Húmedo	400-450	2301-2450	Termomedit. inf.
		12.0-24.0	Hiperhúmedo	450-515	2451-2650	Inframedit. sup.
		>24	Ultrahiperhúmedo	515-580	> 2650	Inframedit. inf.
Pluviestacional Oceánico	>21	2.0-3.6	Seco			
		3.6-6.0	Subhúmedo			
		6.0-12.0	Húmedo			
		12.0-24.0	Hiperhúmedo			
		>24	Ultrahiperhúmedo			

Tp: Temperatura media positiva

1.5. La isla de Chipre

En esta sección se presenta el ejemplo que va ser usado a lo largo de esta memoria para el estudio de los mapas bioclimáticos.

1.5.1. Geografía física

La isla de Chipre está situada en el Mar Mediterráneo a 113 Km. del sur de Turquía, a 120 Km. del oeste de Siria y a 150 Km. al este de Grecia (isla Kastellorizo).

Es la tercera isla en tamaño en el Mar Mediterráneo con una superficie total de 9.250 km², de los cuales, 3.355 km² se encuentran bajo dominio de la autoproclamada República Turca del Norte de Chipre. Su

línea de costa es de 648 Km. En la Figura 1.9 se muestra la localización dentro del continente europeo.



Fuente: Elaboración Propia

Figura 1.9. Localización de la isla de Chipre

El contorno es extremadamente irregular con numerosas bahías y cabos. Existen muchas playas, algunas con dunas de arena, pero la mayoría son de roca. Lagos salados, bordeados por saladares se pueden encontrar en las poblaciones de Larnaka y Limasol (Figura 1.10).

El relieve es bastante montañoso con dos grandes cordilleras: la central (Troodos) y otra al norte (Pentadactylos) que cruza la isla de este a oeste y culmina en el pico del Monte Olimpo (1.953 m). Ambas cordilleras están separadas por una planicie, Mesaoria, fértil pero de ombroclima semiárido.

El clima es típicamente mediterráneo caracterizado por veranos no muy cálidos. El periodo principal de lluvias se extiende desde mitad de septiembre hasta finales de noviembre (habitualmente unos 500 mm.), pero con grandes fluctuaciones entre Mesaoria y la cordillera de Troodos (Figura 1.11).

El principal recurso natural de Chipre es su terreno cultivable. La agricultura proporciona los ingresos de la mayor parte de la población. Los bosques cubren un 18,8% de la superficie de la isla, principalmente en las áreas montañosas. Estos bosques son predominantemente mediterráneos, en los que destacan especies como el pino, el ciprés, el cedro y la encina chipriota. Otros árboles autóctonos son la sabina, el enebro, el plátano, el roble, el olivo y el algarrobo.



Figura 1.10. Mapa físico de Chipre



Figura 1.11. Mapa físico en relieve de la isla

1.5.2. El banco de datos

La elección de este banco de datos se debe principalmente a una consulta para mejorar la metodología de análisis estadístico planteado hasta el momento para la obtención de mapas bioclimáticos y sus fronteras. El hecho de ser la isla de Chipre se debe a dos razones, una por el parentesco que une al solicitante con el que presenta esta memoria, y la otra por no tener la isla de Chipre ninguna clasificación bioclimática de todo el territorio de manera oficial o en la literatura científica. Por ello, utilizando de partida los trabajos de Barber (1995, 1999), y del-Arco et al. (1999; 2002; 2006) sobre la forma habitual de describir los mapas bioclimáticos, unido a la amplia información existente en la Web <http://www.globalbioclimatics.org> (cuyo director es el propio Rivas-Martínez), se decidió acometer esta memoria con el fin de desarrollar la metodología solicitada.

Para obtener la clasificación bioclimática de la isla se recogieron datos climatológicos correspondientes a 59 estaciones meteorológicas (Figura 1.12) repartidas por toda la isla. A partir de dicha información se obtuvieron los índices bioclimáticos de continentalidad (1.1), termicidad (1.3) y ombrotermia (1.2) considerados en la clasificación de Rivas-Martínez (2004a).

Junto con la información climática se recogieron las alturas a las que se situaban cada una de las 59 estaciones meteorológicas (Figura 1.12), ya que como se ha visto en secciones anteriores la altura es un factor que influye en el clima y en la vegetación. Respecto a la latitud, el otro factor limitante, no se ha tenido en cuenta por encontrarse toda la isla en la misma latitud. Los datos disponibles se presentan en la Tabla 1.7.

En las Figuras 1.13., 1.14. y 1.15. se muestra la gradación observada para los índices considerados y se aprecia igualmente la correlación entre ellos. En ellas se observa como los valores altos de ombrotermia se localizan con un patrón respecto a las dos cordilleras, y aunque inversamente también ocurre esto con el índice de termicidad. Para la continentalidad, las dos cordilleras definen las barreras naturales de la oceanidad y a continentalidad.

El objetivo de este trabajo es construir el mapa bioclimático de la isla de Chipre, de acuerdo con los índices de ombrotermia, termicidad y continentalidad, desde dos perspectivas diferentes:

- Univariante, estudiando cada índice por separado.
- Multivariante, estudiando los índices de forma conjunta.

Para ello, en el Capítulo 2 se repasan los conceptos básicos relacionados con la estadística espacial, y más concretamente con la geoestadística tanto desde el punto de vista frecuentista como Bayesiano. Se plantea el modelo básico de análisis, los algoritmos de simulación necesarios para resolver el problema inferencial y los conceptos relacionados con el proceso de predicción espacial.

En el Capítulo 3 se plantea el análisis univariante de cada uno de los índices bioclimáticos de la clasificación de Rivas-Martínez vistos en este capítulo. Para ello, se establecen diferentes modelos jerárquicos espaciales en los Capítulos 2 y 3. En el estudio de dichos modelos se realiza especial hincapié en el establecimiento de distribuciones previas y sus efectos en las correspondientes distribuciones posteriores y predictivas posteriores. En el Capítulo 4, se estudian diferentes modelos jerárquicos espaciales multivariantes para este tipo de datos. Principalmente el estudio se centra en el establecimiento de modelos condicionales como simplificación de los modelos multivariantes conjuntos.



Figura 1.12. Localización de las 59 Estaciones meteorológicas

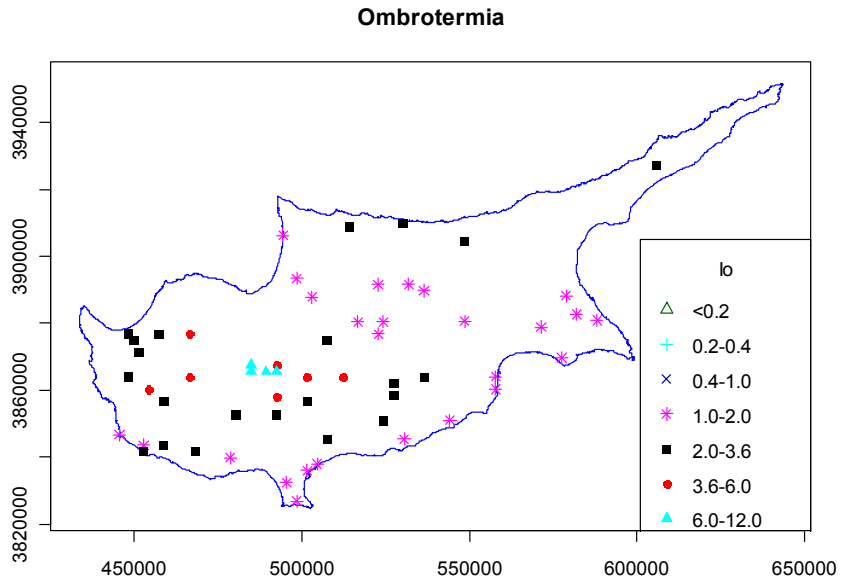


Figura 1.13. Índice de Ombrotermia en la isla de Chipre

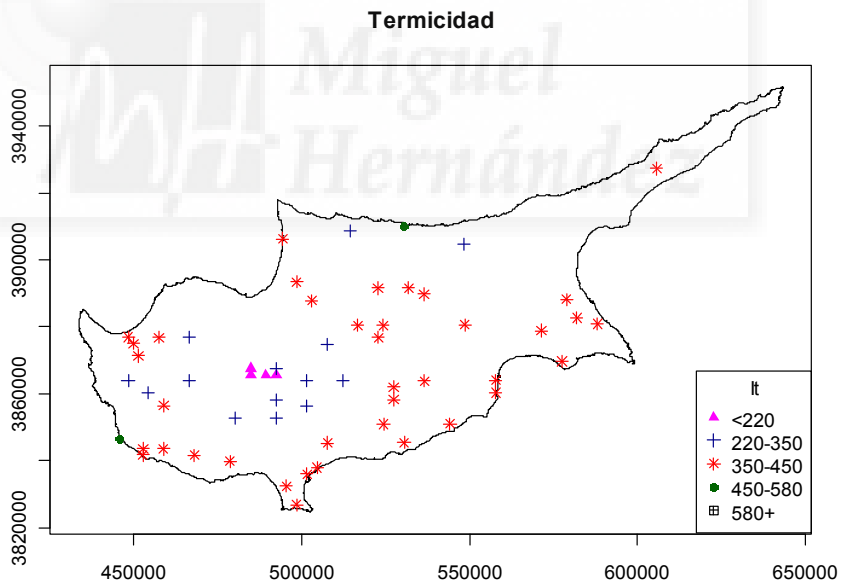


Figura 1.14. Índice de Termicidad en la isla de Chipre

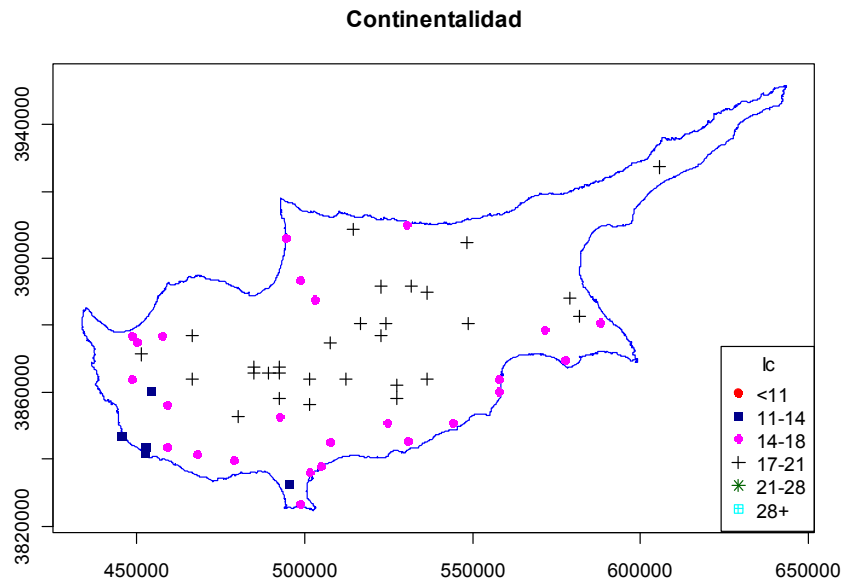


Figura 1.15. Índice de Continentalidad en la isla de Chipre

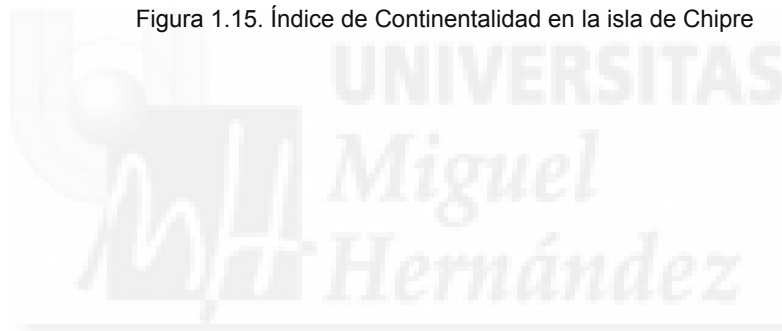


Tabla 1.7. Valores de los índices y las alturas de las 59 estaciones meteorológicas.

Estación Meteorológica	UTM-X	UTM-Y	Alt.	Io	Ic	I/Ic
1. Agros	501522	3863802	1015	3.90	18.9	279
2. Akhelia	452701	3843593	45	1.90	13.8	446
3. Akhna	571438	3878868	50	1.40	16.1	415
4. Akradhes	605833	3927271	150	2.10	18.35	392
5. Akrotiri R.	498471	3826838	23	1.76	14	441
6. Amiand. P.	492390	3865653	1380	6.42	19.5	208
7. Asprokr. Dam	458804	3843564	90	2.00	14.8	429
8. Astromeritis	503037	3887830	175	1.31	16.7	407
9. Athalassa	536434	3889751	162	1.34	18.9	400
10. Athienou	548628	3880566	170	1.42	18.1	393
11. Ay. Nikola.	582044	3882655	30	1.83	17.7	415
12. Ay.Merkur.	457433	3876839	260	2.77	15.3	410
13. Ayia Irini	494374	3906315	12	1.67	15.6	432
14. Ay. Ioanis	516716	3880452	350	1.51	17.4	368
15. Deftera P.	524314	3880469	270	1.48	19.4	375
16. Dhoros	492379	3852716	480	2.96	16.8	344
17. Evdimou	478631	3839800	90	1.95	16.2	448
18. Evretou D.	451322	3871325	110	2.42	17.5	415
19. Famagusta	578957	3888173	20	1.70	17.9	417
20. Halefga	548499	3904595	640	2.61	17.2	334
21. Kalavassos	514392	3908635	185	2.01	15.8	425
22. Kalohorio	524393	3850897	740	3.26	18.2	322
23. Kathikas	501524	3856409	650	3.35	16.5	327
24. Kornos FS	448238	3863948	370	2.13	17.6	378
25. Krysohou	536538	3863875	100	2.44	15.1	399
26. Kyrenia	449822	3875030	20	2.30	15.1	451
27. Lamaca A.	530293	3910060	2	1.50	14.8	426
28. Lefk. Dam	557875	3860288	420	2.53	17.3	374
29. Lefk. Pano	527409	3861995	600	2.74	17.8	351
30. Lemona	527420	3858298	310	3.00	16.5	366
31. Limassol PG	458862	3856501	8	1.86	14.5	439
32. Mallia	504580	3837928	645	3.40	17.2	335
33. Mazotos	480185	3852734	25	1.70	14.5	414
34. Morphou	544212	3850971	45	1.44	15.6	397
35. Nicosia	498483	3893374	160	1.38	18.8	406
36. Oridhes	531873	3891582	380	2.41	15.6	385
37. Panagia Br	467952	3841679	440	2.10	17.4	318
38. Panagia P	507603	3874895	820	4.02	17.4	304
39. Paphos A	466507	3863863	7	2.00	12.9	432
40. Paralimni	452691	3841745	65	1.52	15.6	423
41. Pharmakas	588140	3880863	855	3.81	18.6	288
42. Phasouri	512179	3863810	15	1.98	13.3	410
43. Platania FS	495417	3832383	1120	5.51	18.8	292
44. Polemi	492391	3867501	485	3.76	13.5	293
45. Polis TS	454309	3860219	15	2.11	14.8	422
46. Politiko	448311	3876886	405	1.65	18.8	381
47. Prodomos	522804	3876768	1380	6.07	19.1	196
48. Saittas	484782	3867511	640	3.63	17.4	323
49. Stavros Ps	492383	3858260	780	4.34	18	304
50. Trikoukia	466555	3876801	1340	7.60	18.2	182
51. Troodos	484779	3865663	1725	9.23	19.4	118
52. Xylofagou	489345	3865656	50	1.40	15.7	413
53. Yermass. D	577596	3869676	70	2.01	15.7	440
54. Zygi	507627	3845323	40	1.60	14.5	426
55. Lamaka M.	530510	3845370	3	1.45	15.5	436
56. K. Paphos	557852	3863985	10	1.83	13.7	454
57. Limassol 2	445484	3846693	3	1.86	14	432
58. Martinsd. F.	501527	3836079	180	1.45	18.5	372
59. Polis PS	522767	3891555	20	2.16	15.1	419

Capítulo 2. Datos Espaciales

2.1. Estadística espacial

En este primer punto se hace un repaso somero de los inicios de la Estadística Espacial, se presentan algunos de los campos de trabajo en los que se utiliza y los diferentes tipos de datos espaciales que aparecen en la literatura.

2.1.1. Introducción

En Octubre de 1984 se reunió por primera vez la Comisión Mundial sobre Medio Ambiente y Desarrollo (*World Commission on Environment and Development*) atendiendo una solicitud de la Asamblea General de las Naciones Unidas con el fin de establecer una agenda global para el Cambio Climático (*A global agenda for change*). La Comisión partió de la convicción de que es posible para la humanidad construir un futuro más próspero, más justo y más seguro.

La *Comisión Brundtland* recomendó iniciar una nueva perspectiva de adaptar un crecimiento económico justo, desde el punto de vista ecológico, declarando que el desarrollo sustentable debe ser aplicado, tanto a la administración de la economía como al desarrollo de tecnología y al manejo de los recursos naturales, acompañado, congruentemente, de una renovación en los propósitos de la sociedad, orientado a un cambio de actitud de mayor respeto hacia los ecosistemas, la biodiversidad, el medio ambiente y los recursos naturales.

Las agresiones medioambientales no respetan fronteras políticas artificiales, y por ese motivo los científicos de todos los contextos (climatólogos, ecólogos, biólogos, epidemiólogos, estadísticos), tienen que jugar un papel importante para proporcionar las descripciones del equilibrio medioambiental.

El objetivo primordial es descubrir los fenómenos que acontecen sobre el Medio Ambiente y poder tomar decisiones consecuentes, ya que los investigadores invierten más y más esfuerzos en recoger datos y realizar sofisticados análisis para obtener información relevante. Desde finales del siglo pasado, y gracias al éxito de los métodos computacionales, los modelos ambientales trabajan con una gran cantidad de datos, múltiples variables predictoras y respuestas, y en los que con frecuencia se tiene en cuenta la localización y el instante de tiempo donde se recoge la información. Este hecho ha motivado que todas las técnicas de visualización, exploración y análisis de datos con estructuras espacio-temporales han sufrido una gran evolución en los últimos años.

Sin embargo, la *Estadística Espacial*, que es como se conoce al conjunto de técnicas y métodos específicos para el análisis de datos que presentan una estructura espacial, no es una rama de la estadística de nuevo cuño. La variabilidad espacial está presente en cualquier investigación ambiental. La *Estadística Espacial* fue brevemente esbozada por R.A. Fisher en su investigación estadística aplicada a la agricultura. Fisher en los años 30 del siglo pasado escribió:

“Tras seleccionar el área, habitualmente no tenemos otra guía que el hecho ampliamente verificable de que las parcelas más próximas son normalmente más parecidas, en términos de producción de la cosecha, que aquellas que están más alejadas.”

Éste es el aspecto fundamental que trata de resolver la Estadística Espacial: modelizar la variabilidad espacial o eliminarla. Durante mucho tiempo y para evitar la influencia de los efectos espaciales, se han introducido los diseños experimentales aleatorizados, que tratan de resolver esta dificultad. Sin embargo, cuando no existe tal posibilidad, lo que ocurre habitualmente en los estudios medio ambientales o epidemiológicos, resulta necesario considerar técnicas estadísticas útiles para extraer conclusiones de los datos observacionales disponibles.

El análisis estadístico espacial intenta salvar las dificultades creadas por la carencia de diseño experimental mediante el estudio de la variabilidad, explicando ésta en parte mediante las relaciones entre las variables observadas y en parte incorporando relaciones espaciales y/o temporales entre unidades/localizaciones en que se han realizado las mediciones.

La introducción de la dimensión espacial en los problemas medioambientales exige la creación y el desarrollo de un marco estadístico que permita inferir adecuadamente sobre los procesos subyacentes a estudiar. Los datos espaciales son habitualmente dependientes entre sí y necesitan ser capaces de recoger la estructura de interrelaciones existentes. Surgen con frecuencia, pues, modelos y análisis sofisticados y complejos, pero no inviables.

Dentro del ámbito frecuentista se pueden citar muchos trabajos entre los que destaca el libro de Cressie (1993), donde se presentan de modo formal los modelos y técnicas de análisis de datos espaciales. Otros relevantes son: Besag (1974), Getis y Boot (1978), Bailey (1980), Ripley (1981), Diggle (1983), Bennett y Haining (1985), Kitanidis y Lane (1985), Upton y Fingleton (1985), Baxter (1986), Matérn (1986), Haining (1990), Conradsen et al. (1992), Fotheringham y Rogerson (1994), Bouma y Verhagen (1999), Chiles y Delfiner (1999), Stein (1999), Berke (2004), Goovaerts (2006) y Pena-Yewtukhiw et al. (2008).

Desde finales del siglo pasado, y gracias a los avances computacionales en los métodos de simulación y en concreto en los métodos de simulación de Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC en inglés), los procedimientos Bayesianos para el análisis de datos espaciales se han impuesto sobre los procedimientos frecuentistas. Esto se debe en gran medida a la flexibilidad en la modelización aportada por los *Modelos Jerárquicos Bayesianos* (Handcock y Stein, 1993; Brown et al., 1994a; DeOliveira et al., 1997; Ecker y Gelfand, 1997; Lee, 1997; Diggle et al., 1998; Carlin y Louis, 2000; Congdon, 2001; Banerjee et al., 2004; Gelman, 2004; O'Hagan et al., 2004; Clark y Gelfand, 2006; Clark, 2007; Carlin y Louis, 2009).

Los modelos jerárquicos son modelos probabilísticos que estructuran la información por niveles, desde lo observable a lo introducido/aportado por el experto y/o no-observable. Esta estrategia resulta útil en la construcción de modelos complejos como los que se plantean en los problemas medioambientales. La flexibilidad aportada por dichos modelos tiene coste

sobre la estimación, puesto que prácticamente toda la información se va especificando a través de distribuciones condicionadas, que finalmente dificultan seriamente o incluso imposibilitan resolver el proceso inferencial mediante los procedimientos frecuentistas habituales de optimización. Desde el punto de vista Bayesiano, puesto que todo es considerado aleatorio (variables y parámetros), los procedimientos inferenciales son los mismos que los de un modelo sencillo. La dificultad principal estriba en que la distribución posterior de los parámetros del modelo no resulta analítica y se necesita entonces recurrir a métodos de simulación para resolver el proceso inferencial. Si bien los métodos MCMC permiten simular de la distribución posterior para resolver el proceso inferencial, con frecuencia siguen surgiendo problemas para especificar adecuadamente las relaciones, los conocimientos y el conseguir algoritmos de simulación eficientes.

2.1.2. Datos espaciales

Desde un punto de vista formal, la Estadística Espacial es el conjunto de metodologías útiles para el análisis de datos que provienen de la medición de variables aleatorias en diversas localizaciones (puntos del espacio o agregaciones espaciales) de una región D . Por tanto, su objetivo es la explicación de un proceso estocástico $\{Y(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$ sobre la región D , en el que $\mathbf{s} \in \mathcal{R}^d$ representa una ubicación en el espacio euclidiano d -dimensional.

Por ejemplo, si deseamos estudiar la concentración de cierto contaminante sobre la superficie de un lago, a partir de la información aportada por diferentes boyas, $Y(\mathbf{s})$ consistiría en la cantidad de contaminante en cada una de las localizaciones \mathbf{s} donde se encuentran situadas las boyas.

En estudios medioambientales, las observaciones disponibles pueden venir dadas en distintos formatos. Así, los datos son continuos o discretos, están agregados espacialmente o son observaciones individuales en puntos del espacio, sus localizaciones se encuentran dispuestas de forma regular o irregular, e incluso estas localizaciones provienen de una región espacial continua o de un conjunto discreto.

Los datos espaciales se pueden clasificar en tres grupos fundamentales, según el contexto de observación del que provienen: *i*) observaciones de un fenómeno continuo en el espacio, *ii*) datos en una red

fija de localizaciones y *iii*) sucesos que ocurren aleatoriamente en el espacio generando un patrón puntual. Estos tipos de datos diferenciados dan origen a formas distintas de modelización, y por tanto, de análisis estadístico.

Datos Geoestadísticos

La Geoestadística es un término que se acuñó en los años 50 para denominar a las técnicas estadísticas aplicadas al análisis geográfico. Su desarrollo, en esa década y en la siguiente, se debe a su aplicación a la ingeniería de minas, para predecir las reservas de mineral a partir de observaciones espacialmente distribuidas en una región.

Hay una gran variedad de problemas que pueden resolverse utilizando métodos geoestadísticos. La característica común a todos ellos es que los datos pueden verse como una realización, habitualmente parcial, de un proceso estocástico sobre una región espacial continua. Matheron (1963) denomina a esta situación "*problema de variables regionalizadas*", enfatizando la naturaleza espacial continua del conjunto de índices. La clave fundamental en la modelización de la relación espacial en el proceso, es el variograma, que se convierte en objeto de modelización y estimación para describir adecuadamente el fenómeno observado.

El objetivo principal en la aplicación de la geoestadística es habitualmente la predicción en un punto o en un conjunto de puntos de la región observada, y la técnica de predicción espacial empleada es el *kriging*.

Desde el punto de vista frecuentista existen diferentes aproximaciones para la estimación del variograma y la predicción espacial, principalmente mediante procesos Gaussianos. Como referencias básicas están Cressie y Hawkins (1980), Journel (1983), Kitanidis (1983), Mardia (1984), Kitanidis y Lane (1985), Cressie (1986), Sampson y Guttorp (1992) y Laslett (1994). La gran mayoría de estos trabajos quedan recogidos en el amplio trabajo de Cressie (1993).

Procesos en redes de localizaciones

Con frecuencia encontramos fenómenos espaciales asociados a unas localizaciones fijas, es decir, sólo hay disponible información agregada sobre una red de localizaciones.

Una red de localizaciones o retículo es una colección finita de localizaciones espaciales, que pueden estar distribuidas espacialmente de forma regular o irregular. Por ejemplo, si estamos interesados en conocer el número de casos de cierta enfermedad en los municipios de cierta comunidad autónoma, la red de localizaciones vendrá dada por todos los municipios y la información relevante será una agregación del número de casos de dicha enfermedad.

La distribución de estas localizaciones puede responder a un entramado regular, cuando existe un diseño estructurado, o bien a una red irregular, cuando el proceso de observación viene supeditado a una estructura previa.

La asociación espacial entre las observaciones se introduce en el modelo a través del establecimiento de una relación de vecindad entre las localizaciones de la red; en base a las distancias entre ellas. Sin embargo, dichas distancias pueden ser de muy diversa índole, según sea la naturaleza de los puntos del retículo y el fenómeno que se va a modelizar. De esta forma, la relación de vecindad induce biunívocamente un grafo no dirigido, con las localizaciones como nodos, y una arista entre dos nodos cuando éstos son vecinos.

En este tipo de modelos, la predicción en otros puntos de la región distintos a los considerados (observados) carece de sentido, ya que el fenómeno de interés sólo es observable sobre el retículo de localizaciones que cubre toda la región bajo estudio.

Los modelos de análisis más extendidos para este tipo de datos son los modelos autorregresivos simultáneos (SAR), y los autorregresivos condicionados (CAR). Referencias básicas sobre estos modelos son Whittle (1954), Besag (1974), Geman y Geman (1984), Kaiser y Cressie (2000) y relacionado con el suavizado en modelos CAR el trabajo de Lee y Durban (2009).

Patrones Puntuales

Un patrón puntual espacial viene dado por un conjunto de localizaciones en una región plana, donde se ha producido la aparición u ocurrencia de un determinado fenómeno.

El objetivo primordial del análisis de un patrón puntual es la comprobación de la hipótesis de Aleatoriedad Espacial Completa (AEC), lo que implicaría que la aparición del fenómeno se ha producido de forma aleatoria. Desviaciones con respecto a esta situación pueden darse hacia

una mayor regularidad, propiciando la separación entre los puntos, o hacia un mayor agrupamiento, creando grupos de puntos muy próximos.

Los procedimientos para llevar a cabo el estudio de AEC se basan en el conteo de cuadrantes y en los métodos de distancias. Descartar la hipótesis de AEC implica que se ha de buscar el mecanismo que ha generado el patrón observado, y para descubrirlo tal habrá que identificar el proceso puntual espacial de agrupación o inhibición subyacente.

Un proceso puntual espacial es un proceso estocástico cuyas realizaciones consisten en conjuntos numerables de puntos en una región plana. El proceso puntual más importante es el Proceso de Poisson que se usa como referente para la caracterización de un patrón puntual aleatorio; existen sin embargo otros procesos puntuales que caracterizan situaciones de agrupamiento o inhibición. El aspecto fundamental en este tipo de análisis es la estimación de las funciones de intensidad de primer y segundo orden del proceso puntual que se asume como generador del patrón puntual observado.

Las referencias básicas sobre el tema corresponden a Pielou (1959), Cox y Lewis (1966), Lewis (1972), Snyder (1975), Getis y Boots (1978), Ripley (1981), Mollié (1996), Diggle (2003), Møller y Waagepetersen (2004) Lawson (2008) y Illian et al. (2008).

2.2. Modelo geoestadístico

Como se presentó en el capítulo anterior, el objetivo primordial de esta memoria es el establecimiento de mapas de predicción de los índices bioclimáticos, que componen la clasificación bioclimática de cualquier región, y en concreto de la isla de Chipre.

Dada la naturaleza de los datos allí observados, correspondientes a las mediciones consideradas en las estaciones meteorológicas fijas de la isla, se trata de un problema de datos geoestadísticos. Por este motivo, se presenta en esta Sección un estudio un poco más detallado de la modelización estadística para este tipo de datos. En primer lugar se enuncian los conceptos relacionados con la estacionariedad, que nos llevan a definir el variograma como la herramienta básica de análisis de cualquier modelo geoestadístico. Se muestran diferentes tipos de variograma y se definen los parámetros asociados a ellos (pepita, alféizar y rango), así como los diferentes procedimientos frecuentistas para su estimación. Se finaliza con la presentación de las herramientas de predicción frecuentista.

2.2.1. Procesos estocásticos espaciales

La formulación básica de un proceso estocástico se concreta a la situación espacial considerando un conjunto de índices o localizaciones, $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, en una determinada región continua D del espacio \mathcal{R}^d , en las que se ha observado el proceso \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \{Y(s_i) : s_i \in D, i = 1, \dots, n\}.$$

La principal característica de interés para el estudio espacial es la función de covarianza que especifica, para cada par de puntos, la covarianza entre las variables aleatorias correspondientes:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{s}) = \text{Cov}(Y(s_i), Y(s_j)), \text{ con } s_i, s_j \in D. \quad (2.1)$$

El proceso así definido se denomina *Gaussiano* si $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ se distribuye según la normal multivariante:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \sim N_n(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}), \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{s})), \quad (2.2)$$

donde $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}) = E(\mathbf{Y}(\mathbf{s}))$ denota al vector de medias del proceso.

El proceso estocástico espacial, si es Gaussiano, puede expresarse según un modelo lineal heterocedástico dado por:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{s})), \quad (2.3)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})$ representa los residuos de dicho modelo.

2.2.2. Estacionariedad

Sin embargo, la predicción espacial sólo es posible si en algún aspecto el proceso (2.3) presenta un comportamiento estable sobre toda la región bajo estudio. Esto lleva a las diferentes definiciones de estacionariedad que se presentan a continuación.

La **estacionariedad estricta** establece que las distribuciones de probabilidad conjunta del proceso permanecen invariables ante una traslación de las localizaciones donde se registra el proceso espacial. Esta condición es muy restrictiva y además poco habitual en la práctica.

Una condición menos exigente es la **estacionariedad de segundo orden** o **estacionariedad débil**, que conlleva que la esperanza del proceso sea constante sobre toda la región, y que la función de covarianza sea invariante por traslación, es decir:

$$\text{Cov}(Y(s_i), Y(s_j)) = C(s_i - s_j) = C(\mathbf{h}) \quad \forall s_i, s_j \in D, \mathbf{h} = \|s_i - s_j\| \in \mathfrak{R}, \quad (2.4)$$

donde la función $C(\cdot)$ se denomina Covariograma o función de covarianza.

La ergodicidad, $C(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ si $\mathbf{h} \rightarrow \infty$, es una propiedad necesaria para poder estimar las características de un proceso a partir de una única realización ya que si el proceso no es ergódico, al aumentar el tamaño muestral no se adquiere información adicional por ser todas las observaciones muy dependientes entre sí. En adelante se supondrá siempre procesos estacionarios ergódicos.

Asimismo, la función de covarianza de un proceso estacionario se puede expresar en función del vector de distancias h entre los puntos (a lo largo de esta memoria se va a trabajar en dos dimensiones, es decir, $d=2$, por lo que \mathbf{h} se convierte en un vector de distancias euclídeas entre las diferentes localizaciones y por tanto $h \in \mathfrak{R}$). A partir del covariograma se puede definir el *correlograma* o *función de autocorrelación*, $\rho(h) = C(h) / C(0)$, como la función que proporciona la correlación entre las variables medidas en dos puntos que generan el vector de distancias \mathbf{h} . Del mismo modo, dos localizaciones que se encuentren próximas tendrán un valor alto en el correlograma, lo que implica valores de Y más parecidos, mientras que si consideramos dos puntos más alejados dicha función se aproximará a 0 y los valores de Y se consideraran independientes.

Una perspectiva diferente de la estacionariedad se obtiene con la **estacionariedad intrínseca**. Dadas dos localizaciones separadas por un vector de distancias \mathbf{h} , si asumimos que $E(Y(s_i) - Y(s_j)) = 0, \forall s_i, s_j \in D$, se puede decir que el proceso cumple la propiedad de estacionariedad intrínseca si se verifica que la varianza de las diferencias entre las variables medidas en dos localizaciones depende únicamente de la distancia h que las separa,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y(s_i) - Y(s_j)) &= E(Y(s_i) - Y(s_j))^2 = \\ &= 2\gamma(s_i - s_j) = 2\gamma(\mathbf{h}) \quad \forall s_i, s_j \in D, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $2\gamma()$ es una función semidefinida negativa del vector de distancias entre dos localizaciones, denominado variograma. A la función $\gamma()$ se le denomina *semivariograma* y se puede ver de forma inmediata que existe

una relación directa entre el semivariograma y la función de covarianza, que viene dada por: $\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})$.

Esta condición es más débil que la estacionariedad de segundo orden y se emplea habitualmente en la modelización geoestadística, ya que permite reflejar de forma directa la idea de que cuanto más alejados están dos puntos, menos relación guardarán las observaciones asociadas.

Por otro lado, un proceso intrínsecamente estacionario es *isotrópico* si el variograma depende exclusivamente de la distancia entre localizaciones, sin importar la dirección. Los procesos isotrópicos son muy populares por su simplicidad, interpretabilidad y porque se dispone de un número pequeño de formas perimétricas disponibles para $C(\cdot)$.

Se denomina **proceso homogéneo** a un proceso intrínsecamente estacionario e isotrópico. En la práctica, en los modelos más sencillos basta con que se verifique que el proceso es homogéneo para poder llevar a cabo la predicción espacial. Otro tipo de modelizaciones más complejas no son consideradas en esta memoria.

Durante el resto de la memoria se asume que el proceso espacial modelizado es un proceso Gaussiano homogéneo.

2.2.3. Modelos de variograma

Para estudiar un proceso espacial intrínsecamente estacionario es conveniente modelizar su variograma observado mediante una función semidefinida negativa. Existen en la literatura diversos modelos teóricos de semivariogramas que se usan como base para el ajuste de modelos geoestadísticos (ver Anexo I). Como ocurre en todo proceso de modelización estadística, dados unos datos se trata de ajustar el modelo teórico que mejor explique su comportamiento. En este caso, se parte de la variabilidad de los incrementos observados para las localizaciones de la región bajo estudio, y se trata de determinar el modelo de semivariograma que mejor explique dicha variabilidad en términos de la distancia que separa los puntos dados de la región.

Para llevar a cabo este proceso se distinguen varios elementos que caracterizan el semivariograma: la pepita, el alféizar y el rango.

Se denomina **efecto pepita**, término extraído de la aplicación en minería, al efecto o variabilidad que se observa cuando el variograma no tiende a cero al acercarse al origen (ver Figura 2.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C(0) - \lim_{h \rightarrow 0} C(h) = \tau^2 > 0. \quad (2.6)$$

Esta discontinuidad en el origen puede ser debida al error de medida o a la variación a muy pequeña escala. En términos de modelización, la pepita refleja el hecho de que para dos localizaciones muy próximas el proceso observado puede tomar valores relativamente distintos.

Por otro lado, un semivariograma crece con la distancia, recogiendo el fenómeno de que el proceso es similar en puntos próximos, hasta que se estabiliza en un valor llamado **alféizar** que expresa la variabilidad entre puntos distantes (ver Figura 2.1), y se define como el límite del semivariograma cuando la distancia tiende a infinito:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = C(0) - \lim_{h \rightarrow \infty} C(h) = \xi^2 > 0,$$

El alféizar puede ser o no finito. Los semivariogramas que tienen alféizar finito cumplen con la hipótesis de estacionariedad fuerte; mientras que cuando ocurre lo contrario, el semivariograma define un fenómeno natural que cumple sólo con la hipótesis intrínseca.

Asociado al alféizar se define el **alféizar parcial**, σ^2 , como la diferencia entre el alféizar y la pepita:

$$\sigma^2 = \xi^2 - \tau^2.$$

Por último, se define el **rango**, R , como la distancia entre dos localizaciones a la que se alcanza el alféizar (ver Figura 2.1):

$$\gamma(R) = \xi^2.$$

Cuando el variograma no está acotado, el rango es infinito y se define el **rango efectivo**, Ref , como la distancia a la que la función de correlación entre localizaciones espaciales asociada al semivariograma alcanza el valor de 0.05:

$$\rho(Ref) = 0.05.$$

Aunque existen otras definiciones sobre este término, se ha optado por ésta al considerarla la más intuitiva.

De forma general, y asumiendo que el rango es finito, se puede escribir el semivariograma como función de σ^2 y τ^2 :

$$\gamma(h | \sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2, & \text{si } h > R, \\ \tau^2 + \sigma^2 [1 - \rho(h | \boldsymbol{\theta})], & \text{si } R > h > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ representa el parámetro o parámetros asociados con la función de correlación $\rho(h|\boldsymbol{\theta})$. De esta forma, la función de covarianza del proceso puede escribirse como:

$$C(h|\sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{si } h > R, \\ \tau^2 + \sigma^2 \rho(h|\boldsymbol{\theta}), & \text{si } R > h > 0, \\ \tau^2 + \sigma^2, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.8)$$

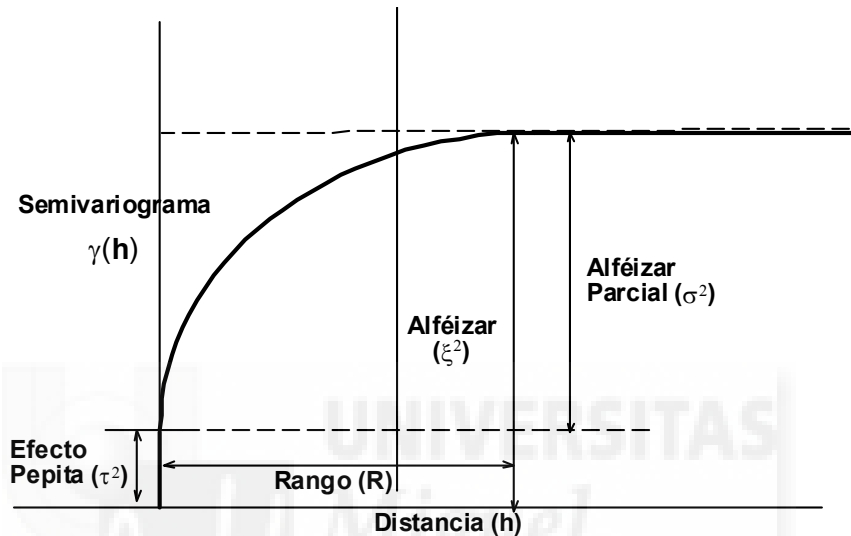


Figura 2.1. Descripción de los elementos de un Semivariograma

Existe una amplia familia de funciones para la estimación de la covarianza, que cumplen con las propiedades básicas descritas con anterioridad, y que proporcionan de forma automática el correspondiente variograma. Para cuando el rango no es finito las correspondientes formulaciones del variograma se obtienen de forma similar como:

$$\gamma(h|\sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 [1 - \rho(h|\boldsymbol{\theta})] & h > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.9)$$

Con el fin de evitar un exceso de notación, a partir de ahora se denotará de manera más reducida por $C(\mathbf{h})$ y $\gamma(\mathbf{h})$ las expresiones $C(h|\sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta})$ y $\gamma(h|\sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta})$.

A lo largo de esta memoria se va a usar el modelo de semivariograma de Matérn que viene dado por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left[1 - \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (h\phi)^\nu K_\nu(h\phi) \right], & \text{si } h > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.10)$$

cuya función de correlación es

$$\rho(h) = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (h\phi)^\nu K_\nu(h\phi), \quad h > 0,$$

donde ν y ϕ son los parámetros que caracterizan a la función de correlación, $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, y K_ν es la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden ν .

Este modelo fue originalmente sugerido por Matérn (1960, 1986), volviendo a tener vigencia a mediados de los 90 (Handcock y Stein, 1993; Handcock y Wallis, 1994), gracias a las atractivas interpretaciones de los parámetros ν y ϕ . El parámetro $\phi > 0$ es un parámetro de escala que determina el ratio al cual la correlación tiende a cero cuando aumenta la distancia, y $\nu > 0$, denominado orden, es un parámetro de forma que determina el grado de suavizado del proceso espacial.

Para esta modelización del semivariograma, el rango no es finito y por tanto el rango efectivo se puede obtener al resolver la ecuación:

$$\rho(Ref) = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (Ref \phi)^\nu K_\nu(Ref \phi) = 0.05.$$

Casos especiales del semivariograma de Matérn se obtiene para valores de $\nu = 1/2$ y $\nu \rightarrow \infty$. El primero es el modelo exponencial, y el segundo el Gaussiano. Ambos modelos se presentan en el Anexo I.

2.2.4. Descomposición de la variabilidad del proceso

En los problemas de modelización espacial, el proceso de ajuste se divide en dos fases principales. En la primera se ajustan los efectos a gran escala y que no tienen porque ser necesariamente efectos espaciales asociados a $\mu(s)$. En la segunda fase se obtienen los residuos del modelo y sobre ellos se realiza una descomposición en términos de una componente espacial y otra no espacial, de forma que la variabilidad explicada con la componente espacial reduce la variabilidad residual.

Dado un proceso Gaussiano homogéneo como el planteado en (2.3), y asumiendo que las observaciones son condicionalmente independientes

dado el proceso espacial, los residuos de dicho modelo se descomponen de forma aditiva como

$$\varepsilon(\mathbf{s}) = \mathbf{W}(\mathbf{s}) + r, \quad (2.11)$$

con $w(\mathbf{s})$ un proceso Gaussiano homogéneo, $w(\mathbf{s}) \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma_w(\mathbf{s}))$, con $\tau^2 = 0$ y siendo los residuos del modelo $r \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma_r)$. Observar que se elimina el índice \mathbf{s} de dichos residuos ya que éste explica la parte de la variabilidad del proceso que no viene recogida en el efecto espacial $w(\mathbf{s})$.

Así el proceso original puede expresarse como

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}) + \varepsilon(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}) + \mathbf{W}(\mathbf{s}) + \mathbf{r}, \quad (2.12)$$

donde la variabilidad total del proceso vendrá dada a partir de la matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma(\mathbf{s}) = \Sigma_w(\mathbf{s}) + \Sigma_r. \quad (2.13)$$

Asumiendo que las observaciones son condicionalmente independientes dado el proceso espacial, las matrices de varianzas-covarianzas dadas en (2.13) se pueden expresar como:

$$\Sigma_w(\mathbf{s}) = \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}); \quad \Sigma_r = \tau^2 \mathbf{I},$$

con $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ la matriz de correlación entre las localizaciones; y donde $\tau^2 \mathbf{I}$ recoge la variabilidad a pequeña escala aportada por τ^2 .

Diggle y Ribeiro (2007, pág. 189) muestran que el estudio del variograma sobre $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ para la modelización espacial es equivalente al estudio del variograma sobre $\mathbf{W}(\mathbf{s})$, donde la pepita vale 0, el alféizar es σ^2 y el rango es R .

De esta forma el proceso original dado en (2.3) se puede expresar como

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \sim N_n(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}), \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}). \quad (2.14)$$

2.2.5. Estimación del variograma

Dada la importancia del variograma como herramienta para describir la dependencia de los procesos espaciales, en la siguiente sección se muestran algunos conceptos para su estimación.

Estimación empírica del variograma

La estimación más sencilla del variograma puede obtenerse por el método de los momentos, proporcionando para cada vector de distancias su estimador mediante la varianza muestral de la diferencia del proceso entre los pares de puntos separados por ese vector:

$$2\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} [Y(\mathbf{s}_i) - Y(\mathbf{s}_j)]^2, \quad (2.15)$$

donde:

$$N(h) = \{(s_i, s_j) : \|s_i - s_j\| = h, \quad i, j = 1, \dots, n\},$$

y $|N(h)|$ es el número de pares en el conjunto de localizaciones.

En la práctica, la estimación se realiza permitiendo cierta región de tolerancia alrededor del vector h . Las regiones de tolerancia deben ser tan pequeñas como se pueda, pero con el número de pares suficiente para realizar una estimación estable. Se redefine entonces el conjunto de puntos como:

$$N(h) = \{(s_i, s_j) : \|s_i - s_j\| \in I_k, k = 1, \dots, K\},$$

donde K es el número de regiones de tolerancia definidas sobre el rango de distancias del proceso estudiado. La selección del número apropiado de intervalos se realiza de forma similar a cuando se construye un histograma. Sin embargo, existen recomendaciones de al menos 30 pares de distancias por intervalo (Journel y Huijbregts, 1978).

Una objeción a este estimador del variograma es su inestabilidad ante la presencia de valores extremos, por lo que se han propuesto diferentes estimadores robustos que introducen la introducción de un factor corrector del sesgo o hacen uso de la mediana (Cressie y Hawkins, 1980).

Estimación paramétrica del variograma

El principal problema que surge en el proceso inferencial de los modelos geoestadísticos es que cualquier estimación del variograma no puede ser usada directamente para la predicción espacial, pues no es necesariamente semidefinida negativa. Por tanto, hay que encontrar un modelo válido de semivariograma que se aproxime a la dependencia espacial mostrada en el semivariograma empírico, seleccionando, de entre las familias existentes (ver Anexo I), aquella que mejor describa el comportamiento observado.

La estimación de los parámetros puede realizarse por diferentes métodos: máxima verosimilitud (ML) (Kitanidis, 1983; Mardia, 1984), máxima verosimilitud restringida (REML) (Patterson y Thompson, 1971), mínima norma cuadrática (MINQ), mínimos cuadrados (OLS) (Cressie, 1993) y mínimos cuadrados generalizados (WLS).

El diagnóstico del variograma ajustado puede realizarse mediante validación cruzada lo que permite valorar la capacidad del variograma para describir la variabilidad del problema estudiado. De esta forma, también puede determinarse la influencia de una observación concreta a través de la estimación del variograma sin esa observación, la predicción del proceso en ese punto y la comparación con lo realmente observado. La validación cruzada se emplea también para comparar el impacto de distintos modelos sobre los resultados de la predicción y para estimar el error de predicción.

2.3. Predicción espacial

El objetivo final de los modelos geoestadísticos es la predicción sobre la región espacial completa. Para ello, la modelización y estimación de la variabilidad del proceso, constituyen una herramienta fundamental para valorar el error producido por la predicción. La idea básica es que a partir de los datos observados en diferentes puntos, se obtiene una superficie suave que aproxima las principales características del fenómeno observado. Para obtener dicha suavización, es importante distinguir entre las diferentes escalas de variación presentes en él.

Dado el modelo visto en (2.14)

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \sim N_n(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s}), \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}),$$

con $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ el conjunto de localizaciones donde se ha observado el proceso, el objetivo que se persigue es obtener el valor de $\mathbf{Y}(\mathbf{s}_0)$ para un conjunto nuevo de localizaciones $\mathbf{s}_0 = \{s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0m}\}$ a partir de la información que proporcionan las localizaciones originales.

En este proceso de predicción distinguimos dos fases:

- el estudio de $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{s})$ o análisis a gran escala.
- el estudio del variograma asociado a los residuos del modelo una vez eliminado el efecto a gran escala.
-

2.3.1. Superficies de tendencia

Si la media del proceso no depende de covariables asociadas con las localizaciones, las técnicas más habituales para calcular superficies suavizadas se centran en las medias móviles y las superficies de tendencia. Las medias móviles pueden ser empleadas como en las series temporales y ofrecen para cada punto una ponderación local de las observaciones próximas. Las superficies de tendencia son una generalización a mayor dimensión del ajuste de curvas por mínimos cuadrados. El ajuste de superficies de tendencia mediante regresión polinómica de las coordenadas genera una forma suavizada del comportamiento global de los datos analizados.

Si la media del proceso depende de covariables asociadas con las localizaciones, ésta se puede expresar como:

$$\mu(\mathbf{s}) = \mathbf{x}'(\mathbf{s})\boldsymbol{\beta},$$

donde $\mathbf{x}'(\mathbf{s})$ son las covariables independientes que pueden, o no, tener dependencia espacial del fenómeno a estudio y $\boldsymbol{\beta}$ es el conjunto de parámetros asociado con dichas covariables. En los estudios medioambientales variables como altura, velocidad del viento, evotranspiración, u otras medidas en las localizaciones aportan generalmente información del proceso a gran escala.

Para llevar a cabo el proceso de predicción es preciso conocer el valor de dichas covariables sobre las nuevas localizaciones, $\mathbf{x}'(\mathbf{s}_0)$. En este caso el funcionamiento sería similar al de un problema de regresión lineal múltiple.

Las superficies de tendencia pueden ser consideradas como un primer filtro que recoge la variación a gran escala. Sin embargo, dichas superficies no son capaces en general de captar las variaciones a pequeña escala o entre localizaciones muy próximas. Además de su importante papel descriptivo, la eliminación de la superficie de tendencia facilita el análisis de la variabilidad a pequeña escala. El estudio de la autocorrelación espacial de los residuos una vez ajustada la superficie de tendencia, ayuda entonces a determinar la posible necesidad de un análisis detallado de la estructura espacial del problema.

2.3.2. Kriging

La palabra *kriging* (acuñada por Matheron en 1963) procede del nombre del geólogo sudafricano D. G. Krige, cuyos trabajos en la predicción de reservas de oro, realizados en la década de los cincuenta (1951a, b), son considerados como pioneros en los métodos de interpolación espacial.

Kriging encierra un conjunto de técnicas de predicción espacial que se fundamentan en la minimización del error cuadrático medio de predicción. Dichas técnicas proporcionan la predicción en una localización no observada a través de una combinación lineal de los valores de la variable en las localizaciones cercanas. El *kriging* tiene dos ventajas principales con respecto a otros estimadores lineales: a) los pesos usados en la estimación son función del variograma construido a partir de las distancias entre el punto a predecir y las restantes localizaciones observadas, y b) la estimación se acompaña por una cuantificación de incertidumbre, dada por la varianza del *kriging*.

En esta sección se presentan las variantes más habituales: el *kriging* ordinario y el universal. Sin embargo, existen otras variantes como el *kriging* en bloques, el pulido por la mediana, el disyuntivo, el factorial, o el indicador (Journel y Huijbregts, 1978; Journel, 1983, 1986). También existe una versión multivariante conocida como *cokriging* que se estudiará con más detalle en el capítulo 4.

Kriging Ordinario

El denominado *kriging ordinario* consiste en la predicción lineal insesgada óptima, de un proceso espacial, asumiendo que éste se puede descomponer en la suma de un valor medio fijo y un proceso intrínsecamente estacionario,

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}); \quad \text{con } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}),$$

donde el semivariograma $\gamma(h)$ asociado es conocido.

El predictor lineal del proceso en un punto arbitrario \mathbf{s}_0 viene dado por una combinación lineal de los nuevos valores observados en el resto de las localizaciones:

$$p(\mathbf{Y}(\mathbf{s}); \mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(s_i),$$

donde se exige $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ para que el estimador resultante sea insesgado.

El *kriging ordinario* proporciona el mejor de predictor en el sentido de que minimice el error cuadrático medio de predicción:

$$E\left(Y(s_0) - p(\mathbf{Y}(\mathbf{s}); \mathbf{s}_0)\right)^2.$$

En Cressie (1993) se pueden encontrar los valores de λ . Para la varianza de este proceso hay que destacar que existen diferentes fuentes de variabilidad que pueden alterar la predicción obtenida; como por ejemplo la variación en los parámetros del variograma. Por tanto, es necesario conocer el error de estimación de dichos parámetros como una fuente de variabilidad, para evitar la subestimación de la varianza del error de predicción.

Kriging Universal

El *kriging universal* generaliza el *kriging ordinario*, permitiendo que el valor medio del proceso no sea constante, sino una combinación lineal de funciones conocidas o covariables ligadas a las mismas localizaciones. De esta forma, el *kriging universal* incorpora términos de regresión y correlación espacial de forma similar al modelo presentado en (2.12).

Las fórmulas correspondientes se pueden encontrar de nuevo en Cressie (1993).

Sin embargo, en el contexto particular de los procesos Gaussianos Banerjee et al. (2004), plantean el problema de predicción como la búsqueda de una función $f(\mathbf{y})$ que minimice el error cuadrático medio de la predicción:

$$E\left[\left(Y(s_0) - f(\mathbf{y})\right)^2 \mid \mathbf{y}\right].$$

Se puede demostrar de forma sencilla (Banerjee et al., 2004) que el resultado es $E\left[Y(s_0) \mid \mathbf{Y}(\mathbf{s})\right]$, es decir, la media condicional de $Y(s_0)$ dados los datos originales. Este resultado es intuitivo desde el punto de vista Bayesiano, ya que $f(\mathbf{y})$ es la media posterior de $Y(s_0)$, esto es, el estimador Bayes, que minimiza el riesgo posterior bajo funciones de pérdida cuadrática.

Desde una perspectiva Bayesiana resolver un problema de predicción consiste simplemente en obtener las correspondientes distribuciones predictivas posteriores sobre las nuevas localizaciones; de

forma que la superficie de predicción se obtiene al representar las medias o medianas de dichas distribuciones predictivas.

En la siguiente Sección se introduce la formulación Bayesiana de los modelos geoestadísticos Gaussianos.

2.4. Modelos geoestadísticos Bayesianos

La diferencia principal entre la perspectiva clásica y la Bayesiana es la consideración de los parámetros del modelo como cantidades aleatorias sobre las que se deben establecer distribuciones previas, que permitan a través del teorema de Bayes la obtención de las distribuciones posteriores dados los datos observados. A continuación se presentan las dos formulaciones equivalentes con las que se va a trabajar a lo largo de esta memoria.

Existe bastante literatura relacionada con respecto a la predicción espacial desde la perspectiva Bayesiana. Por ejemplo Le y Zidek (Le y Zidek, 1992), Handcock y Stein (1993), Brown et al. (1994a), DeOliveira et al. (1997), Ecker y Gelfand (1997), Handcock y Wallis (1994), Karson et al. (1999), Diggle et al. (1998), Berger et al. (2001), Banerjee et al. (2004), y Xiaoqian et al. (2008).

También existen otros trabajos, aunque considerados en la actualidad como “parcialmente” Bayesianos, donde aparecen las especificaciones de las previas para la media y la función de covarianzas, y en los que se asume que la media es parte del proceso y se estiman los parámetros del proceso mediante el variograma (Omre, 1987a, b; Omre y Halvorsen, 1989; Woodbury, 1989; Abrahamsen, 1993).

2.4.1. Modelos Bayesianos para procesos Gaussianos estacionarios

En la situación del modelo geoestadístico dado en (2.14):

$$\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2\mathbf{I}), \quad (2.16)$$

con \mathbf{X} un conjunto de covariables asociadas con las localizaciones \mathbf{s} donde $\dim(\mathbf{X}) = n \times p$, y vector de parámetros $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta})$, tan sólo falta establecer una distribución previa, $p(\boldsymbol{\Delta})$, para tener completamente especificado el modelo geoestadístico Bayesiano.

Así el modelo geoestadístico Bayesiano viene dado por

$$\begin{aligned} (I) \quad \mathbf{Y} &\sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}), \\ (II) \quad p(\boldsymbol{\Delta}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si consideramos que los parámetros son independientes a priori, la distribución previa de los parámetros viene dada por:

$$p(\boldsymbol{\Delta}) = p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\beta})p(\sigma^2)p(\tau^2)p(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.18)$$

La dificultad principal a la hora de especificar la información previa para este modelo, se centra en la varianza espacial dada por el alféizar parcial y varianza no espacial dado por la pepita. Es bien conocido que el uso de distribuciones previas poco informativas habituales conduce a distribuciones posteriores impropias (DeOliveira et al., 1997). Además, la hipótesis de independencia entre ellas no es cierta en general, puesto que ambas, conjuntamente, conforman la variabilidad del proceso de forma que en muchas ocasiones resulta complicado identificar la verdadera fuente de variabilidad.

En la práctica, y bajo el supuesto simplificado de independencia, se suelen utilizar distribuciones previas planas o normales multivariantes difusas para $\boldsymbol{\beta}$, Gammas inversas o *Half-Cauchy* para σ^2 y τ^2 , o uniformes para σ y τ , y distribuciones uniformes para los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ asociados con la función de correlación especificada en el modelo.

Para la elección de los hiperparámetros de cada una de estas distribuciones, es justificable la premisa de que la ignorancia absoluta no es cierta, de modo que en general siempre se puede especificar alguna información sobre los parámetros, simplemente desde el sentido común (Van Dongen, 2006). Evitar así distribuciones previas excesivamente difusas ayudará en la identificabilidad del modelo. Sin embargo, hay que destacar los trabajos de Berger et al. (2001) y DeOliveira (2007) donde se obtienen previas poco informativas validas para algunos de los parámetros del modelo dado en (2.17). Con todo, hasta el momento no hay ningún trabajo en la literatura que proporcione una distribución previa objetiva válida y general para todo el conjunto de parámetros de dicho modelo.

Desde el punto de vista Bayesiano, el modelo dado en (2.17) se puede expresar a través de un modelo jerárquico si se atiende a la expresión de la descomposición de la variabilidad vista con anterioridad.

Los modelos jerárquicos han sido ampliamente utilizados en Estadística. Desde su introducción (Good, 1965) han recibido mucha

atención y se ha extendido su uso a múltiples situaciones. Referencias del uso de los modelos para datos geoestadísticos se pueden encontrar en Banerjee et al. (2004).

En concreto, el modelo jerárquico Bayesiano para datos geoestadísticos correspondientes a un proceso Gaussiano homogéneo se expresa en tres niveles de información según:

$$\begin{aligned} (I) \mathbf{Y} | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{W}, \tau^2 &\sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}, \tau^2\mathbf{I}) \\ (II) \mathbf{W} | \sigma^2, \boldsymbol{\theta} &\sim N_n(0, \sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})) \quad , \\ (III) p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}) & \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se ha eliminado la indicación s de las localizaciones para simplificar la notación, recordar que \mathbf{W} representa el efecto espacial.

Mediante un cálculo sencillo se puede comprobar que si en (2.19) integramos respecto de \mathbf{W} , el modelo resultante es el planteado en (2.17). Por este motivo, a dicho modelo se le conoce habitualmente como modelo marginal en la modelización de datos geoestadísticos.

La principal ventaja del modelo dado en (2.19) es que permite resolver de forma directa el proceso inferencial sobre el efecto espacial, \mathbf{W} , planteado en la modelización. La predicción de este proceso permite obtener una representación gráfica muy informativa sobre el comportamiento espacial del proceso estudiado.

Inferencia

El proceso inferencial Bayesiano para los modelos dados en (2.17) o (2.19) se reduce al estudio de la distribución posterior de los parámetros dada por:

$$p(\boldsymbol{\Delta} | \mathbf{Y}) \propto L(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\Delta})p(\boldsymbol{\Delta}), \quad (2.20)$$

donde $L(\boldsymbol{\Delta} | \mathbf{Y})$ es la verosimilitud del modelo.

Para el modelo marginal se tiene que:

$$L(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\Delta}) \propto |\sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2\mathbf{I}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right\}, \quad (2.21)$$

mientras que para el modelo (2.19) dicha verosimilitud viene dada por:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{Y} | \Delta) &\propto L(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, \mathbf{W}) p(\mathbf{W} | \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) \\
&\propto (\tau^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{W})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{W})\right\} \\
&\quad (\sigma^2)^{-n/2} |\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{W}' \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Debido a la complejidad de los modelos dados en (2.17) y (2.19), la distribuciones posteriores obtenidas a partir de (2.20) no resultan analíticas y ha de recurrirse a métodos de simulación de Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC) para obtener una muestra de la distribución posterior.

La forma de proceder habitual es mediante la utilización del algoritmo de “*Gibbs sampling*” (Geman y Geman, 1984; Gelfand y Smith, 1990). Se puede encontrar más información al respecto de los métodos MCMC en el contexto de inferencia Bayesiana en Gilks et al. (1996), Gamerman (1997), Robert y Casella (1999), y Chen et al. (2000).

En muchas ocasiones el algoritmo Gibbs planteado es bastante sencillo porque en bastantes casos, con la elección de previas adecuadas, las distribuciones condicionadas son distribuciones conocidas completas de las que resulta fácil simular. Sin embargo en este contexto, este algoritmo no está exento de importantes problemas computacionales relacionados principalmente a la inversión y el cálculo del determinante de las matrices $\sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}$ y $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ respectivamente, que aparecen en las distribuciones condicionadas necesarias para su utilización. Esta dificultad es casi insalvable cuando el número de localizaciones observadas es muy grande y se agrava en caso de trabajar con el algoritmo de *Metropolis Hastings*. Por este motivo muchos autores proponen trabajar con el modelo marginal (2.17), en el que sólo aparece la matriz, $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$. A pesar de ello la simulación de $\boldsymbol{\theta}$ resulta muy complicada y lenta. Posibles soluciones pasan por modificar este algoritmo mediante el uso de *Slice Sampling* (Neal, 2000; Agarwal y Gelfand, 2005).

El algoritmo *Slice sampling* se basa en la introducción de variables auxiliares de forma que si $L(\varphi; Y)$ denota la verosimilitud y $\pi(\varphi)$ la previa propia correspondiente, se introduce la variable auxiliar U , de forma que, dado φ e Y , U se distribuye de forma uniforme sobre $(0, L(\varphi; Y))$. De esta forma la distribución posterior viene dada por:

$$p(\varphi, U | Y) \propto \pi(\varphi) I(U < L(\varphi; Y)),$$

donde I denota la función indicador. En este caso el algoritmo de Gibbs funciona generando U 's de acuerdo con su distribución condicional que es uniforme, y para cada componente de φ se simula un candidato de acuerdo a la distribución previa pero satisfaciendo la restricción impuesta. Banerjee et al. (2004, pág. 303 y siguientes), muestran la aplicación de este algoritmo a diferentes situaciones relacionadas con los modelos de estadística espacial y en concreto con los modelos geoestadísticos.

Otra alternativa para la simulación de la distribución posterior consiste en el uso de programación en paralelo (Adams et al., 1996; Blackford et al., 1997b; Rosenthal, 2000; Rossini et al., 2003; Whitley y Wilson, 2004) para acelerar los cálculos matriciales involucrados en este tipo de modelos. Un trabajo reciente sobre este tema se debe a Yan et al. (2007).

En el capítulo siguiente se mostrarán las distribuciones condicionadas completas, así como el algoritmo de Gibbs para cada uno de los modelos planteados para diferentes elecciones de distribuciones previas.

Una vez establecido el algoritmo de simulación tan sólo restará asegurarse de que converge a la distribución posterior. El procedimiento habitual consiste en usar diferentes cadenas y comprobar la convergencia a la distribución posterior mediante los criterios habituales de convergencia (Cowles y Carlin, 1996).

Asegurada la convergencia, el proceso inferencial queda reducido al estudio descriptivo de la muestra de la distribución posterior obtenida: cálculo de medidas de localización, escala, y regiones de credibilidad.

Predicción

Como el modelo dado en (2.17) se obtiene directamente a partir de (2.19) se estudiará aquí el problema de predicción para el modelo jerárquico.

Desde el punto de vista Bayesiano, dado el modelo jerárquico (2.19) y un nuevo conjunto de localizaciones

$$\mathbf{Y}_0 \equiv \mathbf{Y}(\mathbf{s}_0) = (Y(s_{01}), \dots, Y(s_{0n_0})), \text{ con } \dim(\mathbf{Y}_0) = n_0 \times 1,$$

con matriz de covariables $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}(\mathbf{s}_0)$, con $\dim(\mathbf{X}_0) = n_0 \times p$, y conjunto de parámetros indexado por $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{W}, \mathbf{\Delta})$, entonces el problema de predicción queda reducido a la obtención de la predictiva posterior:

$$p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0) = \int p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\Omega}) p(\boldsymbol{\Omega} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\boldsymbol{\Omega}, \quad (2.23)$$

donde $p(\boldsymbol{\Omega} | \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ se obtiene a partir de (2.22), y $p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\Omega})$ es el modelo para las nuevas observaciones dadas las localizaciones observadas y los valores de las covariables asociadas.

Si denotamos por $\mathbf{W}_0 \equiv \mathbf{W}(s_0)$ a la predicción del efecto espacial asociada, y $\mathbf{H}_0(\boldsymbol{\theta})$ a la matriz de correlaciones para las nuevas localizaciones, la distribución predictiva posterior viene dada por:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0) &= \iint p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{W}_0, \tau^2) p(\mathbf{W}_0 | \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\Omega} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\mathbf{W}_0 d\boldsymbol{\Omega} = \\ &= \iint N_{n_0}(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}_0, \tau^2 \mathbf{I}) N_{n_0}(\mathbf{W}_0 | 0, \sigma^2 \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\theta})) p(\boldsymbol{\Omega} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\mathbf{W}_0 d\boldsymbol{\Omega} = \\ &= \int N_{n_0}(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0 \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}) p(\boldsymbol{\Delta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\boldsymbol{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De forma automática, la última ecuación (2.24) también corresponde a la distribución predictiva posterior para el modelo marginal.

Puesto que la distribución posterior $p(\boldsymbol{\Delta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ no posee una forma cerrada, la distribución predictiva posterior se obtiene haciendo uso del método de composición. Dada una muestra de la distribución posterior $\{\boldsymbol{\Delta}_i\}_{i=1}^M = \{\boldsymbol{\beta}_i, \tau^2_i, \sigma^2_i, \boldsymbol{\theta}_i\}_{i=1}^M$, se genera una colección de predicciones $\{\mathbf{Y}_{0,i}\}_{i=1}^M$ para todo el conjunto de nuevas localizaciones a partir de $N_{n_0}(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0 \boldsymbol{\beta}_i, \sigma^2_i \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\theta}_i) + \tau^2_i \mathbf{I})$, $i = 1, \dots, M$. De nuevo, el proceso inferencial de la distribución predictiva se basa en un análisis descriptivo de la muestra obtenida para cada una de las nuevas localizaciones.

Si se considera el vector de datos ampliado $(\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_o)$ y la matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma}_{(o+p) \times (o+p)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{pp} & \boldsymbol{\Sigma}_{po} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{op} & \boldsymbol{\Sigma}_{oo} \end{pmatrix},$$

donde los subíndices o y p representan los datos originales y los valores a predecir respectivamente, resulta pues muy fácil implementar el algoritmo de composición ya que se trata de distribuciones normales multivariantes

(Banerjee et al., 2004) con vector de medias y matriz de covarianzas condicionadas dados por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] &= \boldsymbol{\mu}_p + \boldsymbol{\Sigma}_{po} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} (\mathbf{Y}_o - \boldsymbol{\mu}_o) \\ V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] &= \boldsymbol{\Sigma}_{pp} - \boldsymbol{\Sigma}_{po} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{op}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

El vector de predicciones $1 \times p$, se generará entonces a partir de:

$$\mathbf{Y}_{p \times 1} \sim N_p \left(E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]; V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] \right),$$

donde sustituyendo en las expresiones anteriores se tiene para el modelo marginal:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o) &= \mathbf{X}_p \boldsymbol{\beta} + (\sigma^2 \mathbf{H}_{po}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}) (\sigma^2 \mathbf{H}_{oo}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{Y}_o - \mathbf{X}_o \boldsymbol{\beta}) \\ V(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o) &= (\sigma^2 \mathbf{H}_{pp}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}) - \\ &\quad (\sigma^2 \mathbf{H}_{po}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}) (\sigma^2 \mathbf{H}_{oo}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I})^{-1} (\sigma^2 \mathbf{H}_{op}(\boldsymbol{\theta}) + \tau^2 \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como se puede observar en las expresiones anteriores si el número de localizaciones a predecir es muy grande, el coste computacional de evaluar estas expresiones resulta inabordable. En esta memoria se presenta un algoritmo de computación en paralelo capaz de realizar estos cálculos en un tiempo relativamente corto.

Además, desde la perspectiva Bayesiana también resulta inmediato obtener la predicción del efecto espacial \mathbf{W}_0 mediante la distribución predictiva:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{W}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= \int p(\mathbf{W}_0 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) p(\sigma^2, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\sigma^2 d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int N_{n_o}(\mathbf{W}_0 | 0, \sigma^2 \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\theta})) p(\sigma^2, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\sigma^2 d\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Esta distribución resulta de gran utilidad ya que si el número de puntos a predecir es lo suficientemente grande, mediante procedimientos de interpolación se puede representar gráficamente el comportamiento espacial del proceso estudiado; independientemente de la predicción del proceso.

Capítulo 3. Modelización Univariante de los Índices Bioclimáticos

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha descrito el modelo jerárquico Bayesiano para datos geoestadísticos. En este capítulo se profundiza en la descripción del modelo aplicándolo al análisis de índices bioclimáticos. Se plantean nuevas posibilidades de modelización, el procedimiento de elicitación de distribuciones previas, y el algoritmo de Gibbs utilizado para la obtención de muestras de la distribución posterior.

Una vez establecidas las diferentes distribuciones previas para cada índice, se obtienen sus correspondientes distribuciones posteriores, y la distribución predictiva. El estudio se centra principalmente en la obtención de los mapas predictivos y de la distribución de probabilidad espacial asociados a cada índice por subtipos, mostrando los resultados de algunos de los modelos concretos para cada uno de los tres índices involucrados en la clasificación bioclimática: ombrotermia, continentalidad y termicidad.

3.2. Modelos jerárquicos espaciales univariantes para índices bioclimáticos

Utilizando la base teórica del capítulo anterior, se muestra a continuación dos posibles parametrizaciones del modelo jerárquico dado en

(2.19) que se pasarán a denominar *modelo habitual*, y *modelo reparametrizado*.

3.2.1. Modelo habitual

El Modelo habitual se desarrolló extensamente en la sección 2.4.1 y viene dado específicamente en (2.19) como:

$$\begin{aligned} (I) \quad \mathbf{Y} &\sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}, \tau^2\mathbf{I}) \\ (II) \quad \mathbf{W} &\sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})) \\ (III) \quad &p(\sigma^2, \tau^2, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.2.2. Modelo reparametrizado

Otra forma de expresar el modelo jerárquico espacial Bayesiano (3.1) es utilizando la reparametrización que proponen Yan et al. (2007). En este caso, se considera la variabilidad total asociada con cualquiera de las observaciones $\xi^2 = \sigma^2 + \tau^2$, y se define $\kappa = \tau^2 / \xi^2$ como la proporción de la variabilidad correspondiente al efecto no espacial.

Aprovechando la expresión del modelo marginal dado en (2.19), el modelo puede expresarse como

$$\begin{aligned} (I) \quad \mathbf{Y} &\sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \xi^2 [(1-\kappa)\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I}]) \\ (II) \quad &p(\kappa, \xi^2, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si se denota por $\Delta = (\kappa, \xi^2, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta})$ al conjunto de parámetros del modelo, la distribución posterior viene dada por:

$$p(\Delta | \mathbf{Y}) \propto L(\mathbf{Y} | \Delta) p(\Delta),$$

donde la verosimilitud viene dada por

$$L(\mathbf{Y} | \Delta) \propto (\xi^2)^{-n/2} |\boldsymbol{\Psi}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\},$$

siendo $\boldsymbol{\Psi} = (1-\kappa)\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I}$. Del mismo modo que en el modelo habitual se asume independencia a priori entre todos los parámetros dados en Δ , de forma que $p(\kappa, \xi^2, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = p(\kappa)p(\xi^2)p(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\beta})$.

Como en los casos anteriores la distribución posterior no resulta analítica, por lo que de nuevo hay que recurrir a los métodos MCMC para obtener una muestra de la distribución posterior.

3.3. Distribuciones previas

Sin duda es el aspecto más crítico, pues todo análisis Bayesiano surge con la elección de las distribuciones previas sobre los parámetros involucrados en el modelo.

Para el establecimiento de las distribuciones previas asociadas a los parámetros de cada modelo de los índices bioclimáticos se dispone de cierta información previa que va a ser considerada (estrategia que sólo la inferencia Bayesiana puede aprovechar).

Dicha información corresponde a los valores teóricos máximos y mínimos de cada uno de los índices bioclimáticos en la zona de estudio. Tal como se vio en el capítulo primero, los índices bioclimáticos son valores que dependen de parámetros como la temperatura y la precipitación que sólo toman valores en cierto intervalo, provocando por tanto que estos índices están acotados en un cierto intervalo. Esta acotación proporciona información sobre la variabilidad de los datos observados que puede ser utilizada para construir una distribución previa poco informativa.

Por otro lado, con el fin de estudiar las posibles diferencias, que a la hora del proceso de aprendizaje Bayesiano puedan surgir debido a la elección de las previas, se han analizado diversas posibilidades en cada uno de los modelos (habitual y reparametrizado). Sobre todo se está interesado en los efectos que tiene el uso de diferentes previas sobre las varianzas en ambos modelos.

3.3.1. Distribuciones previas sobre la variabilidad

Como se comentó en párrafos anteriores, para el establecimiento de distribuciones previas sobre las variabilidades involucradas en los modelos (3.1) y (3.2), se dispone de la información proporcionada por los intervalos máximos y mínimos en la clasificación Bioclimática de la Tierra de Rivas-Martínez (2004b) para cada subtipo del macrobioclima Mediterráneo (ver 1.4.2).

En concreto, dado que un índice bioclimático I puede tomar valores únicamente en el rango (I_{min}, I_{max}) , con $I_{min} > 0$, el procedimiento para el establecimiento de una distribución previa sobre la variabilidad de dicho índice consiste en aprovechar dicha información. Si los valores observados de I en un conjunto de localizaciones sobre la región bajo estudio se repartieran de forma uniforme a lo largo de toda la escala del índice, la

variabilidad asociada vendría dada por la varianza de una distribución uniforme en (I_{min}, I_{max}) :

$$Var(Y) = \frac{(I_{max} - I_{min})^2}{12},$$

que se va a denominar V_{max} , y donde I_{max} y I_{min} denotan respectivamente los valores máximo y mínimo que teóricamente dicho índice puede tomar.

Por tanto, V_{max} se puede tomar como una cota superior de la variabilidad del índice, pues es evidente que los valores observados difícilmente se distribuirán uniformemente sobre (I_{min}, I_{max}) , debido principalmente a las condiciones orográficas de la región bajo estudio. Este supuesto puede no cumplirse si la región estudiada es muy homogénea y por tanto se esperan pocos cambios en los valores del índice entre las posibles localizaciones observadas.

Para construir una distribución previa se procede a igualar el rango de la variabilidad, (a, V_{max}) , con el cuantil 0.95 de la correspondiente distribución previa, es decir, se resuelve la siguiente ecuación:

$$0.95 = \int_a^{V_{max}} f(y | \alpha) d\alpha \quad (3.3)$$

donde f representa a la distribución previa y α los correspondientes parámetros. Puesto que la variabilidad es positiva, se puede tomar a como un valor positivo muy pequeño para asegurar valores no negativos en la varianza. En esta memoria se ha optado por $a = 0.001$, no encontrándose problemas de sensibilidad en las distribuciones posteriores respecto de este valor. Por tanto, resolviendo (3.3) es posible establecer los hiperparámetros correspondientes a la distribución previa usada.

El motivo principal que lleva a trabajar con el cuantil 0.95 de la correspondiente distribución previa es no establecer como fijo el valor de V_{max} obtenido, ya que a pesar de que se piensa que este valor recoge bastante bien la variabilidad total del proceso, se desea que la cola superior de la distribución permita valores superiores, aunque con poca probabilidad, con el fin de no restringir la inferencia a dicho valor. Esta forma de proceder es habitual cuando se desean establecer distribuciones previas difusas sobre los parámetros de un modelo específico.

A continuación se presentan las diferentes previas usadas a lo largo de esta memoria. Se comienza por establecer las distribuciones previas

sobre la variabilidad del proceso por considerarse como las más relevantes en el proceso de modelización. Posteriormente se presentan el resto de distribuciones previas involucradas en los modelos (3.1) y (3.2).

Distribución previa Uniforme para la varianza.

Asumiendo que la distribución previa de la variabilidad de un índice bioclimático I es uniforme con parámetros a y b , $Unif(a,b)$, con función de densidad dada por

$$f(x|a,b) = \frac{1}{b-a} \quad b > a > 0,$$

y establecido el valor a (como un valor mayor que cero, 0.001), tan sólo queda resolver la ecuación (3.3) para obtener el valor de b . En este caso, dicha ecuación viene expresada como:

$$0.95 = \int_{0.001}^{V_{max}} \frac{1}{b-0.001} dx = \frac{V_{max} - 0.001}{b - 0.001},$$

y fijando el valor a como una cantidad suficientemente pequeña ($a=0.001$) para asegurar valores no negativos en la varianza, tan solo queda resolver la ecuación para obtener el valor de b .

En este caso se tiene que

$$0.95 = \int_{0.001}^{V_{max}} \frac{1}{b-0.001} dx = \frac{V_{max} - 0.001}{b - 0.001},$$

de donde se obtiene

$$b = \frac{V_{max} - 0.00005}{0.95}. \quad (3.4)$$

Para el modelo habitual (3.1), y dado que se dispone de dos fuentes de variabilidad, σ^2 y τ^2 , se deben establecer dos distribuciones previas. Como no se dispone de suficiente información que permita distinguir entre ellas a priori, se ha optado por asumir la misma distribución previa, aunque esto pueda conllevar cierto problema de identificabilidad. De esta forma, se deja que sean los datos los que aporten información sobre la variabilidad espacial y no espacial.

Se tiene por tanto que

$$p(\sigma^2) \sim Unif(0.001,b), \quad p(\tau^2) \sim Unif(0.001,b),$$

donde b se obtiene a partir de (3.4).

Para el modelo reparametrizado (3.2) se procede de forma análoga. Sin embargo, en este caso tan sólo hace falta fijar una única distribución previa, ya que dicho modelo viene planteado en términos de la variabilidad global (ξ^2). Se establece entonces

$$p(\xi^2) \sim Unif(0.001, b)$$

donde b toma el mismo valor que en el caso del modelo habitual, ya que el procedimiento establecido está pensado sobre la variabilidad global del índice que en este caso viene representada por ξ^2 .

Distribución previa Gamma Inversa para la varianza

Otra posibilidad para asignar la distribución previa de la varianza es utilizar la distribución Gamma Inversa con parámetros α y β , $Gal(\alpha, \beta)$, cuya función de densidad es

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

con esperanza y varianza definidas como:

$$E(x) = \frac{\beta}{(\alpha-1)}, \quad V(x) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

En este caso no se puede usar directamente la ecuación (3.3), ya que se tienen dos hiperparámetros con una sola ecuación. Para solucionar esto, se ha optado por seguir las recomendaciones existentes en la literatura (Banerjee et al., 2004 capítulo 5) donde se fija $\alpha=2$ para conseguir que la varianza sea infinita. Esta forma de proceder difiere respecto al proceder habitualmente empleado en la literatura, en el cual se fijan α y β con valores pequeños e iguales.

La ecuación (3.3) queda en este caso igual a:

$$0.95 = \int_{0.001}^{V_{max}} \frac{\beta^2}{\Gamma(2)} x^{-3} e^{-\beta/x} dx, \quad (3.5)$$

donde el valor de β no se puede despejar directamente, y se obtiene por procedimientos numéricos de resolución de ecuaciones.

Para el modelo habitual las previas a considerar serán entonces:

$$p(\sigma^2) \sim Gal(2, \beta) \text{ y } p(\tau^2) \sim Gal(2, \beta),$$

mientras que para el modelo reparametrizado la distribución previa será:

$$p(\xi^2) \sim \text{Gal}(2, \beta),$$

donde β se obtiene a partir de (3.5) en todos los casos.

Distribución previa Half-Cauchy para la varianza

También se puede utilizar la distribución Half-Cauchy con parámetro de escala δ , $HC(\delta)$, como distribución previa de la varianza, siendo la función de densidad de una Half-Cauchy:

$$f(x | \delta^2) = \frac{2\delta^2}{\pi(x^2 + \delta^2)}, \quad x > 0.$$

La resolución de (3.3) en este caso permite obtener de forma directa el valor del hiperparámetro δ que viene dado por la ecuación:

$$\delta = \frac{V_{max}}{\tan\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0.95\right)}. \quad (3.6)$$

Como en los casos precedentes, se fijan las previas de las varianzas para el modelo habitual como

$$p(\sigma^2) \sim HC(\delta) \text{ y } p(\tau^2) \sim HC(\delta),$$

y la de variabilidad total en el modelo reparametrizado como

$$p(\xi^2) \sim HC(\delta),$$

donde δ es igual en ambos modelos y se obtiene a partir de (3.6).

3.3.2. Distribución previa uniforme para la desviación típica

En la modelización Bayesiana cada vez hay más autores que abogan por el uso de distribuciones previas uniformes sobre los parámetros que reflejan la desviación típica del proceso estudiado (Gelman, 2004). El uso de estas distribuciones viene motivado por el hecho de que resulta mucho más fácil establecer una distribución previa en términos de la desviación típica que de la varianza, y el uso de una distribución uniforme es porque refleja de forma más razonable la falta de información sobre el comportamiento del parámetro estudiado.

En este caso se ha considerado que el uso de estas distribuciones podría aportar información sobre su comportamiento es esta situación, frente a lo que se ha venido usando habitualmente. Se considera

únicamente el modelo reparametrizado y la distribución previa considerada es

$$p(\xi) \sim Unif(0.001, \sqrt{b}),$$

con b obtenida a partir de (3.4). No se estudia el modelo habitual ya que el software utilizado para el proceso inferencial no permite definir este tipo de previas.

3.3.3. Distribuciones previas sobre β

En este caso se ha optado por la elección habitual de una distribución previa poco informativa asociada a los parámetros de la regresión que conforman la media del proceso, esto es,

$$p(\boldsymbol{\beta}) = p(\beta_0, \beta_1) = p(\beta_0)p(\beta_1) \propto 1,$$

con $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$, donde β_0 refleja el efecto asociado con la intercepción, y β_1 el efecto correspondiente a la altura. Estas distribuciones serán las mismas para todos los modelos e índices estudiados.

Distribuciones previas sobre $\boldsymbol{\theta}$

Por último, resta establecer la distribución previa sobre $\boldsymbol{\theta}$, parámetro o parámetros de la función de correlación espacial que determinan $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$.

En este caso, como ya se mencionó con anterioridad se va a usar en la modelización la función de correlación tipo matérn (Matérn, 1986), que viene definida por dos parámetros, $\boldsymbol{\theta} = (\phi, \nu)$. De nuevo se asume independencia entre ambos parámetros de forma que:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(\phi)p(\nu).$$

Sobre ϕ , parámetro que refleja la escala de la función de correlación, se suele tomar como referencia que el efecto espacial estudiado no puede extenderse más allá de la mitad de la distancia más larga entre dos localizaciones sobre las que se ha observado el proceso, y a la vez no puede ser inferior a la mínima distancia entre dos de ellas. Aunque esto parece una regla ad-hoc, funciona de forma adecuada en la mayoría de problemas reales presentes en la literatura. De esta forma la previa asignada para ϕ viene dada por:

$$p(\phi) = \text{Unif}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}\right), \quad (3.7)$$

donde d_1 es la mitad de la distancia más alejada entre dos localizaciones, y d_2 es la distancia mínima entre las dos localizaciones más cercanas. En este caso dichos valores son $d_1=89728$ m. y $d_2=1818$ m., lo que proporciona la distribución previa:

$$p(\phi) \sim \text{Unif}(1.0E-5, 5.5E-4).$$

Sobre el parámetro de suavizado, ν , el procedimiento habitual consiste en tomar una distribución uniforme en (0,2) según sugiere Stein (1999). En dicho trabajo se resalta que valores superiores a 2 no tienen ningún efecto sobre el suavizado, por ello se considera como distribución previa del parámetro de suavizado la siguiente (Finley et al., 2007):

$$p(\nu) \sim \text{Unif}(0.05, 1.95).$$

3.4. Distribución posterior

En este apartado se muestran los diferentes modelos considerados, las distribuciones posteriores resultantes, y el algoritmo de simulación correspondiente.

3.4.1. Modelo jerárquico habitual

Una vez establecidas las distribuciones previas, el modelo habitual dado en (3.1) se puede escribir de forma genérica para cada uno de los tres índices bioclimáticos como:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}, \tau^2 \mathbf{I}) \\ (II) \quad & \mathbf{W} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})); \quad \boldsymbol{\theta} = (\phi, \nu) \\ (III) \quad & \pi(\boldsymbol{\beta}) \propto 1; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\pi(\phi) \propto \text{Unif}(1.0E-05, 5.5E-04); \quad \pi(\nu) \propto \text{Unif}(0.05, 1.95)$$

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2) & \Rightarrow \begin{cases} a) \text{Unif}(0.001, b) \text{ o} \\ b) \text{Gal}(2, \beta) \text{ o} \\ c) \text{HC}(\delta), \end{cases} \end{aligned}$$

con b dado en (3.4), β dado en (3.5) y δ dado en (3.6).

La distribución posterior de este modelo no resulta analítica y es necesario un algoritmo MCMC para obtener una muestra de dicha

distribución. En el punto siguiente se presenta de forma esquemática el algoritmo de Gibbs correspondiente a este modelo.

Algoritmo MCMC de simulación

Para unos valores iniciales de los parámetros del modelo el algoritmo de Gibbs para obtener una simulación en el instante t viene dado por:

- Simular β_t de

$$p(\beta | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}_t, \tau_{t-1}^2) \propto (\tau_{t-1}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_{t-1}^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{W}_{t-1})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{W}_{t-1}) \right\} p(\beta).$$

lo que corresponde a:

$$p(\beta | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}_{t-1}, \tau_{t-1}^2) = N_p(\beta | (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{W}), \tau^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}).$$

- Simular \mathbf{W}_t de

$$p(\mathbf{W} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \beta_{t-1}, \sigma_{t-1}^2, \tau_{t-1}^2, \theta_{t-1}) = N_n(\mathbf{Y} | \mathbf{X}\beta_{t-1} + \mathbf{W}, \tau_{t-1}^2 \mathbf{I}) N_n(\mathbf{W} | 0, \sigma_{t-1}^2 \mathbf{H}(\theta_{t-1}))$$

lo que corresponde a:

$$N_n \left(\mathbf{W} \mid \left[\frac{1}{\tau_{t-1}^2} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_{t-1}^2} \mathbf{H}(\theta_{t-1}) \right] \frac{1}{\tau_{t-1}^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1}), \left(\frac{1}{\tau_{t-1}^2} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_{t-1}^2} \mathbf{H}(\theta_{t-1}) \right) \right)$$

- Simular τ_t^2 de

$$\tau^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \beta_{t-1}, \mathbf{W}_{t-1} \propto (\tau^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1}) \right\} p(\tau^2).$$

Si $p(\tau^2) \sim Unif(0.001, b)$ la distribución condicionada viene dada por:

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}_{t-1}, \beta_{t-1}) &\propto \\ &\propto (\tau^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1}) \right\} I_{(0.001, b)}(\tau^2) \\ &\propto Gal \left(\tau^2 \mid \frac{n}{2} - 1; \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1}) \right) I_{(0.001, b)}(\tau^2), \end{aligned}$$

donde $I_{(0.001, b)}$ es la función indicatriz que toma el valor 1 si $\tau^2 \in [0.001, b]$.

Para obtener una simulación para τ^2 de esta distribución basta con generar un valor a partir de la distribución $Unif(0.001, b)$, y usando un paso de *Metropolis-Hastings* decidir si se acepta o no el candidato.

Si $p(\tau^2) \sim Gal(\tau^2 | 2, \beta)$, la distribución condicionada resultante viene dada por

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \mathbf{W}_{t-1}) &= \\ &= Gal\left(\tau^2 | 2 + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})\right). \end{aligned}$$

Si $p(\tau^2) \sim HC(\delta)$, la distribución condicionada resultante viene dada por:

$$\begin{aligned} p(\tau^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \mathbf{W}_{t-1}) &\propto \\ &\propto (\tau^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})\right\} (\tau^2 + \delta^2)^{-1}, \end{aligned}$$

que no tiene una forma analítica cerrada, y se recurre a *Metropolis-Hastings* usando como distribución pivote una

$$Gal\left(\tau^2 | \frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1})\right).$$

- Simular σ^2_t de

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{W}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) &\propto \\ &(\sigma^2)^{-n/2} |\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1})|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{W}_{t-1}^T \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}) \mathbf{W}_{t-1}\right\} p(\sigma^2). \end{aligned}$$

Si $p(\sigma^2) \sim Unif(0.001, b)$, la distribución condicionada viene dada por:

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}_{t-1}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}) &\propto \\ &\propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{W}_{t-1}^T (\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}))^{-1} \mathbf{W}_{t-1}\right\} I_{(0.001, b)}(\sigma^2) \\ &\propto IG\left(\sigma^2 | \frac{n}{2} - 1; \frac{1}{2} \mathbf{W}_{t-1}^T (\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}))^{-1} \mathbf{W}_{t-1}\right) I_{(0.001, b)}(\sigma^2). \end{aligned}$$

El procedimiento para obtener una muestra de esta distribución es idéntico al descrito al caso de $p(\tau^2) \sim Unif(0.001, b)$.

Si $p(\sigma^2) \sim Gal(\sigma^2 | 2, \beta)$, la distribución condicionada viene dada por:

$$p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{W}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) = \text{Gal} \left(\sigma^2 \mid 2 + \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \mathbf{W}_{t-1}' (\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}))^{-1} \mathbf{W}_{t-1} \right).$$

Si $p(\sigma^2) \sim HC(\sigma^2 | \delta)$, la distribución condicionada resultante viene dada por

$$p(\sigma^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{W}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \propto (\sigma^2)^{-n/2} |\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1})|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{W}_{t-1}' \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}) \mathbf{W}_{t-1} \right\} (\sigma^2 + \delta^2)^{-1},$$

que no tiene una forma analítica cerrada e igualmente requerirá un procedimiento de simulación Metropolis-Hastings, usando como pivote una

$$\text{Gal} \left(\sigma^2 \mid \frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2} \mathbf{W}_{t-1}' \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}) \mathbf{W}_{t-1} \right).$$

- Simular $\boldsymbol{\theta}_t$ a partir de:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{W}_{t-1}, \sigma_{t-1}^2) \propto |\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{t-1}^2} \mathbf{W}_{t-1}' \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_{t-1} \right\} p(\boldsymbol{\theta}).$$

Asumiendo una distribución uniforme para cada una de las componentes de $\boldsymbol{\theta}$, la distribución condicionada resultante viene dada por:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{W}_{t-1}, \sigma_{t-1}^2) \propto |\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{t-1}^2} \mathbf{W}_{t-1}' \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_{t-1} \right\},$$

que no tiene forma cerrada. En este caso el algoritmo de Metropolis-Hastings no resulta eficiente debido a que $\boldsymbol{\theta}$ aparece tanto en el determinante como la inversa de \mathbf{H} . Sin embargo, como las distribuciones previas sobre $\boldsymbol{\theta}$ son uniformes, el algoritmo de *Slice Sampling* resulta muy sencillo en este caso. Los detalles se pueden encontrar en Banerjee, Carlin y Gelfand (2004, pág. 303 y siguientes).

Como se puede observar el algoritmo de simulación para cualquier especificación es relativamente sencillo, ya que en muchas ocasiones las distribuciones asociadas son conocidas. En los otros casos, el algoritmo de *Metropolis-Hastings* o *Slice Sampling* en la mayoría de los casos resuelven de manera satisfactoria la simulación de la muestra. En concreto para estos modelos se ha recurrido al paquete *spBayes* (Finley et al., 2007) del programa *R* (*R Development Core Team, 2009*) para obtener las distribuciones.

En el apartado 3.6 se mostrará con más detalle los resultados de cada uno de los índices, desde el punto de vista de la convergencia del algoritmo MCMC planteado.

3.4.2. Modelo reparametrizado

En este caso para cada uno de los índices bioclimáticos, se considera el modelo reparametrizados dado en (3.2):

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \xi^2 [(1-\kappa)\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I}]); \quad \boldsymbol{\theta} = (\phi, \nu) \\
 (II) \quad & \pi(\boldsymbol{\beta}) \propto 1 \\
 & \pi(\phi) \propto Unif(1.0E-05, 5.5E-04); \quad \pi(\nu) \propto Unif(0.05, 1.95) \\
 & \pi(\kappa) \propto Unif(0, 1) \\
 & \pi(\xi^2) \Rightarrow \begin{cases} a) Unif(0.001, b) \text{ o} \\ b) Gal(2, \beta) \text{ o} \\ c) HC(\delta) \end{cases} \\
 & \text{ó} \\
 & \pi(\xi) \propto Unif(0.001, \sqrt{b}),
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

con b dado en (3.4), β dado en (3.5) y δ dado en (3.6).

Este modelo cuenta con la ventaja de que tan solo es necesario asignar una distribución previa sobre la variabilidad de los datos, ξ^2 , lo que facilita su elicitación. Además con esta reparametrización se evita el posible problema de identificabilidad de la variabilidad espacial y no espacial del modelo habitual, ya que dichos valores se obtienen mediante $\sigma^2 = (1-\kappa)\xi^2$ y $\tau^2 = \kappa\xi^2$.

Entre las posibles elecciones de distribuciones previas se procede de igual forma que en el modelo habitual considerando una distribución Gamma Inversa, Half-Cauchy, Uniforme sobre la varianza (ξ^2) o uniforme sobre la desviación típica (ξ). Para $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\beta}$ se consideran las mismas previas que el modelo habitual ya que su interpretación es la misma. Para el nuevo parámetro, κ , al tratarse de una proporción se establece una distribución uniforme entre 0 y 1, que corresponde con la distribución previa objetiva sobre dicho parámetro.

La distribución posterior de este modelo no resulta analítica y es necesario un algoritmo MCMC para obtener una muestra de dicha distribución. A continuación se detalla brevemente dicho algoritmo.

Algoritmo MCMC de simulación

Para unos valores iniciales de los parámetros del modelo el algoritmo de Gibbs para obtener una simulación en el instante t viene dado por:

- Simular $\boldsymbol{\beta}_t$ a partir de:

$$p(\boldsymbol{\beta} | Y, X, \xi_{t-1}^2, \kappa_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \propto (\xi_{t-1}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi_{t-1}^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} p(\boldsymbol{\beta}),$$

donde $\boldsymbol{\Psi}_{t-1} = (1 - \kappa_{t-1})\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{t-1}) + \kappa_{t-1}\mathbf{I}$.

Si $p(\boldsymbol{\beta}) \propto 1$, la distribución condicionada es:

$$p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \xi_{t-1}^2, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) = N_p \left(\boldsymbol{\beta} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} \mathbf{Y} \right], \xi_{t-1}^2 \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \right] \right).$$

- Simular ξ_t^2 de

$$p(\xi^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \kappa_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \propto (\xi^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1}) \right\} p(\xi^2).$$

Si $p(\xi^2) \sim Unif(0.001, b)$, la distribución condicionada resultante viene dada por

$$\begin{aligned} p(\xi^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \kappa_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) &\propto \\ &\propto (\xi^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1}) \right\} I_{(0.001, b)}(\xi^2) \\ &\propto Gal \left(\xi^2 \mid \frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1}) \right) I_{(0.001, b)}(\xi^2). \end{aligned}$$

Para obtener una simulación para ξ^2 de esta distribución basta con generar un valor a partir de la distribución $Unif(0.001, b)$, y usando un paso de Metropolis-Hastings decidir si se acepta o no el candidato.

Si $p(\xi^2) \sim Gal(2, \beta)$, la distribución condicionada resultante viene dada por

$$p(\xi^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}, \kappa_{t-1}) = Gal\left(\xi^2 \mid 2 + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right).$$

Si $p(\xi^2) \sim HC(\delta^2)$, la distribución condicionada resultante viene dada por:

$$p(\xi^2 | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}, \kappa_{t-1}) \propto (\xi^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\xi^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right\} (\xi^2 + \delta^2)^{-1},$$

que no tiene una forma analítica cerrada, de modo que es preciso simular de ella mediante Metropolis-Hastings tomando como pivote una distribución

$$Gal\left(\xi^2 \mid \frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right).$$

Si $p(\xi) \sim Unif(0.001, \sqrt{b})$, la distribución condicionada resultante viene dada por:

$$p(\xi | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}, \kappa_{t-1}) \propto (\xi^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\xi^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}_{t-1}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right\} I_{(0.001, \sqrt{b})}(\xi)$$

Para obtener un valor simulado de esta distribución basta con simular un candidato ξ dentro del intervalo $(0.001, \sqrt{b})$, y usar un paso de Metropolis-Hastings para determinar la aceptación o rechazo del candidato.

- Simular $\boldsymbol{\theta}_t = (\kappa_t, \phi_t, \nu_t)$ de

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \xi_{t-1}^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\xi_{t-1}^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right\} p(\boldsymbol{\theta}).$$

Si se asume una distribución uniforme para cada una de las componentes de $\boldsymbol{\theta}$, la distribución condicionada resultante viene dada por:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_{t-1}, \xi_{t-1}^2) \propto |\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta})|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\xi_{t-1}^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})^T \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{t-1})\right\},$$

que no tiene forma cerrada y de nuevo utilizar Slice Sampling proporciona un valor de la correspondiente distribución.

Para obtener las distribución es en este modelo se ha recurrido al programa *WinBUGS*[®] (*Lunn et al., 2000*) que permite una mayor flexibilidad a la hora de especificar la matriz de varianzas-covarianzas dada en el primer nivel de la jerarquía, y además resulta posible establecer distribuciones previas sobre la desviación típica, lo que no es posible todavía en el paquete *spBayes*.

3.5. Predicción espacial

En esta sección se estudia la distribución predictiva univariante para cualquiera de los índices bioclimáticos siguiendo la formulación vista en la apartado 2.3. En primer lugar se establece la distribución predictiva, haciendo hincapié en la posibilidad de disminuir el coste computacional del cálculo mediante la computación en paralelo. Finalmente se muestra el procedimiento computacional necesario para obtener la distribución espacial de probabilidad para cualquiera de los índices bioclimáticos.

3.5.1. Distribución predictiva

El objetivo final de esta memoria es estudiar el comportamiento de cada uno de los índices bioclimáticos a lo largo de toda la isla de Chipre. Como ya se vio en el Capítulo 2, este problema se puede resolver mediante la utilización de las técnicas de *Kriging* (ver apartado 2.3.2). En el ámbito de la estadística Bayesiana el problema de predicción queda reducido al estudio con la obtención de la distribución predictiva posterior de los índices sobre un conjunto de nuevas localizaciones.

En el caso de los modelos jerárquicos espaciales dados en (3.1) y en (3.2), dicha distribución predictiva posterior es una Normal Multivariante cuyo vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas se pueden obtener a partir de (2.25). Por tanto, dada una muestra de la distribución posterior resulta sencillo obtener una muestra de la correspondiente distribución predictiva sin más que generarla a partir de dicha distribución Normal Multivariante.

El problema de predicción radica en el coste computacional necesario para evaluar dicho vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas para cada una de las simulaciones de la distribución posterior y en el número de nuevas localizaciones que se desean predecir. Si dichos

números son elevados, esta dificultad puede llegar a ser insalvable en un tiempo razonable.

Una opción obvia podría ser considerar un *grid* de puntos de predicción pequeño y pocas simulaciones de la distribución posterior, pero esto puede llevar a producir mapas predictivos con demasiado error y por lo tanto que carecieran de interés práctico.

En este caso, como el objetivo es obtener un mapa predictivo sobre la isla de Chipre con el mayor poder de resolución posible, esta dificultad se ha puesto de manifiesto lo que ha llevado a la búsqueda de algoritmos eficientes para el cálculo de dicha distribución predictiva. De las diferentes pruebas realizadas se ha optado finalmente por la programación en paralelo, programando las ecuaciones de predicción en C, y haciendo llamadas a las librerías *ScaLAPACK* (Blackford et al., 1997a) y *PLAPACK* (van de Geijn et al., 1997) para realizar los cálculos de álgebra lineal paralelizados, que viene asociados con el cálculo de vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas.

Para el modelo habitual el vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas necesarios para la predicción viene dados en la ecuación (2.26).

En el caso del modelo reparametrizado dichas ecuaciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o) &= \mathbf{X}_p \boldsymbol{\beta} + \left((1-\kappa)\mathbf{H}_{po}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right) \left((1-\kappa)\mathbf{H}_{oo}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right)^{-1} (\mathbf{Y}_o - \mathbf{X}_o \boldsymbol{\beta}) \\
 V(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o) &= \xi^2 \left[\left((1-\kappa)\mathbf{H}_{pp}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left((1-\kappa)\mathbf{H}_{po}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right) \left((1-\kappa)\mathbf{H}_{oo}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right)^{-1} \left((1-\kappa)\mathbf{H}_{op}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I} \right) \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

donde los subíndices *o* y *p* indican respectivamente las observaciones originales y la localizaciones donde se desea predecir siguiendo la notación dada en (2.26).

Por tanto una vez obtenida la distribución posterior para cada uno de los modelos, y conocidos los valores de altura en las nuevas localizaciones el procedimiento para obtener distribución predictiva es inmediato.

Dada una muestra de la distribución predictiva para cada localización se procede de la forma habitual para realizar el correspondiente análisis inferencial. Basta con obtener la media o la mediana de los valores simulados para tener una estimación puntual de la predicción en cada

localización, mientras que el error de predicción se obtiene como la desviación típica de las simulaciones obtenidas para cada localización.

Para llevar a cabo el proceso de predicción se considero un mapa de cotas de altura de la isla de Chipre que contenía 775 puntos. Estos valores son necesarios para el cálculo de la esperanza condicional dada en (2.26) y (3.10).

Dichas cotas junto con las localizaciones de las estaciones meteorológicas se presentan en la Figura 3.1 Como se puede ver dichas cotas cubren de forma amplia toda la isla.

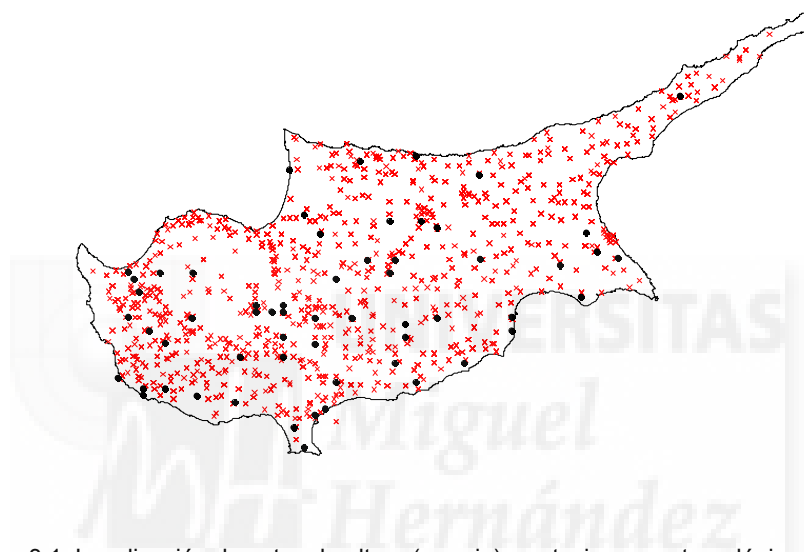


Figura 3.1. Localización de cotas de altura (en rojo) y estaciones meteorológicas (en negro).

3.5.2. Consideraciones sobre la computación en paralelo

La velocidad de los ordenadores convencionales se ha incrementado continuamente con el fin de adaptarse a las necesidades de las aplicaciones actuales, a la vez que hay una demanda continua de un poder computacional superior, como por ejemplo: modelado y simulación numérica de problemas en ciencias e ingeniería con costosos cálculos iterativos o sobre grandes cantidades de datos con fuertes restricciones temporales como son predicción meteorológica, biocomputación, y astrofísica.

En los últimos años la solución computacional a estos problemas se ha centrado en el uso de varios procesadores trabajando juntos para resolver una tarea común. Por todo esto, y dado el elevado número de

nuevas localizaciones de las se dispone, se ha optado por la utilización de este tipo de computación para resolver el problema de predicción espacial. El resultado obtenido es óptimo si se comparan los tiempos de cómputo por simulación (Golub y Van Loan, 1996; Almeida et al., 2008).

Realizar una predicción sobre una simulación de la distribución posterior de un índice cualquiera reporta tiempos totalmente distintos. En la Tabla 3.1. puede observarse el tiempo por iteración en segundos en tres máquinas distintas: Pentium IV a 2.53 GHz, y 2Gb de RAM, un *Intel Xeon DualCore* a 2.33 GHz y 3 GB de RAM, y finalmente una *Intel Itanium 2 system* equipado con 4 módulos cada uno con un *DualCore* 1.4 GHz *Montecito processor*.

Tabla 3.1. Tiempos de ejecución por simulación de la posterior

Lenguaje	Tipo	Procesador	Tiempo (seg.)
R	Secuencial	DualCore	126.72
C librería en R	Secuencial	Pentium IV	46.08
C librería en R	Secuencial	DualCore	23.04
C	Paralelo	1 Dual-Core	10.6
C	Paralelo	4 DualCore	4.8

Estos tiempos de computación permiten trabajar con un gran número de localizaciones a predecir de forma que se pueden obtener mapas de predicción con una mayor resolución. En el Anexo IV se muestra el proceso de obtención del vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas necesarias para la obtención de la distribución predictiva. En el Anexo V se muestra el código en C necesario para llevar a cabo la predicción.

Generación desde una Normal Multivariante

La esperanza y varianza condicionada, así como los elementos necesarios para su cálculo se generan desde una muestra de la distribución posterior. Por lo tanto siguiendo las indicaciones del Anexo VI se realizan los cálculos de la esperanza y la varianza condicionada para cada elemento de la distribución posterior, y lógicamente dependiendo de cuán grande sea la muestra más veces se deberá repetir el proceso de cálculo explicado en los dos subapartados anteriores.

Una vez especificados el vector de medias (esperanza condicionada) y la matriz de varianzas-covarianzas (varianza condicionada) necesarios para la generación de una muestra de la distribución predictiva posterior, ésta se calculará generando desde una Normal Multivariante con parámetros:

$$Y_{1 \times p} \sim NMV_p \left(E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o], V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] \right),$$

repetiéndose este cálculo tantas veces como muestras hayan en la distribución posterior.

La utilización de la media o la mediana como estimador de la predicción en cada una de las p localizaciones será la opción para la estimación puntual del índice bioclimático en la localización s_j .

Obvia decir que la paralelización del algoritmo de la generación de números de una normal Multivariante reduce el tiempo de cómputo.

3.5.3. Mapas de predicción espacial

Una vez obtenida la distribución predictiva de los índices bioclimáticos, tan sólo resta generar un mapa de predicción que muestre el valor de los índices a lo largo de toda la isla, y no sólo en un conjunto de puntos concreto. Para llevar a cabo esto, y a partir de la distribución predictiva sobre las 775 cotas, se utiliza un método de interpolación para poder obtener los valores de los índices bioclimático a lo largo de toda la isla. En este caso se ha definido una cuadrícula de puntos sobre la superficie de la isla, y aplicando *Multilevel B-splines* (MBA) (Lee et al., 1997), se obtiene la predicción espacial de cada uno de los índices de forma univariante sobre toda la región, utilizando la mediana de las muestras de la distribución predictiva posterior como estimación del valor puntual a interpolar dentro de la cuadrícula definida previamente.

A la vez que se genera la distribución predictiva posterior de los índices bioclimáticos de forma univariada también es posible obtener la distribución predictiva del efecto espacial, \mathbf{W} . Como el objetivo principal de esta memoria es la predicción de los índices bioclimáticos, y dado el gran número de modelos planteados (48 en total) se ha optado por no mostrar todos estos mapas para no sobrecargar excesivamente este capítulo.

3.5.4. Distribución de probabilidad espacial de un índice bioclimático

Como ya se vio en el Capítulo 1, los índices bioclimáticos vienen clasificados por intervalos de valores que configuran los bioclimas de una zona. Estas clasificaciones son muy útiles como ya se ha indicado, para conocer la vegetación de diferentes zonas, el avance del cambio climático, etc. Por todo esto, la obtención de mapas predictivos donde se muestre la

probabilidad de cada uno de estos bioclimas aporta una valiosa información a los expertos para la gestión y uso del suelo de la zona bajo estudio.

En el caso de la inferencia Bayesiana este cálculo resulta muy sencillo ya que se dispone de la distribución de probabilidad predictiva de cada uno de los puntos que conforman la región bajo estudio. Así, utilizando los rangos de clasificación de Rivas-Martínez para cada uno de los tres índices dentro del Macrobioclima Mediterráneo (ver Tabla 1.6.), se puede clasificar en intervalos la distribución predictiva sobre toda la región bajo estudio.

A modo de ejemplo supongamos que cierto índice bioclimático I_ℓ viene definido en el macrobioclima Mediterráneo en l intervalos disjuntos $R_1; R_2; \dots; R_l$, y $\{r_{ik}\}_{i=1}^n$ son las simulaciones de la distribución predictiva para el conjunto de localizaciones $\{s_k\}_{k=1}^m$. La probabilidad de cada uno de los intervalos que conforman ese índice para cada una de las localizaciones viene dada por:

$$\Pr(R_j \text{ en } s_k) = \frac{\#\{r_{ik} \in R_j \text{ para la localización } s_k\}}{n}, \quad j = 1, \dots, l, k = 1, \dots, m$$

El resultado es una distribución de probabilidad discreta para cada localización $\{s_k\}_{k=1}^m$ que determina una distribución espacial de probabilidad (DEP) para ese índice. Una vez calculadas estas probabilidades, y utilizando de nuevo el método de interpolación MBA a lo largo de una cuadrícula distribuida uniformemente por toda la superficie bajo estudio se obtendrá la DEP correspondiente a cada clase de índice, es decir, un gráfico formado por tantas superficies espaciales como rangos existan de ese índice bioclimático.

La representación de cada una de esas DEP para cada tipo de índice se convierte en un puzle de piezas que encajan por superposición, y que proporcionan las fronteras de distribución entre unos tipos y otros dentro del índice. Esas fronteras determinan las zonas que en un futuro podrían cambiar entre un tipo y otro simplemente con un pequeño cambio en los valores climáticos. Esta herramienta se convierte en fundamental en los posibles estudios de cambio climático, y como éste afecta a la vegetación de la región.

Una referencia básica sobre la DEP son Lahiri et al. (1999) quienes desarrollaron un método de sub-muestra. Otras referencias y perspectivas

son Handcock (1999) en la discusión de Lahiri et al. (1999), Banerjee y Gelfand (2002), Zhu et al. (2002), Short et al. (2002) y Gelfand et al. (2003).

3.6. Análisis de los índices bioclimáticos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos dentro del análisis univariante de los índices bioclimáticos desde la perspectiva Bayesiana introducidos en la sección 2.4, esto es, distribuciones posteriores, distribuciones predictivas y distribuciones espaciales de probabilidad.

Como paso preliminar a describir estos resultados, se realiza un análisis descriptivo de los índices y de la tendencia asociada a la altura. El objetivo es obtener información del efecto de la altura sobre cada uno de los tres índices, y de su posible comportamiento espacial.

3.6.1. Análisis preliminar de la tendencia

En el Capítulo 1 se introdujeron los datos climáticos de la isla de Chipre correspondientes a 59 estaciones meteorológicas. En la Tabla 3.2. se muestran los valores medios y otros descriptivos (mínimo, máximo, primer cuartil y tercer cuartil) de los índices (ombrotermia, termicidad y continentalidad) obtenidos a partir de esa información climática. También se muestra ese mismo descriptivo para la variable Altitud.

Tabla 3.2. Medias de los índices y la Altitud

	Mínimo	P ₂₅	Mediana	Media	P ₇₅	Máximo
<i>I_o</i>	1.310	1.6660	2.010	2.635	2.980	9.230
<i>I_t</i>	118.0	334.0	397.0	372.1	424.0	454.0
<i>I_c</i>	12.90	15.2	16.8	16.60	18.05	19.5
Altitud	2.0	42.4	175.0	366.6	620.0	1725.0

Con el fin de realizar un estudio a gran escala de la tendencia se va a proceder a ajustar un modelo de regresión lineal de cada índice con respecto a la altura con la información obtenida de las estaciones meteorológicas, es decir:

$$I_i \sim \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Altitud}$$

De la Figura 3.32 a la Figura 3.4 puede observarse la clara relación de tipo lineal del índice de ombrotermia y el de termicidad respecto a la altura. Respecto al índice de continentalidad, esa tendencia no es tan marcada, incluso cabe la posibilidad de buscar otro tipo de relación. Sin embargo, en esta memoria se desea establecer un modelo similar para todos los índices y por lo tanto se mantendrá la suposición del modelo

lineal. Así como pueden observarse los gráficos de diagnóstico de residuos con los claros comportamientos que hacen dudar de las hipótesis del modelo lineal. Para tratar de corregir este comportamiento se procedió a plantear transformaciones Box-Cox sobre los valores de cada uno de los índices. Para el índice de ombrotermia se obtuvo la transformación logarítmica, respecto a la termicidad se obtuvo la transformación logarítmica; y para el índice de continentalidad no se ha aplicado transformación alguna. Una vez realizadas las transformaciones y ajustados los nuevos modelos de regresión, el análisis de los residuos aporta información relevante sobre la necesidad de una componente espacial para explicar el comportamiento de la respuesta.

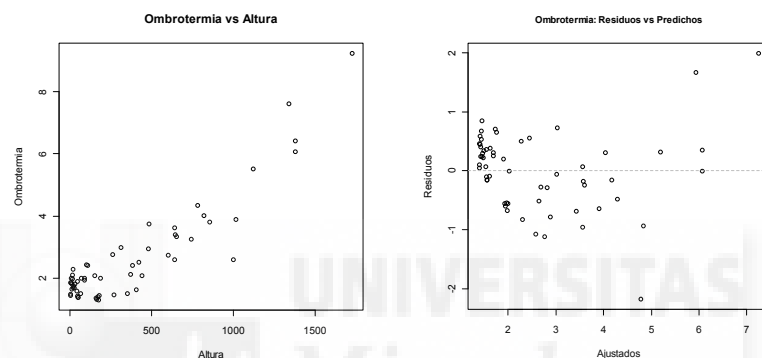


Figura 3.2. Índice de Ombrotermia vs. Altura y Residuos vs. Ajustados

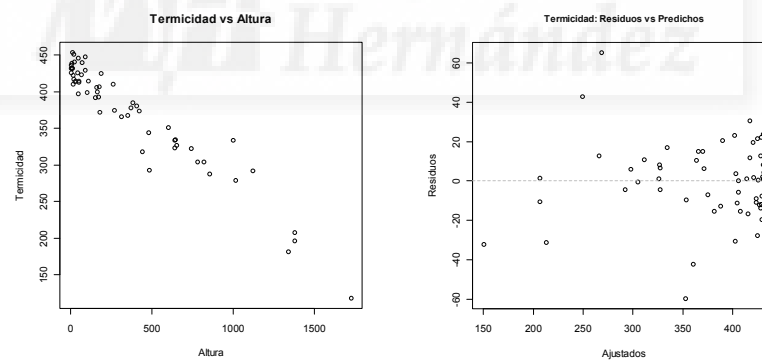


Figura 3.3. Índice de Termicidad vs. Altura y Residuos vs. Ajustados

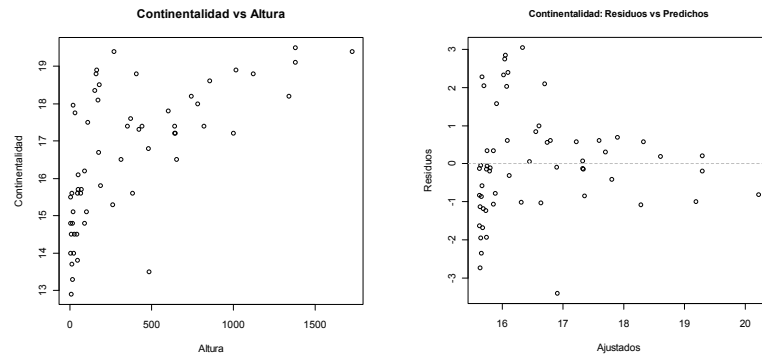


Figura 3.4. Índice de Continentalidad vs. Altura y Residuos vs. Ajustados

En la Figura 3.5 se observan los histogramas de los residuos para los nuevos modelos, y en la Figura 3.6 se observan los ajustes lineales tras estas transformaciones observándose un “buen” ajuste para la ombrotermia y la termicidad; mientras que para la continentalidad se observa una gran variabilidad cuando la altitud es baja.

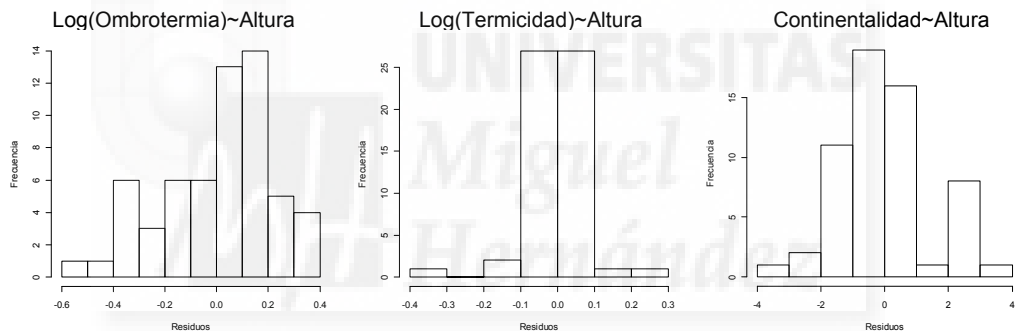


Figura 3.5. Histogramas de los residuos tras el ajuste lineal

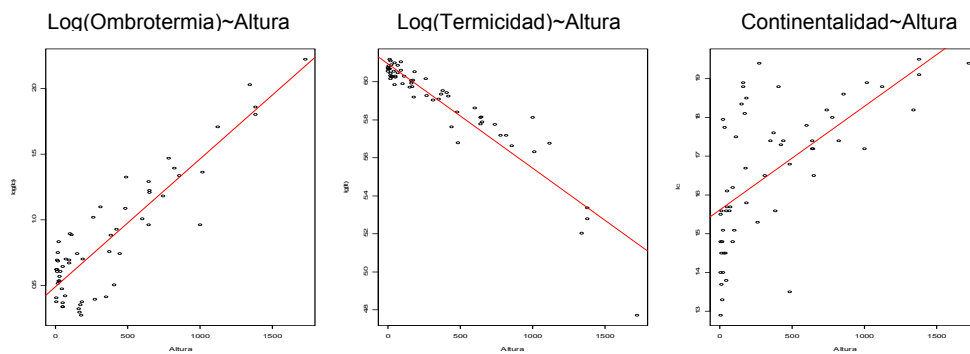


Figura 3.6. Ajustes tras las transformaciones de Box-Cox de los índices

Los resultados de estos ajustes pueden verse en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Estimación de los modelos lineales $I_i \sim \beta_0 + \beta_1 \text{Altitud}$

	β_0	β_1	R^2
log(Ombrotermia)	0.4889	0.0009744	0.796
log(Termicidad)	6.095	-0.0005491	0.8798
Continentalidad	15.62	0.002667	0.3962

Por todo lo visto, la altitud está relacionada linealmente con cada uno de los índices. En la Figura 3.7 se muestran las curvas de nivel de altura obtenidas mediante la georeferenciación de todas las cotas de altura y su posterior interpolación para conseguir una aproximación al perfil físico de la isla. La comparación de esta figura con la mostrada en el capítulo 1 (Figura 1.10) indica que estas curvas de nivel se ajustan bastante bien al perfil orográfico de la isla de Chipre. Esta superficie será utilizada posteriormente para estudiar el comportamiento a gran escala de los índices bioclimáticos.

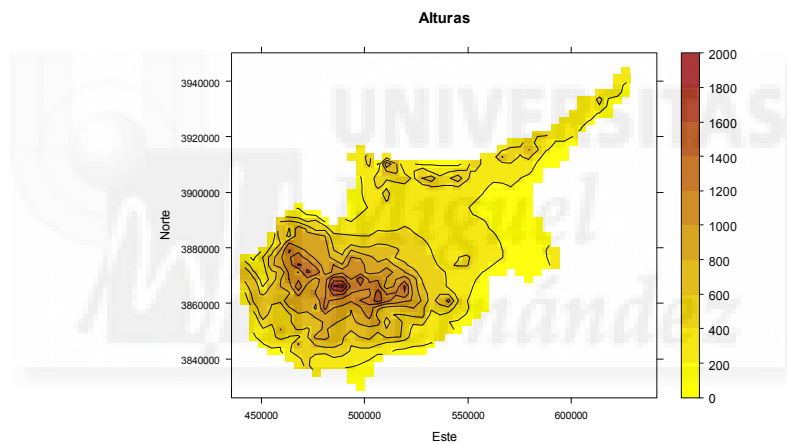


Figura 3.7. Curvas de nivel de isla de Chipre

Una vez ajustado a gran escala con la altura se procede al análisis de los residuos de los modelos obtenidos calculando el variograma empírico asociado a cada uno de los índices. En la Figura 3.8, la Figura 3.9 y en la Figura 3.10 se representan los variogramas empíricos de cada uno de los índices bioclimáticos sin ajustar por altura (modelos sin tendencia) y a partir de los residuos del modelo lineal (variograma con altura).

Se observa que tanto el índice de ombrotermia como el de continentalidad muestran como la incorporación de la altura consigue un variograma con un comportamiento más estable, mientras que para

termicidad, aunque mejora el comportamiento respecto al no ajustado, esta tendencia no es tan clara como la mostrada en los otros índices. Se considera pues que la inclusión de la altura en el ajuste es adecuada, y que contribuye de forma efectiva al análisis de la tendencia de los tres índices.

Una vez realizado el análisis preliminar se pasa a plantear los correspondientes modelos Jerárquicos Bayesianos para el estudio de cada uno de los índices bioclimáticos.

3.6.2. Modelos espaciales jerárquicos Bayesianos

Para cada uno de los índices bioclimáticos se consideran los diferentes modelos dados en (3.8) y (3.9).

La obtención de la distribución posterior de los modelos dados en (3.8) para cada uno de esos modelos para los índices de ombrotermia y continentalidad se ha basado en tres cadenas de simulación, con 15.000 muestras cada una de ellas, creando una cadena final con la unión de las últimas 5.000 de cada una lo que nos da un período de calentamiento de 10.000 simulaciones. Para el índice de termicidad el calentamiento fue de 20.000 ya que la convergencia en este caso es mucho más lenta. Para los modelos dados (3.9) también se han considerado tres cadenas de simulación, pero debido a que su convergencia es más rápida sólo se han realizado 10.000 simulaciones, de las cuales se toman 5.000 de calentamiento. Tan sólo para el índice de termicidad se han necesitado 20.000 simulaciones de calentamiento para asegurar convergencia.

La convergencia de las tres cadenas, para cualquiera de los modelos, ha sido estudiada mediante los criterios habituales (Gelman y Rubin, 1992; Geweke, 1992; Brooks y Gelman, 1997). Respecto a los criterios gráficos de convergencia, se han realizado gráficos de medianas y desviaciones acumuladas para cada una de las cadenas para observar su convergencia.

En la Figura 3.11 se muestra como ejemplo el gráfico acumulado de medianas de las últimas 5.000 simulaciones del índice de ombrotermia de las tres cadenas del modelo habitual SP1 con previas uniformes sobre las varianzas. Puede observarse como partiendo de puntos iniciales muy distintos se alcanza la convergencia de las tres cadenas en torno al 0.05.

Dado que el número de modelos considerado es muy elevado, tan sólo se van a presentar los resultados de los que se consideran más interesantes. Se ha de destacar que los mapas de predicción obtenidos son muy similares independientemente de la modelización (modelo-previa) considerada. Se ha optado por presentar los resultados correspondientes a las previas uniformes, ya que se consideran como las distribuciones previas poco informativas que terminarán por imponerse para establecer conocimiento previo sobre la variabilidad de los datos en este tipo de problemas. El resto de modelizaciones pueden consultarse en el Anexo VI, así como los mapas predictivos y las distribuciones espaciales de probabilidad en el Anexo VII y el Anexo IX respectivamente.

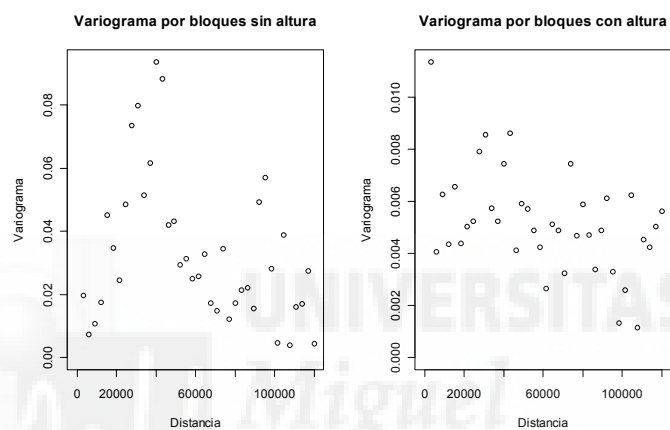


Figura 3.8. Variograma del índice de Termicidad

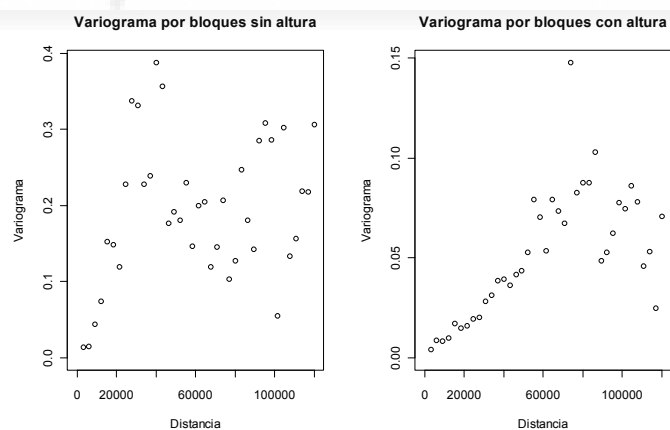


Figura 3.9. Variograma del índice de Ombrotermia

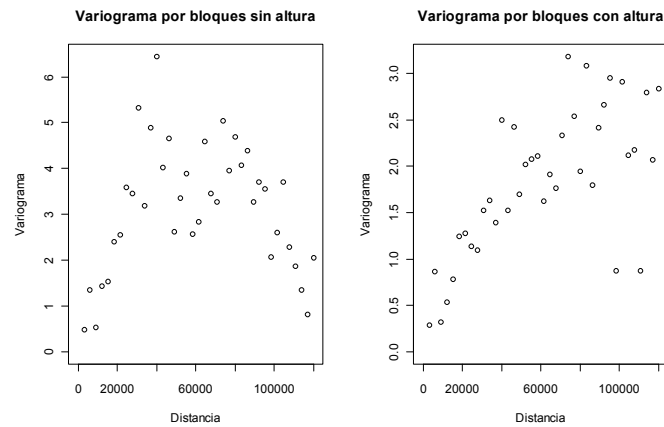


Figura 3.10. Variograma para el índice de Continentalidad

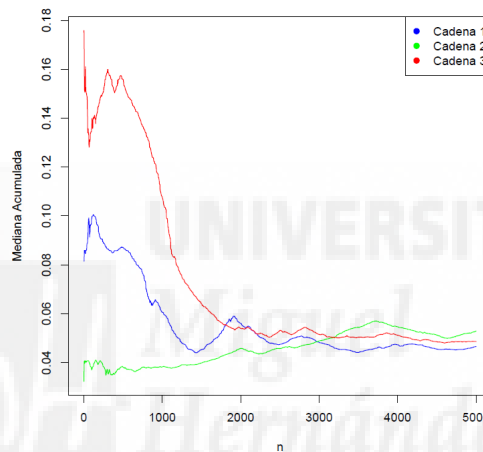


Figura 3.11. Medianas acumuladas de tres cadenas de simulación

Los modelos que estudiados para cualquiera de los índices son:

-
- SP1:** Habitual con previas uniformes sobre las varianzas (σ^2 y τ^2).
-
- SP2:** Habitual sólo espacial con uniforme sobre la varianza espacial (σ^2).
-
- W1:** Reparametrizado con previa uniforme sobre la varianza (ξ^2).
-
- W2:** Rep. sólo espacial con previa Unif. sobre la varianza espacial. (ξ^2).
-
- RW1:** Reparametrizado con previa uniforme sobre la desviación (ξ).
-
- RW2:** Reparametrizado sólo espacial con uniforme sobre la desviación (ξ).
-

A continuación se detalla el rango de valores de cada uno de los índices, o sea, la varianza máxima alcanzable, el valor de V_{max} , y el valor de b obtenido a partir de (3.4) correspondiente valor del parámetro de la distribución previa para modelizar distribuciones previas sobre las varianzas espacial, no espacial y conjunta.

Tabla 3.4. Valores de los parámetros de las distribuciones previas para la varianza

	Mínimo	Máximo*	$V_{max} = (I_{max} - I_{min})^2 / 12$	Valor de b en Unif (0.001, b_u)
Log(Io)	Log(1)	Log(12)	0.14	0.166
Log(It)	Log(120)	Log(455)*	0.51	0.542
Ic	11	21*	8.33	8.772

*Máximos para el bioclima Mediterráneo al que pertenece la isla de Chipre.

Índice de Ombrotermia

En primer lugar comentar que para cualquiera de los modelos considerados, para el índice de ombrotermia la convergencia de las tres cadenas se alcanza relativamente pronto, mostrando los modelos reparametrizados una mayor velocidad de convergencia. Esto se aprecia claramente en el periodo de calentamiento, que es muy inferior en dicho modelos respecto de los habituales.

En la Tabla 3.5 y la Tabla 3.6 se muestran los resultados del proceso inferencial. En concreto, se presenta la mediana y región de credibilidad al 95% para los parámetros involucrados en cada uno de los modelos considerados. Para los modelos SP1, W1 y RW1 se observa que la variabilidad espacial supera a la variabilidad no espacial en un orden de magnitud, quedando patente la necesidad de la estructura espacial para explicar el comportamiento de I_o . Si nos fijamos en la inferencia sobre κ para W1 y RW1 puede verse que las estimaciones obtenidas indican que la mayoría de la variabilidad del modelo viene recogida por la componente espacial.

En la Figura 3.12 y la Figura 3.13 se observa que dichas variabilidades presentan comportamientos distintos. El modelo RW1 es el que presenta regiones creíbles más amplias para ambos parámetros lo que puede deberse a las previas consideradas para dicho modelo. En los otros dos modelos el comportamiento entre σ^2 y τ^2 se compensa de forma automática, es decir si la RC de σ^2 es más estrecha se compensa aumentando la longitud de la RC para τ^2 o al revés.

Tabla 3.5. Ombrotermia: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP1, W1 y RW1

	SP1			W1			RW1		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	4.93E-02	[2.14E-02 - 1.51E-01]	3.90E-02	[1.67E-02 - 1.11E-01]	4.27E-02	[1.56E-02 - 1.64E-01]			
τ^2	4.62E-03	[2.01E-03 - 9.97E-03]	4.48E-03	[1.45E-03 - 1.20E-02]	5.10E-03	[1.71E-03 - 1.33E-02]			
ϕ	7.06E-05	[2.81E-05 - 1.27E-04]	6.23E-05	[3.36E-05 - 1.27E-04]	5.54E-05	[2.92E-05 - 9.55E-05]			
Ref	6.55E+04	[41050.22 - 137861.62]	7.56E+04	[41782.14 - 120580.24]	8.53E+04	[55620.5 - 138728.81]			
ν	1.41E+00	[9.25E-01 - 1.86E00]	1.48E+00	[1.02E00 - 1.93E00]	1.48E+00	[1.02E00 - 1.93E00]			
β_0	5.41E-01	[3.22E-01 - 7.74E-01]	5.35E-01	[3.86E-01 - 6.91E-01]	5.28E-01	[3.63E-01 - 6.84E-01]			
β_1	7.44E-04	[5.99E-04 - 8.89E-04]	7.61E-04	[6.12E-04 - 9.14E-04]	7.61E-04	[6.02E-04 - 9.12E-04]			
κ	-	-	9.92E-02	[2.19E-02 - 3.60E-01]	1.03E-01	[1.91E-02 - 3.83E-01]			
ξ^2	-	-	4.38E-02	[2.35E-02 - 1.15E-01]	4.80E-02	[2.37E-02 - 1.70E-01]			

Tabla 3.6. Ombrotermia: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP2, W2 y RW2

	SP2			W2			RW2		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	5.02E-02	[2.77E-02 - 1.25E-01]	4.88E-02	[2.97E-02 - 1.08E-01]	4.66E-02	[2.92E-02 - 9.33E-02]			
ϕ	4.85E-05	[1.17E-05 - 1.48E-04]	1.07E-04	[9.17E-05 - 1.61E-04]	1.10E-04	[9.48E-05 - 1.65E-04]			
Ref	7.11E+04	[27429.84 - 203151.27]	4.39E+04	[32953.66 - 63647.1]	4.28E+04	[32008.46 - 58281.21]			
ν	5.57E-01	[3.49E-01 - 1.03E00]	1.47E+00	[1.24E00 - 1.93E00]	1.48E+00	[1.24E00 - 1.93E00]			
β_0	5.41E-01	[3.37E-01 - 7.84E-01]	5.37E-01	[4.01E-01 - 6.87E-01]	5.36E-01	[4.08E-01 - 6.79E-01]			
β_1	7.41E-04	[5.87E-04 - 8.95E-04]	7.15E-04	[5.57E-04 - 8.80E-04]	7.19E-04	[5.63E-04 - 8.83E-04]			

Se puede concluir que la inferencia posterior no se ve muy afectada por la especificación del modelo y la previa en este caso. Además, el valor prefijado de varianza máxima (0.515) para dicho índice no condiciona los resultados obtenidos, ya que la variabilidad global estimada con cada uno de los modelos (SP1: 0.054, W1: 0.044, RW1: 0.048) nos reafirma en la idea de que las previas consideradas son realmente poco informativas.

Para los modelos con variabilidad sólo espacial, SP2, W2, RW2, los resultados muestran algunas pequeñas variaciones respecto a los modelos donde se consideraban las dos variabilidades (Tabla 3.5 y Tabla 3.6). La estimación puntual basada en la mediana apenas refleja diferencias entre dicho modelos, siendo muy similares a la variabilidad total de los modelos reparametrizados W1 y RW1. Por otra parte, las regiones creíbles muestran amplitudes inferiores a sus homólogas con efecto no espacial reflejando un aumento en la precisión de la estimación de dicha variabilidad, lo que parece natural ya que los modelos considerados presentan una estructura de variabilidad más sencilla.

Asimismo, puede verse que los efectos asociados con el comportamiento a gran escala (β_0 y β_1) son similares en todos los modelos salvo pequeñas diferencias de precisión que se observan en la amplitud de las regiones creíbles. Se puede ver que existe un efecto positivo de la altura sobre el resultado del índice de ombrotermia, lo que era de esperar por su propia definición.

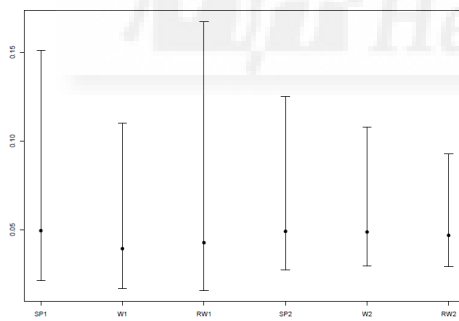


Figura 3.12. Ombrotermia: RC para σ^2 en SP1, W1, RW1, SP2, W2 y RW2

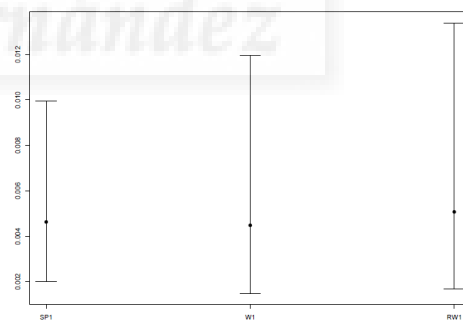


Figura 3.13. Ombrotermia: RC para τ^2 en SP1, W1 y RW1

Para los modelos SP1, W1, y RW1, el proceso inferencial de los parámetros asociados con la matriz de correlaciones espacial ϕ , ν y

Rango Efectivo (*Ref*), muestra que los resultados obtenidos son muy similares para ν , pero existen diferencias de hasta 20 Km. entre un modelo y otro en la estimación puntual de *Ref*. Sin embargo, si se consideran las regiones creíbles puede verse que los resultados son similares. Se sospecha que las diferencias observadas tienen que ver en la forma con que los modelos considerados adaptan la variabilidad espacial, ya que por ejemplo entre los modelos W1 y RW1 la única diferencia son las distribuciones previas consideradas.

En la Figura 3.14 se representa la estimación del variograma para cada uno de los modelos SP1, W1 y RW1 basada en las estimaciones puntuales de los parámetros asociados, donde puede verse que las curvas ajustadas son muy similares. El variograma correspondiente al modelo SP1, parece no capturar el comportamiento del modelo a distancias pequeñas pero si capta de forma adecuada el cambio de tendencia o alféizar parcial, mientras que los variogramas para W1 y RW1 ajustan mejor a distancias pequeñas pero parecen capturar de forma menos efectiva el rango.

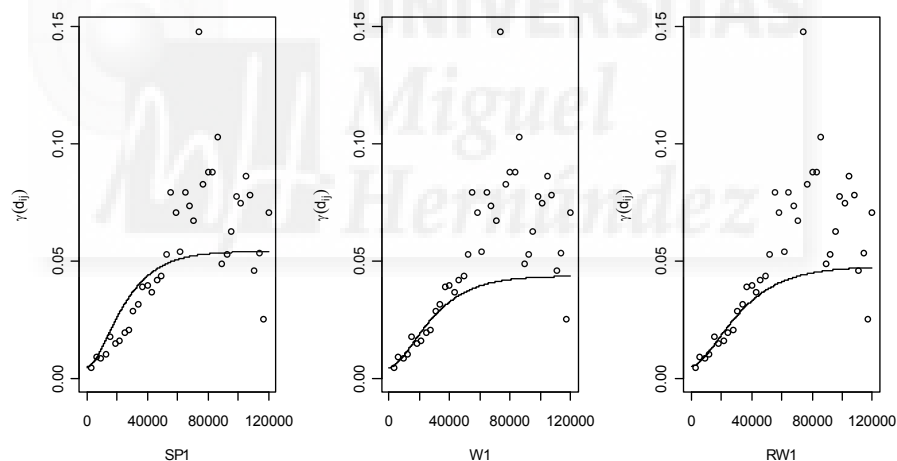


Figura 3.14. Ombrotermia: variogramas ajustados para SP1, W1, RW1

Respecto a los parámetros de la matriz de correlaciones en los modelos SP2, W2, y RW2, a diferencia de los modelos SP1, W1 y RW1, se observan grandes diferencias entre el modelo habitual SP2 y los reparametrizados W2 y RW2 respecto a la inferencia de ϕ y ν . Esto afecta claramente al rango efectivo estimado aunque no se aprecia claramente en el variograma

estimado para cada modelo que puede verse en la Figura 3.15. Ahora tan sólo resta obtener los mapas predictivos del índice de ombrotermia para cada uno de los modelos analizados.

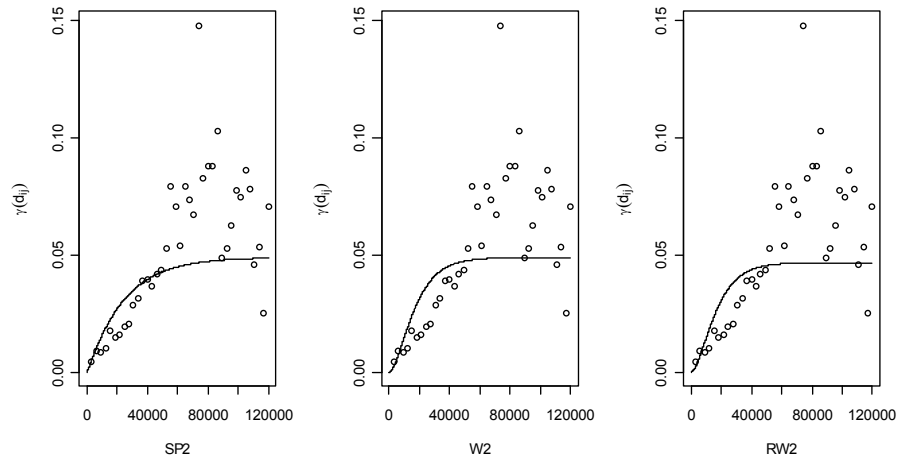


Figura 3.15. Ombrotermia: variogramas ajustados para SP2, W2 y RW2

De la Figura 3.16 a la Figura 3.18 se presentan los mapas predictivos y errores de predicción para SP1, W1 y RW1, obtenidos a partir de las distribuciones predictivas posteriores sobre cada una de las 775 nuevas localizaciones, y su interpolación sobre el grid que recorre toda la isla.

Respecto a los mapas de predicción, se puede observar que todos los modelos recogen claramente la orografía de la isla, y en consecuencia los valores de ombrotermia. Apenas se observan diferencias, y éstas son mínimas y muy puntuales. Los mapas correspondientes a la desviación típica o error de la predicción, se comportan de manera muy similar para todos los modelos, mostrando mayor error en las mismas zonas independientemente de la distribución previa que se ha asignado. Estas zonas coinciden básicamente con las zonas de orografía más cambiante dentro de la isla. Cabe destacar además que la escala del error de predicción observada es muy pequeña con respecto a la escala de medición del índice considerado a lo largo de toda la isla, demostrándose que el procedimiento planteado es una herramienta muy potente para el establecimiento de la clasificación bioclimática sobre la isla de Chipre basada en el índice de ombrotermia.

De la Figura 3.19 a la Figura 3.21 se observan los mapas correspondientes a SP2, W2, y RW2. Los resultados obtenidos en este caso son prácticamente iguales a los obtenidos para SP1, W1, y RW1, pero los mapas del error sí que muestran pequeñas diferencias atribuibles como ya se dijo anteriormente a la estructura del modelo considerado.

Por tanto, desde el punto de vista de la predicción todos los modelos obtienen resultados similares independientemente del modelo y previas consideradas. De esta forma, las diferencias observadas en el proceso inferencial de la distribución posterior para los modelos no se trasladan a la predictiva posterior.

Desde el punto de vista biológico, y sin olvidar la definición del índice ombrotérmico, $I_o = 10 \times P_p / T_p$, puede observarse que el mapa predictivo captura de forma adecuada las zonas con mayor altitud (valores más grandes de I_o), y las zonas donde mayor concentración de lluvia se recoge; provocando los cambios de paisaje que se apreciaron en la hortofoto del Capítulo 1 (Figura 1.12).



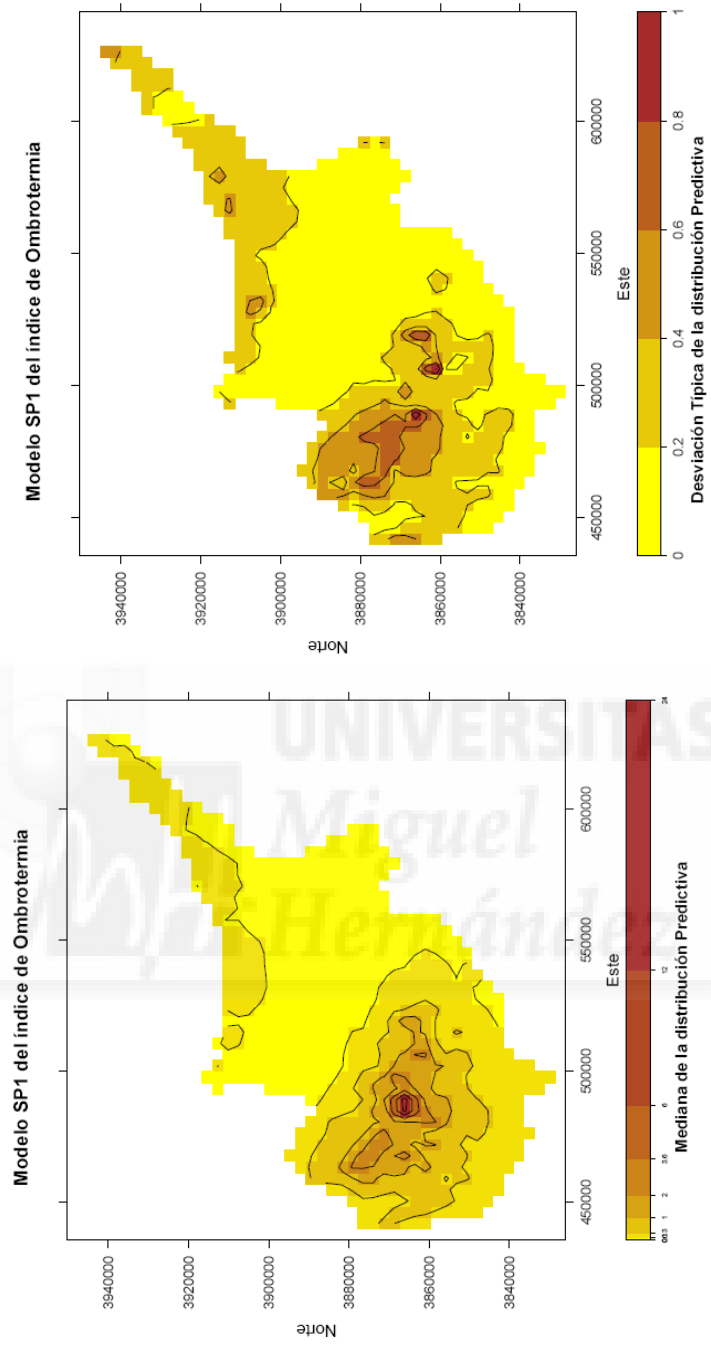


Figura 3.16. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo SP1

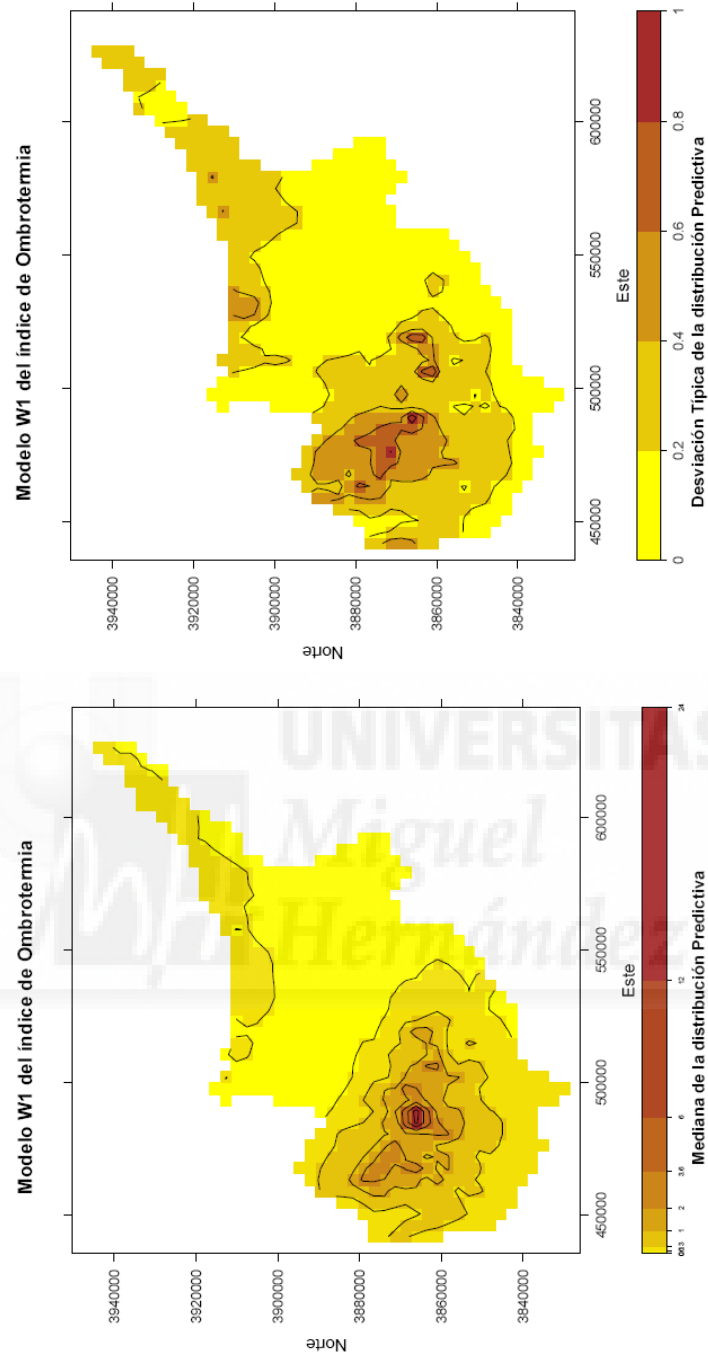


Figura 3.17. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo W1

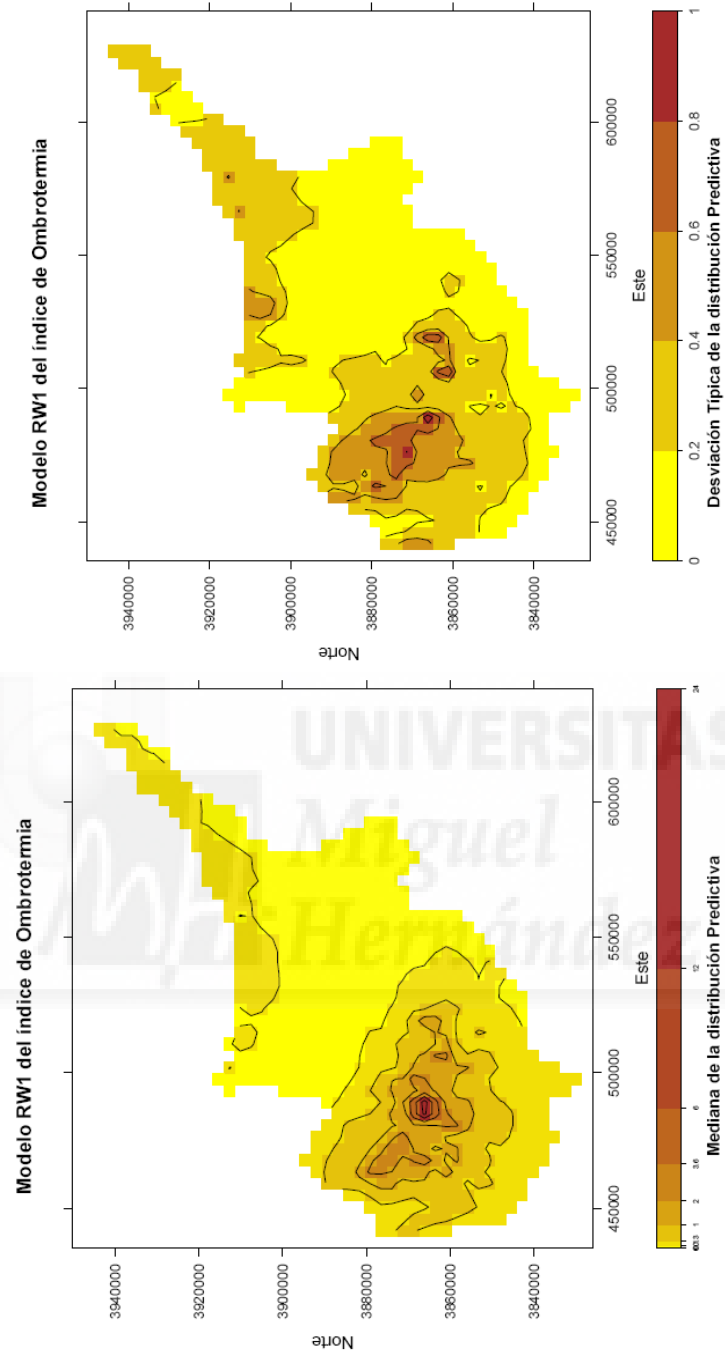


Figura 3.18. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo RW1

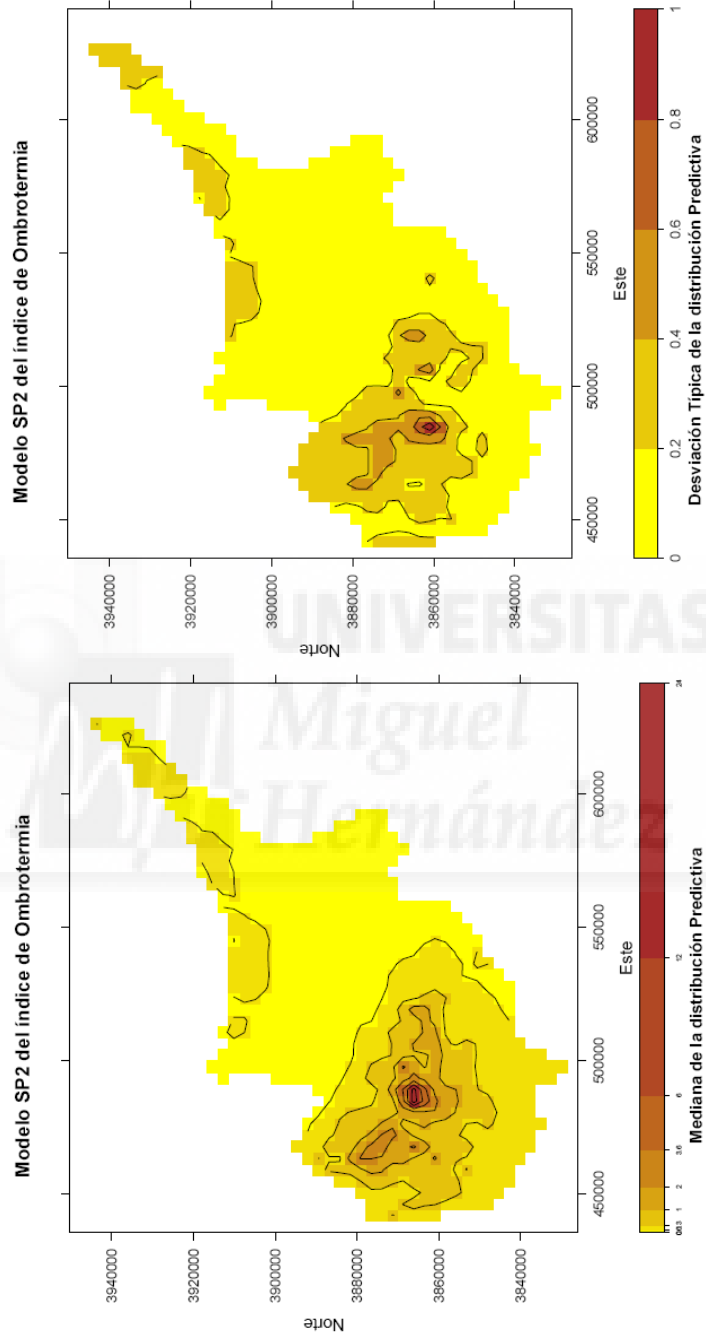


Figura 3.19. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo SP2

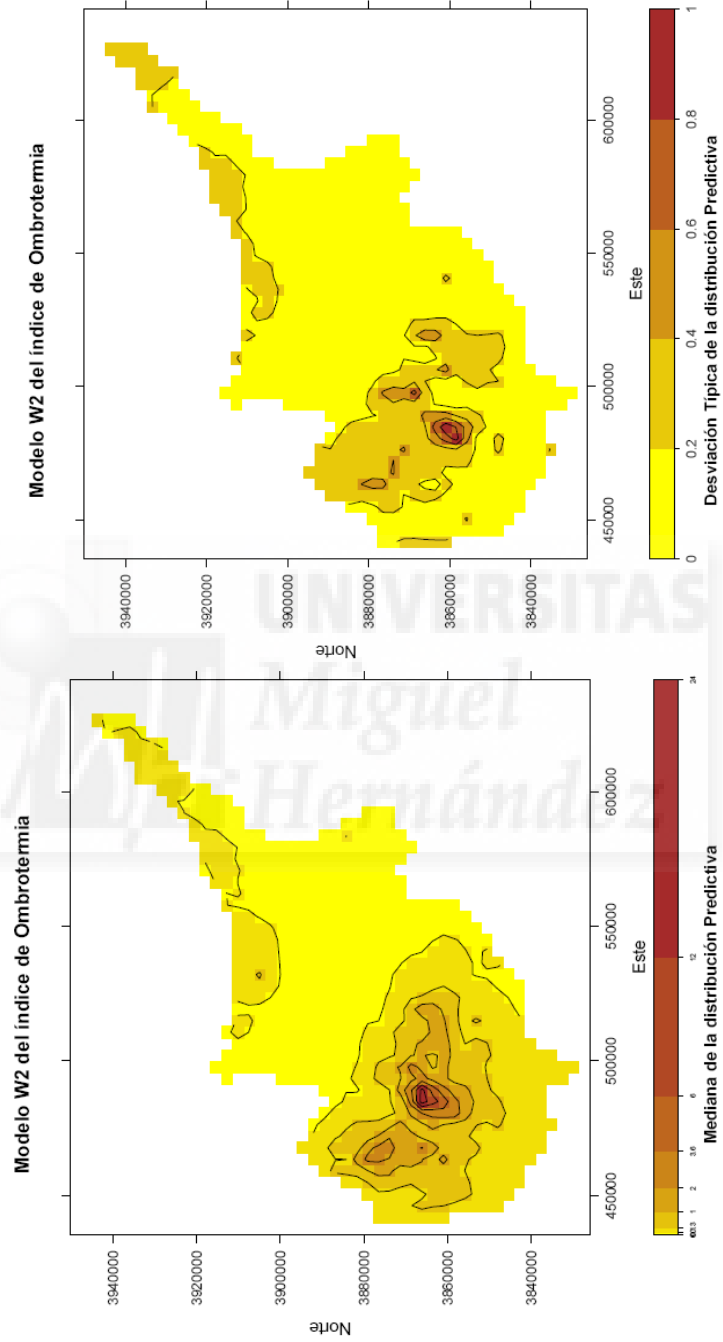


Figura 3.20. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo W2

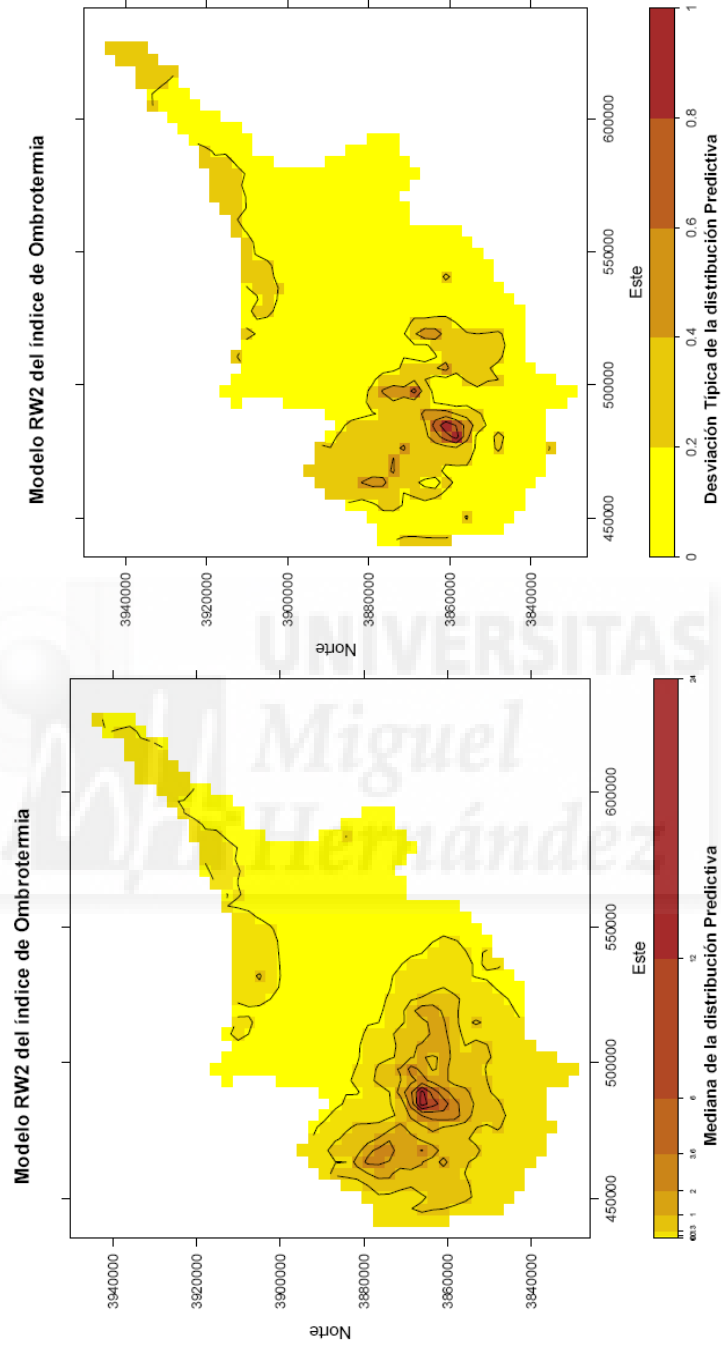


Figura 3.21. Ombrotermia: mapa de predicción para el modelo RW2

Una vez vistos los mapas de predicción y sus correspondientes mapas de error, el siguiente paso es obtener los mapas de distribuciones de probabilidad espacial (DEP) para cada uno de los modelos considerados. Como se ha introducido con anterioridad, estos mapas muestran la probabilidad de pertenecer una zona a un subtipo del índice.

En la Figura 3.22 y la Figura 3.23 se presentan los resultados obtenidos para los modelos SP1 y SP2. Así, el tipo húmedo tiene alta probabilidad en los dos picos montañosos de la cordillera central, pasando luego a probabilidades altas en el subtipo subhúmedo para la zona montañosa de la cordillera central, al subtipo seco en la ladera de esos picos y la cordillera norte de la isla, y finalmente al subtipo semiárido en la planicie central. El resto de modelos tienen comportamientos similares.

Desde el punto de vista biológico estos mapas de la distribución de probabilidad cobran una importancia vital ya que permiten conocer con mayor exactitud las fronteras de los subtipos, mediante un mapa degradado que muestra el paso de un subtipo a otro.

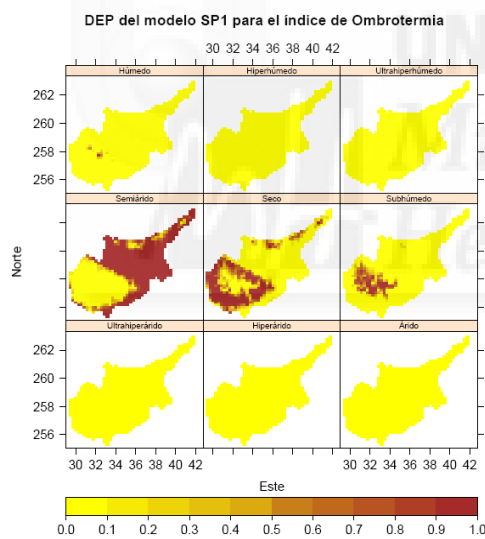


Figura 3.22. Ombrotermia: DEP para el modelo SP1

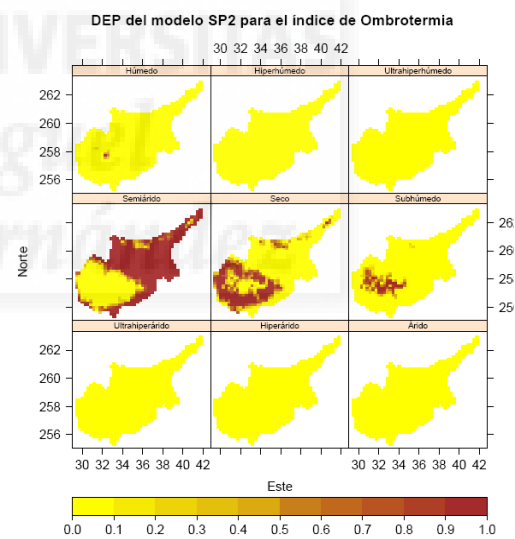


Figura 3.23. Ombrotermia: DEP para el modelo SP2

Índice de Termicidad

Como ya se comentó anteriormente la convergencia de los modelos para este índice es mucho más lenta, y aunque en principio se alcanza antes con los modelos reparametrizados su tiempo de computación es considerablemente superior.

En cuanto al estudio de la distribución posterior, en la Tabla 3.7 y la Tabla 3.8 se muestran los resultados obtenidos para algunos de los modelos estudiados (SP1, W1, RW1, SP2, W2 y RW2).

Para los modelos SP1, W1, y RW1 se observan comportamientos diferentes en las magnitudes de σ^2 y τ^2 entre el modelo habitual y los reparametrizados. En W1 y RW1, σ^2 tiene mayor magnitud que τ^2 , pero este comportamiento se invierte en SP1. Además, los valores obtenidos de κ (0.402 y 0.395 respectivamente) indican que los datos no aportan gran información del posible efecto espacial sobre el índice de termicidad. De hecho, el resultado para SP1 parece indicar que la variabilidad espacial es muy pequeña en comparación con la no espacial. Si se observan las regiones de credibilidad dadas en la Figura 3.24 y la Figura 3.25, se acentúa la sospecha del carácter poco espacial de este índice, debido a la gran amplitud que muestran dichas regiones para τ^2 con respecto a las de σ^2 . Este efecto tiene explicación biológica ya que la propia altitud marca la diferencia entre máximas y mínimas, y dadas las dos cordilleras tan marcadas que tiene la isla de Chipre, esto puede llegar a distorsionar la componente espacial del índice de Termicidad. De hecho, este efecto se observa en el variograma obtenido para este índice dado en la Figura 3.26, donde se puede ver que en distancias muy próximas a cero el variograma toma valores excesivamente grandes comparando con el resto de valores observados.

A la vista de estos resultados, la consideración de los modelos con efecto espacial únicamente (SP2, W2, y RW2) parece poco realista, y aunque se presentan los resultados obtenidos estos deben ser tomados con mucha cautela, ya que su interpretación sin más podría inducir a error.

Tabla 3.7. Termicidad: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP1, W1 y RW1

	SP1			W1			RW1		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	2.11E-03	[1.88E-04 - 1.96E-02]	2.87E-02	[3.52E-04 - 1.59E-01]	4.73E-03	[6.67E-04 - 9.52E-03]			
τ^2	6.34E-03	[1.27E-03 - 1.03E-02]	6.87E-03	[8.53E-04 - 1.16E-02]	3.11E-03	[1.51E-04 - 8.33E-03]			
ϕ	1.61E-04	[1.42E-05 - 5.16E-04]	1.19E-05	[1.00E-05 - 5.07E-04]	3.12E-04	[2.52E-05 - 5.40E-04]			
Ref	2.35E+04	[9780.414 - 82890.714]	3.82E+05	[10400.443 - 185217.9441]	4.53E+05	[419156.093 - 403102.96]			
ν	8.74E-01	[7.57E-02 - 1.73E00]	1.35E+00	[1.70E-01 - 1.92E00]	5.94E-01	[7.63E-02 - 1.75E00]			
β_0	6.09E+00	[6.05E00 - 6.14E00]	5.85E+00	[2.26E00 - 6.12E00]	6.10E+00	[6.06E00 - 6.13E00]			
β_1	-5.42E-04	[-6.10E-04 - -4.73E-04]	-5.63E-04	[-6.82E-04 - -4.86E-04]	-5.48E-04	[-6.04E-04 - -4.92E-04]			
κ	-	-	1.13E-01	[3.12E-02 - 9.58E-01]	3.95E-01	[1.94E-02 - 9.11E-01]			
ξ^2	-	-	3.66E-02	[6.26E-03 - 1.65E-01]	7.90E-03	[5.53E-03 - 1.21E-02]			

Tabla 3.8. Termicidad: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP2, W2 y RW2

	SP2			W2			RW2		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	8.40E-03	[5.80E-03 - 1.25E-02]	7.91E-03	[5.58E-03 - 1.19E-02]	7.78E-03	[5.47E-03 - 1.17E-02]			
ϕ	2.47E-04	[1.22E-04 - 2.85E-04]	2.92E-04	[1.52E-04 - 5.39E-04]	2.92E-04	[1.52E-04 - 5.39E-04]			
Ref	7.97E+03	[10990.353 - 7714.839]	1.06E+04	[8331.692 - 47730.331]	1.07E+04	[8395.436 - 49986.863]			
ν	1.93E-01	[5.53E-02 - 5.57E-01]	5.39E-01	[2.97E-01 - 1.30E00]	5.45E-01	[3.00E-01 - 1.33E00]			
β_0	6.09E+00	[6.06E00 - 6.13E00]	6.10E+00	[6.07E00 - 6.13E00]	6.10E+00	[6.07E00 - 6.13E00]			
β_1	-5.38E-04	[-6.04E-04 - -4.72E-04]	-5.49E-04	[-6.04E-04 - -4.98E-04]	-5.49E-04	[-6.03E-04 - -4.93E-04]			

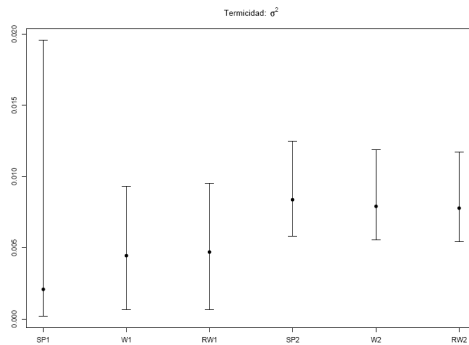


Figura 3.24. Termicidad: RC para σ^2 de SP1, W1, RW1, SP2, W2, y RW2

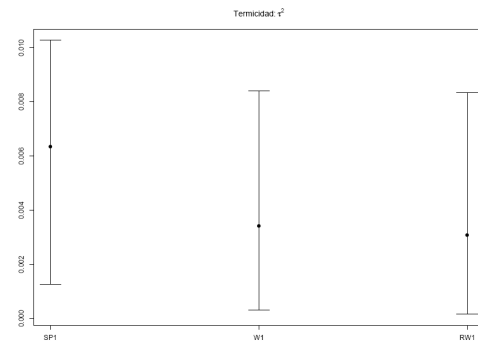


Figura 3.25. Termicidad: RC para τ^2 de SP1, W1, RW1

Respecto al comportamiento de los efectos a gran escala (β_0 y β_1) en los modelos SP1, W1, y RW1 se observa que son prácticamente idénticos para todos los modelos, remarcando el signo negativo del coeficiente que acompaña a la altura, lo que se deriva de su propia definición, ya que el índice es menor a grandes altitudes, y por consiguiente existe menor vegetación en esas condiciones (efecto Montaña-Ladera-Valle).

Con respecto a los parámetros asociados a la función de correlación para los modelos SP1, W1 y RW1, se dan valores relativamente similares para el parámetro de suavizado, y aunque en menor medida también para el parámetro de escala. Como ocurría en el índice ombrotérmico, la estimación puntual del rango efectivo (*Ref*) muestra diferencias de más de 10 Km. entre unos modelos y otros, aunque las regiones de credibilidad resultantes son muy similares. La estimación del variograma para los modelos SP1, W1 y RW1 (Figura 3.26) asociada con estos parámetros, muestra pequeñas diferencias entre el modelo habitual y los reparametrizados, lo que provoca una ajuste diferente para cada uno de ellos.

A continuación se muestran los resultados de la predicción para el índice de Termicidad sobre la superficie de la isla para los modelos SP1, W1 y RW1. De la Figura 3.27 a la Figura 3.29 se muestran los mapas de predicción (mediana) así como el mapa de error de la predicción (desviación típica) para todos los modelos.

Las predicciones obtenidas no varían mucho a pesar de las diferencias observadas en el proceso inferencial de la distribución posterior,

pero si muestran algunas diferencias respecto a los mapas de error (recordar que este índice puede tomar valores en un rango de 0 a más de 500). De nuevo, el mapa de predicción no muestra sensibilidad respecto de la distribución previa establecida.

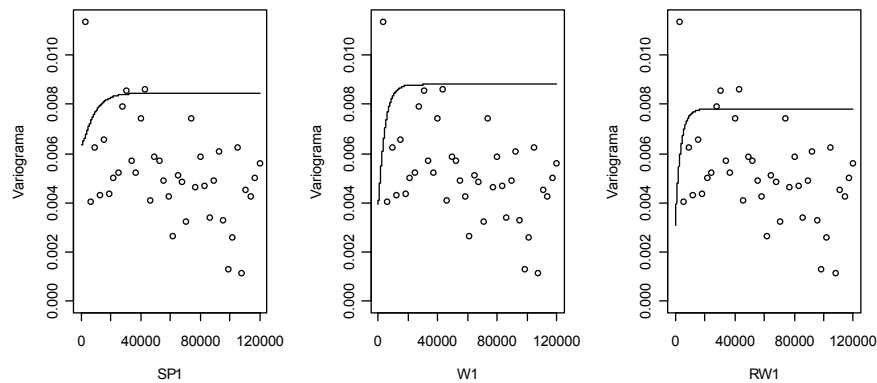


Figura 3.26. Termicidad: Variogramas ajustados para SP1, W1 y RW1

Los mapas predictivos muestran claramente la formación montañosa de la isla, que es como se ha indicado con anterioridad uno de los factores determinantes para la variación del índice de termicidad, y consiguientemente de la flora y fauna de la zona. Para el modelo SP1 (Figura 3.27), se delimita claramente las zonas costeras y la planicie con las dos zonas montañosas, y queda muy marcado el pico más alto de la isla. Respecto al error de esta estimación se observa que los mayores valores se obtienen en zonas de la planicie y cordillera norte, pero dada la amplitud de los termotipos para este índice, los valores obtenidos en la desviación típica son bastante buenos. Para los modelos reparametrizados, aunque se observa que la transición entre termotipos es menos suave que para el modelo habitual, también es cierto que el error de predicción estimado es inferior, proporcionando mapas mucho más precisos.

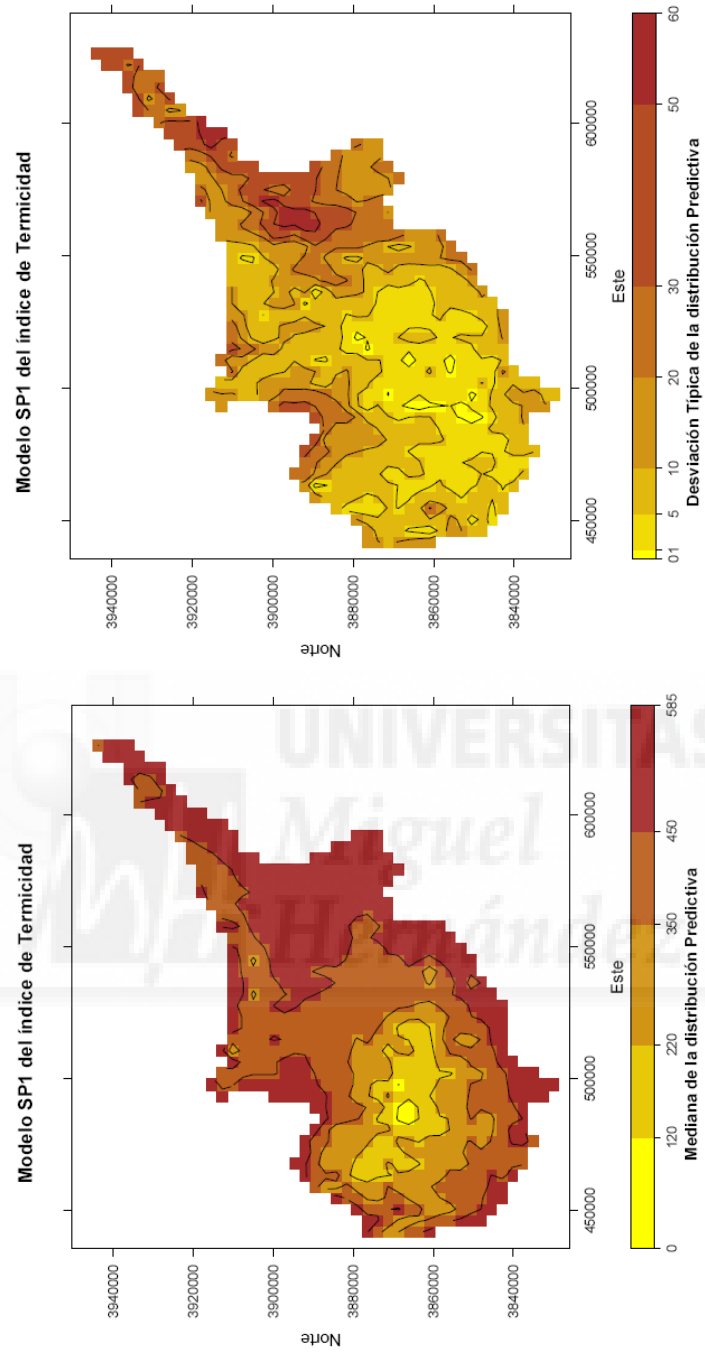


Figura 3.27. Termicidad: mapa de predicción para el modelo SP1

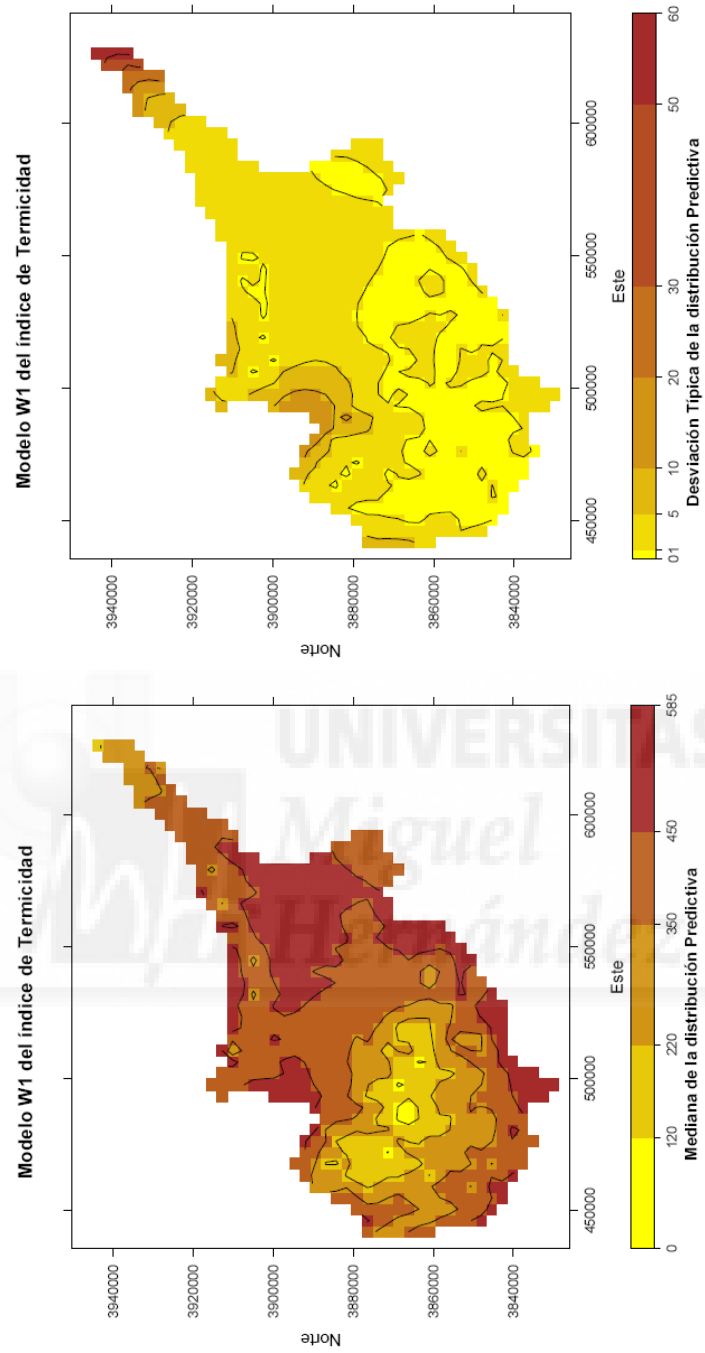


Figura 3.28. Termicidad: mapa de predicción para el modelo W1

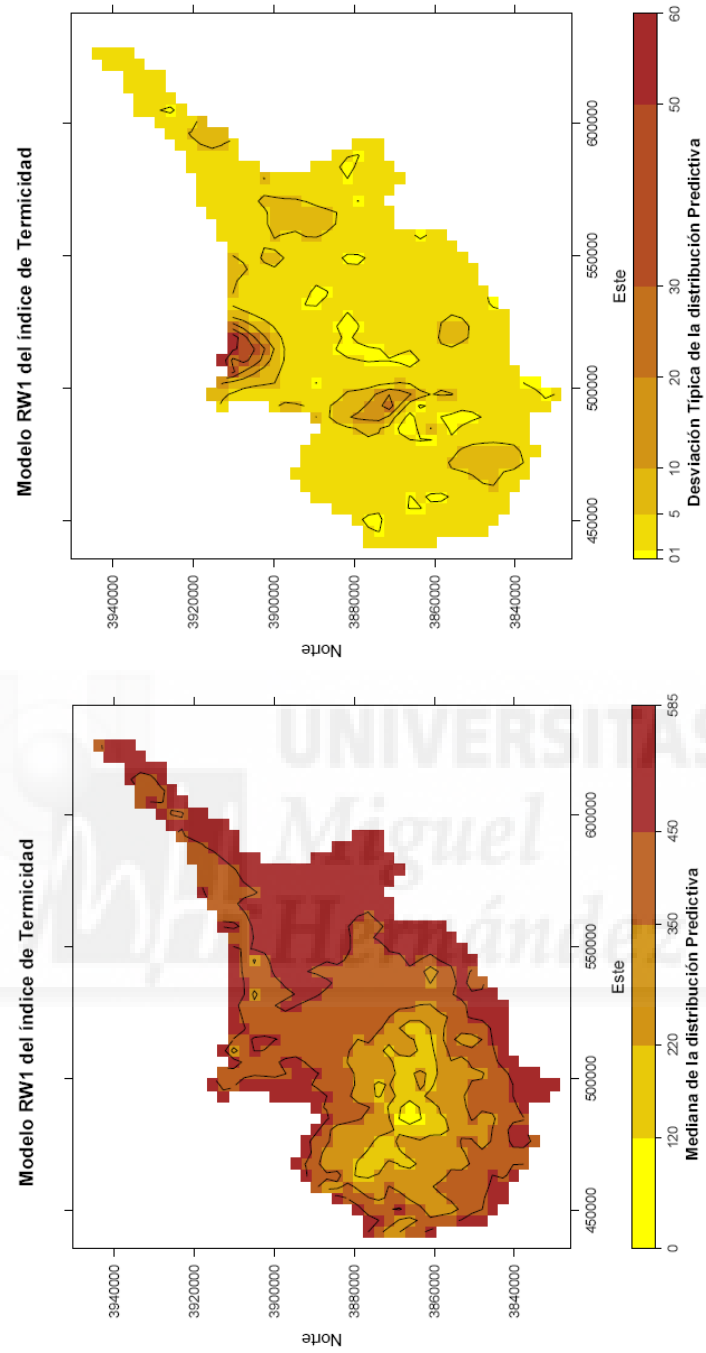


Figura 3.29. Termicidad: mapa de predicción para el modelo RW1

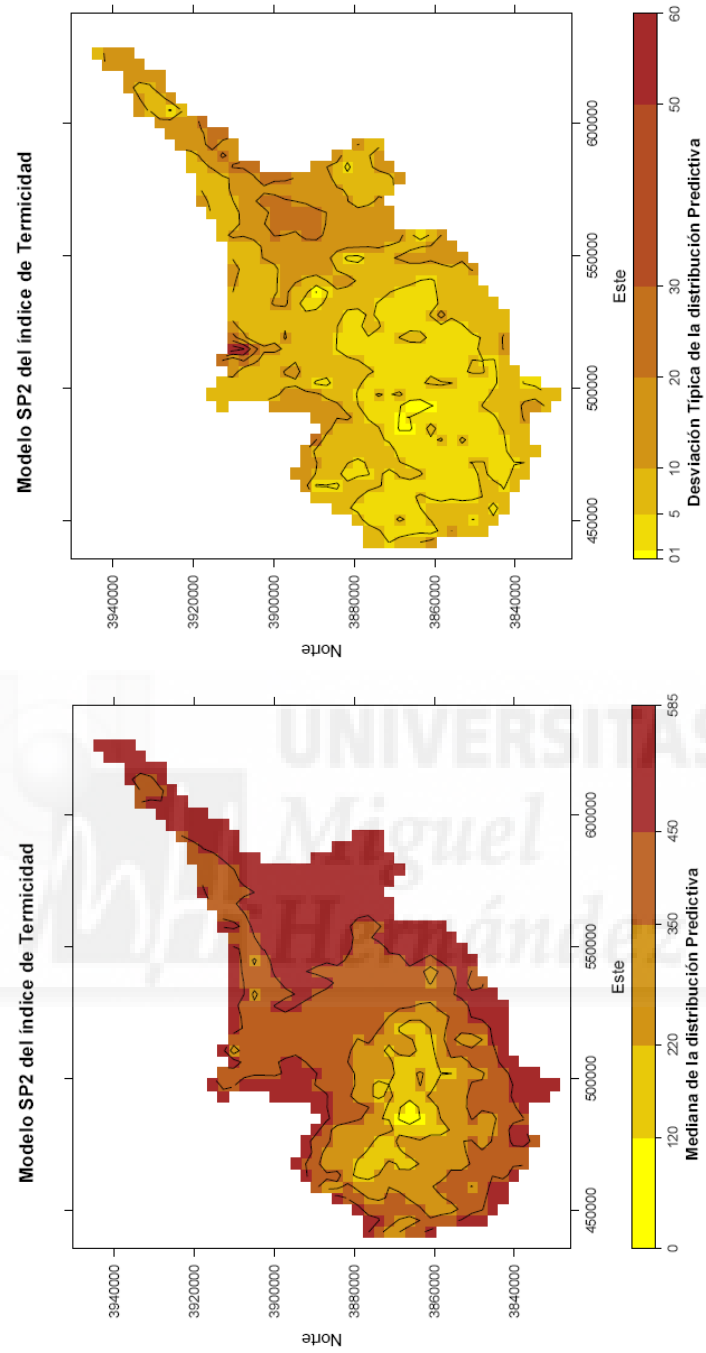


Figura 3.30. Termicidad: mapa de predicción para el modelo SP2

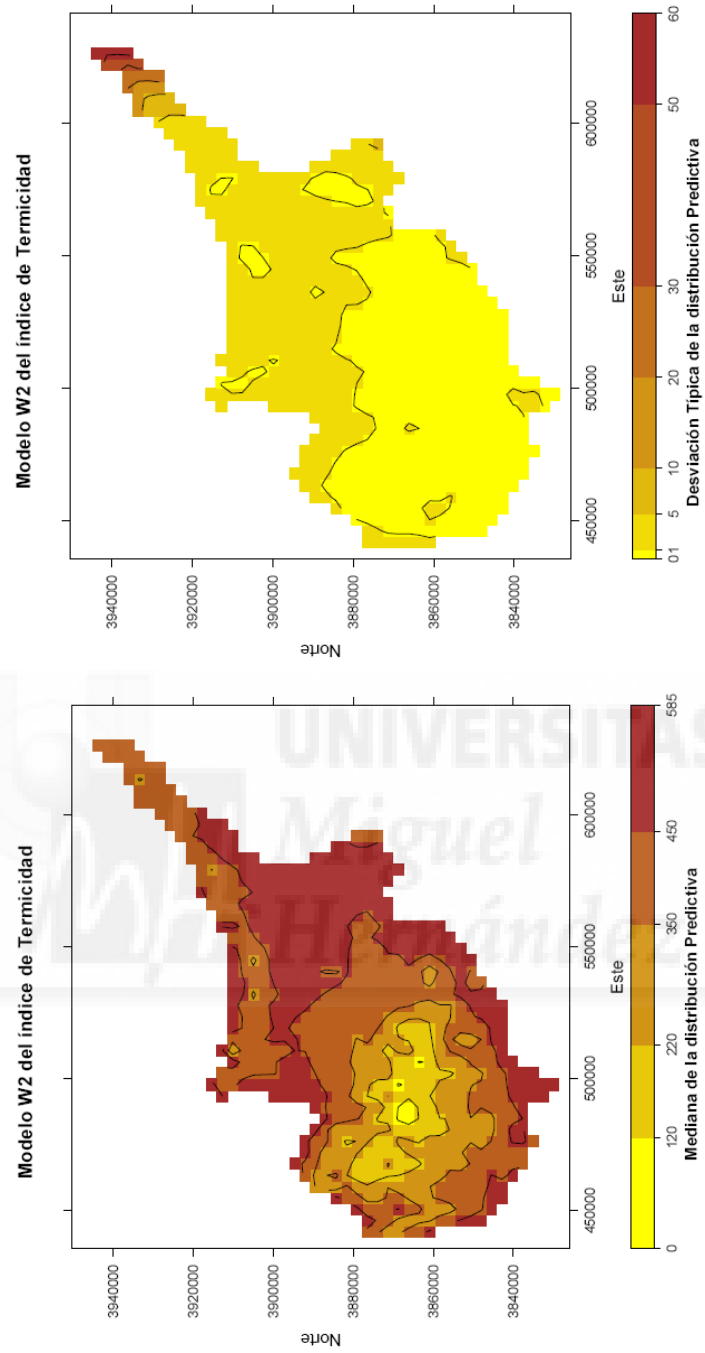


Figura 3.31. Termicidad: mapa de predicción para el modelo W2

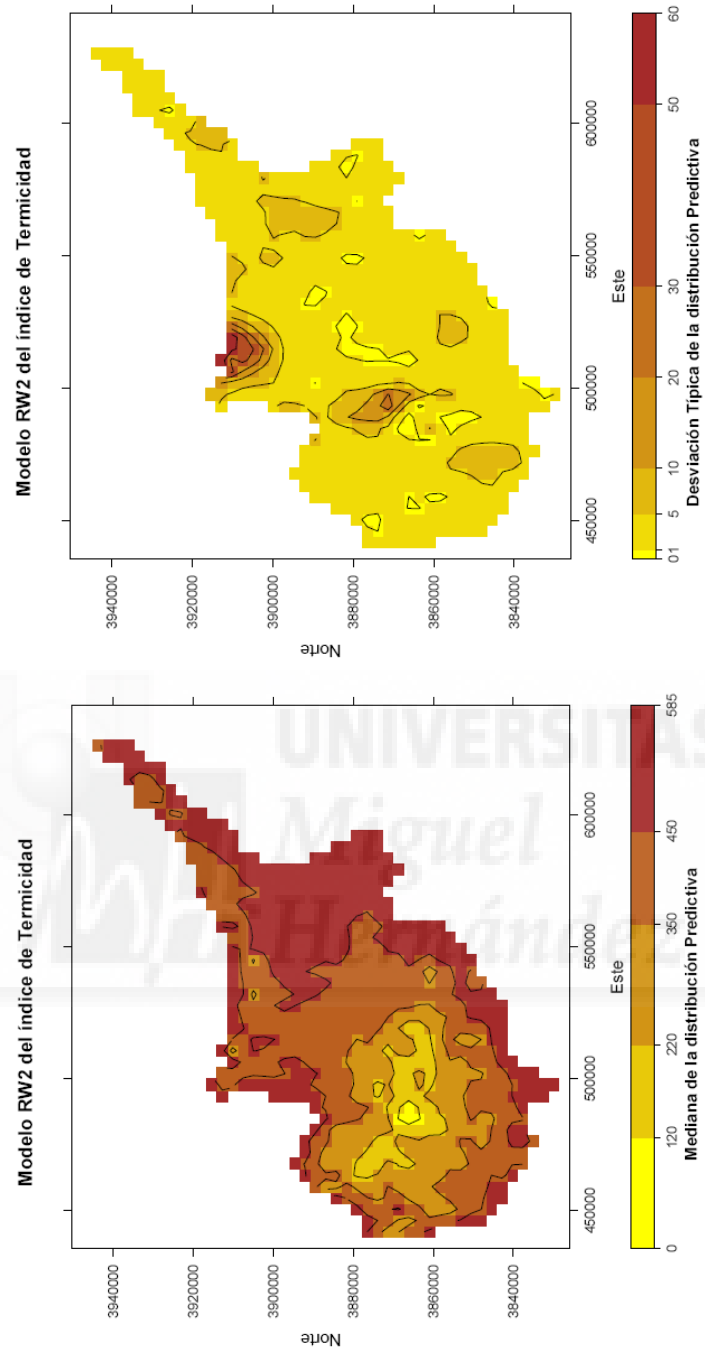


Figura 3.32. Termicidad: mapa de predicción para el modelo RW2

Respecto a la distribución de probabilidad espacial, en la Figura 3.33 y la Figura 3.34 se presenta la distribución espacial de probabilidad de cada uno de los termotipos del índice de termicidad. En estos mapas queda muy reflejada la orografía de la isla, pues los picos más altos van asociados con el tipo Supramediterráneo, siendo la ladera de estos picos y la cordillera norte la que tiene el tipo Mesomediterráneo, pasando directamente al Termomediterráneo para toda la zona costera y la planicie de la isla.

Desde la perspectiva del experto, el índice de termicidad indicará cuales son los diferentes pisos vegetacionales de la zona, y por ende las diferentes comunidades vegetacionales. Esta información va muy asociada a la altitud, y es por ello que los mapas del índice de Termicidad están tan relacionados con la orografía de la isla.

Además, el mapa probabilístico obtenido mediante la distribución espacial de probabilidad puede servir para ver la evolución de las fronteras en zonas costeras y hacer una ordenación sostenible del territorio, pues al tratarse de una isla con una gran industria turística, debido a su belleza, la gestión del suelo debe tener en cuenta posibles evoluciones climáticas y cambios de flora y fauna.

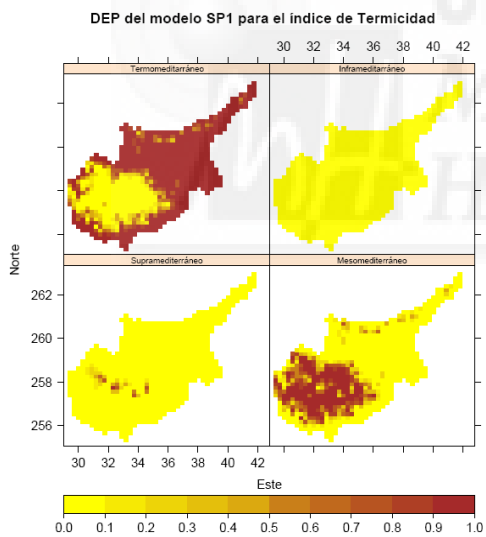


Figura 3.33. Termicidad: DEP para el modelo SP1

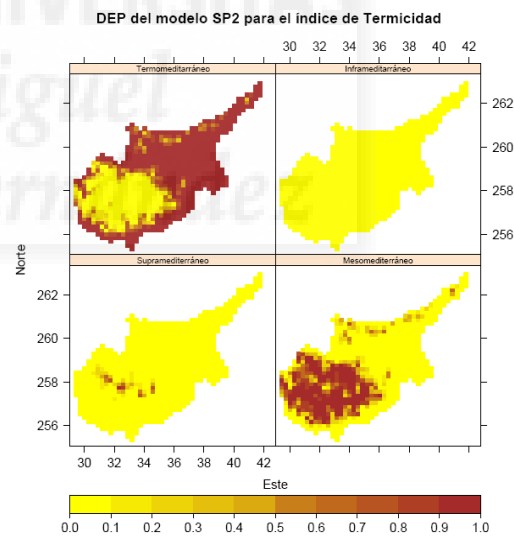


Figura 3.34. Termicidad: DEP para el modelo SP2

Índice de Continentalidad

El análisis de convergencia de las cadenas proporciona resultados similares al índice de ombrotermia. El proceso inferencial realizado sobre cada uno de los modelos propuestos se muestra en la Tabla 3.9 y la Tabla 3.10.

Para los modelos SP1, W1 y RW1, el comportamiento es bastante homogéneo, aunque con pequeñas diferencias en la magnitud de las estimaciones correspondientes a los parámetros de la función de correlación espacial. En todos ellos, σ^2 da como estimación puntual valores cercanos al 2; mientras que para τ^2 dichas estimaciones apenas alcanzan el 0.5. De nuevo, existen indicios claros de la inclusión del efecto espacial en el modelo. Este hecho se constata más claramente si se observa las estimaciones de κ para los modelos reparametrizados, cuyas estimaciones reflejan que a variabilidad no espacial representa el 10% de la variabilidad total del índice. Este comportamiento era esperable dada la región bajo estudio. Desde el punto de vista climático, se espera una disminución de la continentalidad desde el centro de la isla hacia la costa, lo que claramente identifica un efecto espacial, que sólo la altura no es capaz de captar

El hecho más destacable de las regiones de credibilidad de σ^2 y τ^2 para los diferentes modelos, representados en la Figura 3.35 y la Figura 3.36, es el comportamiento claramente diferente de la variabilidad espacial entre los modelos habituales y los reparametrizados. En el caso de los reparametrizados, no se aprecia sensibilidad respecto de la previa usada, ya que en ambos casos las amplitudes de las regiones de credibilidad son similares, reduciéndose para los modelos sin pepita. Por el contrario, se observa un comportamiento totalmente distinto en las regiones de credibilidad para los modelos habituales. En este caso los modelos reparametrizados W1 y RW1 obtienen regiones de credibilidad para la variabilidad total que corresponde prácticamente con el soporte de la distribución previa propuesta, lo que parece indicar que los datos no aportan información suficiente en la distribución posterior.

La amplitud de la RC de σ^2 para el modelo SP2 es mucho más amplia que para SP1, lo cual resulta bastante sorprendente, ya que generalmente este comportamiento es al revés en los otros dos índices.

Tabla 3.9. Continentalidad: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP1, W1 y RW1

	SP1			W1			RW1		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	2.07E+00	[1.33E00 - 3.71E00]	1.85E+00	[7.75E-01 - 7.26E00]	2.13E+00	[6.78E-01 - 7.41E00]			
t^2	4.46E-01	[3.62E-02 - 8.45E-01]	4.25E-01	[1.01E-01 - 9.20E-01]	5.11E-01	[1.99E-01 - 1.07E00]			
ϕ	3.37E-05	[1.10E-05 - 6.74E-05]	7.55E-05	[1.85E-05 - 2.88E-04]	4.97E-05	[2.01E-05 - 1.54E-04]			
<i>Ref</i>	9.51E+04	[68848.62 - 202022.22]	6.22E+04	[18154.8 - 217253.05]	9.50E+04	[34109.69 - 199673.72]			
ν	5.87E-01	[2.51E-01 - 1.42E00]	1.46E+00	[1.01E00 - 1.93E00]	1.48E+00	[1.02E00 - 1.93E00]			
β_0	1.54E+01	[1.38E01 - 1.69E01]	1.57E+01	[1.11E01 - 1.66E01]	1.57E+01	[1.34E01 - 1.68E01]			
β_1	2.14E-03	[1.15E-03 - 3.18E-03]	2.19E-03	[9.97E-04 - 3.34E-03]	2.08E-03	[9.62E-04 - 3.18E-03]			
κ	-	-	1.65E-01	[3.90E-02 - 4.75E-01]	1.86E-01	[4.41E-02 - 5.21E-01]			
ξ^2	-	-	2.27E+00	[1.28E00 - 7.74E00]	2.66E+00	[1.26E00 - 7.97E00]			

Tabla 3.10. Continentalidad: Inferencia de la distribución posterior para los modelos SP2, W2 y RW2

	SP2			W2			RW2		
	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	Mediana.	RC95%	
σ^2	2.34E+00	[1.33E00 - 5.40E00]	2.09E+00	[1.34E00 - 3.99E00]	2.02E+00	[1.33E00 - 3.63E00]			
ϕ	4.90E-05	[1.12E-05 - 1.41E-04]	1.59E-04	[1.34E-04 - 2.58E-04]	1.62E-04	[1.38E-04 - 2.60E-04]			
<i>Ref</i>	5.25E+04	[19376.81 - 202538.14]	2.97E+04	[20478.15 - 43077.21]	2.93E+04	[20473.75 - 41107.7]			
ν	4.54E-01	[1.77E-01 - 8.21E-01]	1.48E+00	[1.24E00 - 1.93E00]	1.48E+00	[1.24E00 - 1.93E00]			
β_0	1.56E+01	[1.40E01 - 1.68E01]	1.57E+01	[1.50E01 - 1.65E01]	1.57E+01	[1.50E01 - 1.65E01]			
β_1	2.16E-03	[1.03E-03 - 3.27E-03]	2.27E-03	[1.08E-03 - 3.44E-03]	2.28E-03	[1.11E-03 - 3.42E-03]			

De todo esto, parece desprenderse que el modelo habitual resulta más adecuado para estudiar este índice si se desean tener en cuenta tanto la variabilidad espacial como la no espacial, sin embargo cabría plantearse la posibilidad de que un modelo que sólo presentará variabilidad espacial.

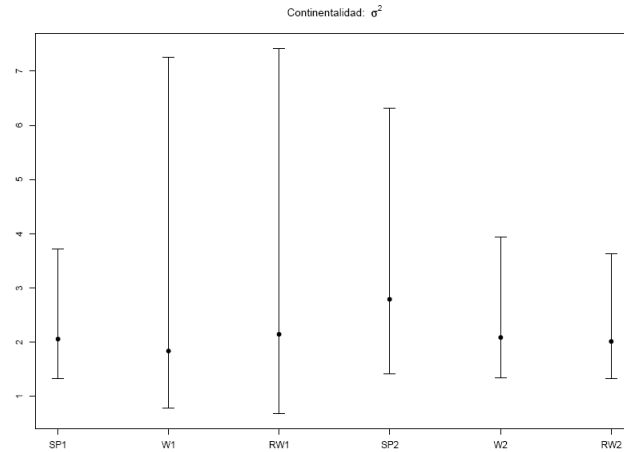


Figura 3.35. Continentalidad: RC para σ^2 de SP1, W1, RW1, SP2, W2 y RW2

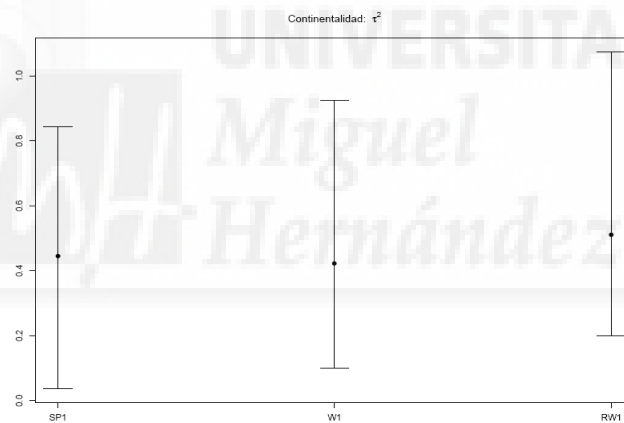


Figura 3.36. Continentalidad: RC para τ^2 de SP1, W1 y RW1

Por lo que respecta al efecto a gran escala, todos los modelos tienen un comportamiento similar, con un efecto positivo para la altura, indicando que la continentalidad aumenta cuando lo hace la altura.

Para los modelos SP1, W1 y RW1, el parámetro de suavizado, ν , muestra regiones de credibilidad distintas, de 0 a 1.4 para el modelo habitual, y de 1 a 1.95 en los reparametrizados. Por otro lado, los valores del parámetro de escala proporcionan rangos efectivos diferentes entre los

modelos SP1 y RW1 (95 Km. aproximadamente) y W1 (62 Km.). Esta igualdad no se corresponde con las amplitudes de las regiones de credibilidad. De nuevo, SP1 proporciona las estimaciones más precisas.

En la Figura 3.37 se representan los variogramas ajustados para los modelos SP1, W1, y RW1. Aunque los variogramas ajustados parecen captar de forma adecuada el comportamiento del variograma empírico, se observan pequeñas diferencias entre todos los modelos.

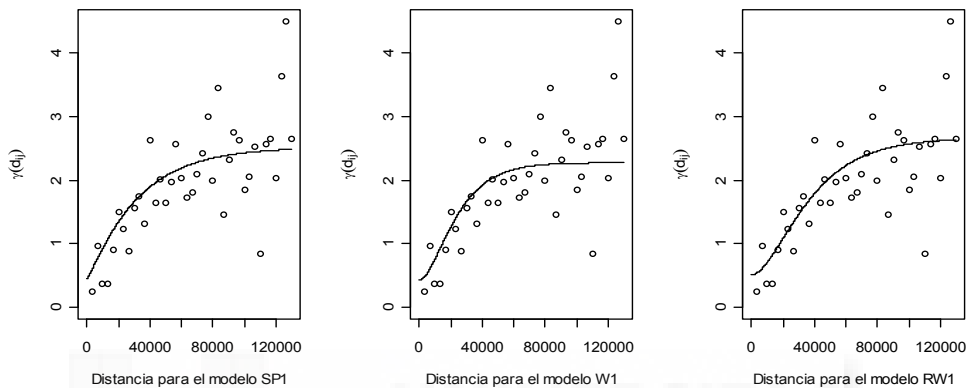


Figura 3.37. Continentalidad: Variogramas ajustados para SP1, W1 y RW1

De todos los variogramas el correspondiente a RW1 parece acomodarse mejor al variograma empírico.

Los resultados para los parámetros de la función de correlación para el modelo SP2 muestran un comportamiento bastante diferente con lo obtenido para los modelos reparametrizados W2 y RW2. Estas diferencias quedan muy marcadas en las estimaciones del rango efectivo, ya que para los modelos reparametrizados la región de credibilidad se encuentra entre 20 y 45 Km., y para el modelo SP2 la región se dispara de 20 a 200 Km.

En la Figura 3.38 se muestran los variogramas ajustados para los modelos anteriores. Comparándolos con los de los modelos SP1, W1 y RW1 se puede concluir que el ajuste en este caso parece menos preciso. No considerar la pepita en el modelo parece funcionar bien para captar el comportamiento inicial del variograma, pero proporciona comportamientos más alejados de los valores observados que cuando si es tomada en cuenta en el modelo. De hecho, el alféizar estimado para el Modelo SP2 parece excesivamente grande provocando un mal ajuste.

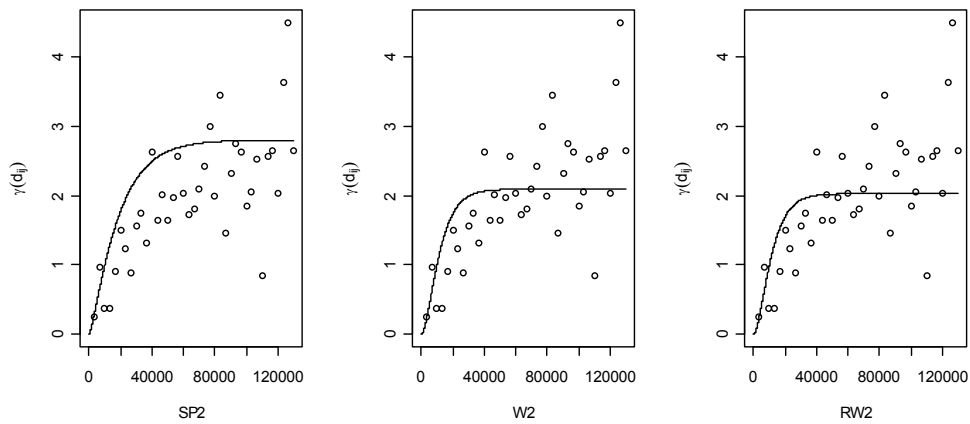


Figura 3.38. Continentalidad: Variogramas ajustados para SP2, W2 y RW2

Centrándose en los mapas predictivos obtenidos, y como en casos anteriores, las predicciones (medianas) sólo muestran pequeñas diferencias entre modelos habituales y reparametrizados. Los mapas para los modelos habituales muestran unos “círculos concéntricos” tomando como centro de la circunferencia el pico más alto de cada cordillera donde supuestamente se alcanzan los mayores valores del índice de continentalidad. Los valores del índice van disminuyendo según esas circunferencias conforme se acercan a la costa, aunque por el reducido tamaño de la isla no se observan valores muy distintos (cfr. Tabla 1.7).

Sin embargo, si se desean comparar los mapas de error entonces si se observan diferencias para los diferentes modelos. Estos mapas muestran todos unos patrones relativamente diferentes. Mientras que para SP1 y sobretodo W1 se muestra el error como más suave, para el modelo RW1 se muestra un error como más pronunciado en los “centros” de los círculos concéntricos que se han observado en el mapa de predicción. Este comportamiento es deseable pues parece lógico que alrededor de esos picos se produzca más error, ya que la disminución de altura entre puntos muy cercanos en el plano implica un descenso que puede llegar a ser considerable en el índice de continentalidad.

Cuando se observan los mapas de predicción correspondientes a los modelos SP2, W2, y RW2, existen ligeras diferencias en los modelos SP2 y RW2, pero estos dos si muestran más diferencias en la parte sureste de la isla con el mapa de predicción para el modelo W2. De nuevo, se aprecian

diferencias en los mapas de error correspondientes a estos modelos. Sin embargo, las diferencias observadas entre estos mapas de predicción y de error con respecto a homólogos SP1, W1, y RW1 son prácticamente inapreciables.

En todos los casos resulta destacable que el error estimado es muy pequeño con respecto a la escala de valores del índice de continentalidad. Este hecho constata que los mapas de predicción obtenidos resultan bastante precisos.

Desde el punto de vista biológico, todos estos mapas indican que no existen grandes diferencias respecto a este índice a lo largo de la isla, si bien existen zonas donde en invierno las temperaturas son bastante bajas, las cortas distancias hacen que sean pocos los subtipos existentes de este índice en la isla. Los mapas muestran de forma muy clara los cambios vegetacionales entre las zonas costeras y las zonas de interior, que no precisamente de montaña, pues en la planicie también se recrudecen las temperaturas en invierno.



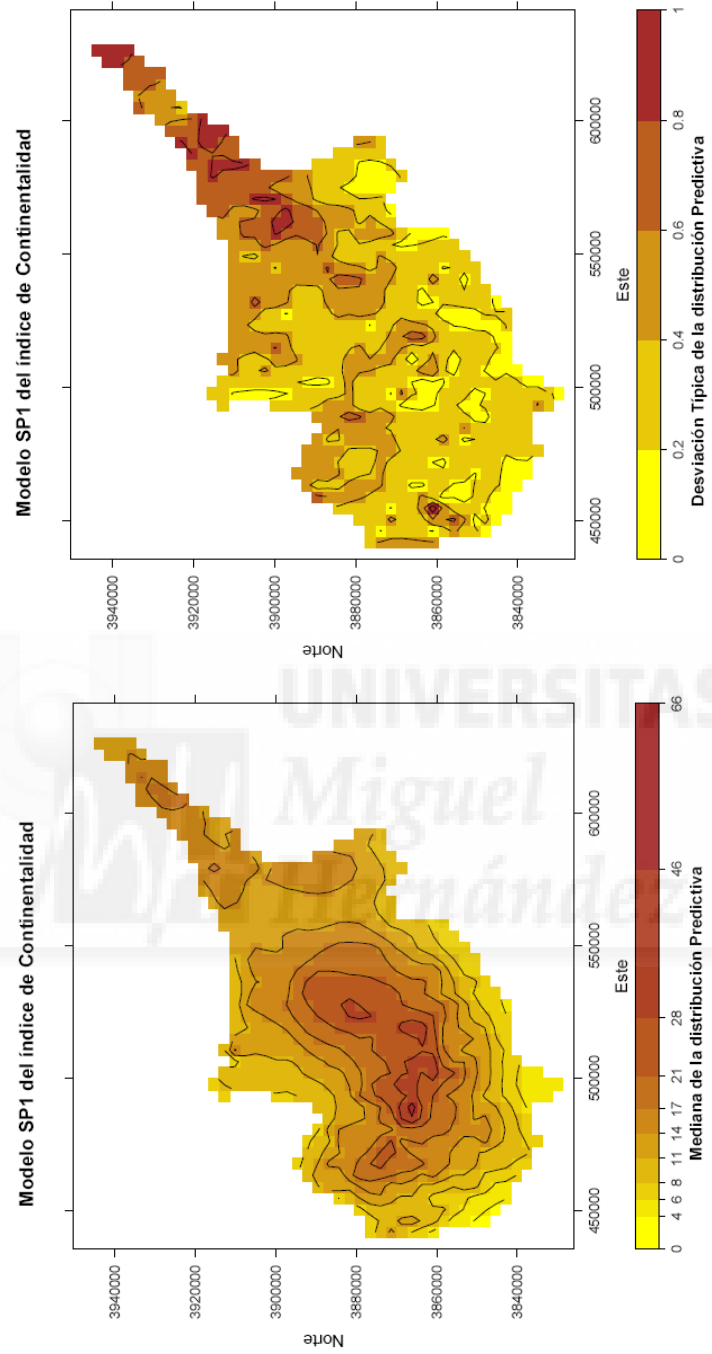


Figura 3.39. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo SP1

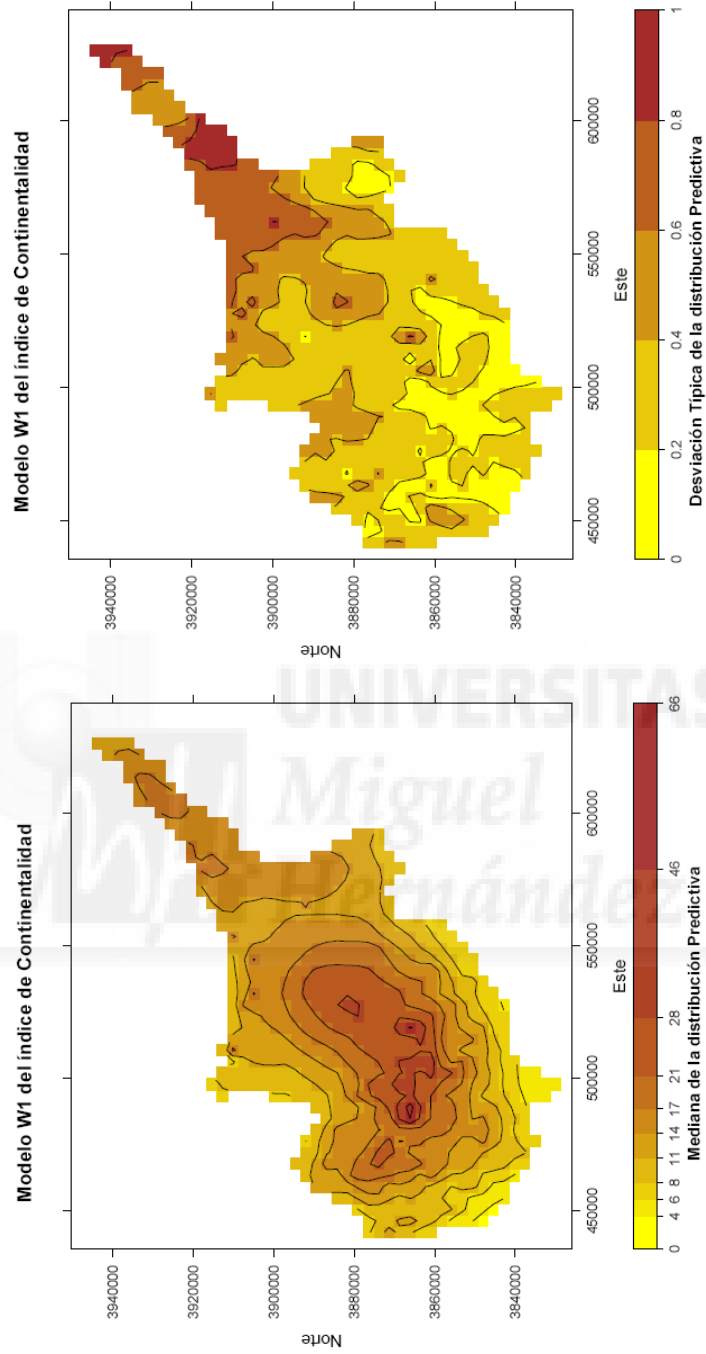


Figura 3.40. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo W1

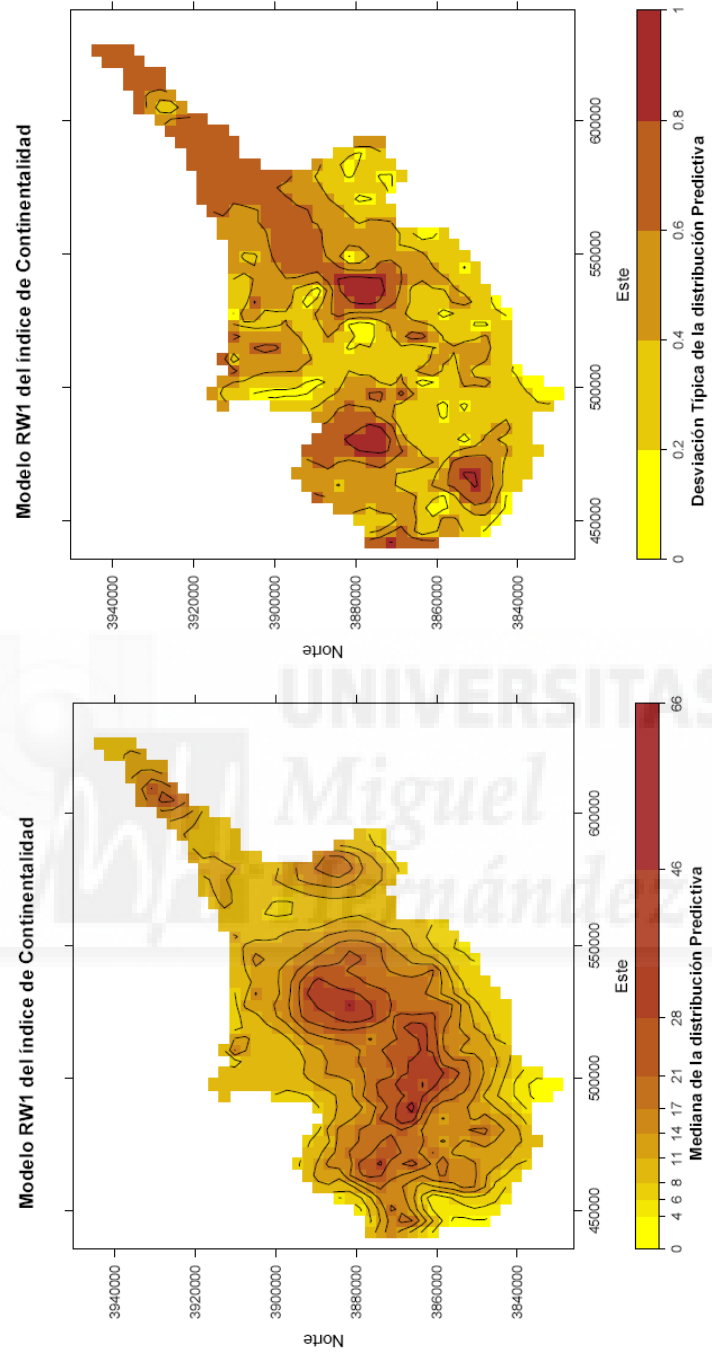


Figura 3.41. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo RW1

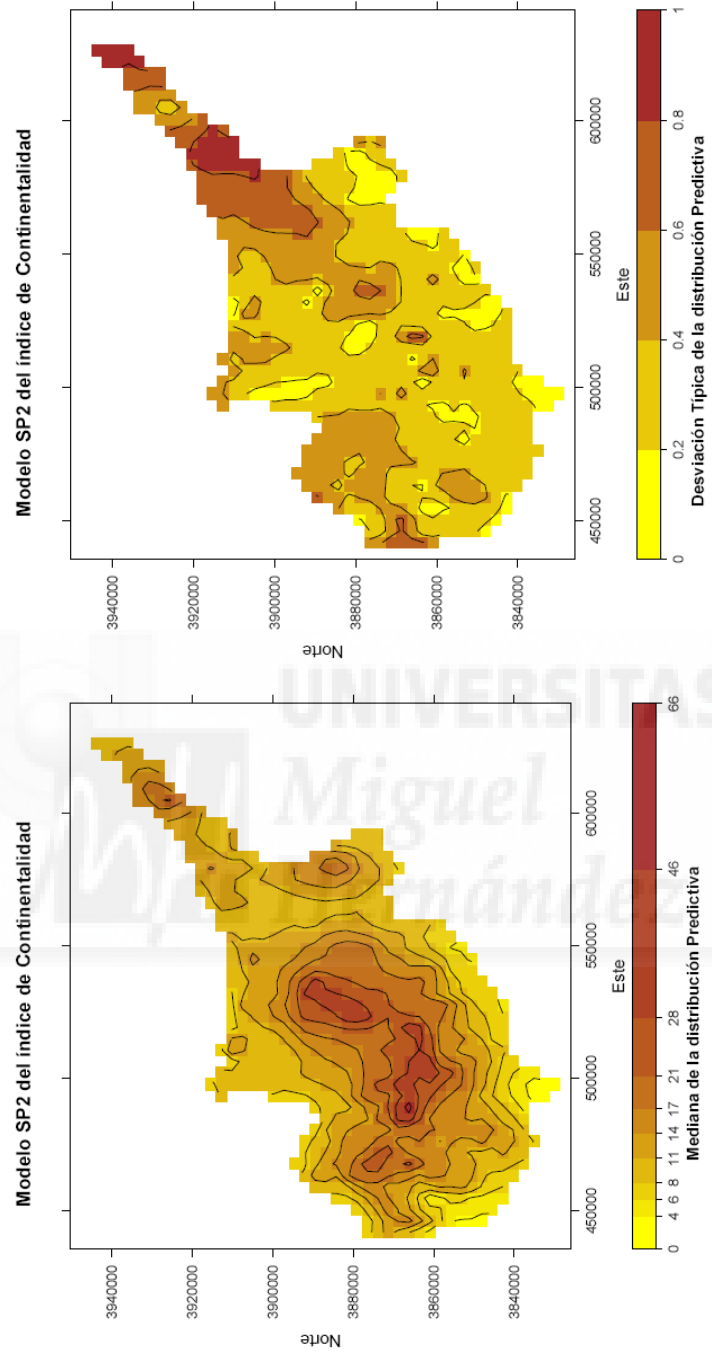


Figura 3.42. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo SP2

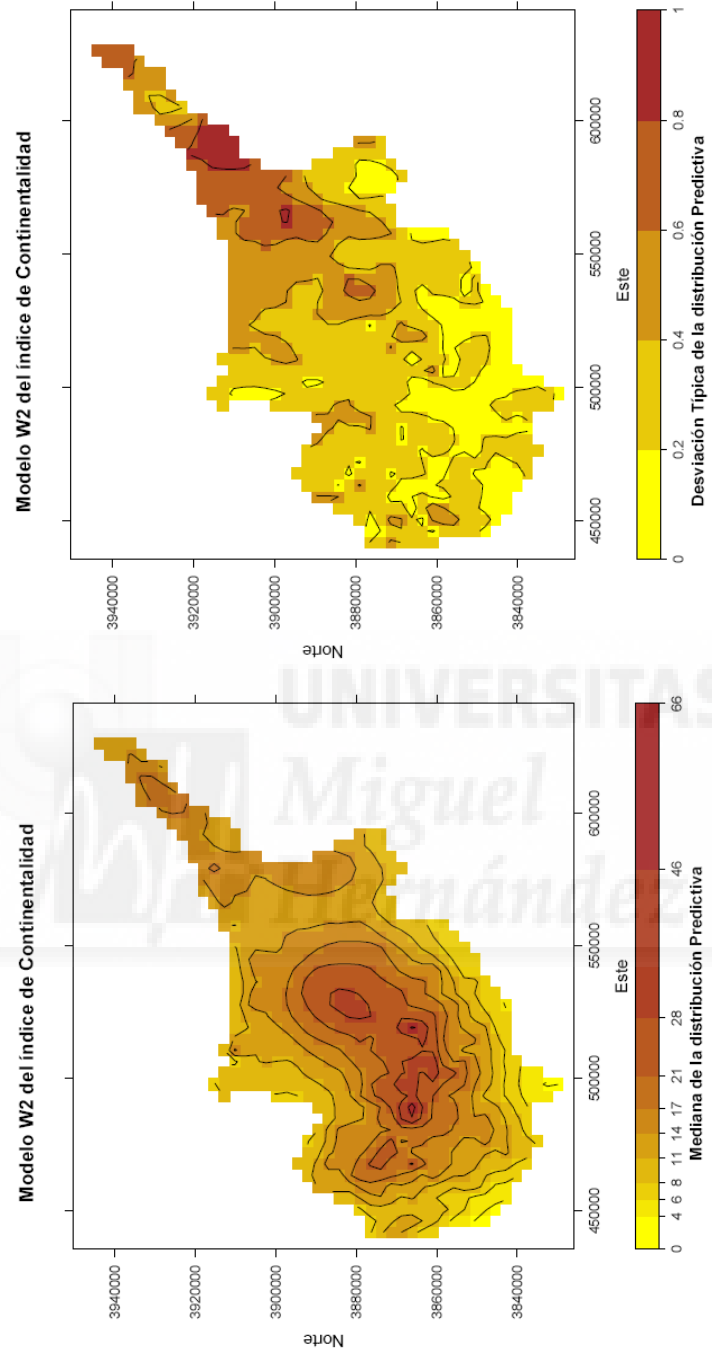


Figura 3.43. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo W2

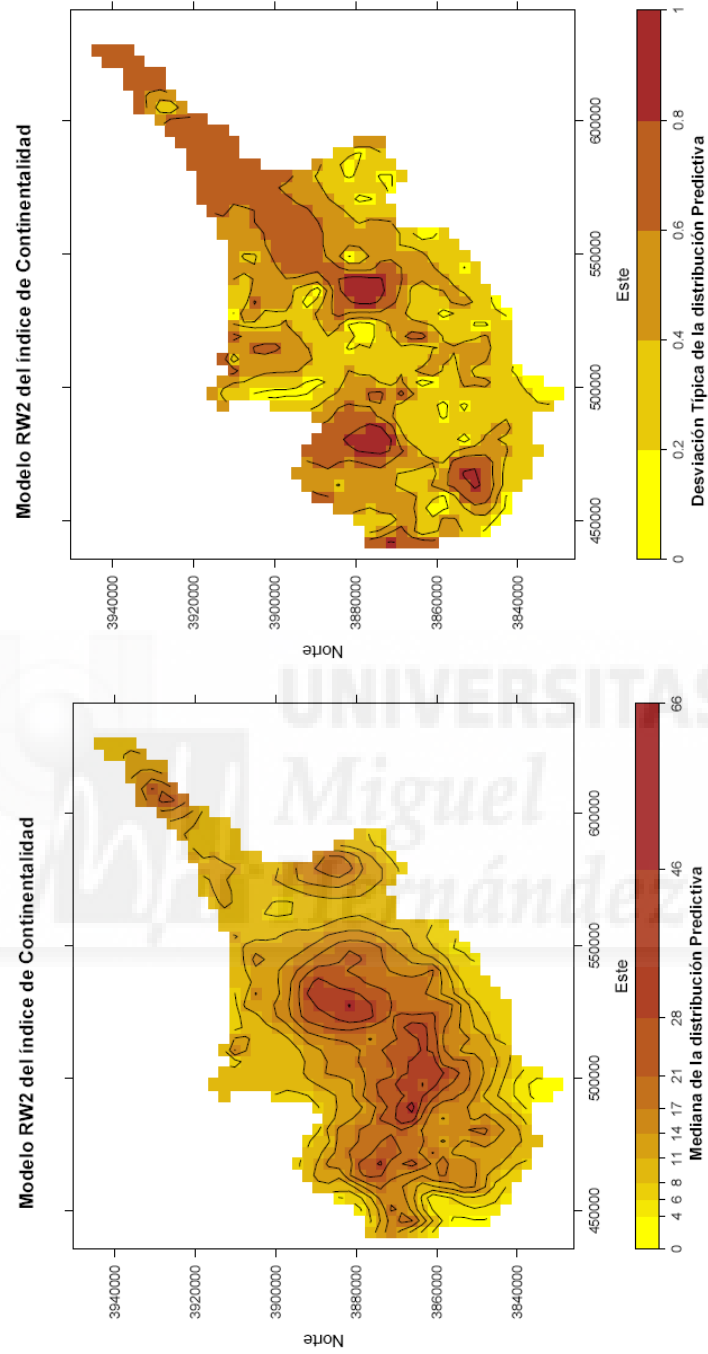


Figura 3.44. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo RW2

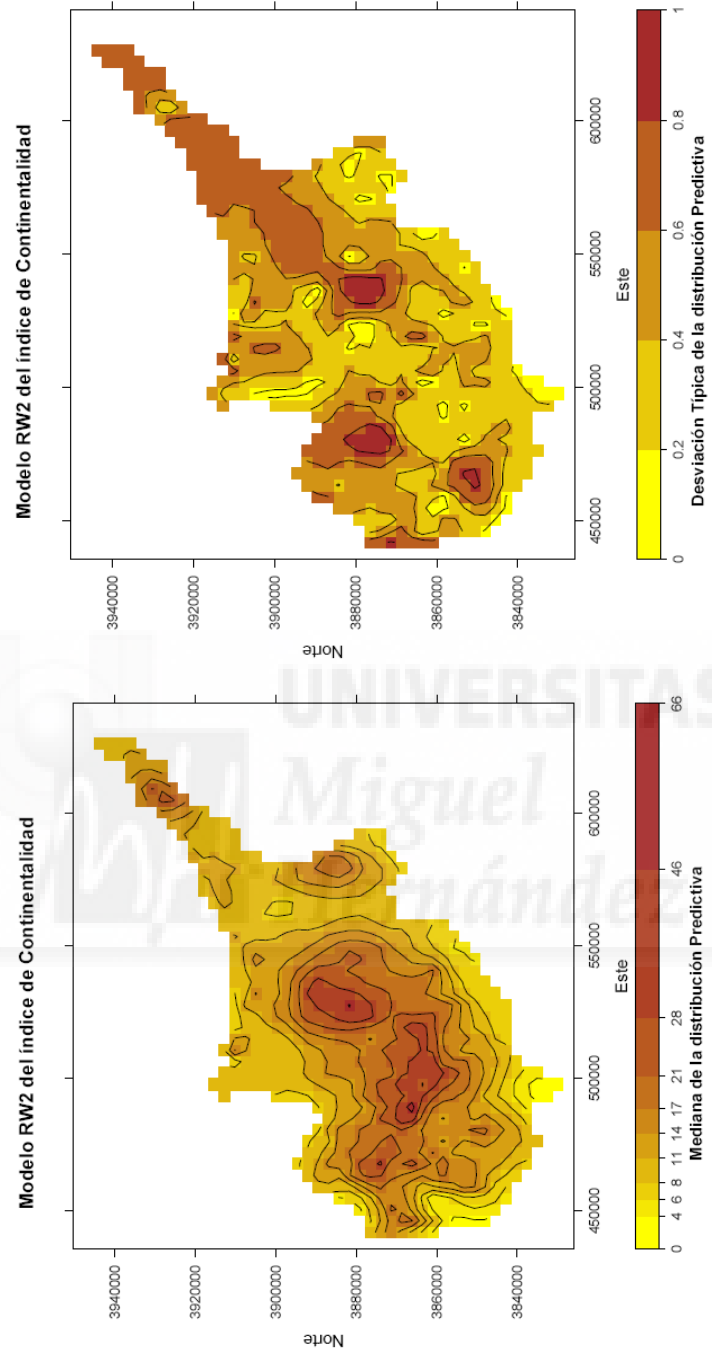


Figura 3.45. Continentalidad: mapa de predicción para el modelo RW2

Respecto a la distribución de probabilidad espacial (Figura 3.46 y Figura 3.47), lo más destacable es que de todos los posibles subtipos de continentalidad tan sólo tres muestran probabilidades distintas de cero para alguna localización de la Isla de Chipre. Esto se debe principalmente a que la región bajo estudio es una isla de dimensiones reducidas. En este caso los subtipos presentes son el Semicontinental, Euoceánico y Semihiperoceánico.

El subtipo Semicontinental se debe más bien a los dos grandes picos y sus laderas septentrionales, que se convierten en lugares donde la diferencia térmica es mayor entre día y noche. Llama la atención que zonas relativamente cercanas al mar (parte noreste) tengan un subtipo Semicontinental, pero ello se debe a la altura de esas zonas a pesar de encontrarse cerca del mar. Por tanto, la vegetación de esa zona no vendrá explicada sólo por este índice, sino que se necesitará de la combinación de varios para obtener mayor información sobre los datos vegetacionales.

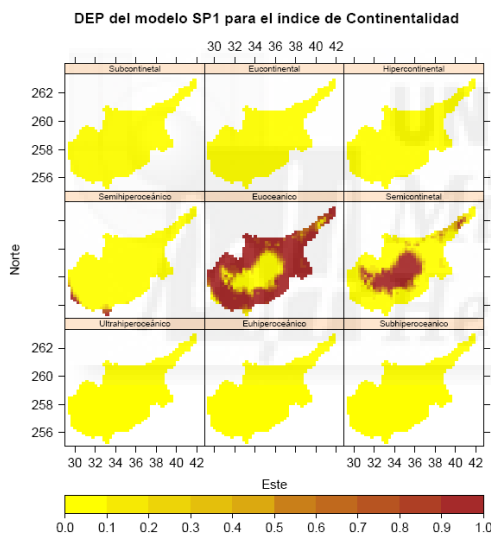


Figura 3.46. Continentalidad: DEP para el modelo SP1

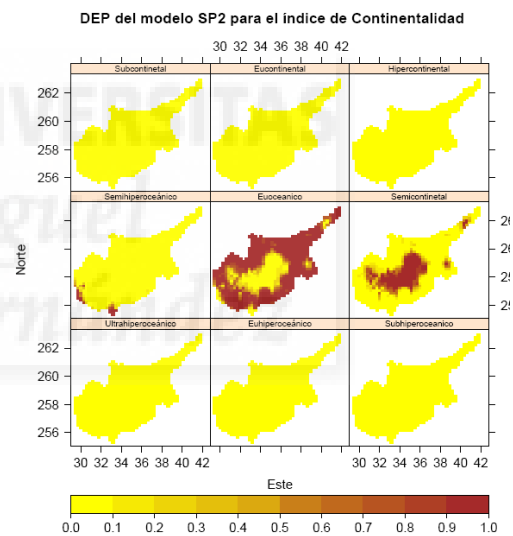


Figura 3.47. Continentalidad: DEP para el modelo SP2

3.6.3. Conclusiones

El modelo habitual para datos geoestadísticos es capaz de predecir con un alto grado de precisión el comportamiento de cada uno de los índices; sin embargo el modelo reparametrizado presenta una convergencia superior y los resultados obtenidos son totalmente comparables.

El modelo reparametrizado necesita de una especificación de distribuciones previas más simple, que además está en total consonancia con el procedimiento de elicitación aquí propuesto.

No se ha observado en los estudios de sensibilidad realizados, dependencia entre los resultados obtenidos y las previas usadas. Por ese motivo se propone el uso de distribuciones previas uniformes que se encuentran más en consonancia con los análisis objetivos Bayesianos. El procedimiento de elicitación es totalmente objetivo y puede ser exportado a otras situaciones sin mayor dificultad.

Se ha conseguido un buen ajuste (errores de predicción pequeños en comparación con la escala de cada índice) tanto para el índice de ombrotermia como el de continentalidad, pero no parece ser así con el de termicidad debido a su propio comportamiento.

Los mapas de distribución de probabilidad espacial, para cada uno de los índices, proporcionan una herramienta muy potente a los gestores medioambientales, a la hora de establecer políticas de gestión y uso del suelo. De hecho, en todos los casos se establecen subtipos con probabilidad inferior a 0.1 sobre toda la región bajo estudio. Esto resulta muy interesante porque a pesar de la existencia de esos subtipos, según la clasificación bioclimática de la zona donde se localiza la isla, éstos no se ha podido constatar que se den en la isla Chipre.

Capítulo 4. Modelización Multivariante

4.1. Introducción

En este capítulo se aborda la modelización multivariante de los índices bioclimáticos estudiados en el capítulo anterior. La relación existente entre los diferentes índices, debido a las variables climáticas que utilizan en su cálculo, así como por lo que biológicamente representan, hacen oportuno plantearse la necesidad de una predicción multivariante conjunta que permita obtener una representación espacial de la clasificación bioclimática. Al igual que en los capítulos previos, se utilizarán los datos climáticos correspondientes a la isla de Chipre para ejemplificar estas técnicas.

Los problemas de predicción espacial multivariante no son desconocidos en la literatura y se encuentran ampliamente extendidos en problemas relacionados con el clima. Sin embargo, la complejidad de los modelos necesarios hacen que en muchas ocasiones se opte por un estudio univariante.

Para la obtención de dichos mapas de predicción existen diferentes aproximaciones. La más conocida es el *cokriging*, que se basa en un modelo para la distribución conjunta de los momentos de primer y segundo orden de la función de covarianza. Otra alternativa bastante habitual, aunque en gran desuso en estos momentos, es el *kriging con flujo externo—kriging with external drift*, KED (Hudson y Wackernagel, 1994; Bourennane et al., 1996)—, que se basa en la distribución condicionada de una o más variables, denominadas primarias, condicionadas al resto que son consideradas como fijas en el proceso de predicción.

Otras posibilidades de predicción espacial multivariante menos usuales se pueden encontrar en Corsten (1989), Stein y Corsten (1991) Stein et al. (1991), Hoef y Cressie (1993), Chiles y Delfiner (1999), Goovaerts (2000) y Hengl et al. (2004).

Sin embargo, los procedimientos habituales cuentan con grandes restricciones de uso. El *cokriging* (Myers, 1982; Cressie, 1993) tiene la dificultad de la especificación de un variograma conjunto para todas las variables analizadas, mientras que el KED exige el conocimiento sobre toda la superficie de predicción de las variables que son consideradas como fijas en el modelo, lo que no es habitual. Esto implica además que no se considera el análisis espacial de dichas variables.

Para evitar estas dificultades, Royle y Berliner (1999) proponen un procedimiento conjunto entre el *cokriging* y el KED basado en el establecimiento de un modelo jerárquico. Para el ajuste de dicho modelo y la correspondiente predicción espacial los autores usan procedimientos frecuentistas basados en el algoritmo EM y la estimación por mínimos cuadrados generalizados.

Desde la perspectiva Bayesiana, existen diferentes trabajos que tratan el problema de predicción espacial multivariante como Le y Zidek (1992), Hadcock y Wallis (1994), y Brown et al. (1994b). En la actualidad, gracias al avance de los métodos computacionales, los procedimientos bayesianos están empezando a tomar mucha fuerza en este campo. Un buen resumen de esos avances se puede encontrar en Banerjee et al. (2004).

La primera parte del capítulo muestra la notación básica de los modelos multivariantes espaciales. A continuación se presentan los fundamentos del *cokriging* y del KED, que son los métodos de predicción utilizados habitualmente. Para continuar con el enfoque jerárquico del problema y por consiguiente la adaptación a un enfoque bayesiano, con el modelo lineal corregionalizado condicionado, las distribuciones previas seleccionadas, el proceso inferencial y la forma genérica de la distribución predictiva posterior. Finalmente se muestran los resultados del modelo multivariante planteado para el estudio conjunto de los índices bioclimáticos de la isla de Chipre.

4.2. Modelos multivariantes espaciales

Dada una colección n de localizaciones $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, sobre una región D , con $\mathbf{Y}_j(\mathbf{s}) = [Y_j(s_i)]_{i=1}^n$ el vector de respuestas de la variable j , y $\mathbf{X}_j^T(\mathbf{s}) = [\mathbf{x}_j^T(s_i)]_{i=1}^n$, la matriz de regresores asociados con la variable j , con $j = 1, \dots, m$, el modelo espacial de regresión multivariante se puede expresar a través de la ecuación:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

donde:

- $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = (\mathbf{Y}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{Y}_m(\mathbf{s}))$, con $\dim(\mathbf{Y}(\mathbf{s})) = mn \times 1$, es el vector de respuestas del conjunto de variables para todas las localizaciones.
- $\mathbf{X}^T(\mathbf{s}) = \text{Diag}[\mathbf{X}_1^T(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{X}_m^T(\mathbf{s})]$, con $\dim(\mathbf{X}^T(\mathbf{s})) = mn \times mp$, es una matriz diagonal por bloques cuya diagonal la forman las respectivas matrices de regresores. Si las matrices de regresores son todas iguales $\mathbf{X}_1^T(\mathbf{s}) = \dots = \mathbf{X}_m^T(\mathbf{s})$ a $\mathbf{X}_0^T(\mathbf{s})$ se puede escribir $\mathbf{X}^T(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{X}_0^T(\mathbf{s})$, donde \otimes denota al producto de Kronecker.
- $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$, con $\dim(\boldsymbol{\beta}) = mp \times 1$, es el vector de coeficientes de la regresión asociado con cada matriz de regresores.
- $\mathbf{W}(\mathbf{s}) = (\mathbf{W}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{W}_m(\mathbf{s}))$ representa la matriz de efectos espaciales, con $\dim(\mathbf{W}(\mathbf{s})) = mn \times mp$, cuya distribución viene dada por

$$\mathbf{W}(\mathbf{s}) \sim N_{mn}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_w(\mathbf{s})),$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}_w(\mathbf{s}) = [C(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta})]_{i,j=1}^n$ es la matriz dada por las funciones de covarianzas espaciales asociadas con $\mathbf{W}(\mathbf{s})$:

$$C(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = [Cov(\mathbf{W}_k(s_i), \mathbf{W}_l(s_j))]_{k,l=1}^m, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

y $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_k\}_{k=1}^m$ es el vector formado por los parámetros de las funciones de correlación asociadas a cada $\mathbf{W}_k(\mathbf{s})$.

- $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m)$ es el vector de errores, con $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = mn \times 1$, cuya distribución viene dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_{mn}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi}),$$

donde $\boldsymbol{\Psi} = \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \dots = \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_m)$. Habitualmente se asume que $\boldsymbol{\Psi} = \text{Diag}(\boldsymbol{\tau}^2)$, es una matriz diagonal de dimensiones $m \times m$ con $\boldsymbol{\tau}^2 = (\tau_1^2, \dots, \tau_m^2)$ representando la variabilidad a pequeña escala o variabilidad no espacial asociada con cada una de las variables bajo estudio.

Sin duda alguna, el aspecto fundamental del modelo anterior es el estudio de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}_w(\mathbf{s})$, ya que determina su estructura espacial. Sin embargo, el establecimiento de una matriz de varianzas-covarianzas para el caso multivariante resulta mucho más complicada que en el caso univariante (ver Teorema de Bochner en pag. 84 de Cressie, 1993). En primer lugar $\mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta})$ no tiene porque ser simétrica, aunque si cumple que $\mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}^T(s_j, s_i; \boldsymbol{\theta})$ y $\lim_{s_i \rightarrow s_j} \mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}(s_j, s_j; \boldsymbol{\theta})$ es una matriz simétrica y definida positiva. Esto implica que $\boldsymbol{\Sigma}_w(\mathbf{s})$ es una matriz simétrica pero hay que establecer condiciones para que además sea definida positiva. No todas las matrices que se puedan proponer resultan válidas. Chiles y Delfiner (1999) recogen un teorema de Cramér que caracteriza las funciones de covarianza cruzada, pero su resultado en la práctica resulta trivial.

Desde el punto de vista frecuentista se han propuesto diferentes soluciones a este problema que van desde los modelos separables, cokriging (Myers, 1982; Hoef y Cressie, 1993), *kriging con flujo externo* (Ahmed y Demarsily, 1987; Brown et al., 1994a; Bourennane et al., 1996; Gotway y Hartford, 1996), y los modelos corregionalizados (Wackernagel, 2003).

Desde el punto de vista Bayesiano, Banerjee et al. (2004) presentan un estudio bastante completo de estos modelos.

Para estudiar las diferentes alternativas de modelización conviene expresar el modelo anterior a través de una estructura jerárquica como ocurría en el caso univariante. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \sim N_{mn} \left(\mathbf{X}^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}(\mathbf{s}), \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi} \right) \\
(II) \quad & \mathbf{W}(\mathbf{s}) \sim N_{mn} \left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_W(\mathbf{s}) \right) \\
(III) \quad & p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

De igual forma, como en el caso univariante si se integra $\mathbf{W}(\mathbf{s})$ del modelo (4.2), se puede obtener el modelo marginal dado por:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \sim N_{mn} \left(\mathbf{X}^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_W(\mathbf{s}) + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi} \right) \\
(II) \quad & p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Tan sólo resta establecer las correspondientes distribuciones previas en (4.2) y (4.3) para tener completamente especificado el modelo jerárquico espacial bayesiano. Sin embargo, con esta modelización dicha elicitación resulta muy problemática ya que en este caso se trabajan con matrices de varianza-covarianza y no con escalares como ocurría en el caso univariante.

Es por eso que en los puntos siguientes se estudian las diferentes posibilidades de análisis de dichos modelos, presentando las previas usuales en cada uno de ellos. Además, para simplificar la notación se elimina el indicador \mathbf{s} del vector de localizaciones, salvo cuando por motivos sea necesario hacer referencia explícita a él.

4.2.1. Modelos separables

Sin duda alguna, la especificación más sencilla de una función de covarianza válida para un proceso estocástico espacial multivariante \mathbf{W} es proponer una función de covarianza dada por:

$$\mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{T}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{4.4}$$

donde ρ una función de correlación válida para un proceso univariante, $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros asociado, y \mathbf{T} es una matriz definida positiva de dimensiones $m \times m$, que se interpreta como una matriz de covarianzas asociada con \mathbf{W} . En este caso, los elementos de la diagonal de \mathbf{T} hacen el papel del alféizar parcial, como ocurría en el caso univariante, mientras que los elementos fuera de la diagonal miden la asociación espacial entre las diferentes componentes de \mathbf{W} .

De esta forma: $\Sigma_w = \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}$, con $\mathbf{H} = [H_{ij}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j=1}^n = [\rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta})]_{i,j=1}^n$.

Así, Σ_w es semidefinida positiva y $\Sigma_w^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{H}^{-1}$. Sin embargo, esta modelización tiene un aspecto muy criticable, como es que la función de correlación asumida es la misma para cada uno de los procesos univariantes involucrados, de forma que implícitamente se asume que el rango es el mismo para todas las repuestas, lo que resulta claramente incorrecto en la mayoría de supuestos prácticos.

Bajo este supuesto, el modelo separable viene dado a partir de (4.2) como:

$$\begin{aligned} (I) \quad \mathbf{Y} &\sim N_{mn}(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi}) \\ (II) \quad \mathbf{W} &\sim N_{mn}(\mathbf{0}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}) \\ (III) \quad p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

o a partir de (4.3) como:

$$\begin{aligned} (I) \quad \mathbf{Y} &\sim N_{mn}(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi}) \\ (II) \quad p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Asumiendo independencia entre las componentes de $p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})$ las distribuciones previas que se suelen utilizar en la literatura habitualmente consisten en distribuciones normales multivariantes para $\boldsymbol{\beta}$, distribuciones uniformes para las componentes de $\boldsymbol{\theta}$, y distribuciones *Wishart* inversas independientes para $\boldsymbol{\Psi}$ y \mathbf{T} . Esta elicitación resulta bastante costosa en la práctica ya que el establecimiento de distribuciones *Wishart* inversas difusas en estas situaciones resulta todavía un tema de investigación bastante abierto.

4.2.2. Kriging con flujo externo

Otro modelo bastante utilizado pero que en la actualidad ha perdido utilidad práctica es el KED. Su éxito inicial se debió a que se trata de una solución multivariante a la predicción, que no necesita de la estimación conjunta de los variogramas.

Se trata de un método que utiliza la información de un conjunto de variables, denominadas secundarias para modelizar el conjunto de variables

de interés denominadas primarias. Aunque en principio esta técnica se puede utilizar con un conjunto de variables primarias superior a 1, lo habitual es considerar que el conjunto de variables primarias consiste en una única variable principal.

Si se considera $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$, donde \mathbf{Y}_1 es la variable primaria e \mathbf{Y}_2 es el conjunto de variables restantes, la base de esta técnica radica en expresar la esperanza condicionada mediante:

$$E[\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2] = \mathbf{Y}_2^T \boldsymbol{\alpha} + b.$$

En términos estrictos, no se trata de un problema multivariante porque la variable objetivo es única, aunque para su estudio se usen otro conjunto de variables respuestas. La ventaja principal es que el problema de predicción se reduce a un problema univariante.

Sin embargo, KED es un método no estacionario, es decir, no tiene una media constante dentro de la interpolación de sus vecinos. La mayor dificultad es que necesita de la disponibilidad de información de las variables secundarias en todas las localizaciones a predecir. Por tanto, el modelo espacial se centra únicamente en la variable principal olvidándose de los posibles efectos de interacción con el resto de variables y el estudio espacial de las variables secundarias.

El modelo jerárquico correspondiente vendría dado por:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \mathbf{Y}_1 \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Y}_2^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{W}, \tau^2 \mathbf{I}_n) \\ (II) \quad & \mathbf{W} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})) \\ (III) \quad & p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \tau^2, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde \mathbf{W} tiene la misma estructura que los modelos univariantes estudiados en el capítulo anterior.

4.2.3. Modelos corregeionalizados

Una alternativa que trata de aprovechar las ventajas y eliminar los problemas de los modelos anteriores son los denominados Modelos Lineales Corregeionalizados (MLC). Su nombre se debe a que se trata de modelizar conjuntamente a través de un modelo lineal variables que varían conjuntamente sobre una región. Existen dos formas de expresar estos modelos que se demuestra son equivalentes: el MLC conjunto y el MLC condicionado.

Modelo lineal corregionalizado conjunto

El MLC Conjunto más sencillo fue introducido por Matheron (1982), Grzebyk y Wackernagel (1994) y Wackernagel (1998). La base de estos modelos es asumir que el proceso \mathbf{W} se puede escribir como $\mathbf{W} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{W}}$, donde \mathbf{A} es una matriz de transformación no singular para cualquier s , y $\tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{\mathbf{W}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_m)$ cuyas componentes son procesos espaciales independientes e idénticamente distribuidos según:

$$\tilde{\mathbf{W}}_k \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})),$$

donde $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = [\rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta})]_{i,j=1}^n$ es la matriz de correlaciones asociada, ρ la función de correlación asumida y $\boldsymbol{\theta}$ los parámetros asociados.

De esta forma, la función de covarianza para $\mathbf{W}(s)$ viene dada por:

$$\mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Comparando las expresiones (4.4) y (4.8) se puede ver la equivalencia entre este modelo y el modelo separable presentado anteriormente, sin más que considerar que $\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Se ha de notar, que sin pérdida de generalidad, se puede asumir que la matriz \mathbf{A} es triangular inferior. De esta forma resulta posible establecer una relación directa entre los valores de \mathbf{A} y \mathbf{T} . Para dos variables respuesta dichas relaciones son:

$$a_{11} = \sqrt{T_{11}}, \quad a_{21} = \frac{T_{12}}{\sqrt{T_{11}}} \quad \text{y} \quad a_{22} = \sqrt{T_{22} - \frac{T_{12}^2}{T_{11}}}.$$

Más detalles al respecto, así como las equivalencias para tres variables respuesta se pueden encontrar en Banerjee et al. (2004 sec. 7.1).

Un modelo más general se da cuando se asumen funciones de correlación distintas para cada componente de $\tilde{\mathbf{W}}(s)$, es decir,

$$\tilde{\mathbf{W}}_k \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\theta}_k)),$$

donde $\mathbf{H}_k(\boldsymbol{\theta}_k) = [\rho_k(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}_k)]_{i,j=1}^n$, $k = 1, \dots, m$. Se puede ver entonces que la función de covarianza para \mathbf{W} viene dada por:

$$\mathbf{C}(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^m \rho_k(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}_k) \cdot \mathbf{T}_k, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{T}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T$ con \mathbf{a}_k la k -ésima columna de \mathbf{A} y $\sum_{k=1}^m \mathbf{T}_k = \mathbf{T}$. Así el modelo dado en (4.3) se puede expresar como:

$$(I) \quad \mathbf{Y} \sim N_{mn} \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}, \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_k \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi} \right) \quad (4.10)$$

$$(II) \quad p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})$$

con $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$.

Aunque aparentemente el modelo obtenido es tan complejo como el modelo general multivariante, hay que destacar que en este caso no hace falta establecer una función de covarianza conjunta, sino que se hace individualmente para cada componente del vector de respuestas. Sin embargo, esto no es impedimento para que el cálculo computacional asociado con este modelo y el establecimiento de las distribuciones previas siga siendo un tema muy complicado.

Modelo lineal corregionalizado condicionado

Para evitar los problemas derivados del establecimiento de previas sobre las matrices de varianza-covarianza se propone el uso de MLC condicionados, siguiendo los trabajos de Royle y Berliner (1999) y Berliner (2000).

Este modelo tiene como punto de partida el KED pero aprovecha la estructura jerárquica del modelo para establecer efectos espaciales sobre todas las variables respuesta, de forma que las distribuciones previas necesarias resultan mucho más sencillas. De hecho, el problema se puede reducir a la elicitación de distribuciones previas univariantes.

Básicamente dado el proceso $\{\mathbf{Y}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$, el conocimiento de unas variables respecto de las otras se establece a través de un modelo jerárquico donde la función de densidad conjunta se puede descomponer como el producto de diferentes distribuciones condicionadas. Por ejemplo, en el caso de $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ la distribución conjunta se podría expresar como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3] &= [\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3][\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3] \\
&= [\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3][\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_3][\mathbf{Y}_3] \\
&= [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_3][\mathbf{Y}_3]
\end{aligned}$$

Dependiendo de la disponibilidad de la información se puede seleccionar una u otra igualdad de las anteriores. La elección viene determinada por criterios basados en el conocimiento o características del problema bajo estudio.

Con el fin de remarcar las peculiaridades de esta modelización, y las condiciones que se deben dar para que resulte equivalente a la del punto anterior, y previo a establecer formalmente el modelo se muestran en detalle el caso bivariado (dos variables respuesta).

El MLC condicionado para dos variables podría venir dado en principio por:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \begin{cases} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{W}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_2^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \alpha \mathbf{Y}_1 + \mathbf{W}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{cases} \\
(II) \quad & \begin{cases} \mathbf{W}_1 \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1)); \quad \mathbf{W}_2 \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_2^2 \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}_2)) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \sim N_n(\mathbf{0}, \tau_1^2 \mathbf{I}_n); \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sim N_n(\mathbf{0}, \tau_2^2 \mathbf{I}_n) \end{cases} \quad (4.11) \\
(III) \quad & p(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2|1}, \tau_1^2, \tau_2^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la notación del capítulo anterior para \mathbf{Y}_1 , y se ha introducido la notación condicional para $\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1$, como se puede observar en el parámetro $\boldsymbol{\beta}_{2|1}$ que acompaña a la matriz de diseño asociada con \mathbf{Y}_2 . El parámetro α representa el grado de asociación entre \mathbf{Y}_2 e \mathbf{Y}_1 . También se establecen dos efectos espaciales, uno asociado con \mathbf{Y}_1 y otro con $\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1$. La principal ventaja de este modelo se aprecia en la distribución previa, donde han desaparecido las matrices de varianza y han parecido las varianzas univariantes asociadas a \mathbf{Y}_1 y $\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1$. Puesto que a partir de dichas distribuciones se obtiene la distribución de \mathbf{Y}_2 , resulta posible utilizar los procedimientos de elicitación univariante para establecer distribuciones previas poco informativas para este modelo. Además, asumiendo que las

observaciones son condicionalmente independientes dados los efectos espaciales tenemos que $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathbf{0}$.

De esta forma, si asumimos que la matriz de covariables es la misma para ambas respuestas ($\mathbf{X}_2^T = \mathbf{X}_1^T$), los valores marginales del vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas para \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 obtenidas a partir de (4.11), utilizando la formulación mostrada en Banerjee et al. (2004 cap. 7), vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_1) &= \mathbf{X}_1^T \boldsymbol{\beta}_1; \quad Cov(\mathbf{Y}_1) = \sigma_1^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) + \tau_1^2 \mathbf{I}_n; \\ E(\mathbf{Y}_2) &= E(E(\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1)) \\ &= \mathbf{X}_2^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \mathbf{X}_1^T \boldsymbol{\beta}_1 \alpha = \mathbf{X}_1^T (\boldsymbol{\beta}_{2|1} + \boldsymbol{\beta}_1 \alpha); \\ Cov(\mathbf{Y}_2) &= E(Cov(\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1)) + Cov(E(\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1)) = \\ &= \sigma_2^2 \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}_2) + \tau_2^2 \mathbf{I}_n + \alpha^2 (\sigma_1^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) + \tau_1^2 \mathbf{I}_n) \\ &= \sigma_2^2 \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}_2) + \alpha^2 \sigma_1^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) + (\tau_2^2 + \alpha^2 \tau_1^2) \mathbf{I}_n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por otro lado, asumiendo que la matriz \mathbf{A} es triangular inferior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

el MLC estudiado en el apartado anterior establece que:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_2) &= \mathbf{X}_2^T \boldsymbol{\beta}_2, \\ Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) &= \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) \otimes \mathbf{T}_1 + \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}_2) \otimes \mathbf{T}_2 + \mathbf{I}_n \otimes \text{Diag}(\tau_1^2, \tau_2^2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

con las matrices \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 dadas por:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

de forma que la matriz de varianzas-covarianzas conjunta para $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ es

$$Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \begin{pmatrix} a_{11}^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) + \tau_1^2 \mathbf{I}_n & a_{11}a_{21} \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) \\ a_{11}a_{21} \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) & a_{21}^2 \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1) + a_{22}^2 \mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}_2) + \tau_2^2 \mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

A partir de (4.14) la matriz de correlaciones entre \mathbf{Y}_1 y \mathbf{Y}_2 (representada con $\boldsymbol{\eta}_{total}$) viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{Corr}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \boldsymbol{\eta}_{total} = \left[\text{Diag}(\sigma_1^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) + \tau_1^2 \mathbf{I}_n) \right]^{-1/2} \\ \left[\alpha \sigma_1^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \right] \left[\text{Diag}(\sigma_1^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) + \sigma_2^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_2) + \tau_1^2 \mathbf{I}_n) \right]^{-1/2}.$$

También resulta posible obtener correlación entre los efectos espaciales, representada por $\boldsymbol{\eta}_{espacial}$, sin más que considerar $\tau_1=0$.

Igualando (4.12), (4.13) y (4.14) se establecen las siguientes ecuaciones que permiten relacionar el modelo condicional con el conjunto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\beta}_{21} + \boldsymbol{\beta}_1 \alpha; \\ a_{11}^2 &= \sigma_1^2; \quad a_{22}^2 = \sigma_2^2; \quad a_{21}^2 = \alpha^2 \sigma_1^2; \\ \tau_2^2 + \alpha^2 \tau_1^2 &= \tau_2^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Cabe asumir que $\alpha \neq 0$, por lo que la última relación de (4.15) sólo puede ocurrir si $\tau_1^2 = 0$, es decir, que la variable marginal viene explicada únicamente por el efecto espacial. En principio, esta condición resulta muy restrictiva y provoca que este modelo sólo pueda ser utilizado en esta situación.

A partir de (4.15) se puede ver que si la relación entre \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 no resulta relevante ($\alpha \approx 0$) el modelo resultante es el separable presentado en la sección (4.2.1). Estas relaciones permiten obtener el efecto marginal de las covariables en \mathbf{Y}_2 , así como caracterizar las matrices \mathbf{A} y \mathbf{T} de forma inmediata. Así, en la diagonal de \mathbf{A} aparecen las raíces cuadradas de las variabilidades espaciales asociadas con cada variable, mientras que fuera de la diagonal aparece un efecto combinado del peso que tiene \mathbf{Y}_1 en la explicación de \mathbf{Y}_2 y la raíz cuadrada de la variabilidad espacial asociada con \mathbf{Y}_1 . Sin embargo, esta modelización resulta muy atractiva ya que permite trabajar con una estructura más sencilla en términos computacionales y de establecimiento de distribuciones previas.

Utilizando argumentos similares, Banerjee et al. (2004) indican que en el caso de m variables respuesta donde el modelo condicionado se establece a partir de:

$$[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m] = [\mathbf{Y}_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1}] [\mathbf{Y}_{m-1} | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-2}] \cdots [\mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1] [\mathbf{Y}_1],$$

se debe exigir que todas las distribuciones salvo $[\mathbf{Y}_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1}]$ sean modelizadas en términos de la variabilidad espacial únicamente, es decir, con pepita igual a cero, para que el modelo conjunto y el condicionado proporcionen la misma solución.

Respecto del modelo anterior tan sólo resta estudiar qué ocurre con el rango efectivo de las variables analizadas. En el caso bivariado, el rango efectivo para $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$ se obtiene igualando la correspondiente función de correlación a 0.05 como en el caso univariante, mientras que para $\mathbf{Y}_2(\mathbf{s})$ se debe resolver la ecuación:

$$\frac{a_{21}^2 \rho_1(d) + a_{22}^2 \rho_2(d)}{a_{21}^2 + a_{22}^2} = 0.05.$$

Para situaciones con más variables dichas ecuaciones resultan demasiado complicadas. En Banerjee et al. (2004) se pueden consultar los resultados para tres variables.

La formulación genérica para un MLC condicionado viene dada entonces por:

$$(I) \begin{cases} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \alpha_{2|1} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_1 + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1} + \mathbf{W}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{cases}$$

$$(II) \left\{ \mathbf{W}_k \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_k^2 \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\theta}_k)); k = 1, \dots, m; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_m \sim N_n(\mathbf{0}, \tau_m^2 \mathbf{I}_n) \right\} \quad (4.16)$$

$$(III) p(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2|1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1}, \alpha_{2|1}, \dots, \alpha_{m|m-1}, \tau_m^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_m).$$

Asumiendo independencia entre los parámetros, la distribución previa se puede establecer como el producto de las distribuciones previas sobre cada uno de los parámetros. Para el establecimiento de dichas previas se siguen las recomendaciones dadas en el capítulo anterior, al tratarse todas de distribuciones univariantes.

El modelo dado en (4.16) se puede escribir en términos de modelos marginales, integrando los efectos espaciales \mathbf{W} , de la siguiente forma:

$$(I) \begin{cases} \mathbf{Y}_1 \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_1}) \\ \mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1 \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \alpha_{2|1} \mathbf{Y}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_2}) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1} \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_1 + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m}) \end{cases} \quad (4.17)$$

$$(II) p(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2|1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1}, \alpha_{2|1}, \dots, \alpha_{m|m-1}, \tau_m^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_k} &= \sigma_k^2 \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\theta}_k); \quad k=1, \dots, m-1; \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m} &= \sigma_m^2 \mathbf{H}_m(\boldsymbol{\theta}_m) + \tau_m^2 \mathbf{I}_n. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sin embargo, como ya quedó reflejado en el capítulo anterior, no parece lógico asumir independencia entre la variabilidad espacial y no espacial, lo que motivó la introducción del modelo reparametrizado. En este caso resulta posible establecer un modelo reparametrizado similar sin más que considerar:

$$\begin{aligned} \xi_k^2 &= \sigma_k^2, \quad k=1, \dots, m-1; \quad \xi_m^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2 \\ \kappa_k &= 0, \quad k=1, \dots, m-1; \quad \kappa_m = \tau_m^2 / (\sigma_m^2 + \tau_m^2) \end{aligned}$$

de forma que las matrices de varianzas y covarianzas de las distribuciones dadas en (4.18) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_k} &= \xi_k^2 \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\theta}_k); \quad k=1, \dots, m-1; \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m} &= \xi_m^2 [(1 - \kappa_m) \mathbf{H}_m(\boldsymbol{\theta}_m) + \kappa_m \mathbf{I}_n], \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por lo que el MLC condicionado reparametrizado se puede escribir como:

$$(I) \begin{cases} \mathbf{Y}_1 \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_1}) \\ \mathbf{Y}_2 | \mathbf{Y}_1 \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \alpha_{2|1} \mathbf{Y}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_2}) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1} \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_1 + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m}) \end{cases} \quad (4.20)$$

$$(II) p(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2|1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1}, \alpha_{2|1}, \dots, \alpha_{m|m-1}, \xi_1^2, \dots, \xi_m^2, \kappa_m, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_m).$$

En este caso la elección de las distribuciones previas sobre la variabilidad de las respuestas queda reducida a especificar distribuciones previas sobre la variabilidad espacial de cada variable, y sobre la proporción de variabilidad no espacial asociada con las distribución condicionada de \mathbf{Y}_m . De nuevo, se usan los procedimientos de elicitación estudiadas en el capítulo anterior para establecer las distribuciones previas para este modelo.

4.3. Inferencia y predicción en el modelo lineal corregionalizado condicionado

4.3.1. Inferencia

En esta memoria y debido a las características de los datos analizados para establecer la clasificación bioclimática de la isla de Chipre atendiendo a los índices de ombrotermia, termicidad y continentalidad se ha optado por el MLC condicionado dado en (4.17). En este apartado se presenta brevemente el proceso de inferencia para dichos modelos.

Si se denota por $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m)$, $\boldsymbol{\beta}_c = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2|1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1})$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{2|1}, \dots, \alpha_{m|m-1})$, $\boldsymbol{\xi}^2 = (\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_m^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$, y asumiendo distribuciones previas para cada parámetro similares a las del capítulo anterior, el proceso de inferencia del MLC condicionado dado en (4.20) se basa en el estudio de la distribución posterior:

$$p(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}_m, \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \propto L(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}_m, \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}) p(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}_m, \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\theta}),$$

donde:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}_m^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}) &= \\ &= N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_1}) \cdots N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_1 + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m}) \end{aligned}$$

Para simplificar la notación se considera que $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m) = (\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}_m, \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\theta})$, con Δ_k , $k = 1, \dots, m$, es el conjunto de parámetros que aparecen en la distribución condicionada de \mathbf{Y}_k dadas $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{k-1}$.

Como se puede ver la distribución posterior así obtenida no resulta analítica y se deben recurrir a los algoritmos MCMC para obtener una

muestra de la distribución posterior. Utilizando el algoritmo de Gibbs y teniendo en cuenta que las condicionadas son:

$$\begin{aligned}
 p(\Delta_1 | \mathbf{Y}_1, \mathbf{X}) &\propto N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_1}) p(\Delta_1) \\
 p(\Delta_2 | \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{X}) &\propto N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{2|1} + \alpha_{2|1} \mathbf{Y}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_2}) p(\Delta_2) \\
 &\vdots \\
 p(\Delta_m | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{m-1}, \mathbf{Y}_m, \mathbf{X}) &\propto \\
 &\quad \propto N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_1 + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_m}) p(\Delta_m),
 \end{aligned}$$

donde cada una de ellas corresponde a la distribución condicionada completa de m modelos univariantes independientes, de forma que se pueden usar los algoritmos del capítulo anterior sobre cada una de estas distribuciones para obtener una muestra de la distribución posterior conjunta. La única diferencia aparece en el valor esperado de estas distribuciones, pues ahora están presentes los efectos asociados con las variables respuestas a los que viene condicionada la variable actual.

Además, a partir de $(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\alpha})$ resulta posible obtener los efectos marginales $\boldsymbol{\beta}$ asociados con cada variable respuesta, sin más que comparar las expresiones del MLC condicionado con las del MLC conjunto, y utilizar el algoritmo de composición sobre la muestra de la distribución posterior obtenida.

4.3.2. Predicción

Desde el punto de vista clásico, el problema de predicción espacial multivariante se plantea como una generalización del *kriging* para modelos univariantes, llamándolo *cokriging*, con diferentes variantes: *cokriging* simple, el ordinario, el universal y el *cokriging* con modelos de tendencia. Sin embargo, el *cokriging* es mucho más exigente que el propio *kriging*, por la necesidad de especificar y estimar los variogramas cruzados.

Tal y como se ha comentado en capítulos anteriores, desde un punto de vista Bayesiano, el problema de predicción se basa en el estudio de la distribución predictiva posterior correspondiente. Si se denota con el subíndice o a las observaciones originales y con el subíndice p a las observaciones a predecir, en el caso del MLC condicionado dado en (4.16) la distribución predictiva posterior se puede obtener a partir de los modelos condicionados:

$$p(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o, \mathbf{X}_o, \mathbf{X}_p) = \int p(\mathbf{Y}_p | \mathbf{X}_p, \Delta) p(\Delta | \mathbf{Y}_o, \mathbf{X}_o) d\Delta$$

donde

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_p | \mathbf{X}_p, \Delta) &= \\ &= p(\mathbf{Y}_{mp} | \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_{1p}, \dots, \mathbf{Y}_{m-1p}, \Delta_m) \cdots p(\mathbf{Y}_{2p} | \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_{1p}, \Delta_2) p(\mathbf{Y}_{1p} | \mathbf{X}_p, \Delta_1) \\ &= N_n \left(\mathbf{X}_p^T \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{w_1} \right) \cdots N_n \left(\mathbf{X}_p^T \boldsymbol{\beta}_{m|1\dots m-1} + \alpha_{m|1} \mathbf{Y}_{1p} + \dots + \alpha_{m|m-1} \mathbf{Y}_{m-1p}, \boldsymbol{\Sigma}_{w_m} \right), \end{aligned}$$

con las $\boldsymbol{\Sigma}_w$ dadas en (4.19).

El procedimiento de predicción consiste pues en obtener la distribución predictiva de cada una de las variables respuesta usando el correspondiente modelo condicionado, mediante el método de composición y las simulaciones de la distribución posterior. Este método, aunque efectivo, puede llegar a resultar muy costoso si el número de variables explicativas y/o el número de localizaciones a predecir es muy grande. Es por eso que resulta más interesante usar la equivalencia entre el MLC condicionado y el MLC conjunto para extraer la distribución predictiva a partir de este último.

Dicha distribución se puede obtener a partir de:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o, \mathbf{X}_o, \mathbf{X}_p) &= \int p(\mathbf{Y}_p | \mathbf{X}_p, \Delta) p(\Delta | \mathbf{Y}_o, \mathbf{X}_o) d\Delta \\ &= \int N_{mn} \left(\mathbf{X}_p^T \boldsymbol{\beta}, \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_{k,p} \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi} \right) p(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_o, \mathbf{X}_o) d\boldsymbol{\beta} d\mathbf{T} d\boldsymbol{\Psi} d\boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde \mathbf{T} y $\boldsymbol{\Psi}$ se obtienen a partir de las relaciones establecidas entre el modelo condicionado y el conjunto, y las matrices de correlación, $\mathbf{H}_{k,p}$, a partir de las simulaciones de la posterior y de la matriz de distancias entre las localizaciones de las observaciones originales y las que se desean predecir.

El problema queda reducido a una situación similar a la predicción de una única variable respuesta tratada en el capítulo 3, ya que de nuevo se tiene que simular de una distribución Normal multivariante con un vector de medias y matriz de varianzas covarianzas que se pueden obtener fácilmente. Por tanto, los procedimientos de simulación usando técnicas de computación en paralelo son aplicables en este caso, añadiendo los cálculos necesarios para obtener \mathbf{T} , $\boldsymbol{\Psi}$, y cada una de las matrices de correlación $\mathbf{H}_{k,p}$.

De esta forma, si la distribución conjunta para $(\mathbf{Y}_o, \mathbf{Y}_p)$ viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_o \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} \sim N_{(n+r)m} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_o \\ \boldsymbol{\mu}_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{oo} & \boldsymbol{\Sigma}_{op} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{po} & \boldsymbol{\Sigma}_{pp} \end{pmatrix} \right),$$

donde r es el número de localizaciones a predecir, los parámetros de la distribución vienen dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_o &= \mathbf{X}_o^T \boldsymbol{\beta}; & \boldsymbol{\mu}_p &= \mathbf{X}_p^T \boldsymbol{\beta}; \\ \boldsymbol{\Sigma}_{oo} &= \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_{k,oo} \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi}; & \boldsymbol{\Sigma}_{op} &= \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_{k,op} \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Psi}; \\ \boldsymbol{\Sigma}_{po} &= \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_{k,po} \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_r \otimes \boldsymbol{\Psi}; & \boldsymbol{\Sigma}_{pp} &= \sum_{k=1}^m \mathbf{H}_{k,pp} \otimes \mathbf{T}_k + \mathbf{I}_r \otimes \boldsymbol{\Psi}; \end{aligned} \quad (4.22)$$

con $\mathbf{H}_{k,oo}$, $\mathbf{H}_{k,op}$, y $\mathbf{H}_{k,pp}$ las matrices de correlación evaluadas sobre las correspondientes matrices de distancias entre localizaciones de observaciones originales, originales frente a predichas, y predichas.

Por tanto, la distribución condicionada de $(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o)$ viene dada por:

$$(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o) \sim N_{rm} \left(E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]; V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] \right),$$

donde $E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]$ y $V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]$ vienen dadas en (2.25) y cuyos valores se obtienen de forma directa sin más que sustituir las ecuaciones dadas en (4.22). De nuevo se usan las técnicas de computación en paralelo para la evaluación de $E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]$ y $V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o]$, de forma similar al capítulo 3.

4.4. Modelización multivariante para clasificaciones bioclimáticas

En este punto se trata el modelo multivariante para el establecimiento de la clasificación bioclimática de la Isla de Chipre, a partir de la información proporcionada por los índices de ombrotermia, termicidad y continentalidad. En primer lugar se realiza un estudio preliminar para determinar la necesidad del modelo multivariante. Se establece el modelo

correspondiente prestando atención a las distribuciones previas usadas, así como el proceso inferencial y de predicción llevado a cabo.

4.4.1. Análisis preliminar

Con el fin de determinar si existe relación entre los diferentes índices, justificando así la necesidad de la realización de un análisis multivariante, se presentan a continuación los gráficos que corresponden a diagramas de dispersión de los residuos de los ajustes lineales con la altura, vistos en el capítulo anterior, de cada uno de los índices, es decir, los residuos de los modelos lineales

$$Ic = \beta_0 + \beta_1 ALT + \varepsilon ,$$

$$\log(Io) = \beta_0 + \beta_1 ALT + \varepsilon , \text{ y}$$

$$\log(It) = \beta_0 + \beta_1 ALT + \varepsilon .$$

Si estos gráficos presentan alguna tendencia, quedaría justificado el intento de modelización multivariante. En la Figura 4.1, se puede observar cierta tendencia en el diagrama de dispersión de los residuos de los modelos correspondientes al índice de continentalidad y al logaritmo de índice de ombrotermia; lo cual se justifica bioclimáticamente para la isla de Chipre debido a su tamaño y orografía. Los otros gráficos de dispersión no parecen mostrar tendencia alguna, de forma que, el índice de termicidad no muestra relación aparente con los otros dos índices. Esto era de esperar ya que los cambios en la termicidad van asociados directamente con la orografía, en el caso de una región tan pequeña.

Por este motivo, se toma la decisión de abordar el modelo multivariante que comprende al índice de continentalidad y al logaritmo del índice de ombrotermia.

4.4.2. El modelo ombrotermia-continentalidad

Las definiciones del índice de ombrotermia y continentalidad reflejan claramente una relación de causalidad entre ellos, es decir, el índice de continentalidad queda marcado por la clasificación del índice de ombrotermia (ver Tabla 1.6). Esto motiva el hecho de considerar un MLC condicionado para resolver este problema.

Además, puesto que la variable para el efecto a gran escala es el mismo para ambos índices (la altitud de las estaciones), y el estudio llevado a cabo en el capítulo anterior sobre el índice de ombrotermia, reflejaba la

posibilidad de considerar sólo variabilidad espacial para el índice de ombrotermia, se considera adecuada la elección de un MLC condicionado para el estudio conjunto de los índices.

A partir del MLC condicionado dado en (4.20), el modelo correspondiente a los índices de ombrotermia y continentalidad viene dado por:

$$(I) \begin{cases} \mathbf{Y}_{LIO} \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{LIO}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_{LIO}}) \\ \mathbf{Y}_{IC} | \mathbf{Y}_{LIO} \sim N_n(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}_{IC|LIO} + \alpha_{IC|LIO} \mathbf{Y}_{LIO}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_{IC}}) \end{cases} \quad (4.23)$$

$$(II) p(\boldsymbol{\beta}_{LIO}, \boldsymbol{\beta}_{IC|LIO}, \alpha_{IC|LIO}, \kappa_{IC}, \xi_{LIO}^2, \xi_{IC}^2, \boldsymbol{\theta}_{LIO}, \boldsymbol{\theta}_{IC}),$$

con $\boldsymbol{\beta}_{LIO} = (\beta_{0,LIO}, \beta_{1,LIO})$, $\boldsymbol{\beta}_{IC|LIO} = (\beta_{0,IC|LIO}, \beta_{1,IC|LIO})$, y donde LIO representa el $\log(Io)$; el subíndice 0 y 1 indican respectivamente el efecto de la interceptación y la altura; las matrices de varianza-covarianzas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_{LIO}} &= \xi_{LIO}^2 \left[\rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}_{LIO}) \right]_{i,j=1}^n = \xi_{LIO}^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{LIO}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_{IC}} &= \xi_{IC}^2 \left[(1 - \kappa_{IC}) \left[\rho(s_i, s_j; \boldsymbol{\theta}_{IC}) \right]_{i,j=1}^n + \kappa_{IC} \mathbf{I}_n \right] = \quad (4.24) \\ &= \xi_{IC}^2 \left[(1 - \kappa_{IC}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{IC}) + \kappa_{IC} \mathbf{I}_n \right], \end{aligned}$$

donde se ha tomado como ρ la función de correlación de *Matérn*, y $\boldsymbol{\theta}_{LIO}$ y $\boldsymbol{\theta}_{IC}$ los parámetros asociados con ella, es decir, $\boldsymbol{\theta}_{LIO} = (\phi_{LIO}, \nu_{LIO})$, y $\boldsymbol{\theta}_{IC} = (\phi_{IC}, \nu_{IC})$. En este modelo ξ_{LIO}^2 y $\xi_{IC}^2(1 - \kappa_{IC})$ representan la variabilidad espacial asociada con cada índice, y $\xi_{IC}^2 \kappa_{IC}$ la variabilidad no espacial asociada con el índice de continentalidad. Además $\alpha_{IC|LIO}$ refleja la influencia que el índice de ombrotermia tiene en el índice de continentalidad, y $\boldsymbol{\beta}_{IC} = \boldsymbol{\beta}_{IC|LIO} + \alpha_{IC|LIO} \boldsymbol{\beta}_{LIO}$ representa el efecto marginal asociado con la altura para el índice de continentalidad.

4.4.3. Distribuciones previas

Asumiendo independencia entre los parámetros de la distribución previa dada en (4.23), y aplicando las ideas de elicitación presentadas en el capítulo 3, la tarea de establecimiento de previas resulta inmediata.

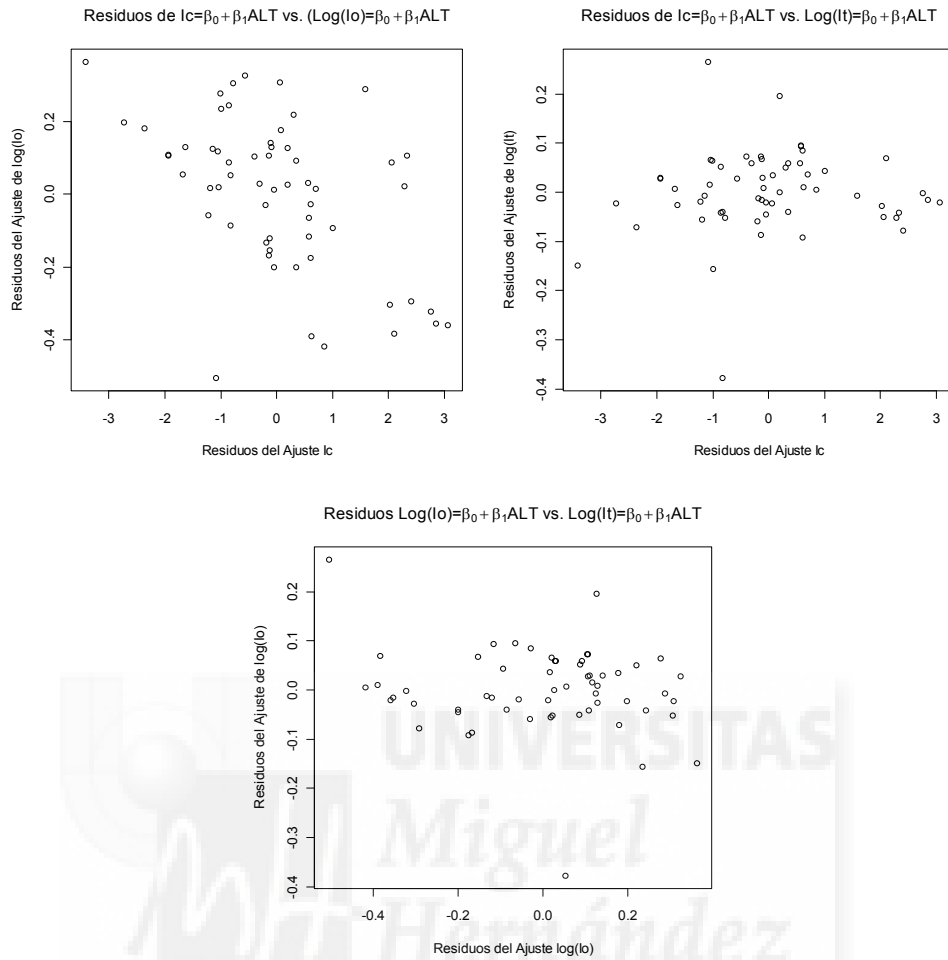


Figura 4.1. Gráfico de dispersión de los residuos para los modelos lineales de cada uno de los índices bioclimáticos con respecto a la altura.

Distribuciones previas sobre las covariables

En este caso se procede de forma habitual asumiendo distribuciones independientes planas sobre cada uno de los parámetros involucrados, esto es:

$$\pi(\boldsymbol{\beta}_{LIO}) \propto 1; \quad \pi(\boldsymbol{\beta}_{IC|LIO}) \propto 1; \quad \pi(\alpha_{IC|LIO}) \propto 1$$

Distribuciones previas sobre los parámetros de ρ

Se trata de establecer distribuciones poco informativas sobre $\boldsymbol{\theta}_{LIO} = (\phi_{LIO}, \nu_{LIO})$, y $\boldsymbol{\theta}_{IC} = (\phi_{IC}, \nu_{IC})$. Asumiendo independencia entre $\boldsymbol{\theta}_{LIO}$ y

θ_{IC} , las correspondientes distribuciones previas, siguiendo las recomendaciones del capítulo anterior, vienen dadas por:

$$\pi(\phi_{LIO}) = \pi(\phi_{IC}) \sim \text{Unif}(1.0E-05, 5.5E-04)$$

$$\pi(v_{LIO}) = \pi(v_{IC}) \sim \text{Unif}(0.05, 1.95)$$

Distribuciones previas sobre las varianzas

Puesto que en el modelo (4.23) las variabilidades tanto espacial como no espacial para cada índice vienen dadas en términos de ξ_{IC}^2 , ξ_{LIO}^2 y κ_{IC} , las correspondientes distribuciones previas se fijan usando las ideas propuestas en el capítulo anterior. Se establecen distribuciones previas Uniformes, Gamma inversa o *Half-Cauchy* sobre ξ_{IC}^2 , y ξ_{LIO}^2 , o distribuciones Uniformes sobre ξ_{IC} , y ξ_{LIO} . Sobre κ_{IC} o proporción de variabilidad no espacial asociada con el índice de ombrotermia se asume una distribución Uniforme sobre (0,1).

Como resultado se establecen las distribuciones previas:

$$\pi(\kappa_{IC}) \sim \text{Unif}(0,1)$$

$$\pi(\xi_{IC}^2) \Rightarrow \begin{cases} a) \text{Unif}(0.001, b_{IC}) \\ b) \text{Gal}(2, \varphi_{IC}) \\ c) \text{HC}(\delta_{IC}) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi(\xi_{LIO}^2) \Rightarrow \begin{cases} a) \text{Unif}(0.001, b_{LIO}) \\ b) \text{Gal}(2, \varphi_{LIO}) \\ c) \text{HC}(\delta_{LIO}) \end{cases}$$

ó

$$\pi(\xi_{IC}) \propto \text{Unif}(0.001, \sqrt{b_{IC}}) \quad \text{y} \quad \pi(\xi_{LIO}) \propto \text{Unif}(0.001, \sqrt{b_{LIO}})$$

donde los hiperparámetros b_{IC} , b_{LIO} , φ_{IC} , φ_{LIO} , δ_{IC} , y δ_{LIO} se fijan usando el procedimiento presentado en la sección (3.3.1).

Por tanto, dado el modelo (4.23) y esta especificación de previas, se establecen cuatro modelos diferentes para el estudio de clasificaciones bioclimáticas desde el punto de vista multivariante. Dichos modelos son:

MW1	Distribuciones uniformes sobre ξ_{IC}^2 y ξ_{LIO}^2
MRW1	Distribuciones Uniformes sobre ξ_{IC} y ξ_{LIO}

MW2	Distribuciones Gamma Inversas sobre ξ_{IC}^2 y ξ_{LIO}^2
MW3	Distribuciones <i>Half-Cauchy</i> sobre ξ_{IC}^2 y ξ_{LIO}^2

El resto de previas son las mismas para todos los modelos considerados. Para evitar una sobrecarga de tablas y gráficos se procederá a presentar únicamente los resultados correspondientes al modelo MRW1.

Si se considera la correspondiente distribución previa como

$$p(\Delta) = p(\Delta_{IC}, \Delta_{LIO}) = p(\beta_{IC|LIO}, \alpha_{IC|LIO}, \theta_{IC}, \xi_{IC}, \kappa_{IC}) p(\beta_{LIO}, \theta_{LIO}, \xi_{LIO}),$$

el proceso inferencial, como ya se presentó en la sección (3.3), queda reducido al estudio de la distribución posterior que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} p(\Delta | Y_{IC}, Y_{LIO}, X) &\propto \pi(Y_{IC}, Y_{LIO} | \Delta, X) \pi(\Delta) \\ &\propto \pi(Y_{IC}, Y_{LIO} | \Delta_{IC}, \Delta_{LIO}, X) \pi(\Delta_{IC}, \Delta_{LIO}) \\ &\propto \pi(Y_{IC} | Y_{LIO}, X, \Delta_{IC}) \pi(\Delta_{IC}) \pi(Y_{LIO} | X, \Delta_{LIO}) \pi(\Delta_{LIO}). \end{aligned}$$

Por tanto, la distribución posterior se puede factorizar en dos componentes, la correspondiente al índice de continentalidad y al índice ombrotérmico. Así, se pueden obtener una muestra de la distribución posterior utilizando los algoritmos descritos en capítulo anterior sin más que ajustar el efecto de Y_{LIO} sobre Y_{IC} .

En este caso se ha usado el programa WinBUGS[®] para obtener una muestra de la distribución posterior. Se consideran tres cadenas con puntos iniciales para Δ distintos. Una vez obtenida la distribución posterior tan sólo resta obtener la correspondiente distribución predictiva posterior de dicho modelo. De nuevo, se aprovecha la factorización del modelo para resolver este problema. Como ya se comentó en la sección (3.4) la mejor forma de proceder es obtener dicha distribución a partir del MLC conjunto que se obtiene a partir de la distribución posterior del MLC condicionado.

Computacionalmente este modelo puede resultar bastante costoso, ya que si se realizan los cálculos matriciales sin atender a criterios computacionales, el tiempo de cálculo puede elevarse considerablemente.

4.5. Clasificación bioclimática de la isla de Chipre

Para el caso de Ombrotermia-Continentalidad, el número de simulaciones consideradas fue de 5000 para cada cadena con una etapa de calentamiento de 1.000 simulaciones. La convergencia resultó ser muy rápida, comprobándose con los criterios habituales y mediante los criterios gráficos de las medianas y desviaciones típicas acumuladas presentadas en el capítulo anterior.

La programación habitual para 5.000 simulaciones de la distribución predictiva sobre el conjunto de 750 puntos a predecir, llevaría 22 días. Si se recurre a librerías optimizadas para cálculo matricial el tiempo se reduce considerablemente, quedando en unas 5 horas, y si se realiza mediante computación en paralelo se reduce a rango entre 45 y 55 minutos. El algoritmo de computación en paralelo multivariante es una mera adaptación del proceso univariante, ya que únicamente se aumenta el tamaño de la distribución normal multivariante resultante, por lo que dicho proceso no genera una tarea de programación y computación extra.

Respecto a la Distribución Espacial de Probabilidad, para el MLC condicionado, utilizando el modelo descrito en (4.23), se trata de calcular la DEP de ombrotermia y la DEP de continentalidad partiendo de la distribución predictiva obtenida tras el proceso inferencial multivariante descrito anteriormente. Para el cálculo de las DEP marginales se utilizará la metodología descrita en el capítulo anterior (sección 3.5.4)

En la Tabla 4.1 aparecen las estimaciones correspondientes al modelo analizado. En dicha tabla aparecen además de los parámetros correspondientes a Δ , los valores de \mathbf{T} de la matriz de varianzas y covarianzas que se vio en el apartado 4.2.3. Además se muestra el rango efectivo y la correlación tal y como se vio en dicho apartado.

Respecto a las variabilidades de los índices, resalta como el índice de continentalidad reduce la variabilidad total, sobre todo la espacial, respecto a la variabilidad mostrada por el modelo univariantes (W1, RW1, etc.); mientras que la variabilidad para el ombrotérmico toma valores parecidos consecuencia directa del modelo asumido.

En la tabla aparecen dos correlaciones, la total y la espacial, ambas de magnitud similar, esta correlación negativa viene a refrendar el gráfico mostrado con anterioridad (Figura 4.1), y además está acorde con el valor

del parámetro de escala que relaciona la ombrotermia con la continentalidad (α_{CLIO}).

Para el rango efectivo, la región de credibilidad para la continentalidad es bastante extensa, casi 100 Km., mientras que para la ombrotermia muestra un rango más acotado, no más de 17 Km. Esto se debe a la propia orografía de la isla, y a que la continentalidad en una isla tan pequeña es muy variable, pero siempre dentro de unos valores muy cercanos, a pesar de la similitud de las estimaciones obtenidas para los parámetros de escala y forma de las dos funciones de correlación.

Los parámetros de tendencia muestran como en el modelo de la continentalidad, el parámetro correspondiente a la ombrotermia es negativo, mientras que la relación con la altura y la continentalidad es positiva. Por lo tanto la relación entre la continentalidad y la ombrotermia es negativa, es decir, a mayores valores de la ombrotermia, menores valores de continentalidad.

Al final de esta tabla se muestran la inferencia de los parámetros de tendencia para el modelo corregionalizado no condicional según (4.15), que se podrían comparar con los obtenidos mediante el modelo RW1 multivariante (Tabla 3.9), observándose que, aun manteniendo la magnitud en mediana el efecto de la altitud es ligeramente mayor en el modelo multivariante (sobre todo para los puntos de alta montaña).

4.5.1. Mapas predictivos

A continuación se muestran los mapas predictivos del análisis multivariante de los índices de continentalidad y ombrotermia, donde se observan algunas diferencias respecto a los mapas de predicción realizados de forma univariante. Respecto al mapa del índice ombrotérmico, muestra una orografía de la isla muy clara, y ciertamente similar al obtenido de forma univariante, aunque en este caso —como es obvio—el mapa del error asociado muestra zonas con mayor error. Para la continentalidad, el mapa obtenido muestra un menor error y a la vez mayor definición de este índice en la zona de la cordillera central, y como en el índice ombrotérmico la mayor parte de error ahora aparece en la zona norte de la isla, precisamente donde el número de estaciones meteorológicas iniciales era menor.

La realización de un estudio multivariante, o sea, un estudio conjunto de los índices, viene justificado si tras el proceso inferencial la correlación muestra valores distintos de cero. En los casos en que esto ocurre el mapa predictivo obtenido vía univariante puede ser relativamente diferente al obtenido vía análisis multivariante.

En el caso de la ombrotermia y la continentalidad, se está hablando de la relación entre precipitaciones y cercanía a la costa, así como la temperatura media de la zona o región a estudio. Parece lógico pensar que estos factores climáticos deben de estar relacionados, y ello queda patente en la Tabla 4.1 con el valor de la correlación entre ambos índices.

Por ello se hace necesario este estudio conjunto, con el fin de obtener mapas predictivos que demuestren la relación existente entre los índices.



Tabla 4.1. Inferencia sobre los parámetros del modelo corregionalizado MRW1

	Mediana	SD	RC 95%
ξ_{LIO}^2	4.66E-02	1.99E-02	[2.88E-02 ; 9.72E-02]
$\xi_{IC LIO}^2$	1.61E+00	5.63E-01	[1.04E00 ; 3.11E00]
$\kappa_{IC LIO}$	1.63E-01	1.46E-01	[1.91E-02 ; 5.68E-01]
$\tau_{IC LIO}^2$	2.71E-01	2.34E-01	[3.18E-02 ; 9.18E-01]
$\sigma_{IC LIO}^2$	1.31E+00	5.84E-01	[5.62E-01 ; 2.76E00]
T_{11}	2.88E-02	1.99E-02	[4.66E-02 ; 9.72E-02]
T_{12}	-2.65E-01	6.58E-02	[-1.02E-01 ; -9.95E-03]
T_{22}	8.04E-01	6.14E-01	[1.61E00 ; 3.15E00]
η_{total}	-0.32901	0.142987	[-0.59360 ; -0.03184]
$\eta_{espacial}$	-0.35426	0.152495	[-0.62891 ; -0.03314]
ϕ_{IC}	1.70E-04	9.45E-05	[6.87E-05 ; 4.59E-04]
ϕ_{LIO}	1.10E-04	2.43E-05	[6.75E-05 ; 1.63E-04]
ν_{IC}	1.46E+00	3.33E-01	[6.20E-01 ; 1.93E00]
ν_{LIO}	1.47E+00	2.75E-01	[1.03E00 ; 1.93E00]
Ref_{LIO}	42626.41	--	[32375.36 ; 59858.73]
$Ref_{IC LIO}$	22058.40	--	[6284.55 ; 97319.11]
$\beta_{0,IC LIO}$	1.68E+01	5.87E-01	[1.57E01 ; 1.80E01]
$\beta_{1,IC LIO}$	4.35E-03	1.09E-03	[2.17E-03 ; 6.52E-03]
$\alpha_{IC LIO}$	-2.21E+00	9.96E-01	[-4.14E00 ; -2.09E-01]
$\beta_{0,LIO}$	5.38E-01	6.96E-02	[4.06E-01 ; 6.76E-01]
$\beta_{1,LIO}$	7.18E-04	8.06E-05	[5.61E-04 ; 8.79E-04]
$\beta_{0,IC}$	1.565e+01	3.547e-01	[1.495e+01 ; 1.637e+01]
$\beta_{1,IC}$	2.789e-03	6.421e-04	[1.493e-03 ; 4.023e-03]

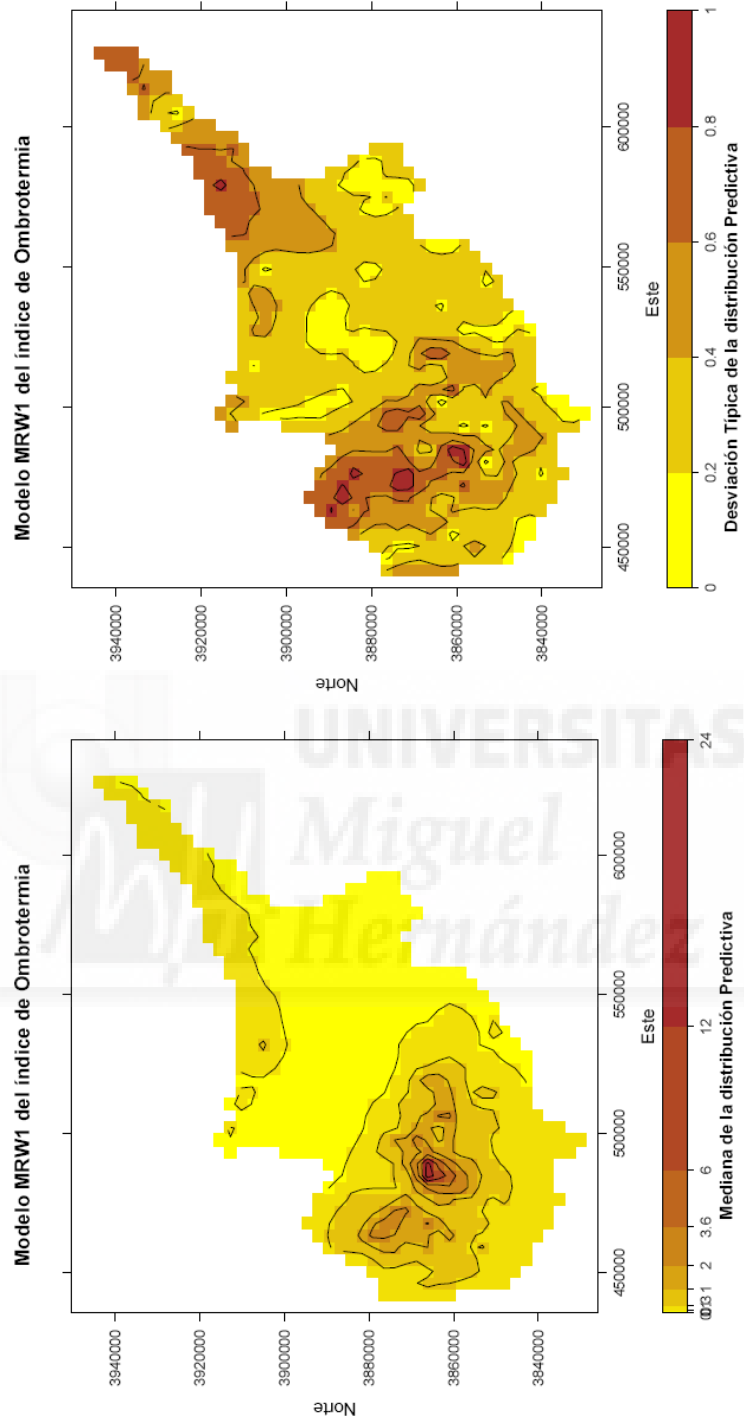


Figura 4.2. Ombrotermia: mapa predictivo para el modelo MRW1.

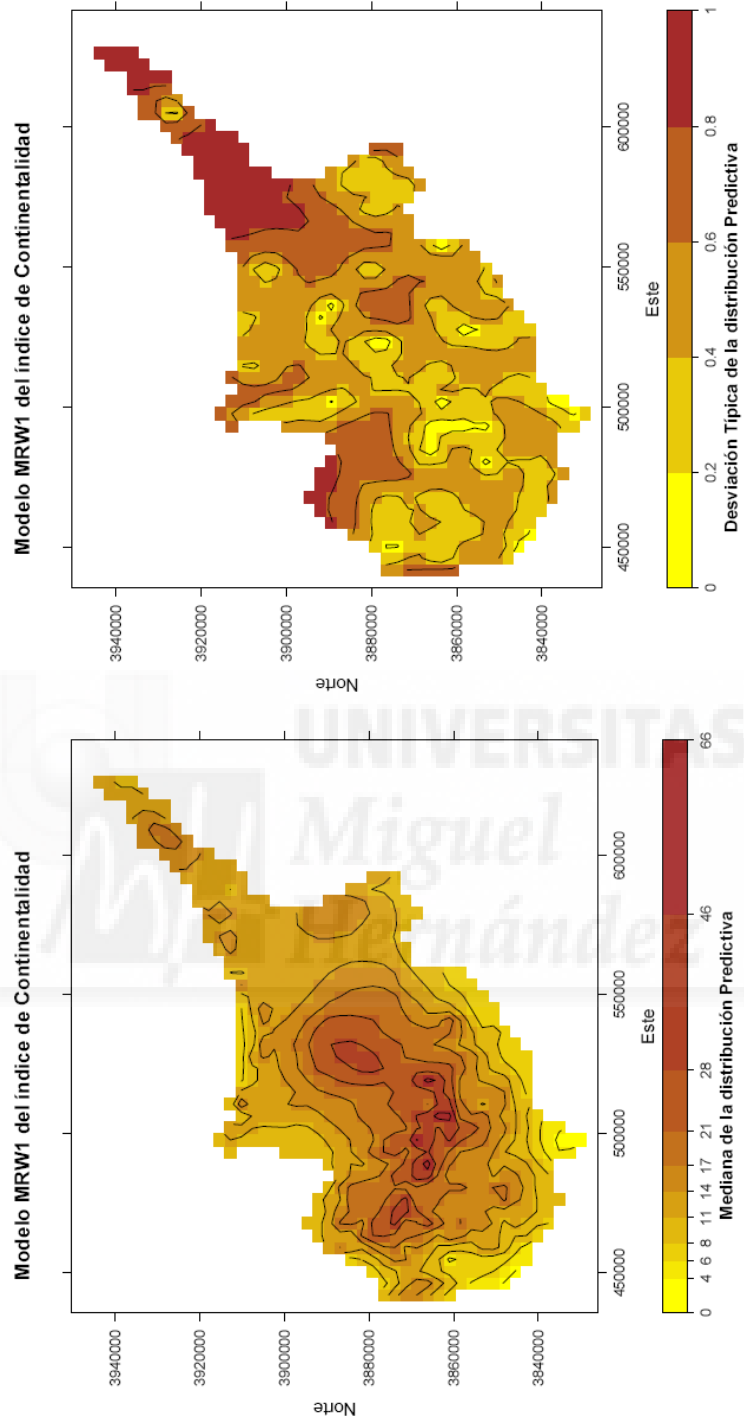


Figura 4.3. Continentalidad: mapa predictivo para el modelo MRW1

4.5.2. Distribución espacial de probabilidad

En la Figura 4.4 y la Figura 4.5 se muestran los mapas de probabilidad de pertenencia a cada subtipo de los índices de ombrotermia y continentalidad como ya se hizo en la sección 3.6.2.

Dada la mayor información disponible en el análisis multivariante, el modelo es capaz de aprender más y mejor, con lo que se han conseguido mapas de distribución de probabilidad más suavizados, con las fronteras de los subtipos más graduadas. Por tanto estas distribuciones se ajustan mejor al cambio paisajístico, demostrando que las fronteras bioclimáticas (clima-vegetación) no son tan estrictas como parecían sugerir los análisis univariantes.

Además, el análisis Bayesiano proporciona de esta forma fronteras graduadas en términos probabilísticos, lo que la convierte en una herramienta fundamental para la gestión y uso del suelo.

Respecto a los valores de estas DEP, para la ombrotermia (Figura 4.4) se observa como la mayoría de la isla se incluye en el subtipo Árido y la cordillera central en el Semiárido, existiendo algunas zonas de la planicie que pertenecen al Hiperárido. Sólo la cumbre más alta de la isla aparece como Seco (efecto Montaña-ladera-Valles de nuevo).

Para la continentalidad (Figura 4.5), se muestra claramente el interior y la costa de la isla como dos subtipos de continentalidad distintas, y además aparece un degradado muy suave de zonas que bien podrían estar clasificados dentro de un subtipo o en otro.

Desde un punto de vista de la gestión del suelo del experto, este enfoque multivariante es mucho más interesante, ya que como se ha dicho con anterioridad, la flora y fauna de una zona -que forma el ecosistema-, cohabitan con todos los factores climatológicos, precipitación, temperaturas cálidas y gélidas, montañas y mares. Es por ello que una interpretación conjunta, aporta una explicación más realista de los posibles cambios vegetacionales debido a los cambios climáticos.

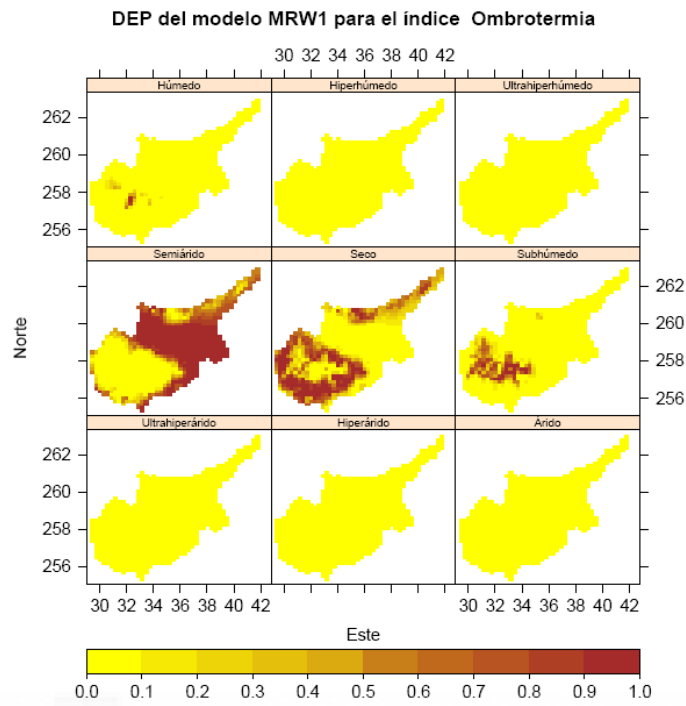


Figura 4.4. Ombrotermia: DEP del modelo MRW1

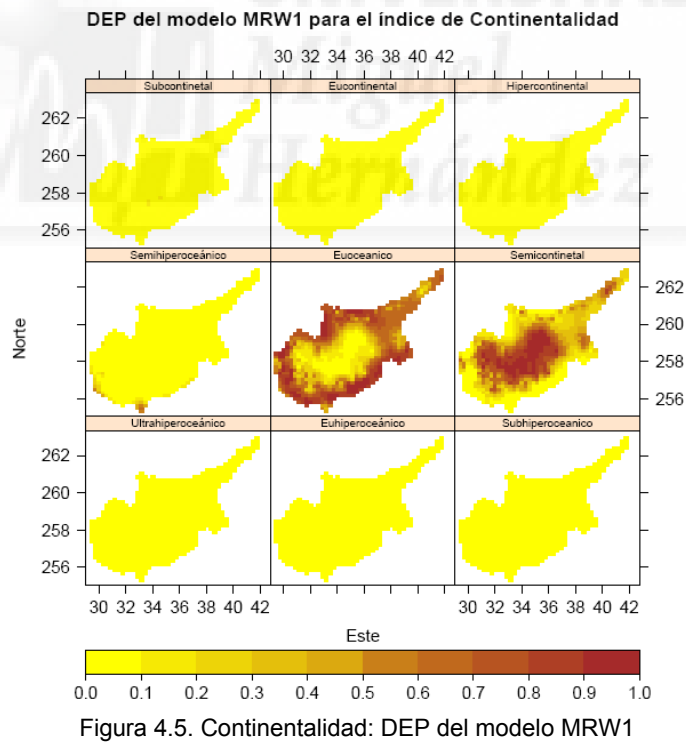


Figura 4.5. Continentalidad: DEP del modelo MRW1

4.5.3. Conclusiones

Se ha planteado un modelo jerárquico espacial multivariante para tratar de establecer una clasificación bioclimática basada en diferentes índices a través de un modelo lineal corregionalizado condicional, el cual permite estructurar la información y la posible relación entre los índices de forma sencilla. Este modelo simplifica, en gran medida, todo el cálculo inferencial y es la primera vez que se propone para el análisis de este tipo de datos. Dicho modelo ha permitido establecer que existe gran relación entre los índices utilizados, y que por tanto, el modelo multivariante mejora satisfactoriamente los resultados de los modelos univariantes del capítulo anterior.

El modelo planteado facilita además el uso de las previas poco informativas usadas en los modelos univariantes, ya que, la estructura jerárquica produce modelos univariantes en cada una de las jerarquías. Esto evita el uso de distribuciones previas multivariantes, que en muchos casos resultan difícilmente justificables.

Las mapas predictivos obtenidos muestran el comportamiento de los índices a lo largo de la zona o región a estudio teniendo en cuenta la posible interrelación existente entre índices, de forma que se obtienen mapas mucho más acorde con la situación real, aunque con un pequeño aumento del error de predicción debido a la estructura multivariante planteada. La principal ventaja de la modelización planteada desde el punto de vista predictivo es que no resulta necesario observar los índices en una gran cantidad de localizaciones lo que facilita el proceso de modelización y predicción.

Se ha planteado un nuevo algoritmo de predicción basado en el modelo propuesto a través de la computación en paralelo, lo que permite extraer mapas predictivos en un tiempo relativamente pequeño. Esto repercute directamente en la posibilidad de considerar muchos más puntos de predicción de los habituales, facilitando la obtención de mapas predictivos mucho más precisos.

Las distribuciones espaciales de probabilidad obtenidas para cada uno de los índices muestran una gradación de las fronteras de cambio mucho más realista que la mostrada en los modelos univariantes, lo que permite establecer mejores modelos biológicos de relación entre clasificación bioclimática y la cubierta vegetal de la zona bajo estudio.

En cualquier caso, los mapas predictivos, o las distribuciones de probabilidad obtenidas, muestran una gran concordancia con las condiciones de la región bajo estudio, lo que permite pensar que el modelo planteado es útil para el objetivo marcado, y además resulta fácilmente extrapolable a otras regiones sin mayores dificultades.



Capítulo 5. Conclusiones y líneas de trabajo futuro

5.1. Conclusiones

El principal objetivo de esta memoria era establecer un modelo jerárquico espacial Bayesiano que permitiera establecer la clasificación bioclimática de una zona o región mediante la utilización de los índices bioclimáticos de Rivas-Martínez (2004a), ya que estas clasificaciones se usan habitualmente para estudiar la interrelación entre ecosistemas terrestres y el bioclima.

Desde el punto de vista del análisis univariante, se ha establecido un modelo para cada uno de los índices haciendo uso de distribuciones previas poco informativas, en algunos casos, y estableciendo un nuevo procedimiento para establecer dichas distribuciones previas sobre las variabilidades espacial y no espacial del índice bajo estudio. Estas previas sobre las variabilidades se pueden obtener fácilmente y el proceso inferencial muestra poca sensibilidad respecto de ellas. Además dichas distribuciones se han podido usar en los modelos multivariantes aprovechando la estructura jerárquica planteada.

Los modelos reparametrizados planteados tanto en el caso univariante como multivariante muestran unos resultados muy aceptables, frente a los modelos habituales de la literatura. La principal virtud es que permiten modelizar las posibles variabilidades de forma conjunta, sin la necesidad de asumir independencia entre ellas, lo que resulta improbable en la mayoría de los casos.

Los modelos lineales corregionalizados condicionados, utilizando la reparametrización de la variabilidad, son una muy buena herramienta para

el estudio conjunto de los índices bioclimáticos, y por ende, para la realización de una clasificación bioclimática más cercana a la realidad que la obtenida de forma univariante, debido a la correlación existente entre algunos índices. Así pues, las distribuciones espaciales de probabilidad obtenidas mediante el modelo multivariante muestran unas fronteras para cada subtipo de cada índice que se acerca más a la realidad paisajística de una zona o región.

La utilización de la computación en paralelo para la obtención de la distribución predictiva posterior ha reducido el tiempo de cómputo en un 85%, de 6 horas a menos de 50 minutos. Por lo que la obtención de esta distribución predictiva puede actualizarse para nuevas localizaciones a predecir en la región o zona de estudio.

5.2. Líneas de trabajo futuro

5.2.1. Modelización espacio-temporal

En la bioclimatología los factores de cambio a medio plazo pueden detectarse mediante la partición de la geoserie en diversos bloques, por ejemplo de 25 en 25 años, con el fin de estudiar la interrelación clima-vegetación a lo largo del tiempo.

El principal problema para las clasificaciones bioclimáticas radica en que cuanto mayor sea la geoserie menos estacionalidad en los factores climáticos influyen en los resultados medios de los valores de los índices. Por ello, para abordar este problema se necesita tener información de muchos años y poder así crear pequeñas geoserias y estudiar el efecto del tiempo, o sea el famoso cambio climático, sobre las clasificaciones bioclimáticas.

Por tanto, será una línea de trabajo futuro el estudio de las previas y la estructura de la matriz de correlación espacio-temporal para el modelo reparametrizado utilizado en los capítulos anteriores.

5.2.2. Comparación de Modelos

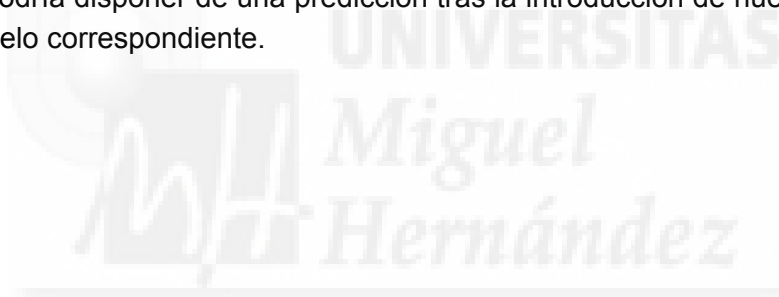
Incluir el estudio de criterios de selección de modelos para comparar los modelos presentados, con el fin de obtener una discriminación numérica entre modelos. El *Deviance Information Criterion* u otras técnicas deberán

ser estudiadas. Se considera que una implementación vía computación en paralelo del cálculo de estas medidas permitirá comparar diferentes modelos de forma rápida.

5.2.3. Inferencia de la distribución posterior vía computación en paralelo

Otra línea de trabajo será la optimización de la descomposición matricial de la predicción con el fin de intentar reducir el tiempo de computación. Evitar cálculos repetidos, y el estudio de la simetría de algunos cálculos puede reducir aún más el tiempo de computación (la inversión y multiplicación de las matrices Σ_{oo} , Σ_{pp} , Σ_{op} para las n simulaciones de la distribución posterior).

Tras la optimización del tiempo de cómputo de la predicción sería el momento de abordar el problema de la inferencia MCMC vía paralelo, lo cual llevaría una reducción del coste de cómputo que haría que estos modelos fuesen más fácilmente implementables pues en muy poco tiempo se podría disponer de una predicción tras la introducción de nuevos datos al modelo correspondiente.

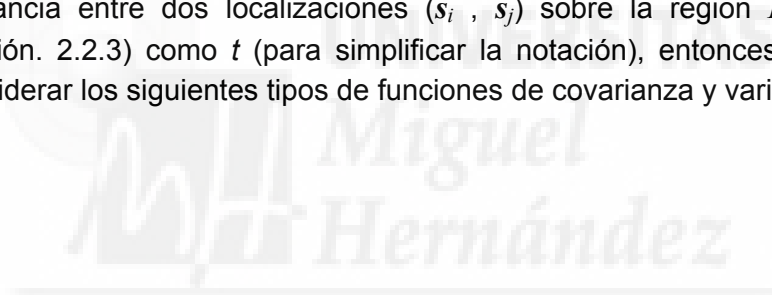


ANEXOS



Anexo I. Modelos de Variograma

Los procesos isotrópicos son muy utilizados debido a su simplicidad, interpretabilidad y sobre todo por su sencilla forma paramétrica, lo cual los convierte en buenos candidatos para el semivariograma. Si se denota a $||\mathbf{h}||$ (distancia entre dos localizaciones (s_i, s_j) sobre la región D , véase la sección. 2.2.3) como t (para simplificar la notación), entonces se pueden considerar los siguientes tipos de funciones de covarianza y variogramas:



Modelo	Función de Covarianza, $C(t)$
Lineal	$C(t)$ no existe
Esférica	$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 1/\phi \\ \sigma^2 \left[1 - \frac{3}{2}\phi t + \frac{1}{2}(\phi t)^3 \right] & \text{si } 0 < t \leq 1/\phi \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Exponencial	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 \exp(-\phi t) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
Potencial	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 \exp(- \phi t ^p) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Gaussiano	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 \exp(-\phi^2 t^2) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Cuadrático racional	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{t^2}{\phi + t^2} \right) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Ondulado	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 \left(\frac{\sin(\phi t)}{\phi t} \right) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Matérn	$C(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (t\phi)^\nu K_\nu(t\phi) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Matérn $\nu=3/2$	$C(t) = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \phi t) \exp(-\phi t) & \text{si } t > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Modelo	Variograma $\gamma(t)$
Lineal	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Esférica	$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma^2 + \tau^2 & \text{si } t \geq 1/\phi \\ \tau^2 + \sigma^2 \left[\frac{3}{2}\phi t - \frac{1}{2}(\phi t)^3 \right] & \text{si } 0 < t < 1/\phi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Exponencial	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-\phi t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
Potencial	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(- \phi t ^p)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Gaussiano	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-\phi^2 t^2)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Cuadrático racional	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left(\frac{t^2}{\phi + t^2} \right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Ondulado	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left(1 - \frac{\sin(\phi t)}{\phi t} \right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Matérn	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left[1 - \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} (t\phi)^\nu K_\nu(t\phi) \right] & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Matérn $\nu=3/2$	$\gamma(t) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - (1 + \phi t)\exp(-\phi t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Anexo II. Código de los modelos habituales: spBayes

A continuación se expone parte del código el código utilizado para la inferencia en los modelos habituales mediante la librería de R spBayes.

El caso que se expone es el de un índice genérico con distribuciones uniformes para las dos variabilidades (modelo SP1).

$$\begin{aligned} (I) \quad & \mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}, \tau^2 \mathbf{I}) \\ (II) \quad & \mathbf{W} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})); \quad \boldsymbol{\theta} = (\phi, \nu) \\ (III) \quad & \pi(\boldsymbol{\beta}) \propto 1; \\ & \pi(\phi) \propto Unif(1.0E-05, 5.5E-04) \\ & \pi(\nu) \propto Unif(0.05, 1.95) \\ & \pi(\sigma^2) \sim Unif(0.001, b) \\ & \pi(\tau^2) \sim Unif(0.001, b) \end{aligned}$$

Código implementado en R.

```
Library(spBayes)
## DISTRIBUCIONES PREVIAS UNIFORMES#
b.Indice.uni<-(vmax.lio-0.05*0.0001)/0.95

## Parte no espacial
y<-Indice
alt<-ALT
coordenadas<-cbind(X,Y)

beta.control<-list(update="GIBBS",prior=prior(dist="FLAT"))
```

```

## Parte espacial
### Previas para todos los parámetros

sigma2.prior.oi<-prior(dist="UNIF",a=0.0001,b=b.Indice.uni)
tau2.prior.oi<-prior(dist="UNIF",a=0.0001,b=b.Indice.uni)
phi.prior.oi<-prior(dist="UNIF",a=0.00001,b=0.00055)
nu.prior.oi<-prior(dist="UNIF",a=0.05,b=1.95)
#### 1 cadena
set.seed(123456)
### Control del proceso
var.update.control<-
  list("K"=list(sample.order=0,
                starting=0.05,tuning=0.005,
                prior=sigma2.prior.oi),
       "Psi"=list(sample.order=1,
                  starting=0.005,tuning=0.001,
                  prior=tau2.prior.oi),
       "phi"=list(sample.order=2,
                  starting=0.0001,tuning=0.000005,
                  prior=phi.prior.oi),
       "nu"=list(sample.order=2,
                  starting=1,tuning=0.01,
                  prior=nu.prior.oi)
  )
### Ajuste modelos univariantes independientes
## Control de simulación
nsim<-15000
run.control<-list("n.samples"=nsim,"sp.effects"=TRUE)
fit.uni.Indice1<-
  ggt.sp(formula=y~alt,run.control=run.control,
         coords=coordenadas,
         var.update.control=var.update.control,
         beta.update.control=beta.control,
         cov.model="matern")

# graficar las posteriris#
plot(fit.uni.Indice1$p.samples)

```

Anexo III. Código de los modelos reparametrizados

A continuación se expone parte del código utilizado para la inferencia en los modelos reparametrizado mediante WinBUGS[®].

El caso que se expone es el de un índice genérico con distribución uniforme para las dos variabilidades (modelo W1).

$$(I) \quad \mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \xi^2 [(1-\kappa)\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) + \kappa\mathbf{I}]); \quad \boldsymbol{\theta} = (\phi, \nu)$$
$$(II) \quad \pi(\boldsymbol{\beta}) \propto 1$$
$$\pi(\phi) \propto Unif(1.0E-05, 5.5E-04)$$
$$\pi(\nu) \propto Unif(0.05, 1.95)$$
$$\pi(\kappa) \propto Unif(0, 1)$$
$$\pi(\xi^2) \sim Unif(0.001, b)$$

Modelo implementado en WinBUGS[®]:

```
model {
for (i in 1:N){
    LIO[i] ~ dnorm(S[i], tau.nesp)
    S[i] <- beta[1]+beta[2]*alt[i] + W[i]
    mu[i]<-0
}
## Distribución espacial
W[1:N]~spatial.matern(mu[], x[], y[], tau.esp, phi, nu)
## Transformaciones
# precisiones
tau.esp<-1/sigma2.esp
tau.nesp<-1/sigma2.nesp
sigma2.esp<-sigma2*(1-kappa)
```

```
sigma2.nesp<-sigma2*kappa

## Hyperprevias condicionales
for( i in 1:2)
{
    beta[i]~dnorm(0.0, 1.0E-5)
}
phi~dunif(0.00001,0.00055)
nu~dunif(0.05,1.95)
# varianzas
sigma2~dunif(0.0001,bmax)
kappa~dunif(0,1)
}
```



Anexo IV. Cálculo matricial en la obtención de la distribución predictiva

Este abordaje del problema de la predicción, hace que sea más factible el hecho de trabajar con un número alto de localizaciones a predecir, pues cabe recordar que las submatrices de la matriz de varianzas-covarianzas tienen dimensiones: $p \times p$, $o \times o$, $p \times o$, y $o \times p$ (en este caso $p=775$ y $o=59$); por lo que el cálculo de la inversa de una matriz 59×59 y las multiplicaciones de matrices $(775 \times 59) \times (59 \times 59) \times (59 \times 775)$ es tremendamente tedioso para un sistema secuencial, pudiendo llegar a agotar la memoria física del ordenador.

Submatrices de la matriz de varianzas-covarianzas

Se define la matriz de varianzas-covarianzas como

$$\Sigma_{(p+o) \times (p+o)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{pp} & \Sigma_{po} \\ \Sigma_{op} & \Sigma_{oo} \end{pmatrix}$$

donde p es el número de nuevas localizaciones y o es el de observadas. Suponiendo la simetría de la matriz de varianzas-covarianzas, las submatrices $\Sigma_{p \times o}$ y $\Sigma_{o \times p}$ deben ser la misma. Con esta suposición ya se ha ahorrado una parte del cálculo.

El cálculo de la submatriz de las nuevas localizaciones a predecir se realiza de la siguiente forma

$$\{\Sigma_{pp}\}_{ij} = \begin{cases} \frac{(\phi d_{ij})^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} K_\nu(\phi d_{ij}) & d_{ij} > 0 \text{ y } i < j \\ \sigma^2 & i = j \end{cases}$$

donde $\Gamma(\nu)$ representa la función gamma (Abramowitz, 1972) y $K_\nu(\alpha)$ representa la función Bessel modificada de orden k (Korenev, 2002), y la parte superior de la matriz será

$$(\Sigma_{pp})_{ij} = (\Sigma_{pp})_{ji}.$$

De igual forma ocurre con la submatriz de las localizaciones ya observadas:

$$\{\Sigma_{oo}\}_{ij} = \begin{cases} \frac{(\phi d_{ij})^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} K_\nu(\phi d_{ij}) & d_{ij} > 0 \text{ y } i < j \\ \sigma^2 + \tau^2 & i = j \end{cases}$$

y la parte superior de la submatriz se calculara de nuevo como

$$(\Sigma_{oo})_{ij} = (\Sigma_{oo})_{ji}.$$

Quedaría por calcular la submatriz Σ_{po} , que se analiza de la siguiente forma

$$\{\Sigma_{po}\}_{ij} = \frac{(\phi d_{ij})^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} K_\nu(\phi d_{ij}) \quad \forall 1 < i < p, p+1 < j < o.$$

Lógicamente si se trata de una matriz de covarianzas de dimensión muy reducida el coste de paralelizar es superior que la obtención de estas matrices con cualquier programa de cálculo (Matlab[®], Mathematica(2005)[®], etc.)

Esperanza y Varianza condicionada

Tras la obtención de la matriz de varianzas-covarianzas, y según las ecuaciones (2.26), para el cálculo de la esperanza y varianza condicionada se necesita de la inversión y multiplicación de las submatrices que forma la matriz de varianzas-covarianzas.

Para el cálculo de la inversa de la matriz Σ_{oo} se hace una llamada al módulo de resolución de ecuaciones $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ (Solve_LSE: *Solve Linear System Equation*), que utiliza una llamada a *Lapack* y retorna \mathbf{X} que viene

dada por $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})'$, por lo que se ahorra tiempo, calculando no sólo la inversa de la matriz, si no el producto $\Sigma_{po}\Sigma_{oo}^{-1}$.

Para la esperanza condicionada, se calcula por un lado $\boldsymbol{\mu}_p = \mathbf{X}_p\hat{\boldsymbol{\beta}}$, y por otro lado $Y_o - \boldsymbol{\mu}_o = Y_o - \mathbf{X}_o\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Una vez calculadas estas dos matrices ya se tienen todos los elementos necesarios para la generación de la esperanza:

$$E[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] = \mathbf{X}_p\hat{\boldsymbol{\beta}} + \Sigma_{po}\Sigma_{oo}^{-1}(Y_o - \mathbf{X}_o\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

paralelizando el cálculo con el fin de reducir tiempos de computación.

Respecto a la varianza, una vez obtenida la matriz $\Sigma_{po}\Sigma_{oo}^{-1}$, queda por multiplicar a ésta la matriz $\Sigma_{op} = (\Sigma_{op})^T$, y cuya matriz resultante se le restará a la matriz Σ_{pp} , quedando pues la varianza como:

$$V[\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_o] = \Sigma_{pp} - \Sigma_{po}\Sigma_{oo}^{-1}(\Sigma_{op})^T.$$

Una vez más tanto esta multiplicación como la resta serán paralelizadas para reducir tiempos de cómputo.

Una vez calculadas la esperanza y la varianza, el siguiente paso es el cálculo de la distribución Normal Multivariante 1 x 775 desde cada una de las simulaciones de la distribución posterior (15000 simulaciones).

Anexo V. Código C para la predicción en paralelo

En este Anexo se muestra el código utilizado para paralelizar la computación de la distribución predictiva posterior de cada uno de los 16 modelos. En negrita se han remarcado las instrucciones que hacen llamadas a las librerías propias de cálculo en paralelo (Blackford et al., 1997a).

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/time.h>
#include <sys/resource.h>
#include <sys/types.h>
#include <sys/stat.h>
#include <fcntl.h>
#include <string.h>
#include <omp.h>
```

```
#include "matrix.c"
#include "inv_matrix.c"
#include "bessel.c"
```

```
#include "normalesXavi.h"
#include "normalesXavi.c"
```

```
/*Constantes*/
```

```
#define FALSE 0
```

```

#define TRUE 1
#define TOTALDATA 100 //1025
#define MUESTRA 1256 //1063

////////////////////////////////////
//espera hasta que se pulse una tecla
void wait(void){
    char l;
    while(read(0,&l,1)!=1);
}
////////////////////////////////////
Ptr_Matrix Load_Matrix (char * nombre, int rows, int cols){
    int j;
    FILE * fichero;
    Ptr_Matrix aux;
    double dat;
    aux=NewMatrix(rows,cols);
    fichero=fopen(nombre,"r");    //abrimos para leer
    for(j=0;j<rows*cols;j++){
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);
        *((aux->Ptr_first)+j) =dat;
    };
    fclose(fichero);
    return(aux);
}
////////////////////////////////////
//la matriz Post tiene Nsim x 6 y hay que cambiar el orden de
// lectura de los dos ultimos (los betas) a los primeros
//además hay que saltar el numero de simulacion
Ptr_Matrix Load_Matrix_Post (char * nombre, int Nsim){
    int j;
    FILE * fichero;
    Ptr_Matrix aux;
    double dat;
    aux=NewMatrix(Nsim,6);
    fichero=fopen(nombre,"r");    //abrimos para leer
    for(j=1;j<=Nsim;j++){
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//el orden que se salta
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//la K que es sigma va 3o
        GetElement(aux,j,3) =dat;
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//la Psi que es tau 4a
    }
}

```

```

        GetElement(aux,j,4) =dat;
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//la phi va al 5o
        GetElement(aux,j,5) =dat;
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//la nu va al 6o
        GetElement(aux,j,6) =dat;
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//Intercept 1o
        GetElement(aux,j,1) =dat;
        fscanf(fichero,"%lf",&dat);//alt que es beta1 2o
        GetElement(aux,j,2) =dat;
    };
    fclose(fichero);
    return(aux);
}
////////////////////////////////////////////////////////////////
void Print_Matrix (char * nombre, Ptr_Matrix a){
    int j,i;
    double *dat;
    FILE * fichero;

    fichero=fopen(nombre,"w");    //abrimos para escribir
    for(i=1;i<=a->rows;i++){
        for(j=1;j<=a->cols;j++){
            fprintf(fichero,"%lf ",GetElement(a,i,j));
            fprintf(fichero,"\n");
        };
        fclose(fichero);
    }
    //////////////////////////////////////////////////////////////////Genera una matriz aleatoria
    Ptr_Matrix GenerateMatrix(int row,int col){
        Ptr_Matrix m;
        int i;
        m=NewMatrix(row,col);
        for(i=0;i<row*col;i++){
            *((m->Ptr_first)+i)=(double)(1.0*random())/(RAND_MAX+1.0);
            //genera un numero aleatorio entre 0 y 1
        }
        return m;
    }
    //////////////////////////////////////////////////////////////////
    int main(int argc, char *argv[]){

```

```

    Ptr_Matrix
D,Xo,Xp,Post,Sigmaoo,Sigmapp,Sigmaop,Yp,Yo,Pi,Aux,Var,AuxYo,Ynorm,Ygen,S,
Generadas;
    int i,j,k,No,Nsim,Np,n,nt,iam,kk;
    double x,gamma;
    // para las normales univariantes
    double U1, U2, V1, V2, Xnorm;
    double Snorm=2;
struct timeval *tv=(struct timeval *)malloc(sizeof(struct timeval));
struct timezone *tz=NULL;
double TNormal;
long ti,si,tf,sf;
    gettimeofday(tv,tz);
    si=(tv->tv_sec);
    ti=(tv->tv_usec);
    ti=si*1000000+ti;
    //numero de puntos originales
        Nsim=atoi(argv[2]);
    //numero de simulaciones
    Np=atoi(argv[1]);
    //numero de puntos generados
    nt=atoi(argv[4]);//numero de threads
    Np=atoi(argv[3]);
    omp_set_num_threads(nt);
    #pragma omp parallel private (iam,nt)
    {
        iam=omp_get_thread_num();
        printf("\n Hola mundo del hilo %i",iam);
    }
////////////////////////////////////
    //cargamos las matrices de los archivos
    D=Load_Matrix("Dij.txt",Np+No,Np+No);
    Xo=Load_Matrix("Xo.txt",No , 1);
    Xp=Load_Matrix("Xp.txt",Np , 1);
    Yo=Load_Matrix("Yo.txt",No , 1);
    Post=Load_Matrix_Post("Post.txt",Nsim);// (beta0,beta1,sigma2,tau2,phi,nu)
    Sigmaoo=NewMatrix(No,No);
    Sigmaop=NewMatrix(No,Np);
    Sigmapp=NewMatrix(Np,Np);
    Yp=NewMatrix(Np,1);
    Var=NewMatrix(Np,Np);
    Ynorm=NewMatrix(Np,1);

```

```

Generadas=NewMatrix(Nsim,Np);
//contendra todas las Yp generadas para meterlas luego en el fichero
////////////////////////////////////
kk=0;
for(i=1;i<=Nsim;i++){
    gamma=tgamma(GetElement(Post,i,6));
    //printf("== i= %i --",i);
    //calculamos Sigmapp
    //primero la diagonal
    x=GetElement(Post,i,3);
    //fin modificacion xavi
#pragma omp parallel for private(j)
    for(j=1;j<=Np;j++){
        GetElement(Sigmapp,j,j)=x;
    //ahora el resto de la matriz
    #pragma omp parallel for private(j,k,x)
    for(j=1;j<=Np;j++){
        for(k=1;k<j;k++){
            //modificado por xavi 13-07-2008
            //x=sqrt(GetElement(Post,i,6))*
            //GetElement(Post,i,5)*GetElement(D,j,k);
            x=GetElement(Post,i,5)*GetElement(D,j,k);
//printf("\n      multiplico      %f      %f,      %f,      %f      en      (%i
//%i",GetElement(Post,i,6),sqrt(GetElement(Post,i,6)),GetElement(Post,i,5),GetElement(D,j,k),j,k);
            //GetElement(Sigmapp,j,k)=GetElement(Post,i,3)*2*
//pow(x,GetElement(Post,i,6))*
//K(GetElement(Post,i,6),2*x)/gamma;
            GetElement(Sigmapp,j,k)=GetElement(Post,i,3)*
            pow(x,GetElement(Post,i,6))*K(GetElement(Post,i,6),x)/
            (gamma*pow(2,GetElement(Post,i,6)-1));
        // fin modificado xavi
            GetElement(Sigmapp,k,j)=GetElement(Sigmapp,j,k);
        };
    };
}
/*
gettimeofday(tv,tz);
sf=(tv->tv_sec);
tf=(tv->tv_usec);
tf=sf*1000000+tf;
TNormal=(1.0*tf-1.0*ti)/1000000.0;
printf("\n tiempo Sigmapp %f seg",TNormal);
fflush(stdout);
gettimeofday(tv,tz);

```

```

si=(tv->tv_sec);
ti=(tv->tv_usec);
ti=si*1000000+ti;
*/

////////calculamos Sigmaoo
//primero la diagonal
x=GetElement(Post,i,3)+GetElement(Post,i,4);
#pragma omp parallel for private(j)
for(j=1;j<=No;j++){
    GetElement(Sigmaoo,j,j)=x;
//ahora el resto de la matriz
#pragma omp parallel for private(j,k,x)
for(j=1;j<=No;j++){
    for(k=1;k<j;k++){
        x=GetElement(Post,i,5)*
            GetElement(D,j+Np,k+Np);
        GetElement(Sigmaoo,j,k)=
            GetElement(Post,i,3)*
            pow(x,GetElement(Post,i,6))*
            K(GetElement(Post,i,6),x)/
            (gamma*pow(2,GetElement(Post,i,6)-1));
        GetElement(Sigmaoo,k,j)=GetElement(Sigmaoo,j,k);
    };
};
//calculamos Sigmaop
#pragma omp parallel for private(j,k,x)
for(j=1;j<=No;j++){
    for(k=1;k<=Np;k++){
        x=GetElement(Post,i,5)*GetElement(D,j+Np,k);
        GetElement(Sigmaop,j,k)=GetElement(Post,i,3)*
            pow(x,GetElement(Post,i,6))*
            K(GetElement(Post,i,6),x)/
            (gamma*pow(2,etElement(Post,i,6)-1));
    };
};
//Calculamos la esperanza de Yp
//como Np es mayor o igual que No, guardamos los datos en Yp y
sobra array

//E(Yp|Yo)=mup+SigmaopSigmaoo^-1*(Yo-muo)
//(XoB-Yo)

```

```

AuxYo=NewMatrix(No,1);
#pragma omp parallel for private(j)
for(j=1;j<=No;j++){
  GetElement(AuxYo,j,1)=
    GetElement(Yo,j,1)-
    (GetElement(Xo,j,1)*
    GetElement(Post,i,2)+
    GetElement(Post,i,1));
};
//(SigpoSigoo-1) y la llamo Pi
Pi=Solve_LSE(Sigmaoo,Sigmaop,&n);
//(XpB-PiYp) Yp tiene la matriz de antes
Aux=MultLapack(Pi,AuxYo,0);
freeMatrix(&AuxYo);
#pragma omp parallel for private(j)
for(j=1;j<=Np;j++){
  GetElement(Yp,j,1)=
    (GetElement(Xp,j,1)*
    GetElement(Post,i,2)+
    GetElement(Post,i,1))+
    GetElement(Aux,j,1);
    //printf("Yp= %f",GetElement(Yp,j,1));
    //if ((GetElement(Yp,j,1))>5){
};
freeMatrix(&Aux);
//Calculamos la varianza de Yp
Aux=MultLapack(Pi,Sigmaop,0);
//ahora en Aux esta la transpuesta de
//la parte derecha de la expresion Var
// pero como es simetrica no cambia
freeMatrix(&Pi);
#pragma omp parallel for private(j,k)
for(j=1;j<=Np;j++){
  for(k=1;k<=Np;k++)
    GetElement(Var,j,k)=
      GetElement(Sigmapp,j,k)-
      GetElement(Aux,j,k);
freeMatrix(&Aux);
//ahora generamos un dato aleatorio en una Normal
//de media Yp y matriz de covarianzas Var
#pragma omp parallel for private(j)

```

```

for(j=1;j<=Np;j++){
    //modificado por xavi 14-07-08
    while (Snorm>1.0){
        U1=rand()/9999999999.0;
        U2=(rand()/9999999999.0);
        V1=2.0*U1-1.0;
        V2=2.0*U2-1.0;
        Snorm=pow(V1,2)+pow(V2,2);
    };
    Xnorm=V1*sqrt((-2.0*log(Snorm))/Snorm);
    GetElement(Ynorm,j,1)= Xnorm;
    Snorm=2.0;
};
S=Cholesky(Var);
Ygen=MultLapack(S,Ynorm,0);
freeMatrix(&S);
for(j=1;j<=Np;j++){
    GetElement(Ygen,j,1)=
GetElement(Ygen,j,1)+
GetElement(Yp,j,1);
//mvnorm=Yp+A*Ynorm
};
for(j=1;j<=Np;j++){
    GetElement(Generadas,i,j)=GetElement(Ygen,j,1);
//copiamos el resultado en Generadas
if(i%2000==0)
    printf("\n Iteración: %i de %i \n",i,Nsim);
};//bucle de cada simulacion
printf("\n Anomalos: %i de %i \n",kk, Nsim*Np);
/*
double med;
printf("\n La media: \n");
for(j=1;j<=Np;j++){
    med=0;
    for(i=1;i<=Nsim;i++)
        med=med+GetElement(Generadas,i,j);
    printf(" %lf",med/Nsim);
};
*/
Print_Matrix ("Generadas", Generadas);
gettimeofday(tv,tz);
sf=(tv->tv_sec);

```



```
tf=(tv->tv_usec);  
tf=sf*1000000+tf;  
TNormal=(1.0*tf-1.0*ti)/1000000.0;  
printf("tiempo %f minutos",TNormal/60);  
fflush(stdout);  
return 1;
```



Anexo VI. Modelos estimados

SP1:	Habitual con previas <i>Uniformes</i> sobre las varianzas (σ^2 y τ^2).
SP2:	Habitual sólo espacial con <i>Uniforme</i> sobre la varianza espacial (σ^2).
W1:	Reparametrizado con previa <i>Uniforme</i> sobre la varianza (ξ^2).
W2:	Reparametrizado sólo espacial con previa <i>Uniforme</i> sobre la varianza espacial (ξ^2).
RW1:	Reparametrizado con previa <i>Uniforme</i> sobre la desviación (ξ).
RW2:	Reparametrizado sólo espacial con <i>Uniforme</i> sobre desviación (ξ).
SP3:	Habitual con previas <i>Gal</i> sobre las varianzas (σ^2 y τ^2).
SP4:	Habitual con previas <i>Gal</i> sobre las varianzas espacial (σ^2) y <i>Uniforme</i> sobre varianza no espacial (τ^2).
SP5:	Habitual sólo espacial con <i>Gal</i> sobre la varianza espacial (σ^2).
W3:	Reparametrizado con previa <i>Gal</i> sobre la varianza (ξ^2).
W4:	Reparametrizado sólo espacial con previa <i>Gal</i> sobre la varianza espacial (ξ^2).
SP6:	Habitual con previas <i>HC</i> sobre las varianzas (σ^2 y τ^2).
SP7:	Habitual con previas <i>HC</i> sobre las varianzas espacial (σ^2) y <i>Uniforme</i> sobre varianza no espacial (τ^2).
SP8:	Habitual sólo espacial con <i>HC</i> sobre la varianza espacial (σ^2).
W5:	Reparametrizado con previa <i>HC</i> sobre la varianza (ξ^2).
W6:	Reparametrizado sólo espacial con previa <i>HC</i> sobre la varianza espacial. (ξ^2).

Anexo VII. Mapas Predictivos (Modelización Univariante)



En la columna de la derecha aparecere la mediana de la distribución predictiva posterior, y en la columna de la derecha aparece la desviación típica de la distribución predictiva posterior.

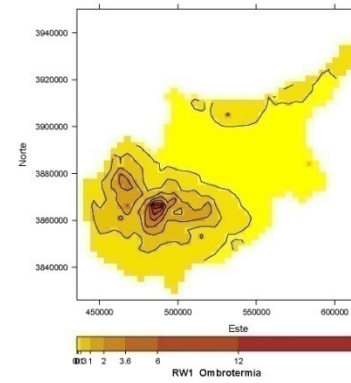
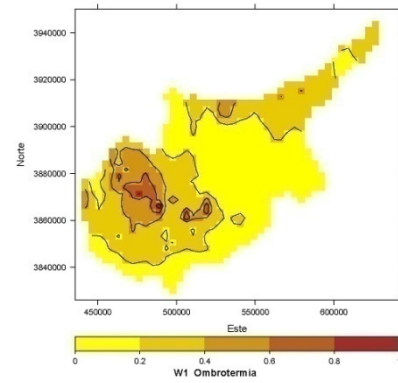
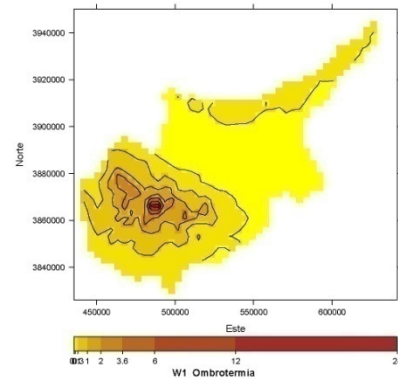
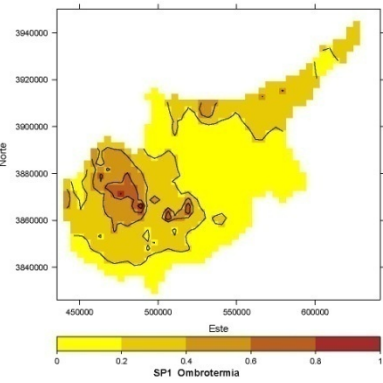
Ombrotermia

A.2

B.1

B.2

C.1

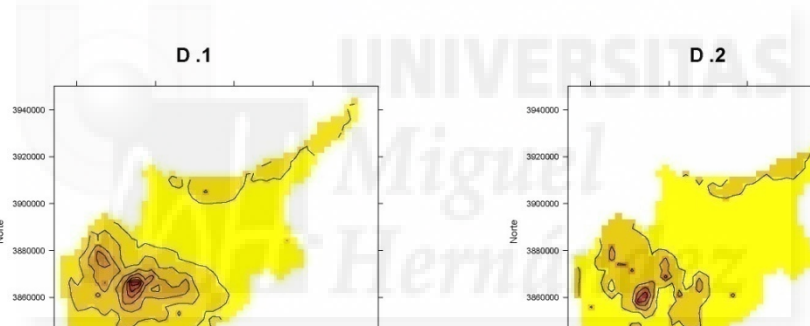
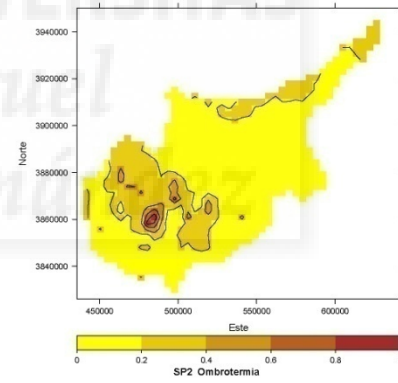
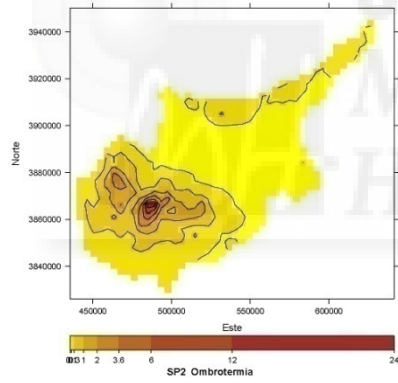


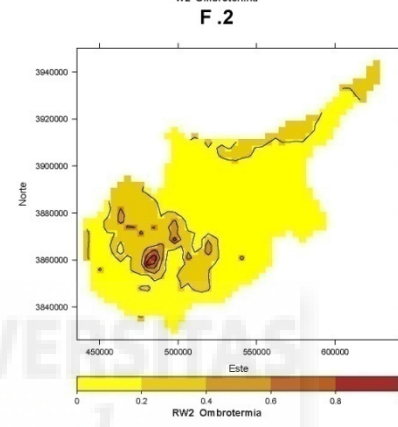
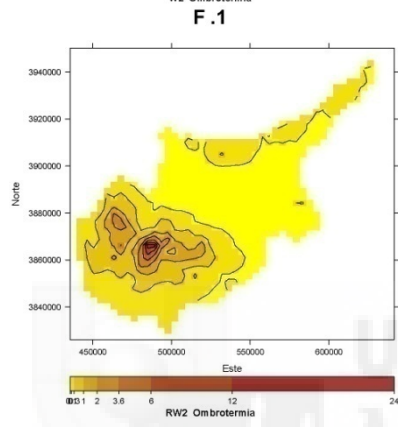
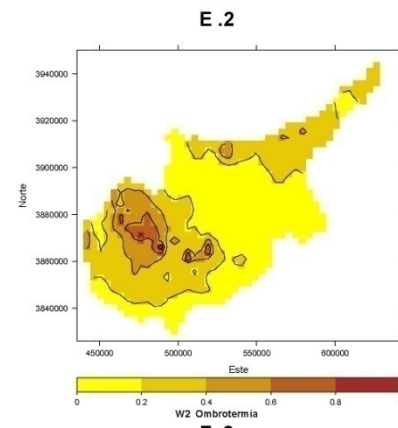
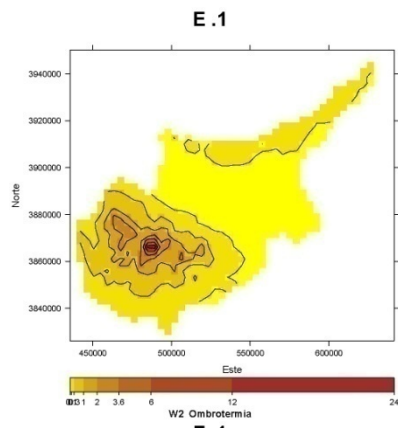
SP1
W1
RW1

A.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP1
B.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W1
C.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW1

D.1

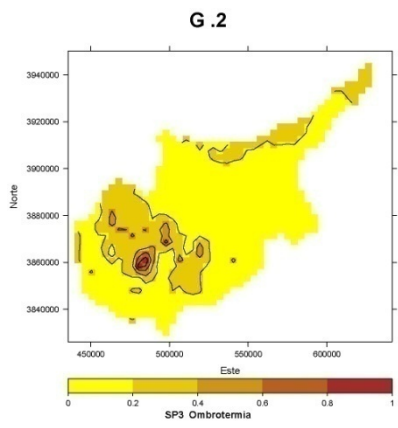
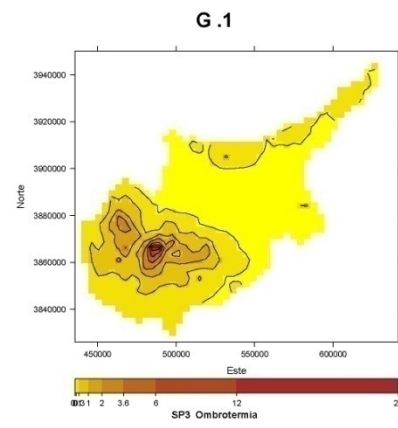
D.2

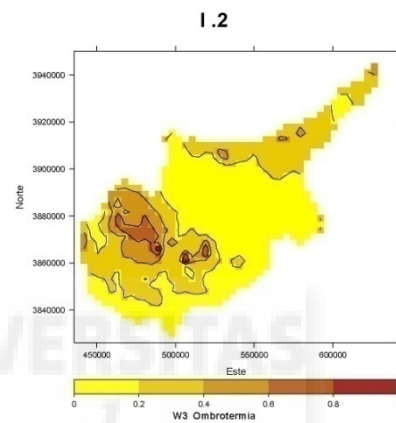
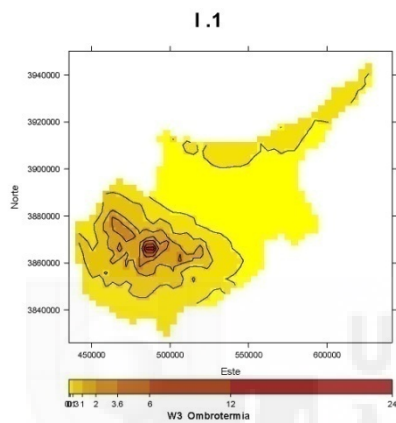
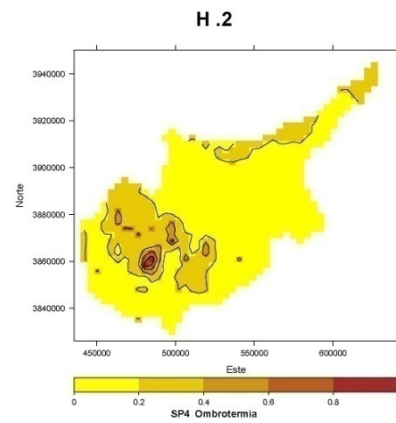
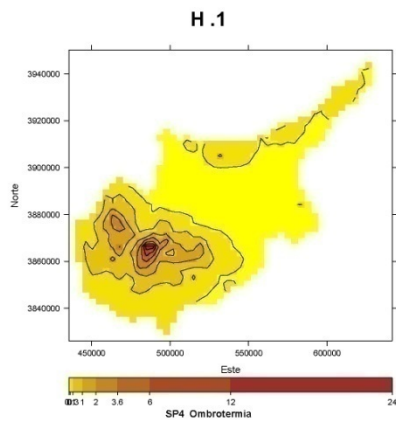




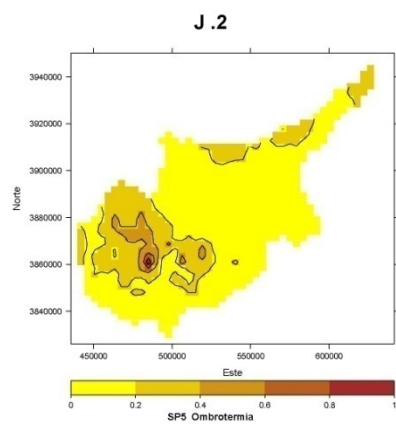
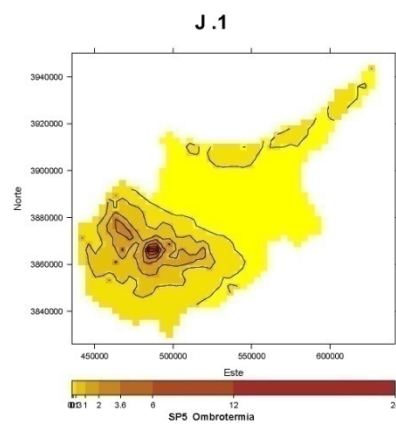
D.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.1= Med. de la distr. pred. del modelo W2
 F.1= Med. de la distr. pred. del modelo RW2

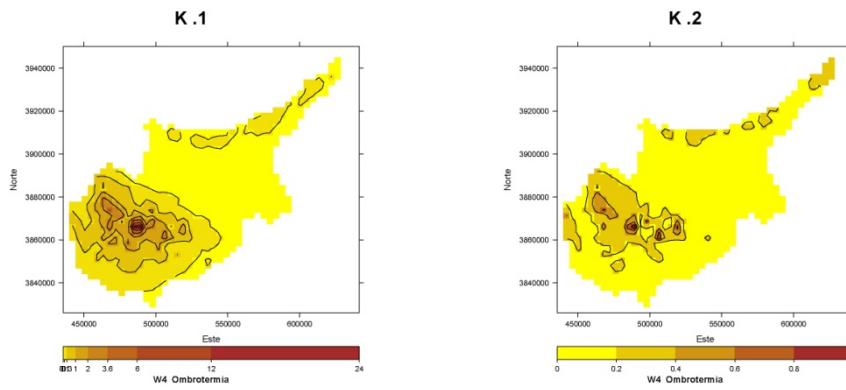
D.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W2
 F.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW2





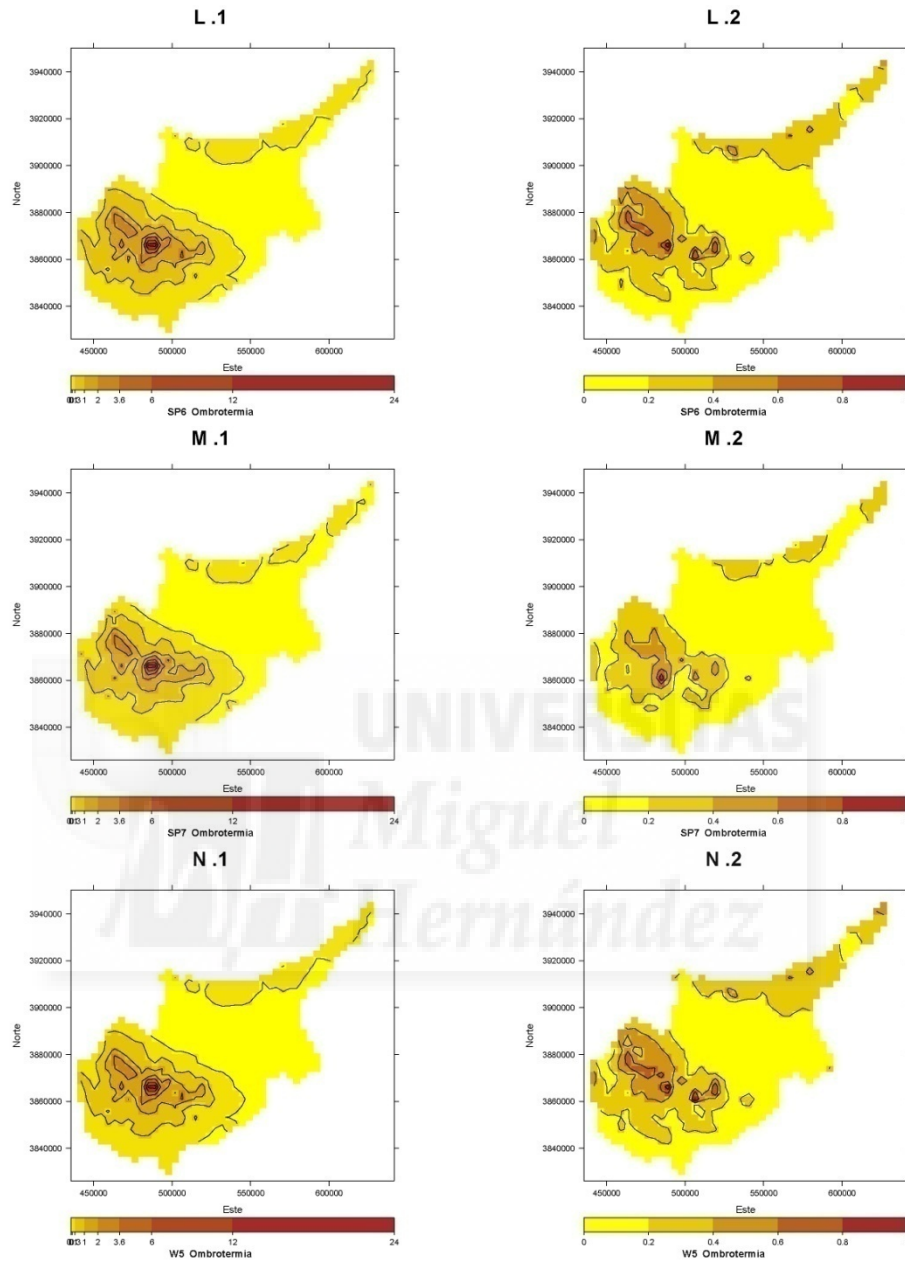
G.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP3 G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP3
 H.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP4 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP4
 I.1= Med. de la distr. pred. del modelo W3 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W2





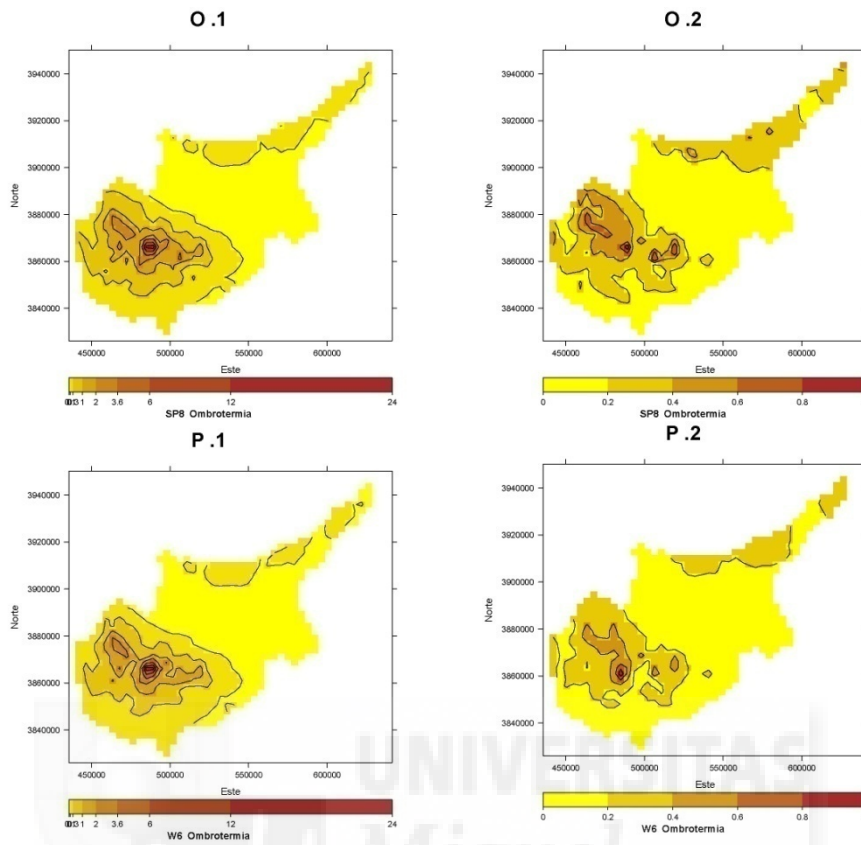
J.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP5 J.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP5
 K.1= Med. de la distr. pred. del modelo W4 K.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W4





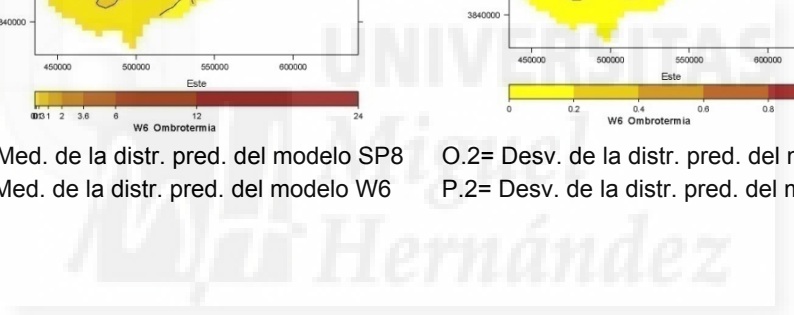
L.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP6
 M.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP7
 N.1= Med. de la distr. pred. del modelo W5

G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP6
 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP7
 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W5

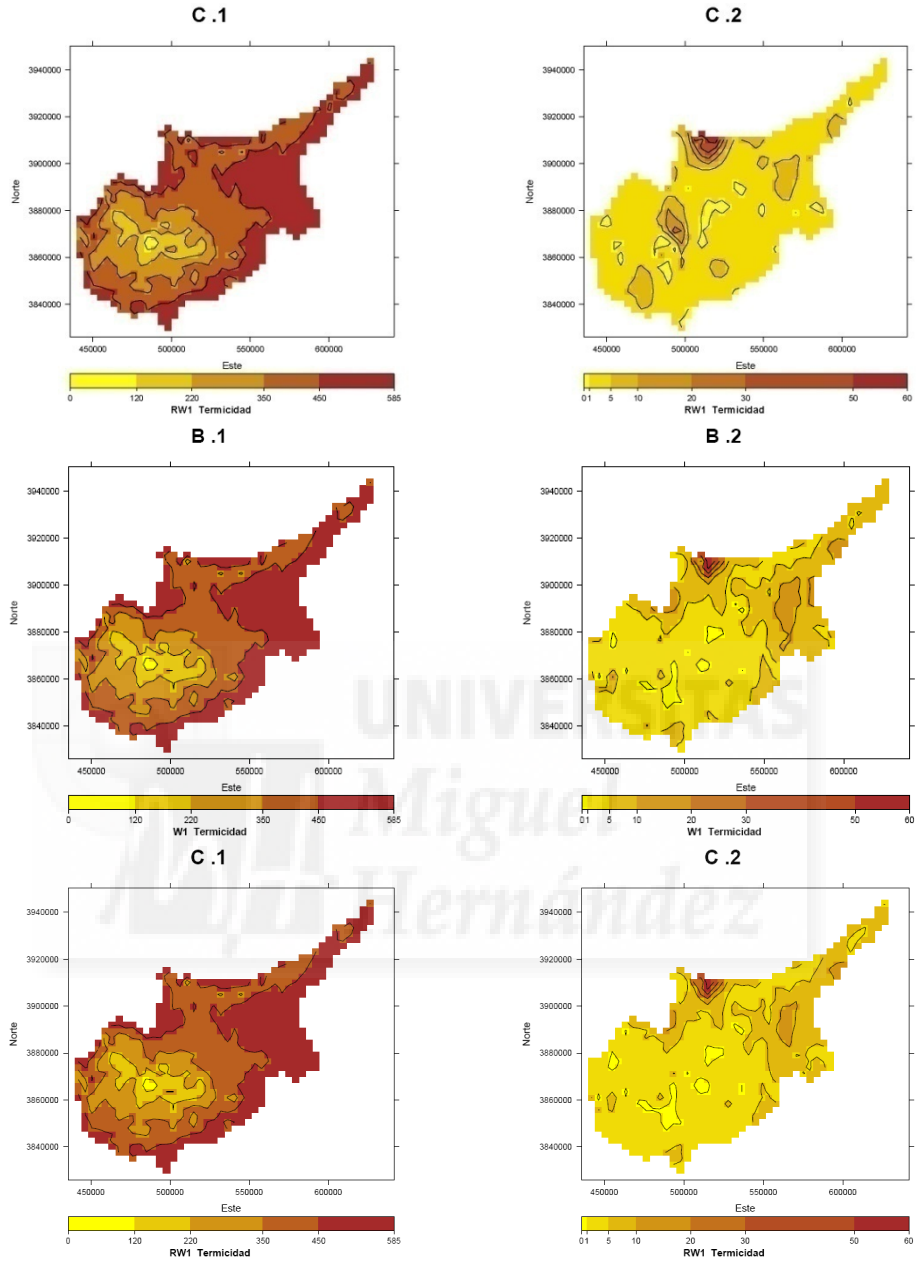


O.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP8
 P.1= Med. de la distr. pred. del modelo W6

O.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP8
 P.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W6

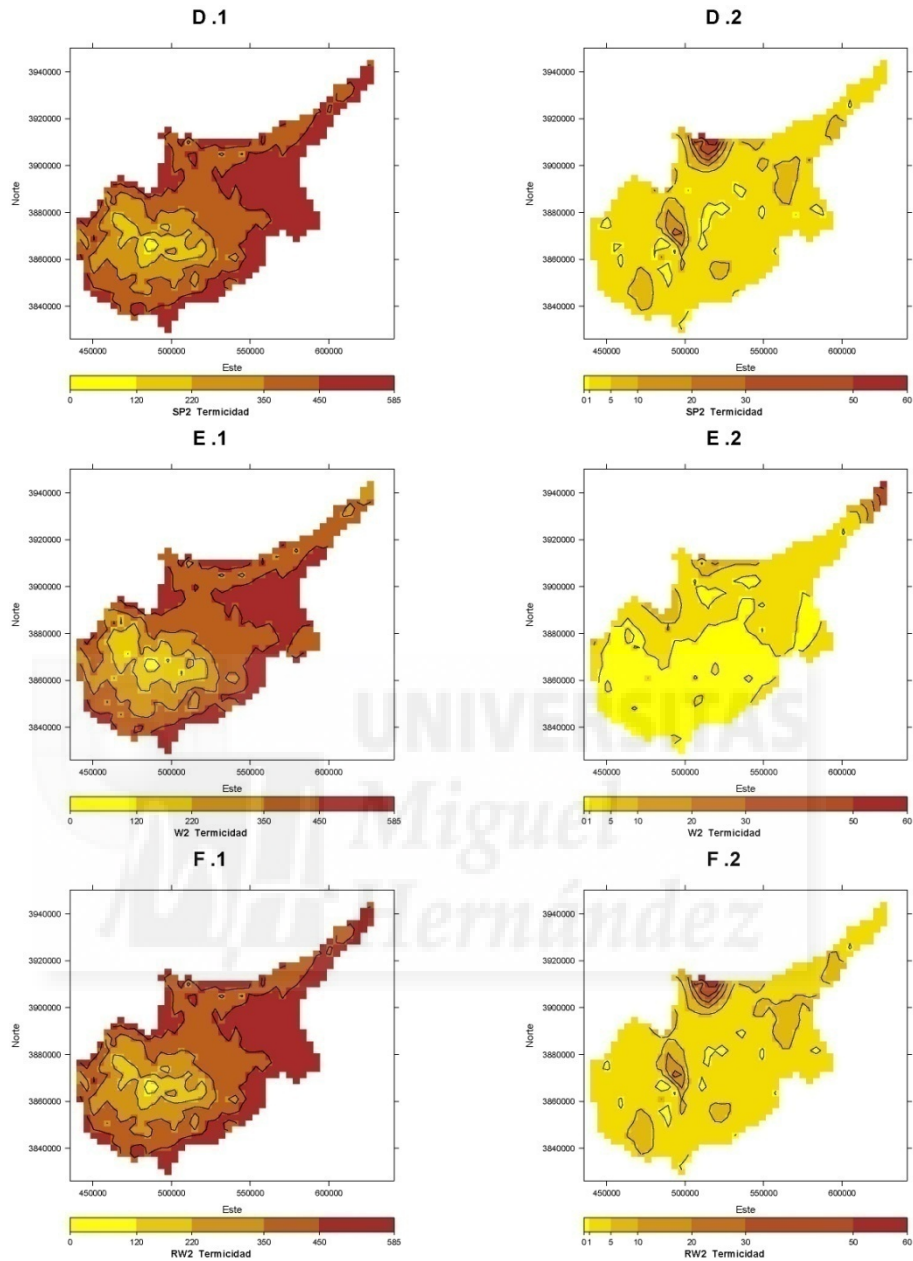


Termicidad



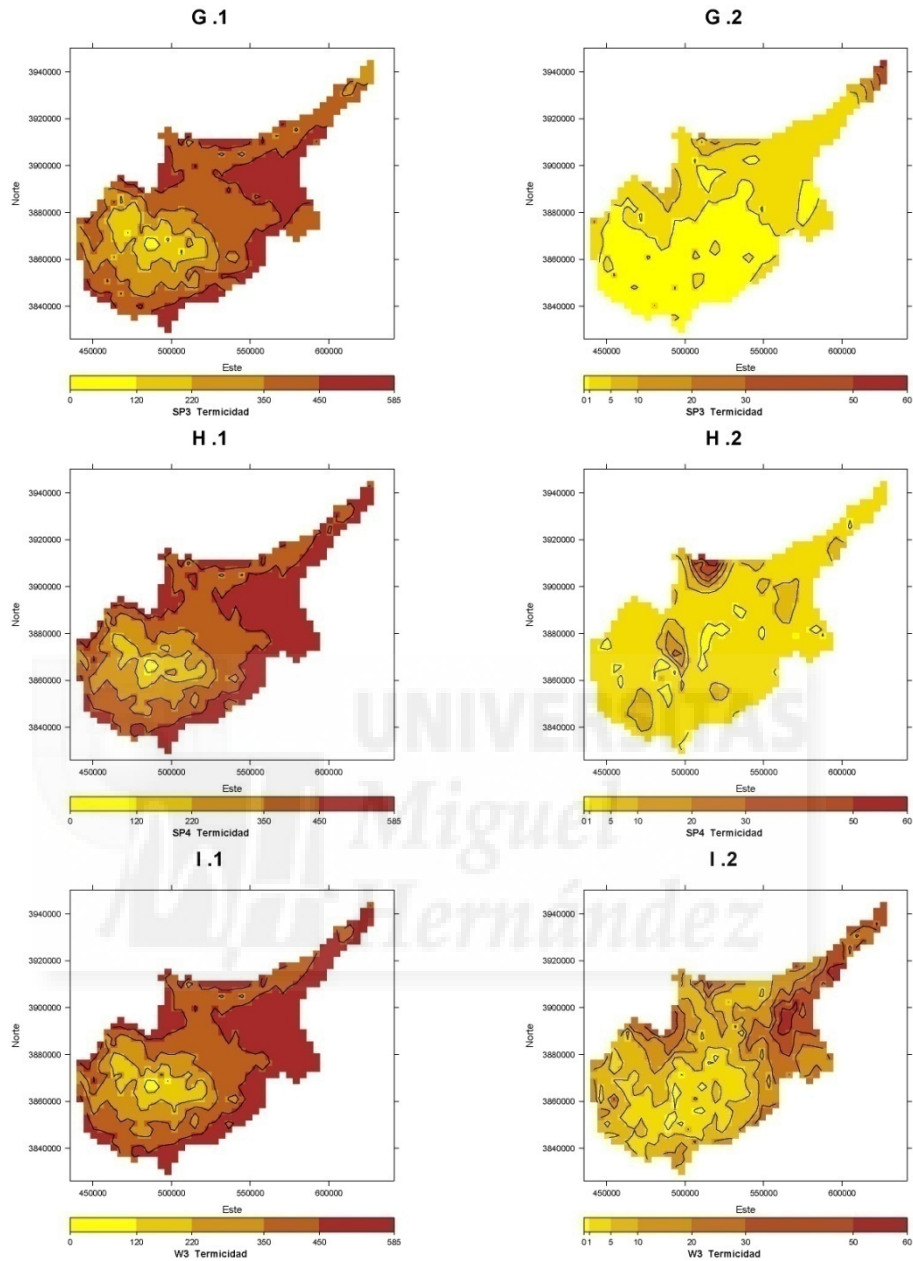
A.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP1
 B.1= Med. de la distr. pred. del modelo W1
 C.1= Med. de la distr. pred. del modelo RW1

A.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP1
 B.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W1
 C.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW1



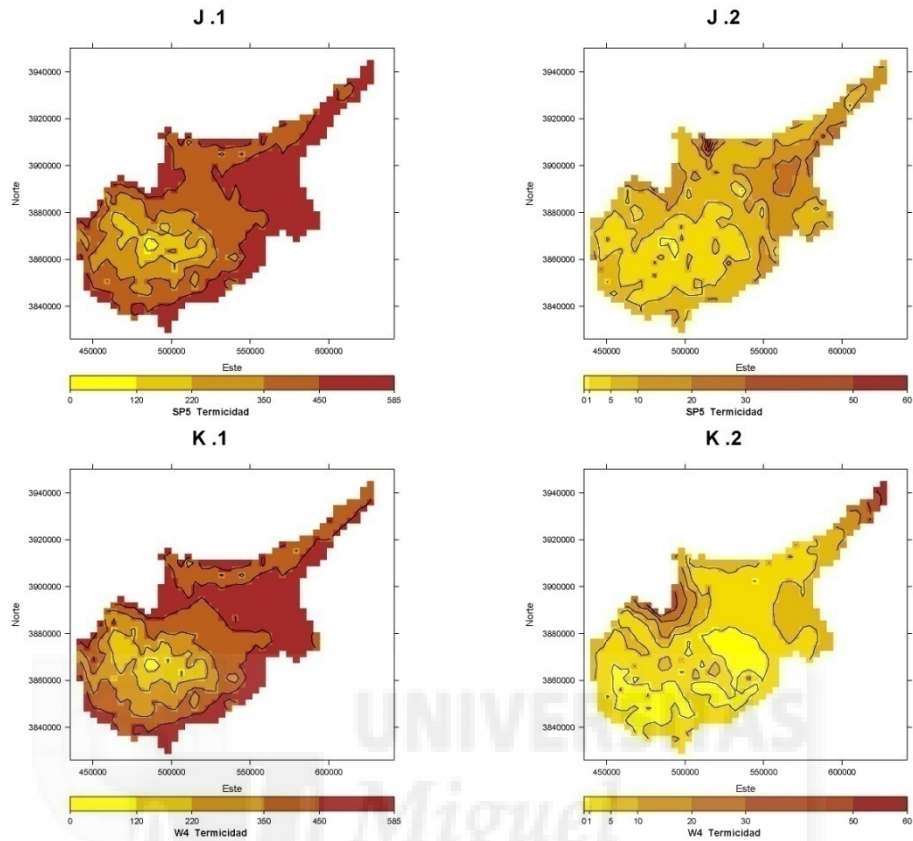
D.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.1= Med. de la distr. pred. del modelo W2
 F.1= Med. de la distr. pred. del modelo RW2

D.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W2
 F.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW2

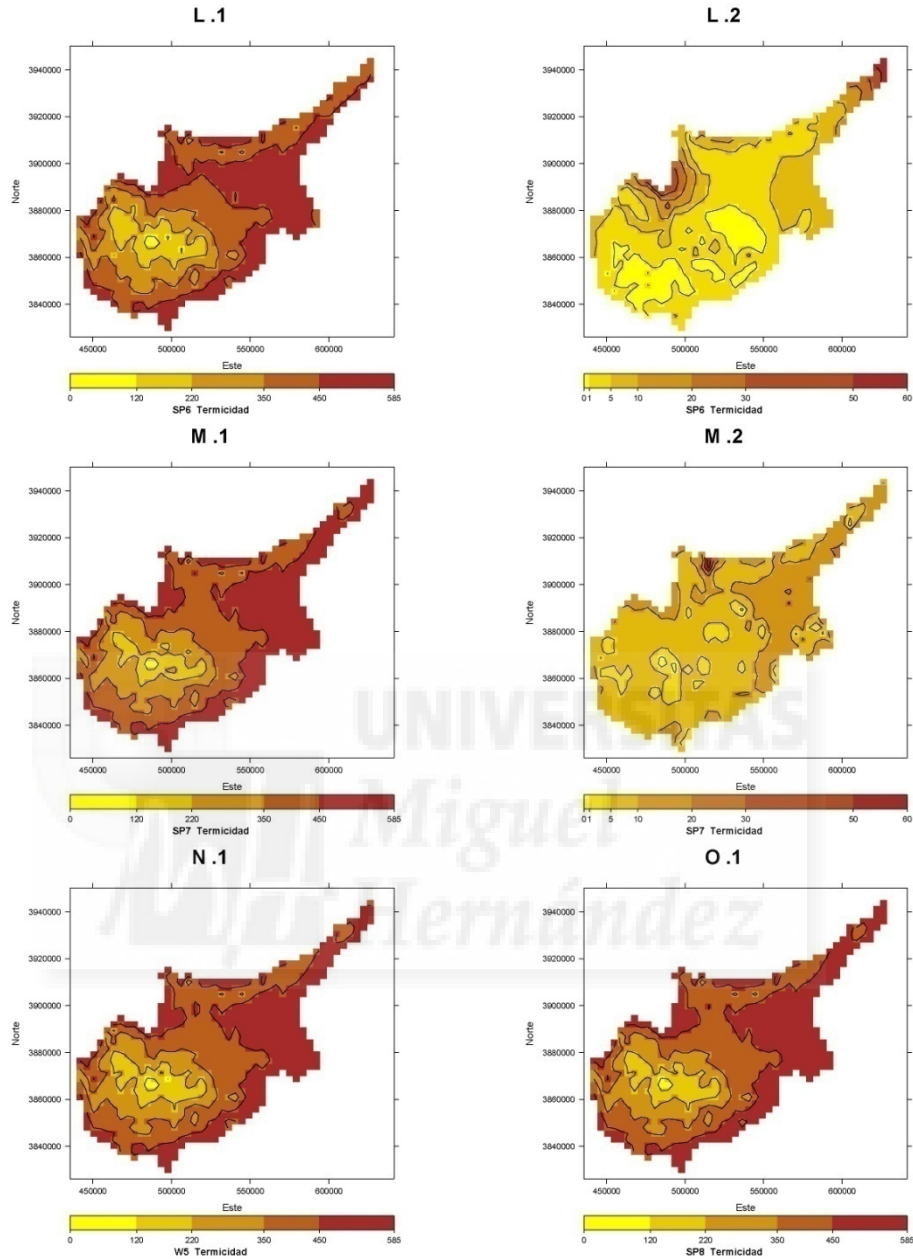


G.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP3
 H.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP4
 I.1= Med. de la distr. pred. del modelo W3

G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP3
 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP4
 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W2

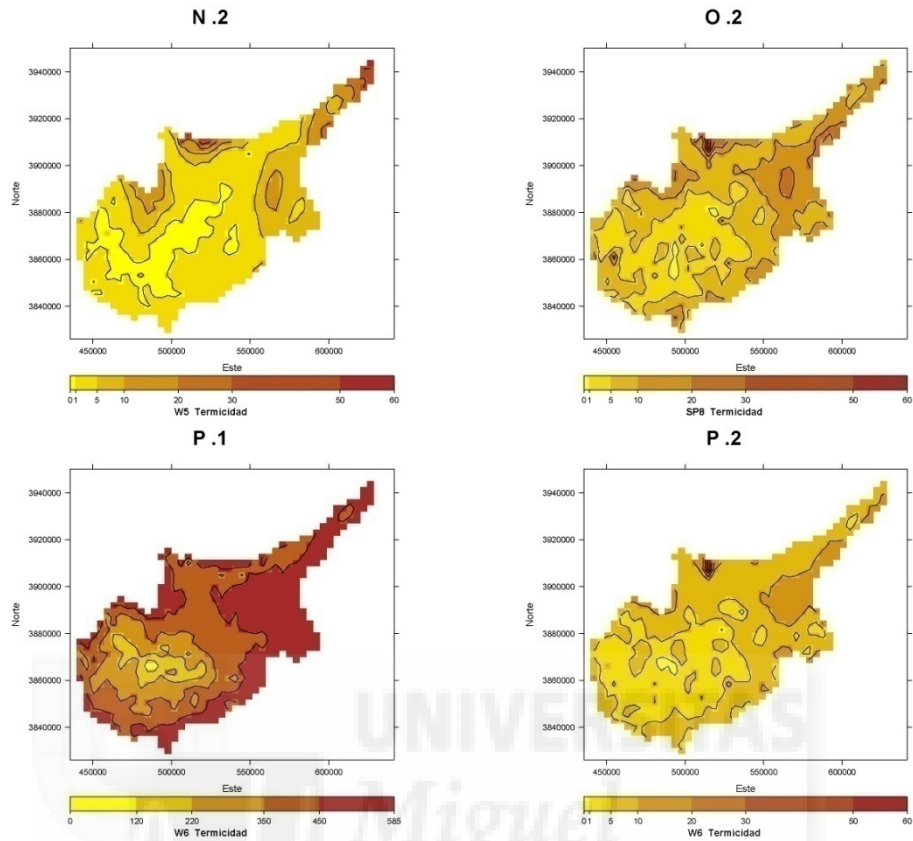


J.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP5 J.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP5
 K.1= Med. de la distr. pred. del modelo W4 K.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W4



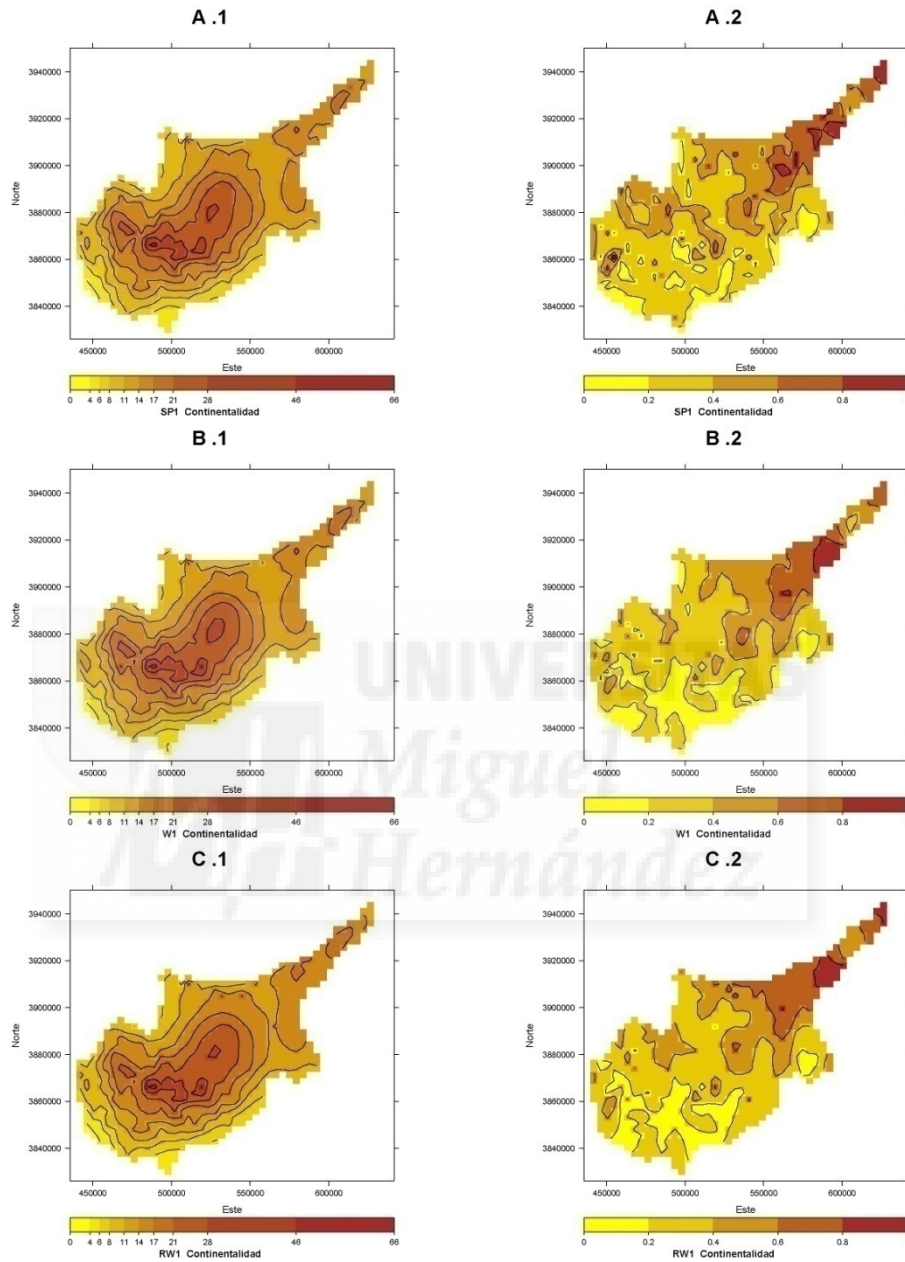
L.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP6
 M.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP7
 N.1= Med. de la distr. pred. del modelo W5

G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP6
 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP7
 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W5



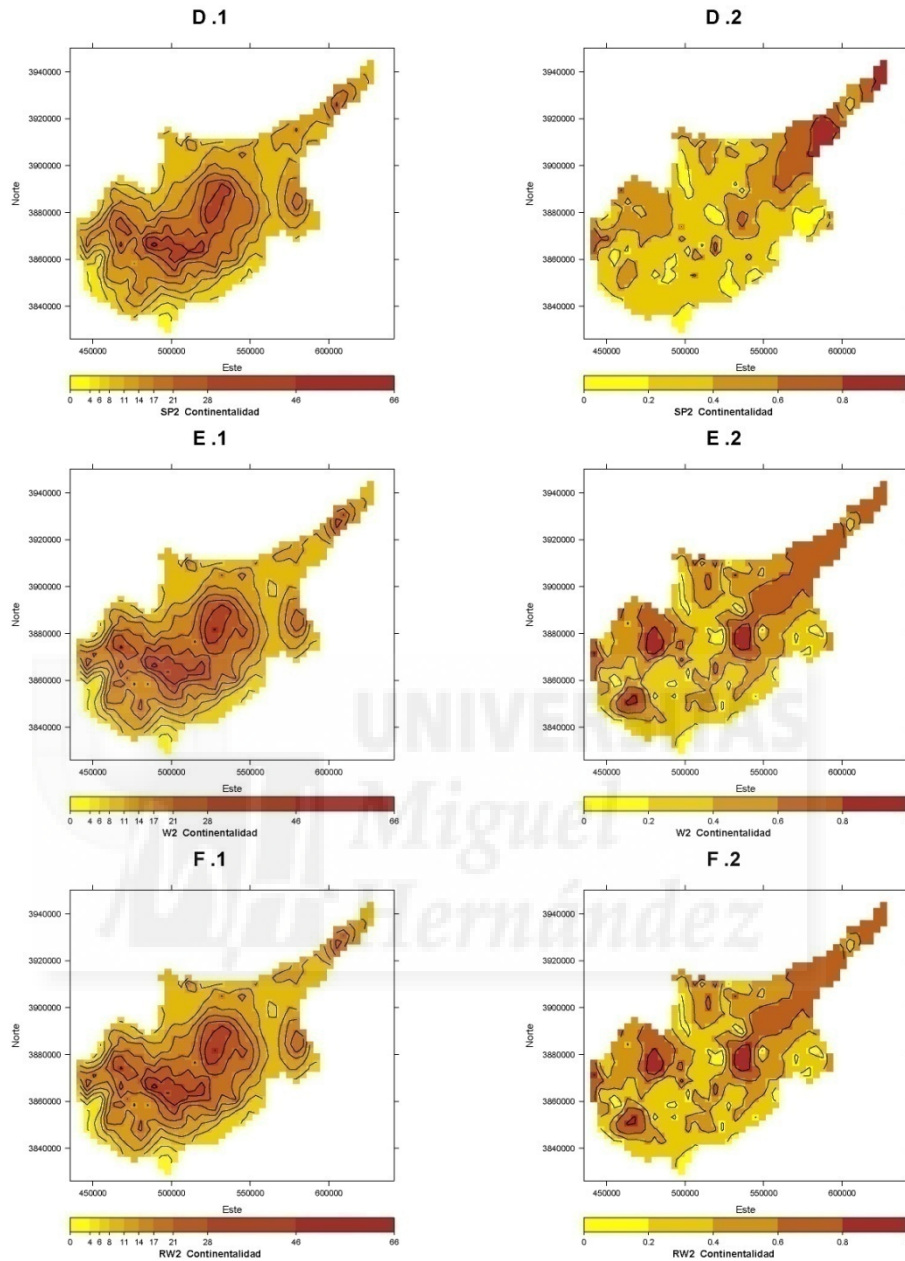
O.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP8 O.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP8
 P.1= Med. de la distr. pred. del modelo W6 P.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W6

Continentalidad



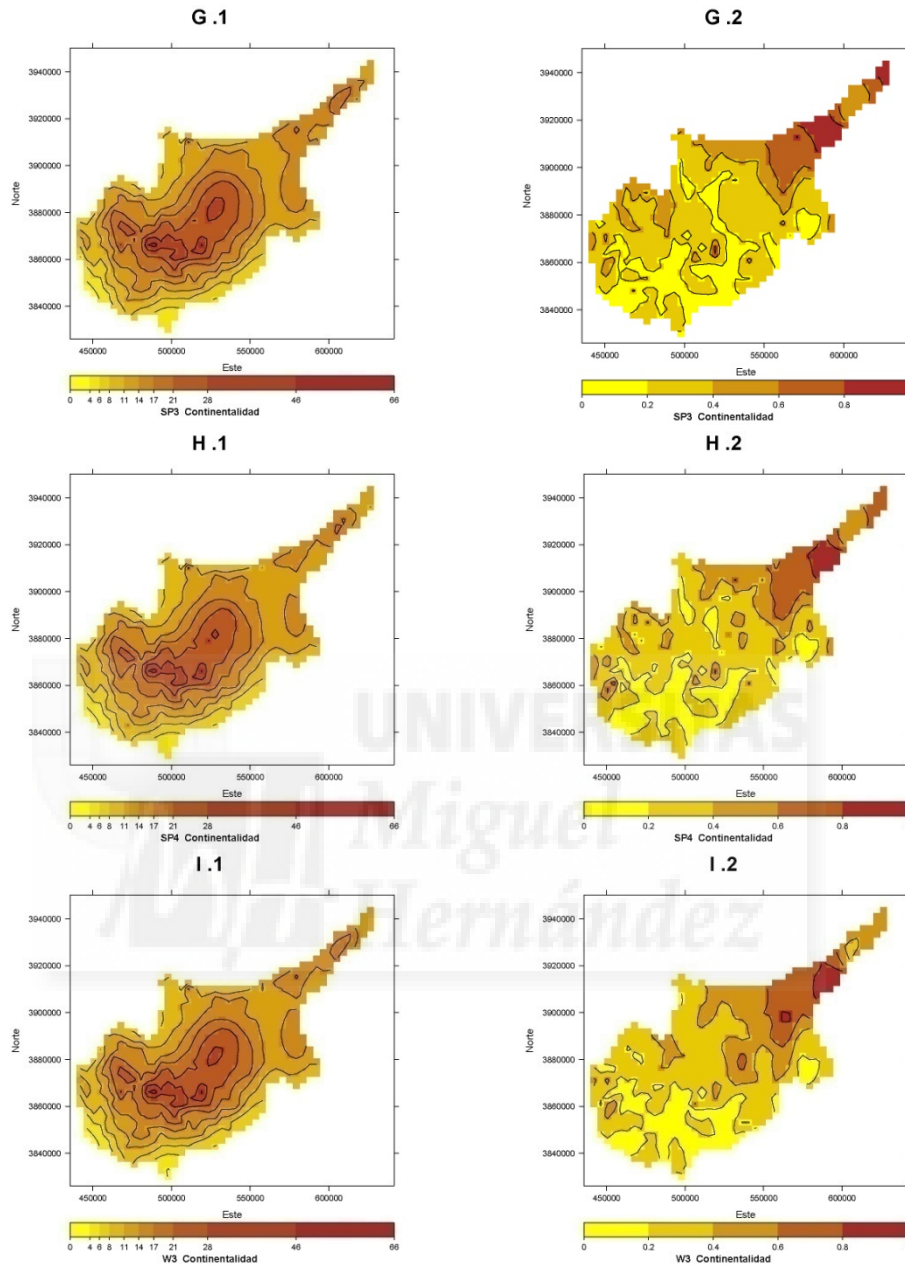
A.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP1
 B.1= Med. de la distr. pred. del modelo W1
 C.1= Med. de la distr. pred. del modelo RW1

A.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP1
 B.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W1
 C.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW1



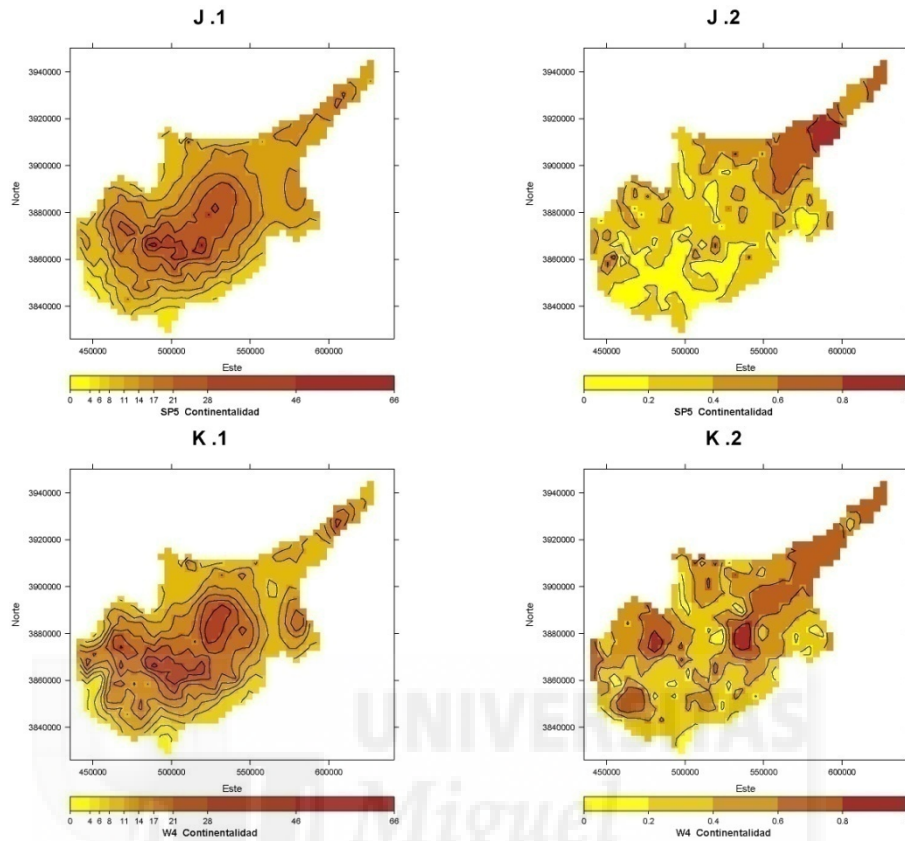
D.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.1= Med. de la distr. pred. del modelo W2
 F.1= Med. de la distr. pred. del modelo RW2

D.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP2
 E.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W2
 F.2= Desv. de la distr. pred. del modelo RW2

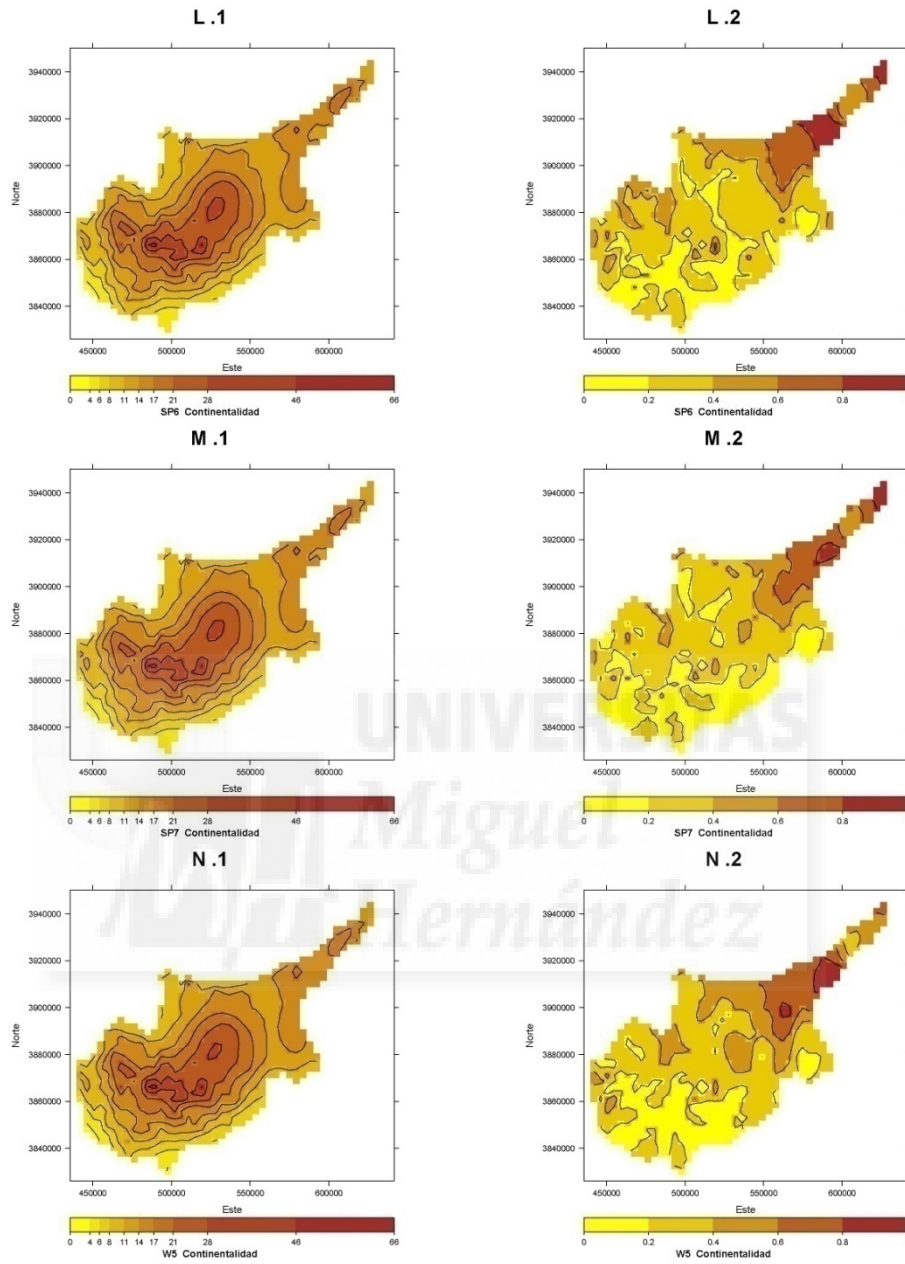


G.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP3
 H.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP4
 I.1= Med. de la distr. pred. del modelo W3

G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP3
 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP4
 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W3

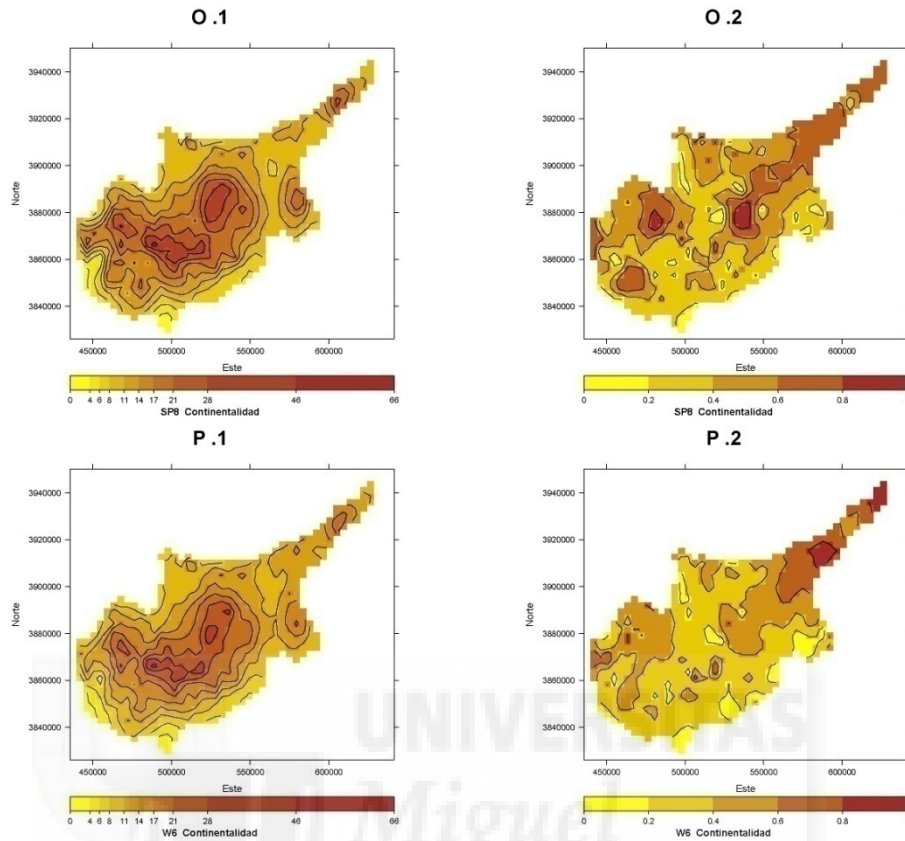


J.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP5 J.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP5
K.1= Med. de la distr. pred. del modelo W4 K.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W4



L.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP6
 M.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP7
 N.1= Med. de la distr. pred. del modelo W5

G.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP6
 H.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP7
 I.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W5



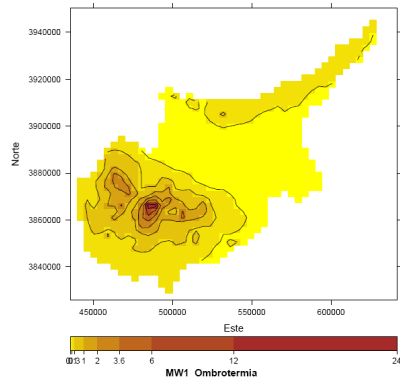
O.1= Med. de la distr. pred. del modelo SP8 O.2= Desv. de la distr. pred. del modelo SP8
P.1= Med. de la distr. pred. del modelo W6 P.2= Desv. de la distr. pred. del modelo W6

**Anexo VIII. Mapas predictivos (Modelización
Multivariante)**

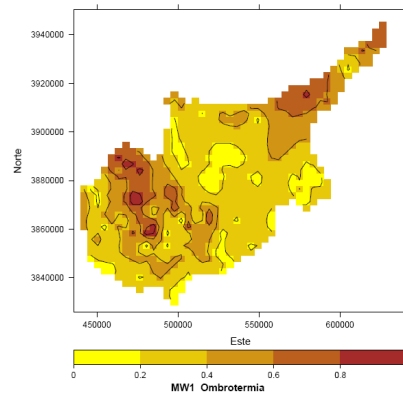


Ombrotermia

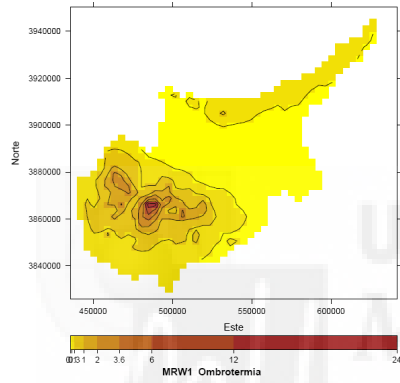
A.1



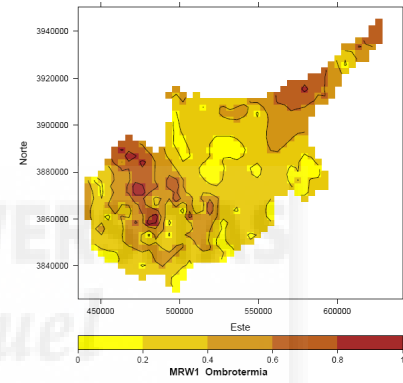
A.2



B.1



B.2

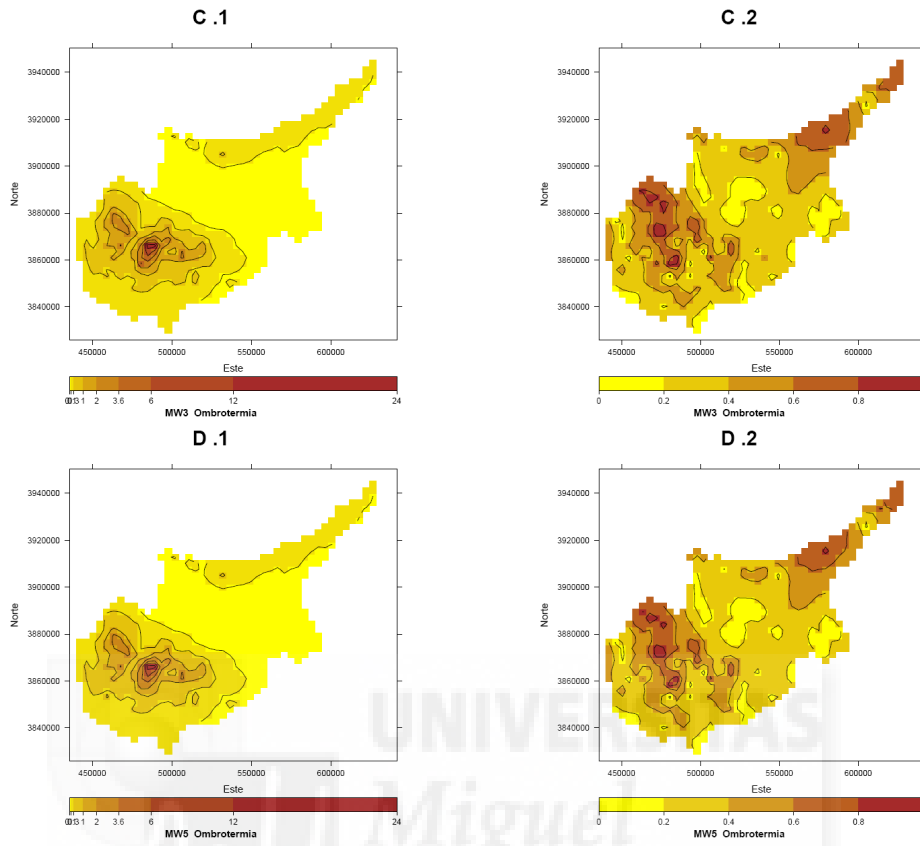


A.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW1

A.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW1

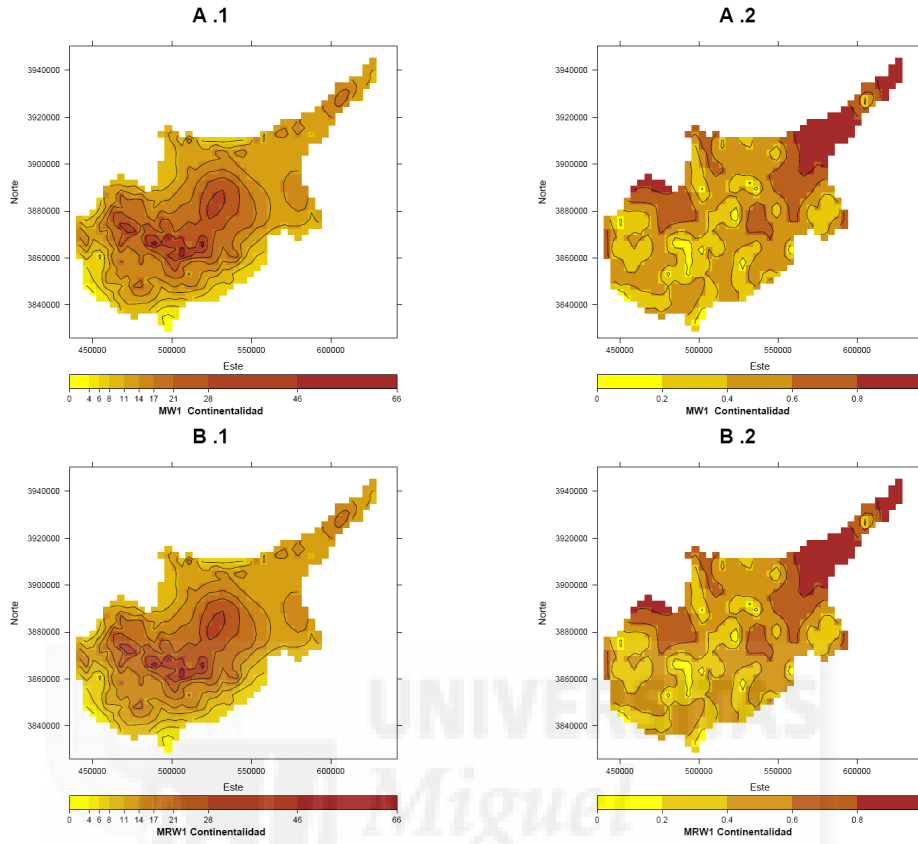
B.1= Med. de la distr. pred. del modelo MRW1

B.2= Desv. Tip del MRW1



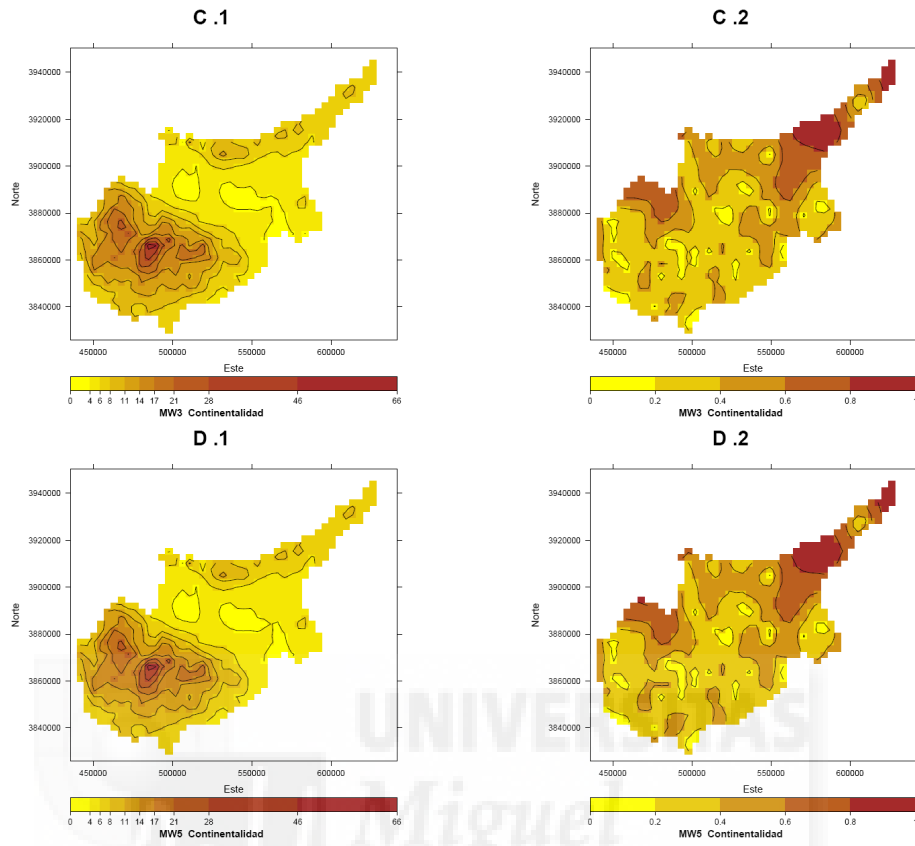
C.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW3 C.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW3
 D.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW5 D.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW5

Continentalidad



A.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW1
 B.1= Med. de la distr. pred. del modelo MRW1

A.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW1
 B.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MRW1



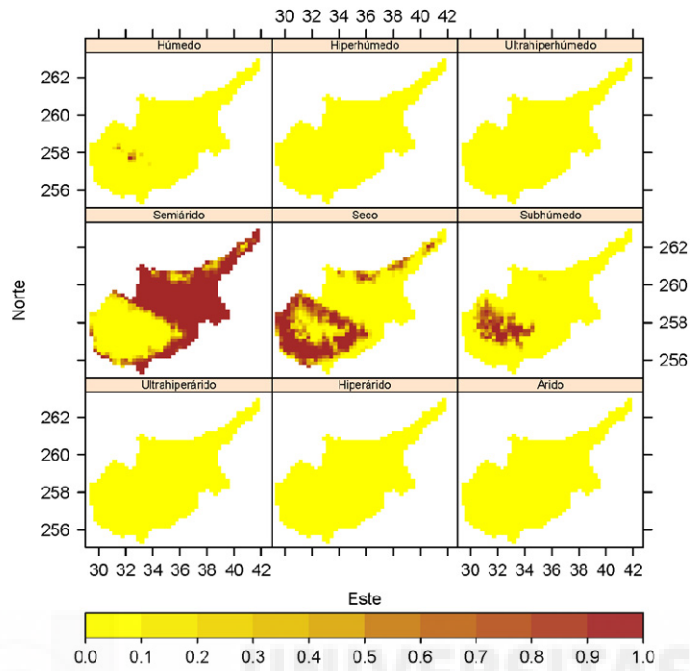
C.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW3 C.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW3
 D.1= Med. de la distr. pred. del modelo MW5 D.2= Desv. de la distr. pred. del modelo MW5

**Anexo IX. Distribuciones Espaciales de Probabilidad
(Modelización Univariante)**

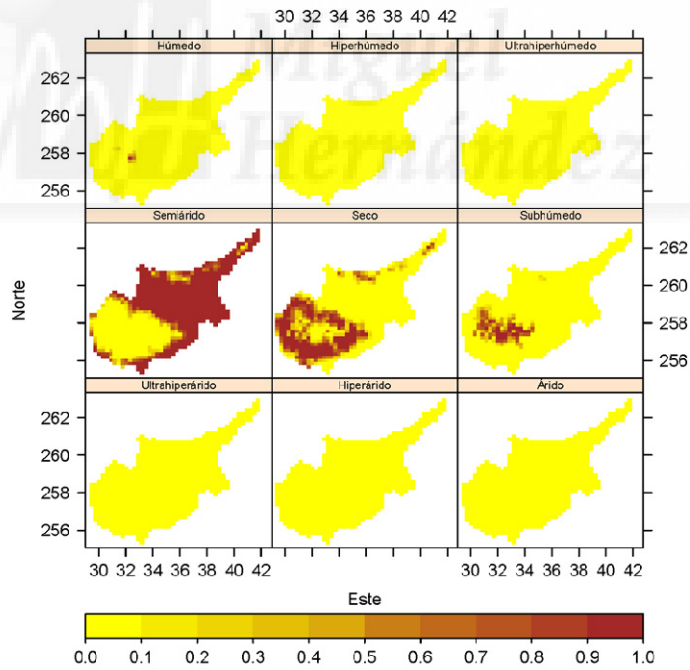


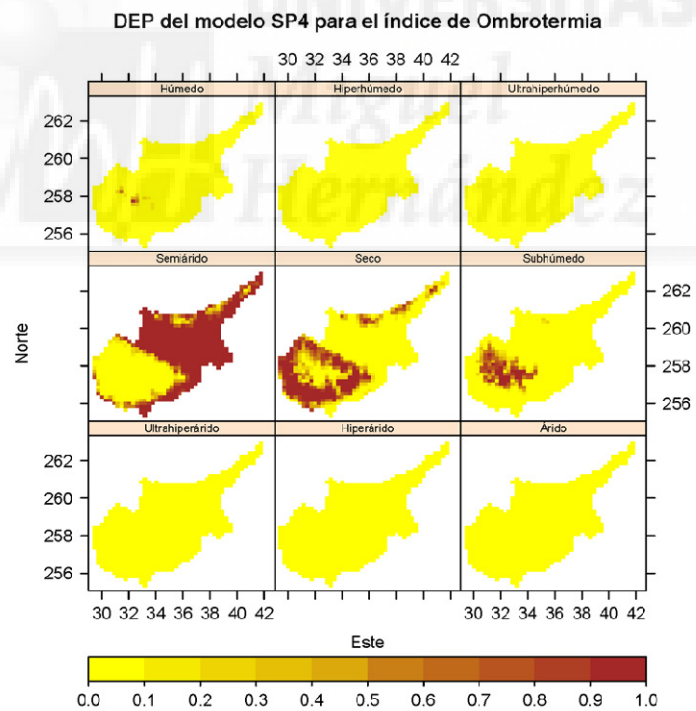
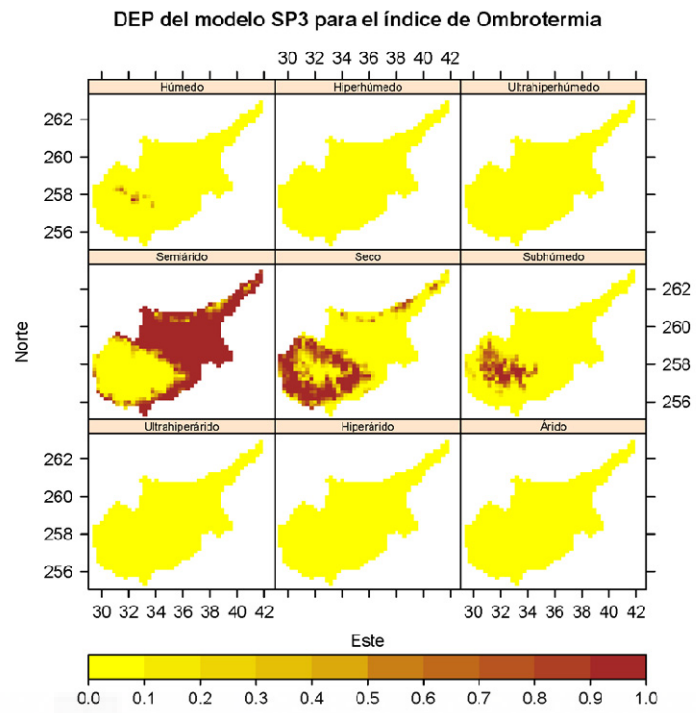
OMBROTERMIA

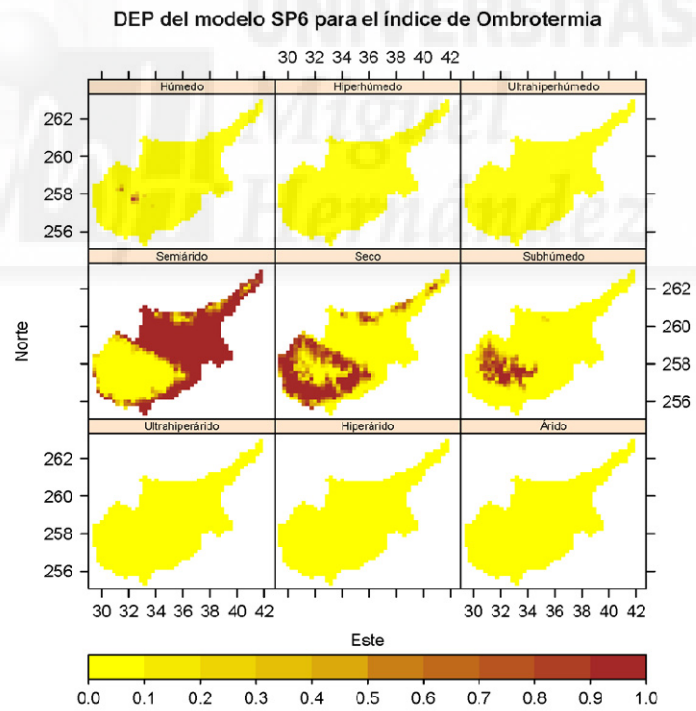
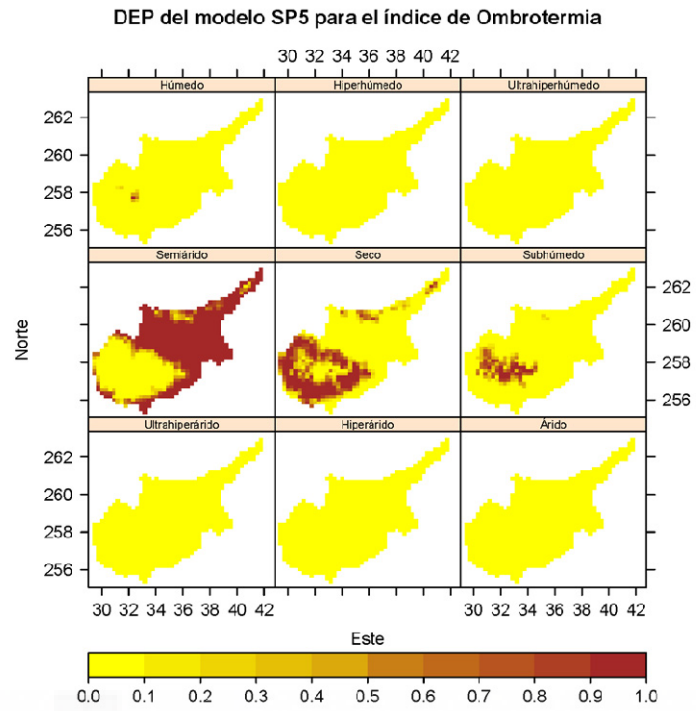
DEP del modelo SP1 para el índice de Ombrotermia

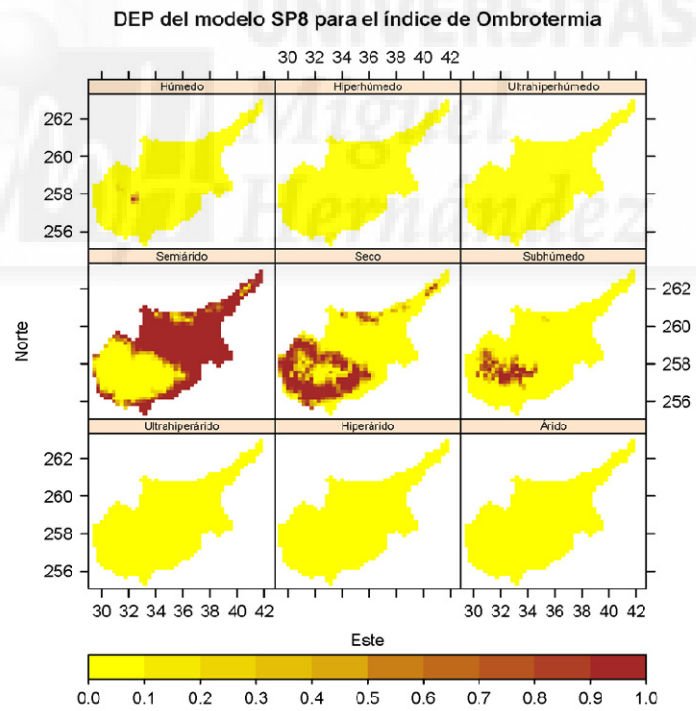
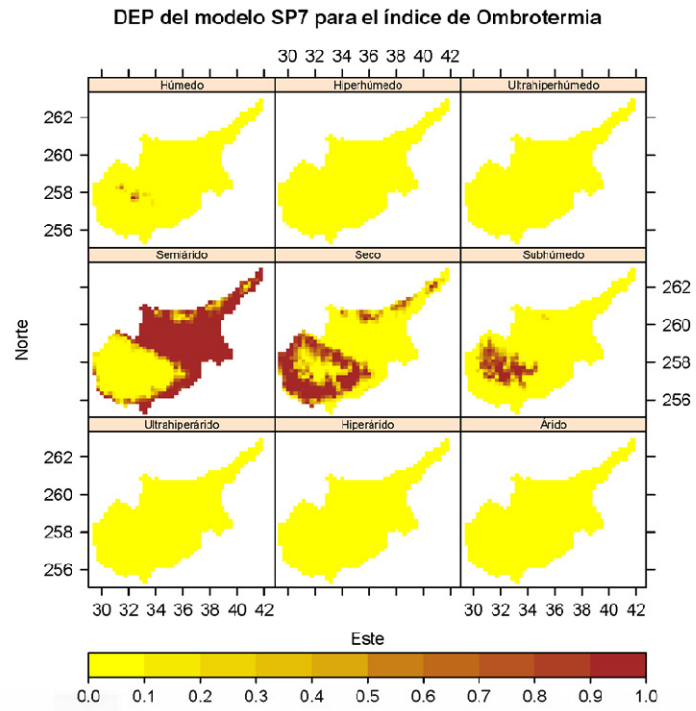


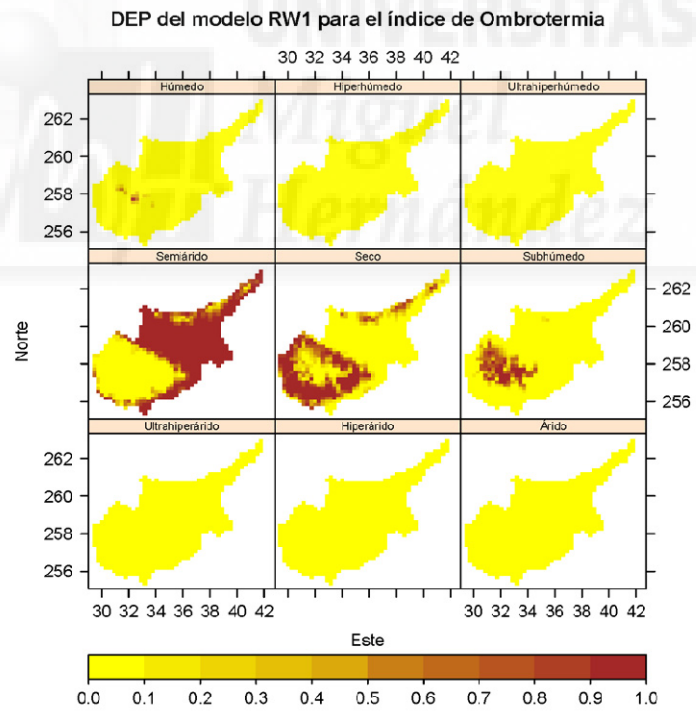
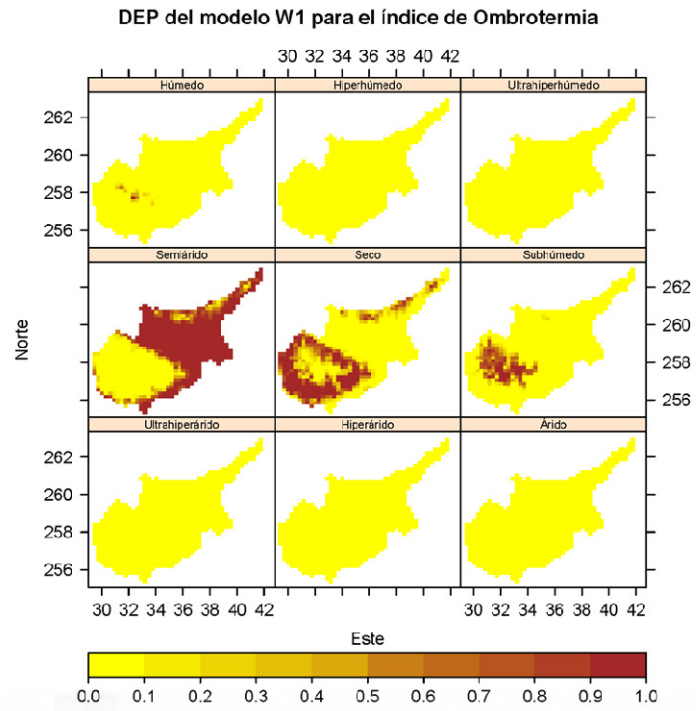
DEP del modelo SP2 para el índice de Ombrotermia

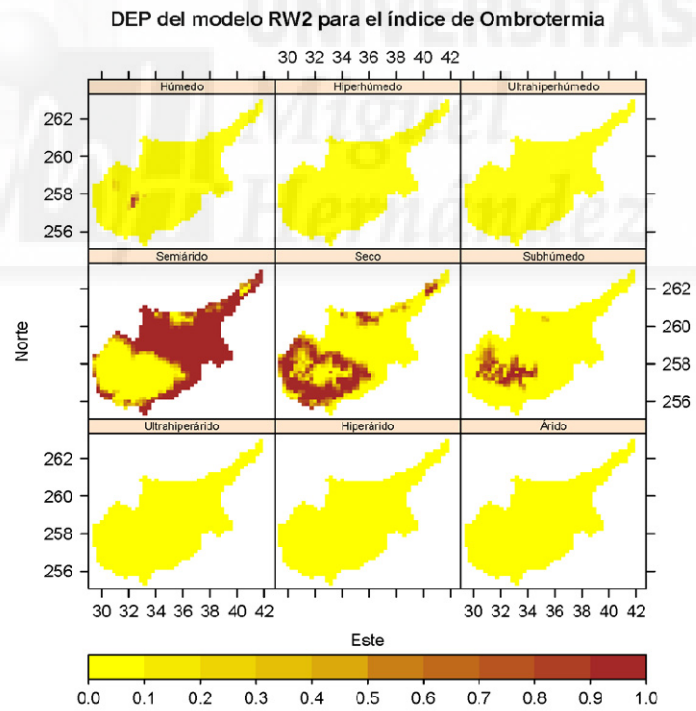
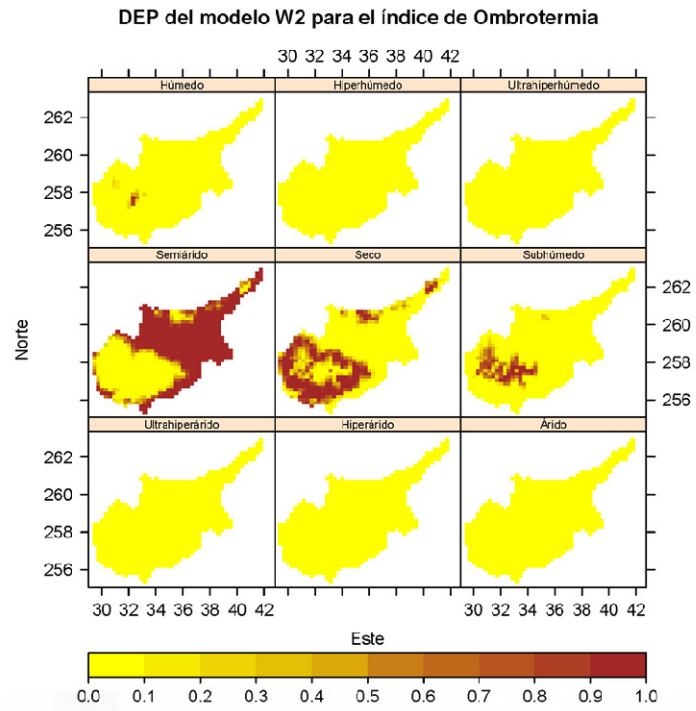


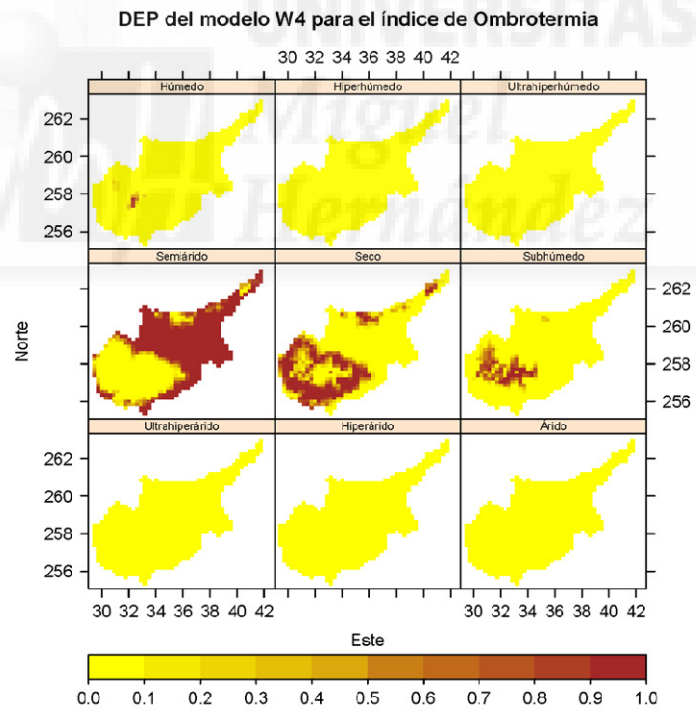
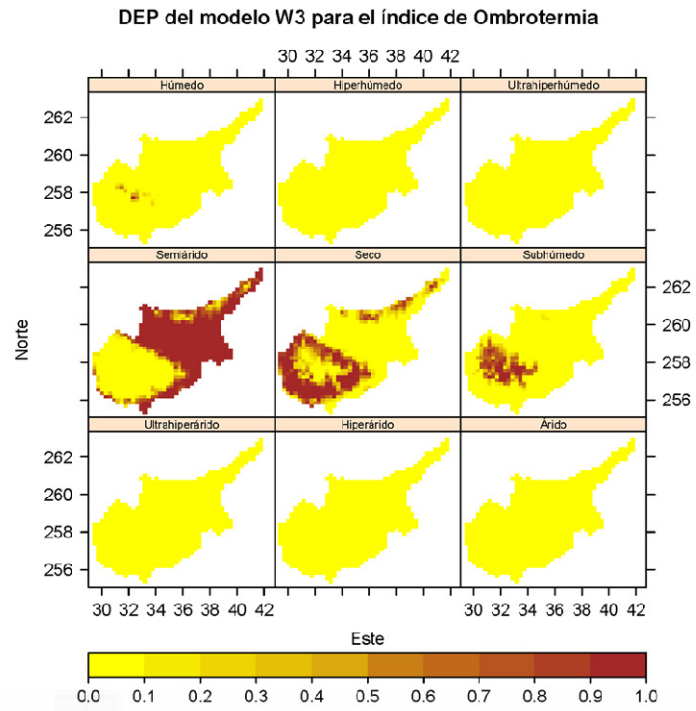




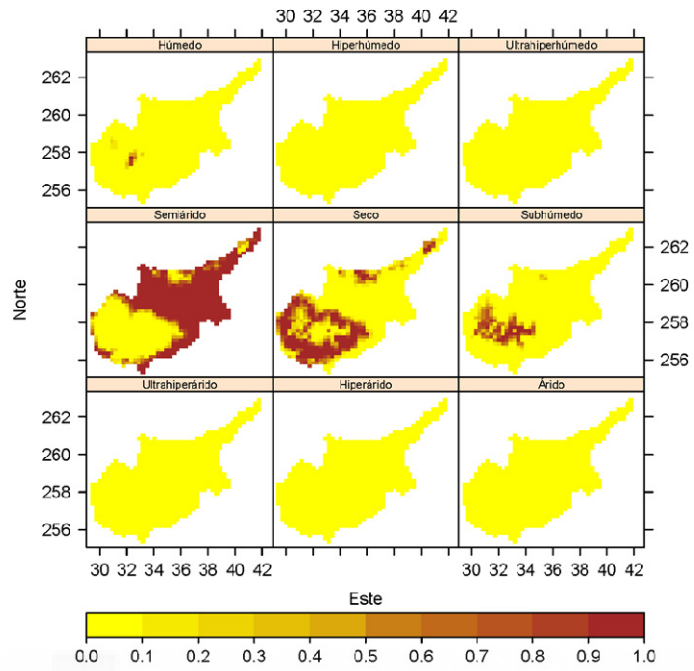




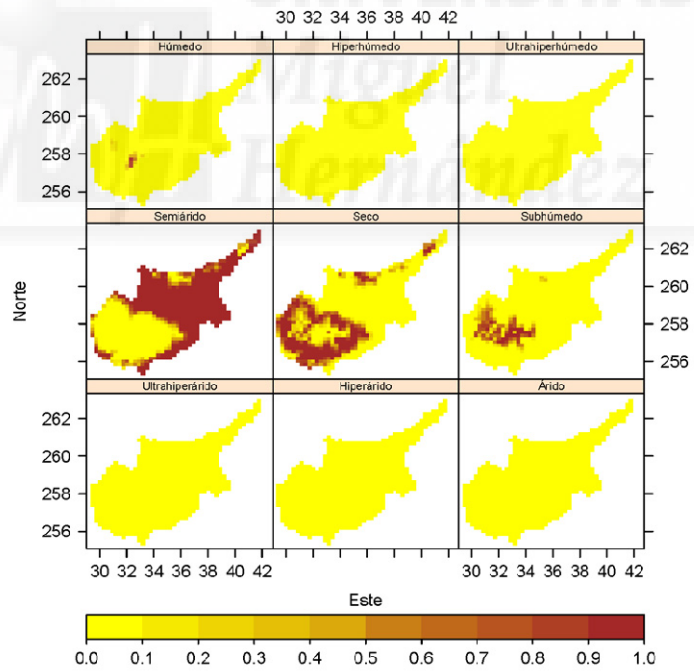




DEP del modelo W5 para el índice de Ombrotermia

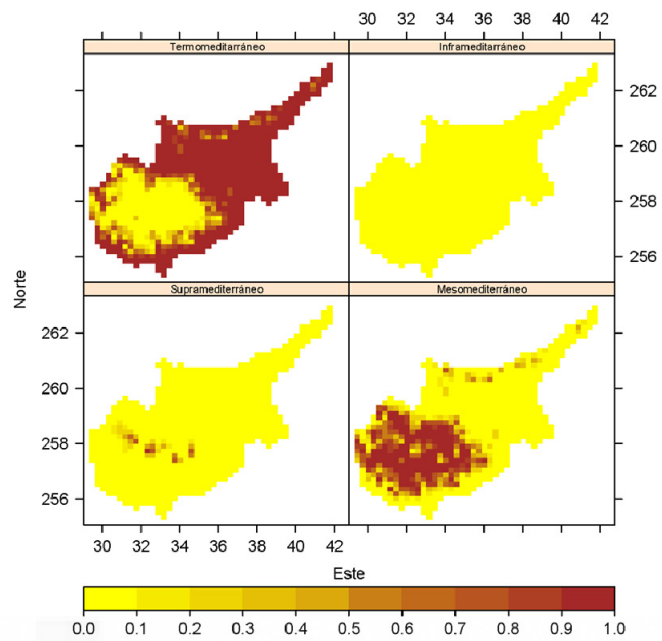


DEP del modelo W6 para el índice de Ombrotermia

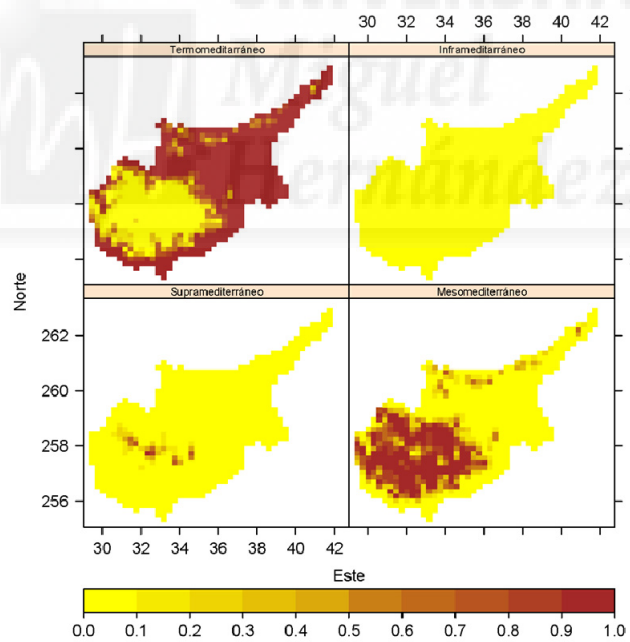


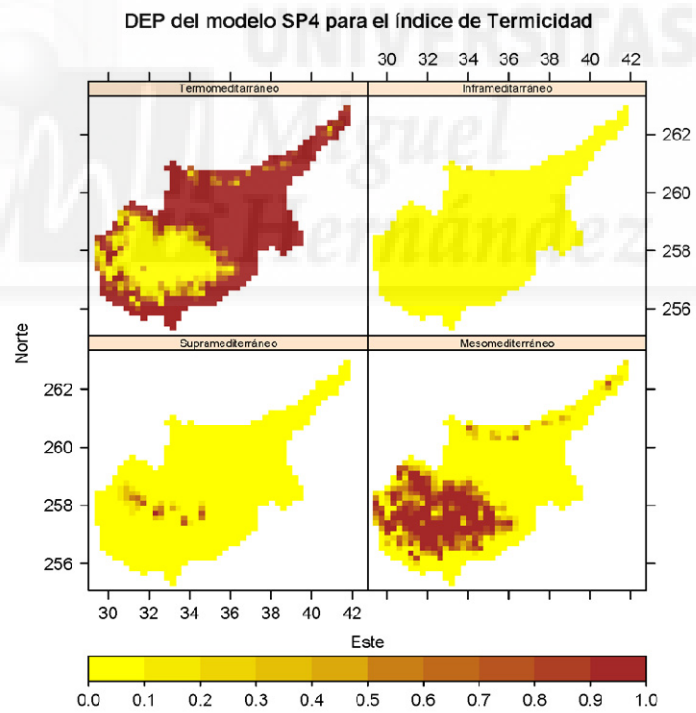
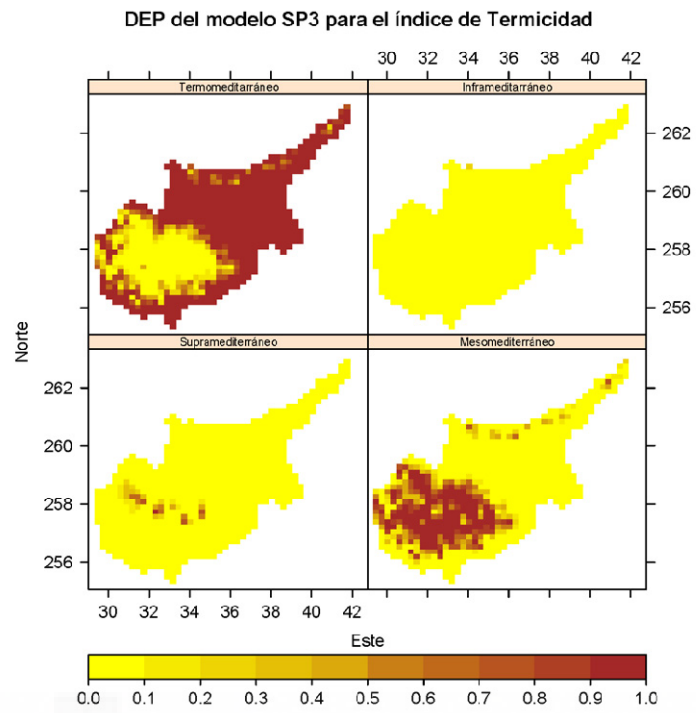
TERMICIDAD

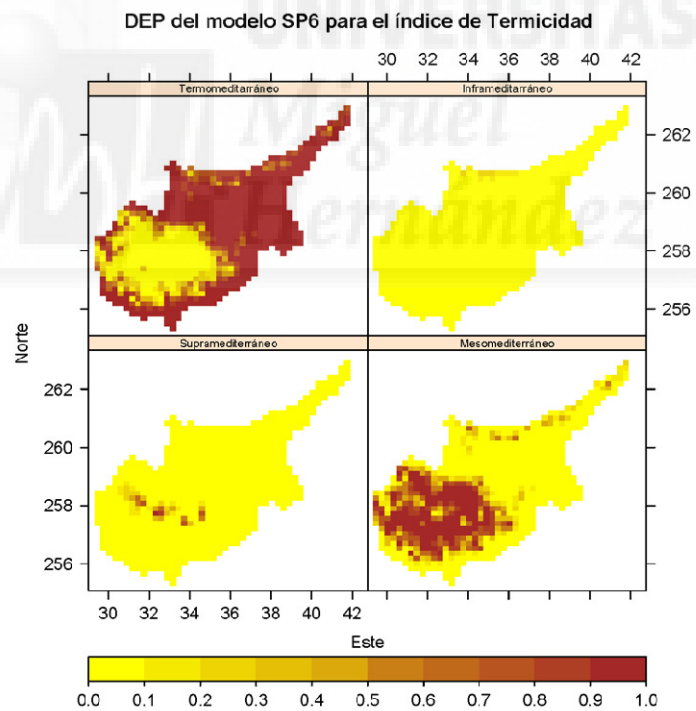
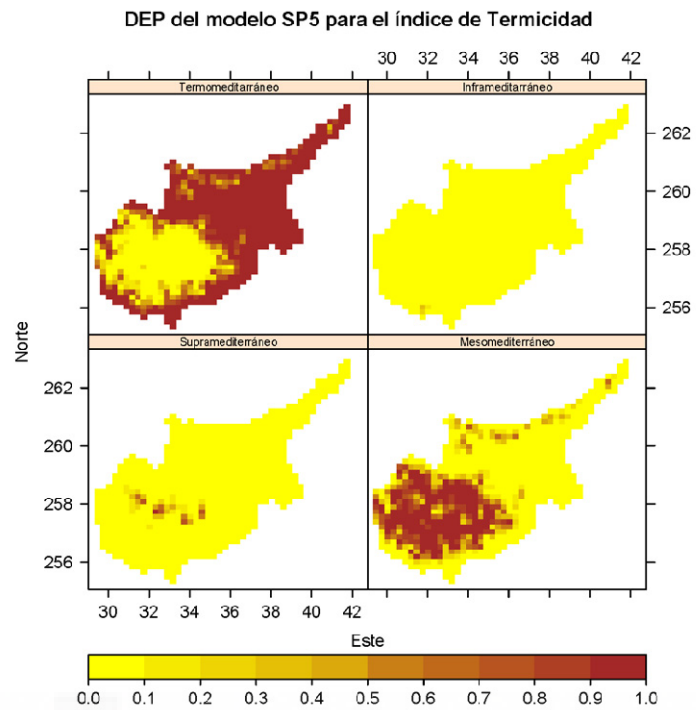
DEP del modelo SP1 para el índice de Termicidad

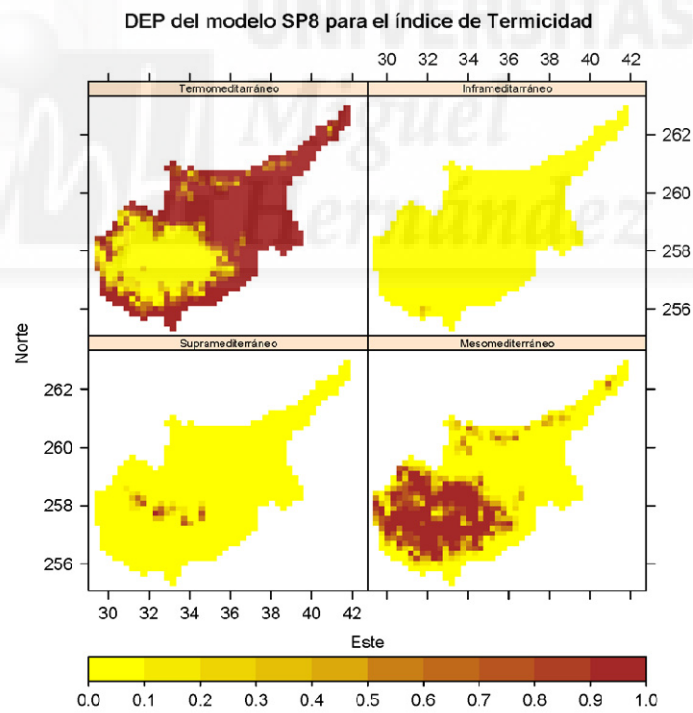
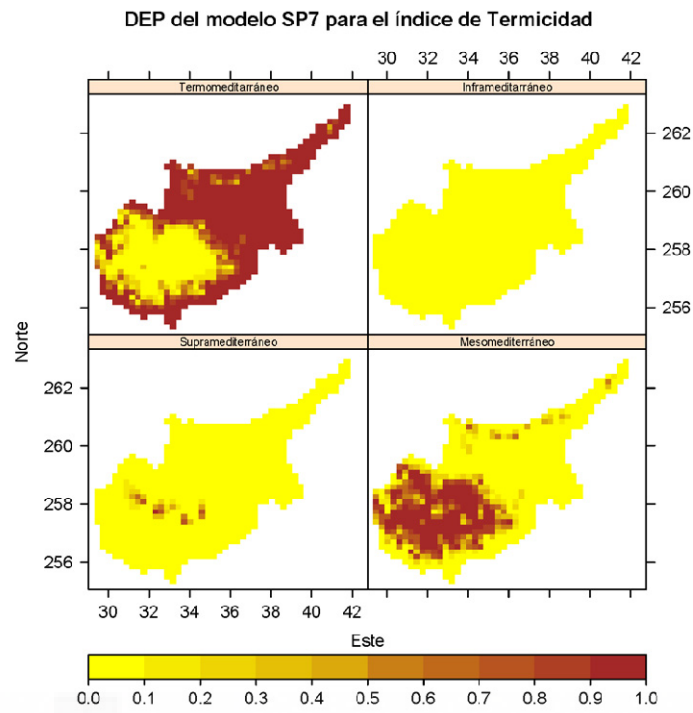


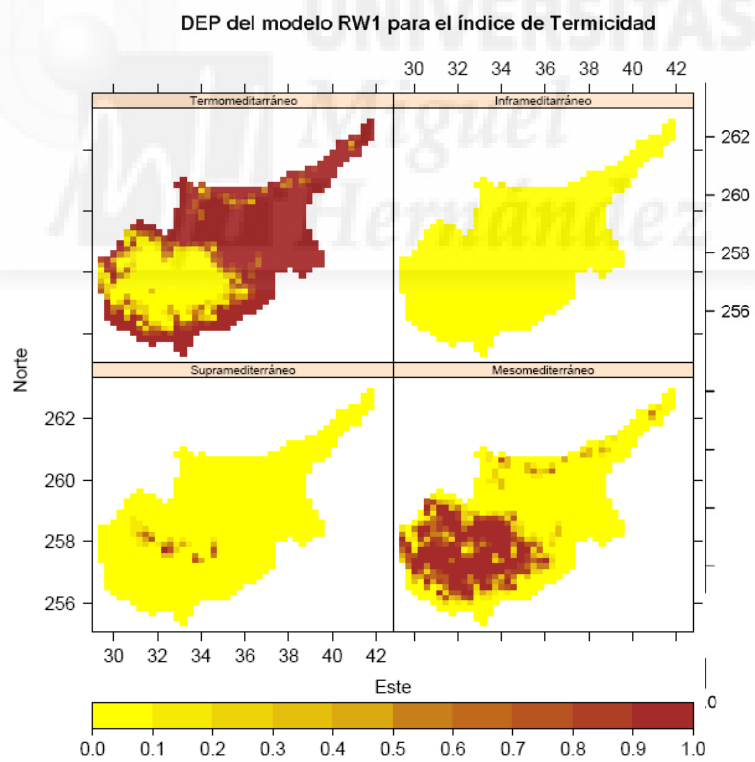
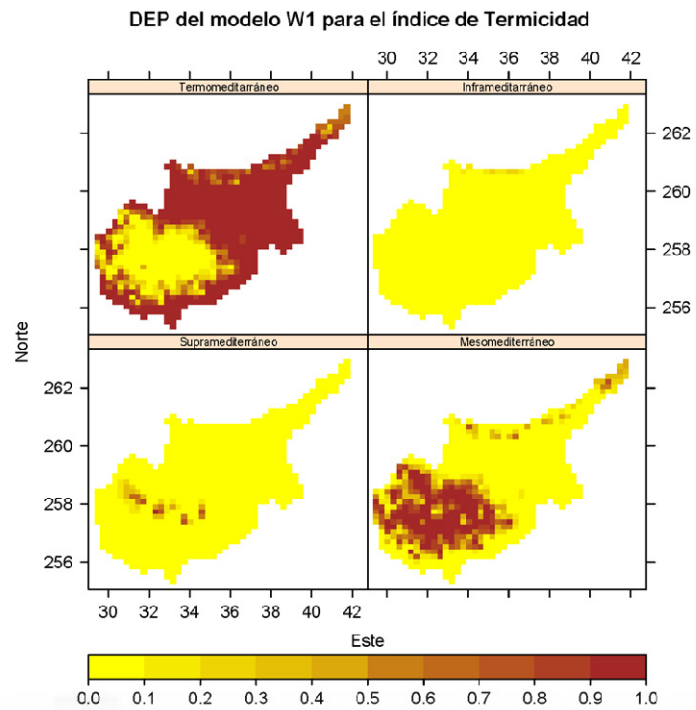
DEP del modelo SP2 para el índice de Termicidad

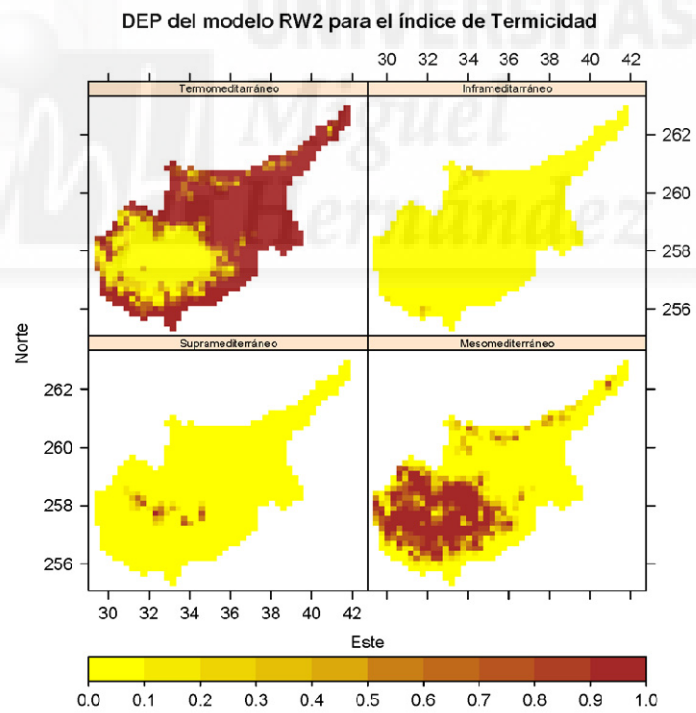
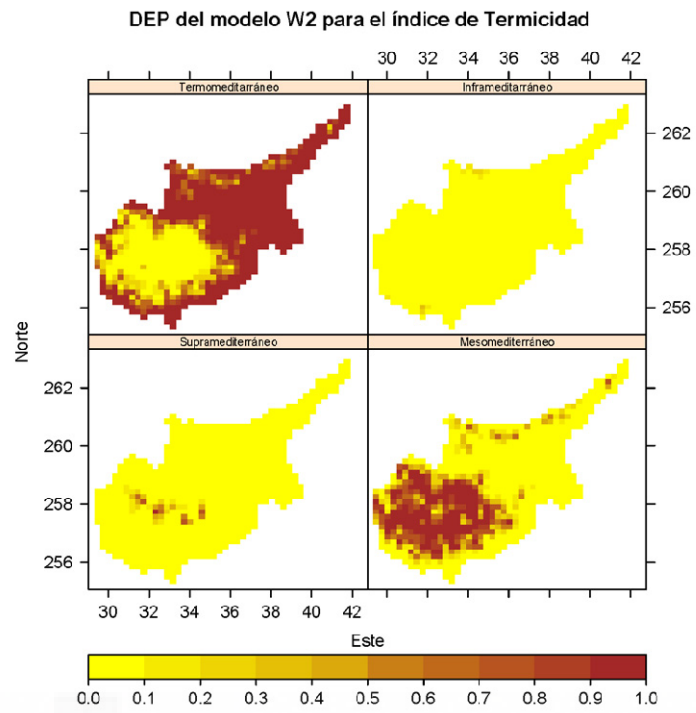


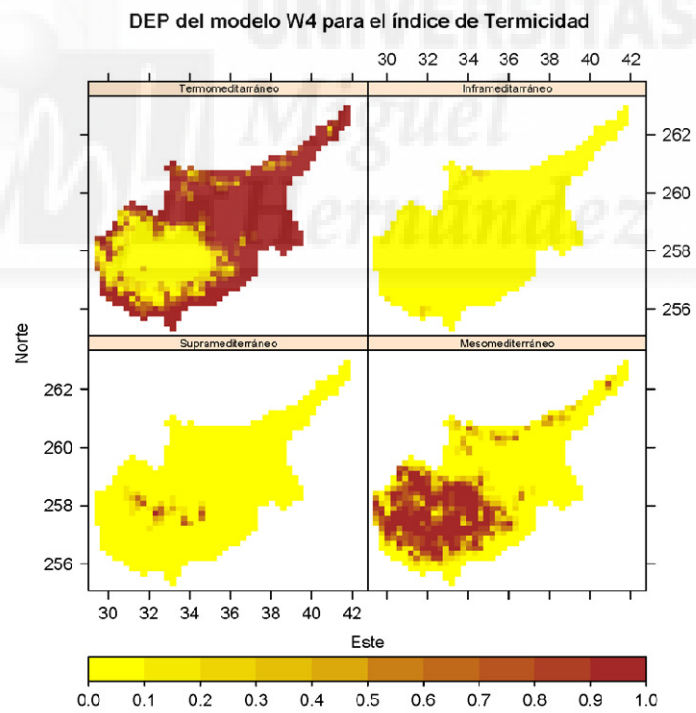
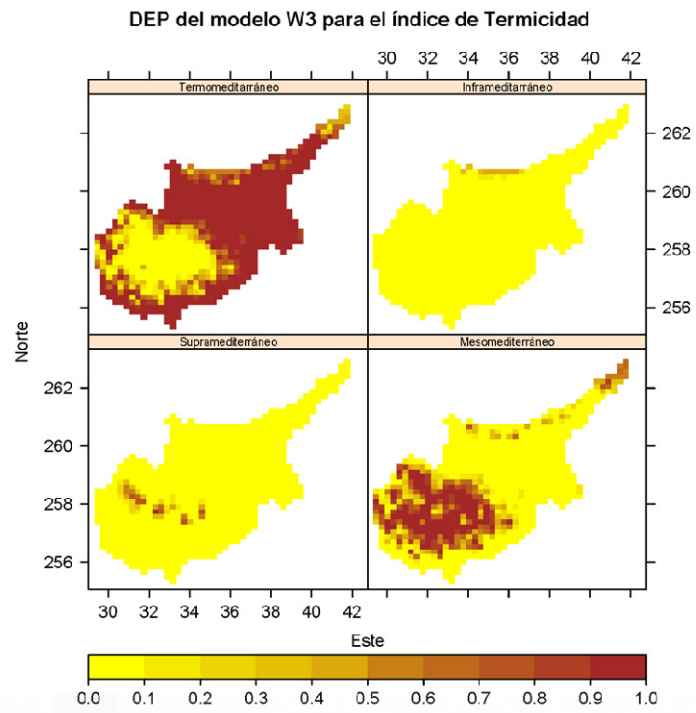


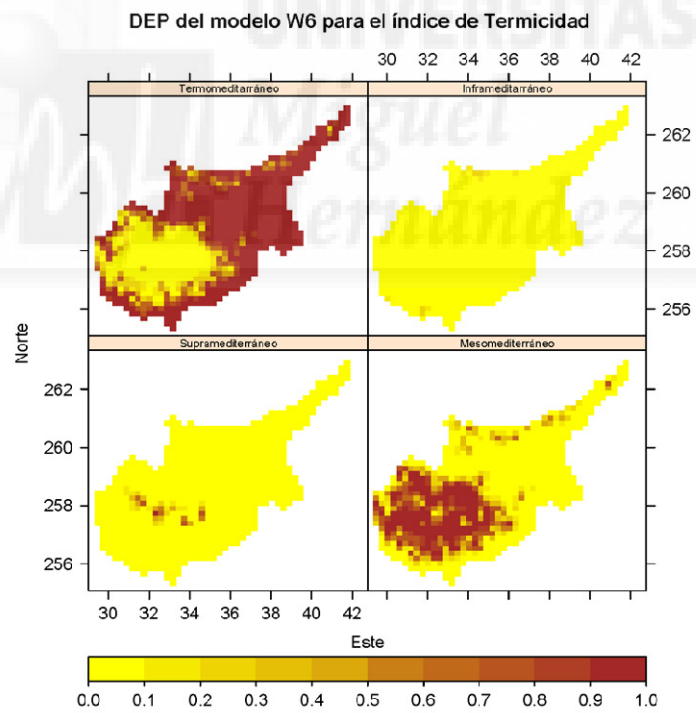
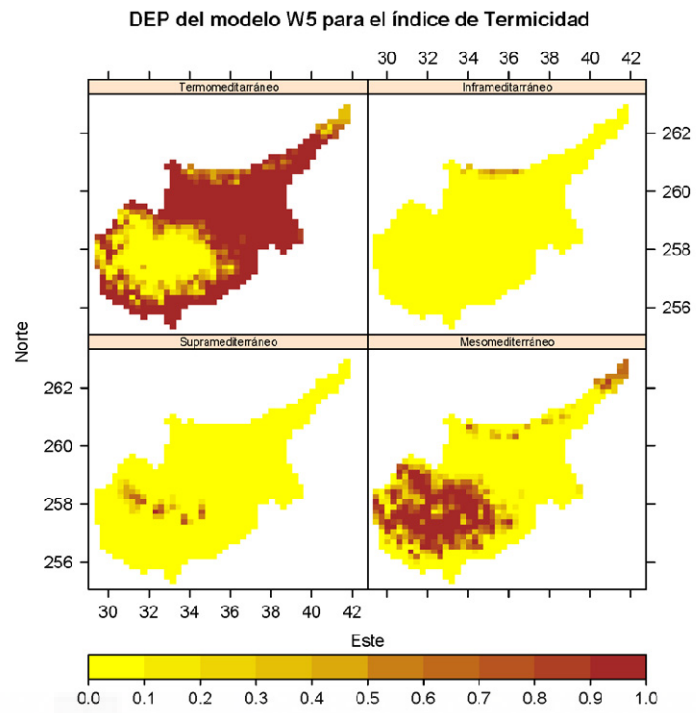




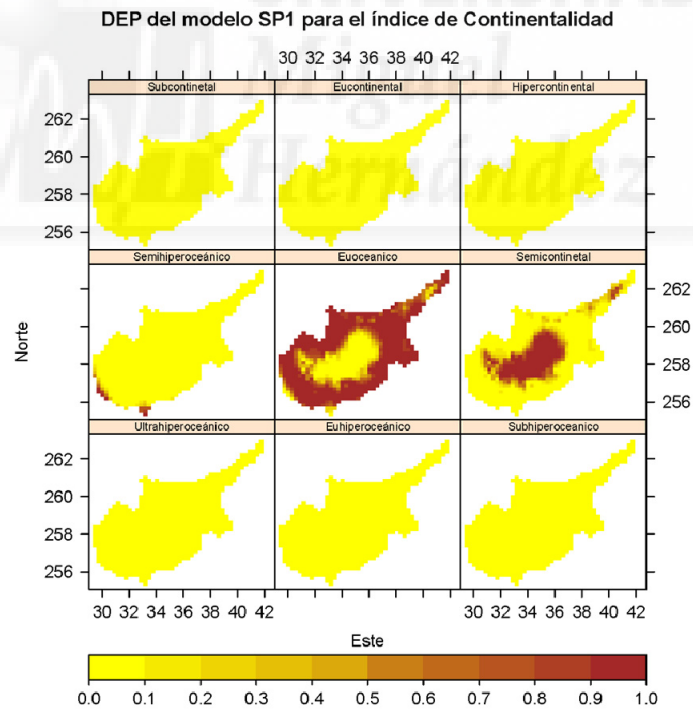
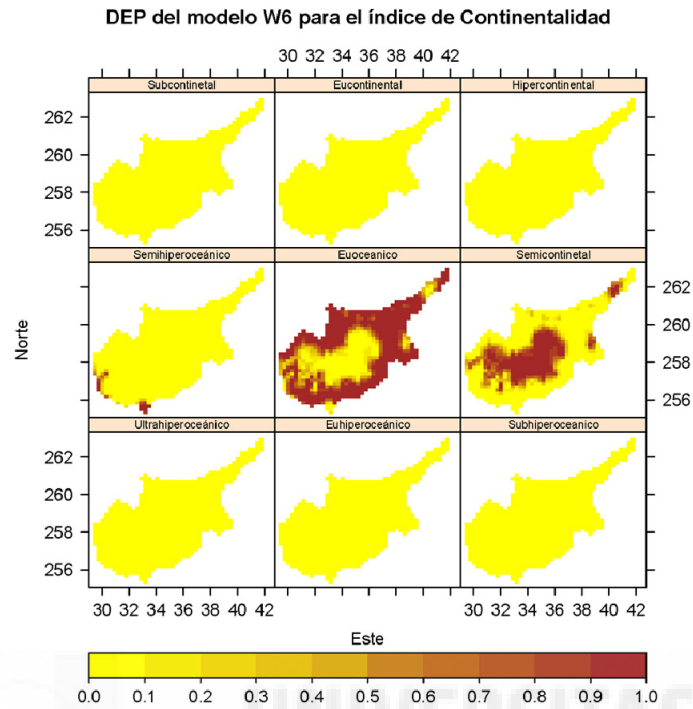


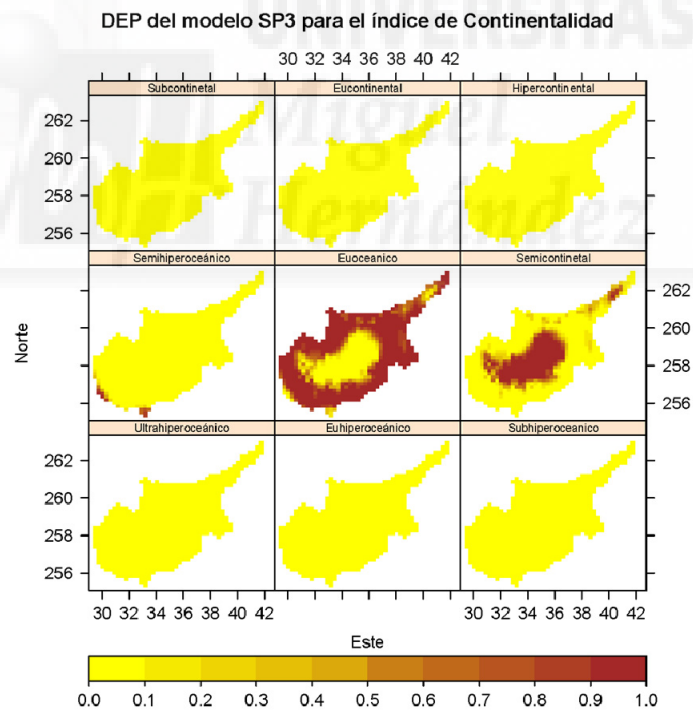
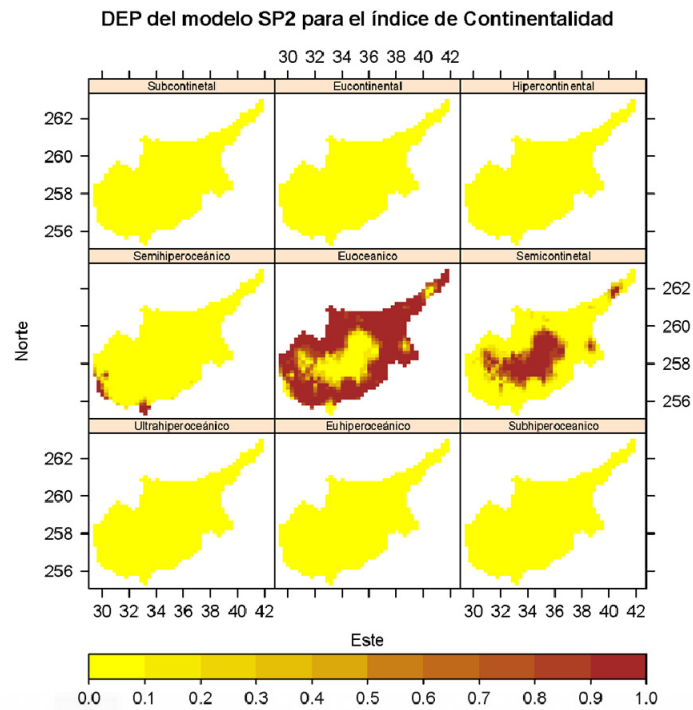


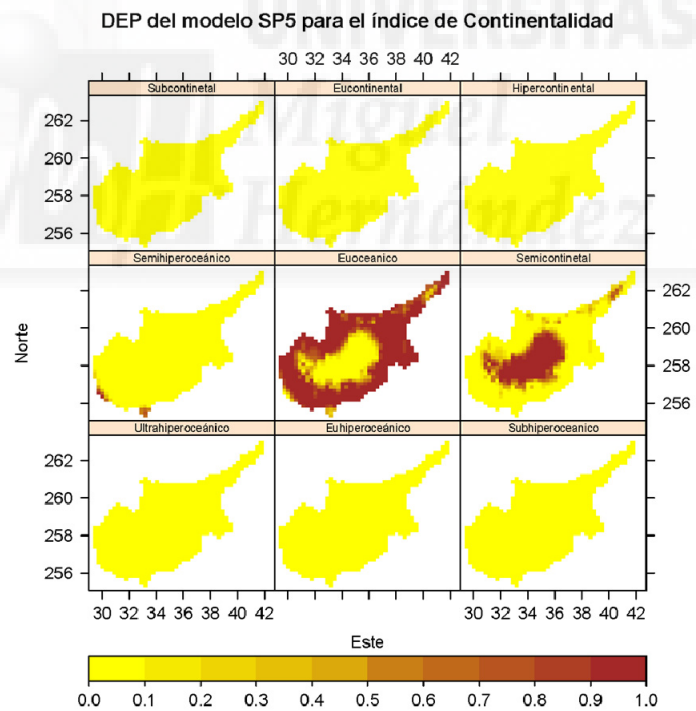
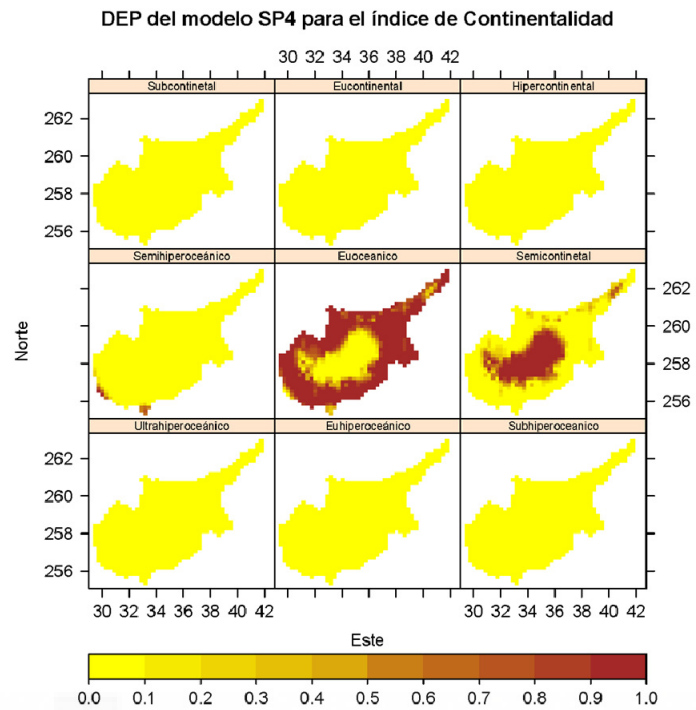


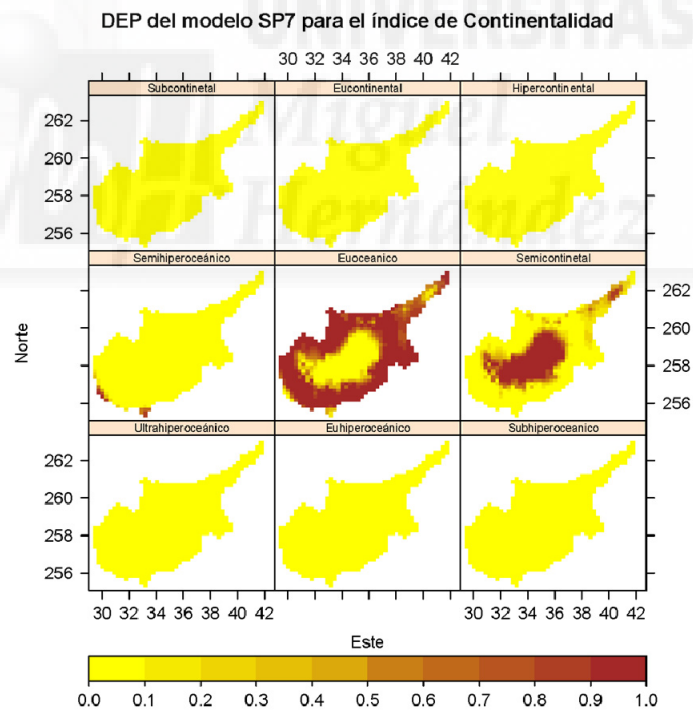
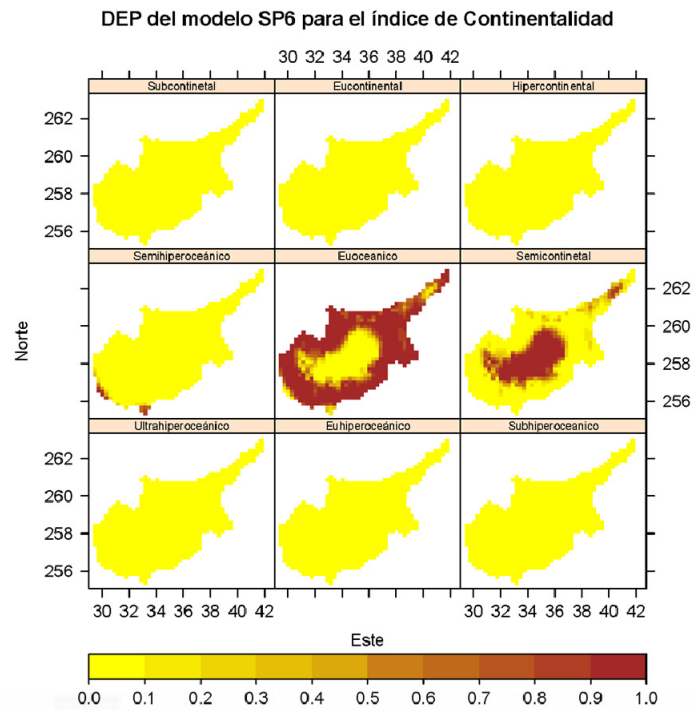


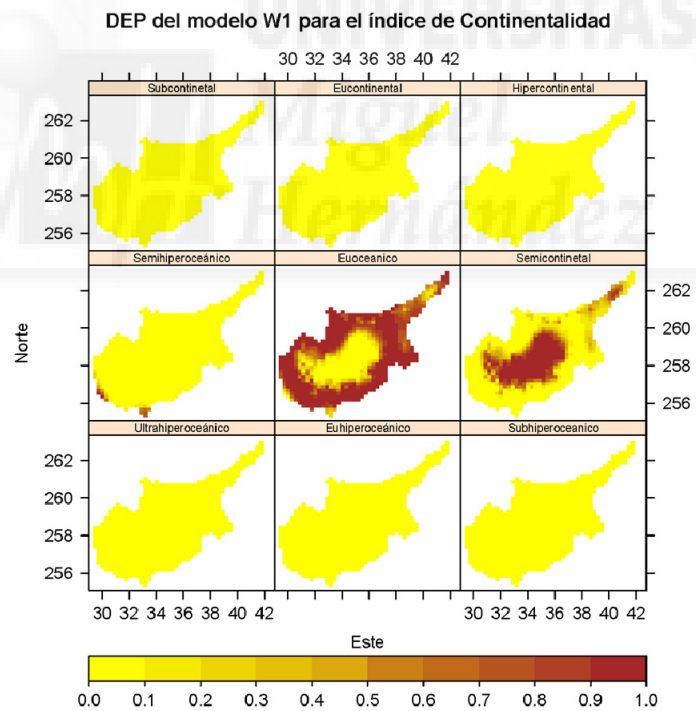
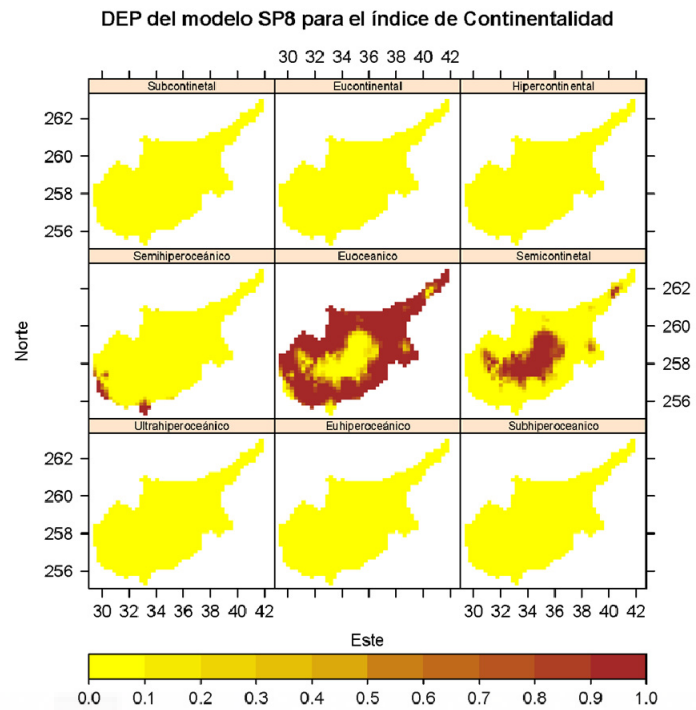
CONTINENTALIDAD

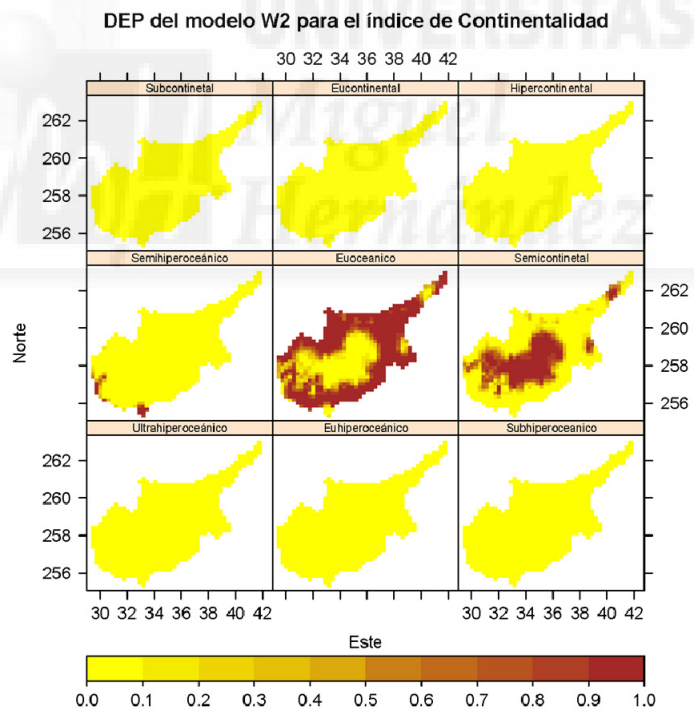
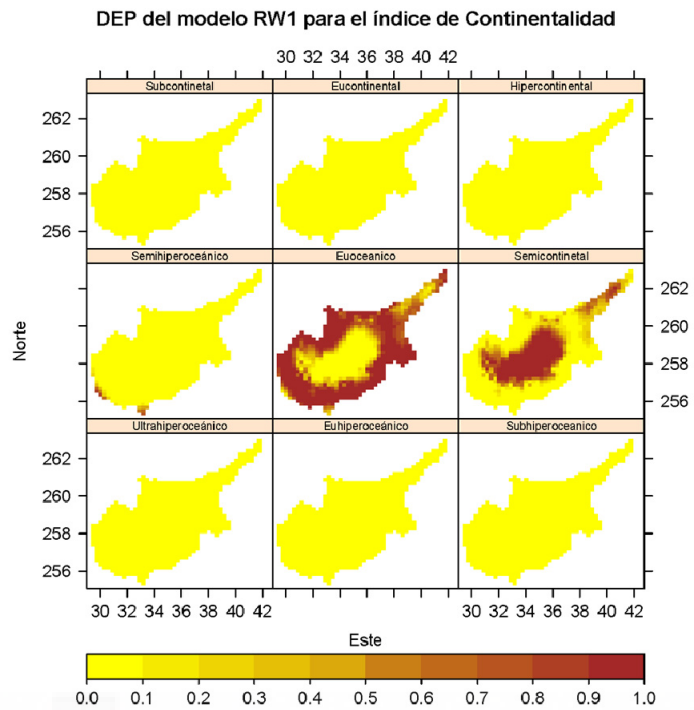


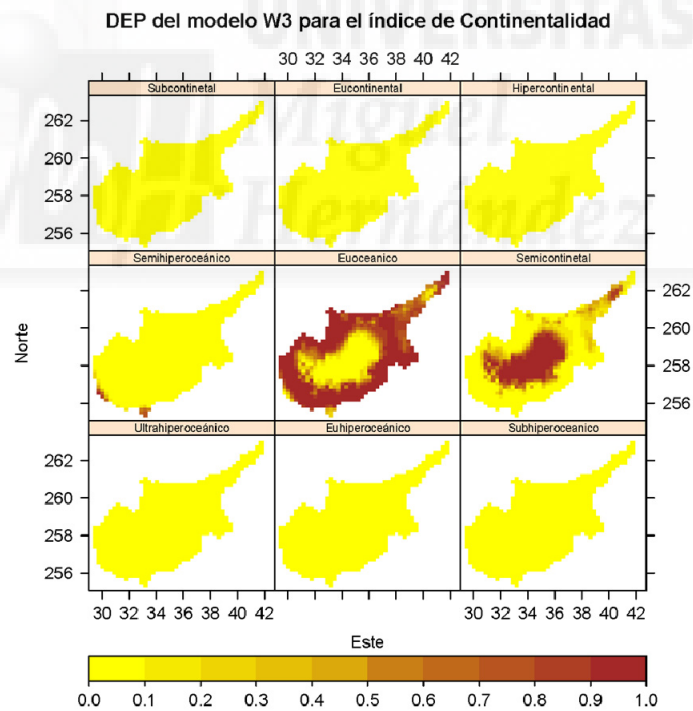
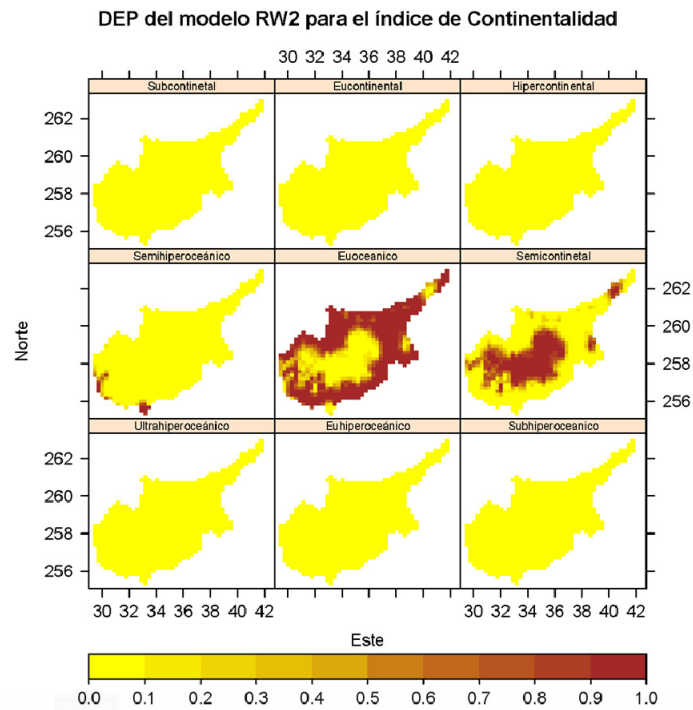


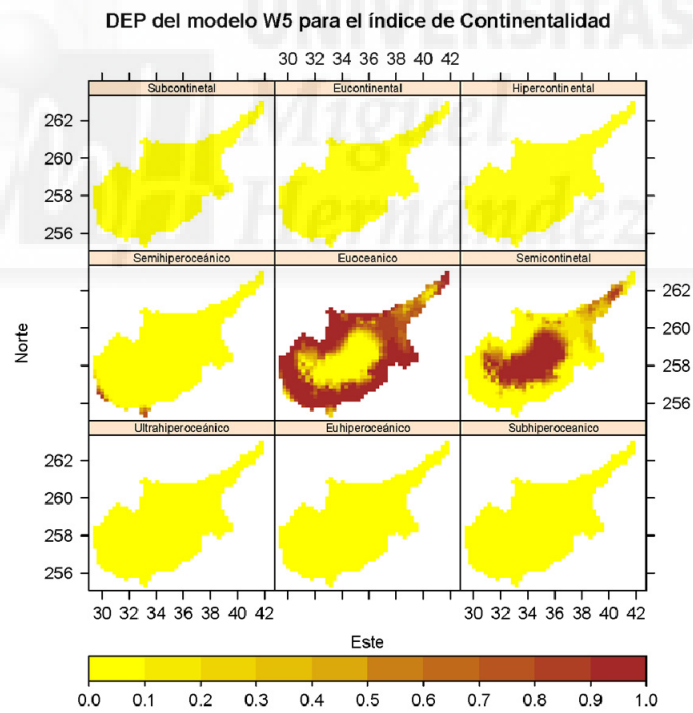
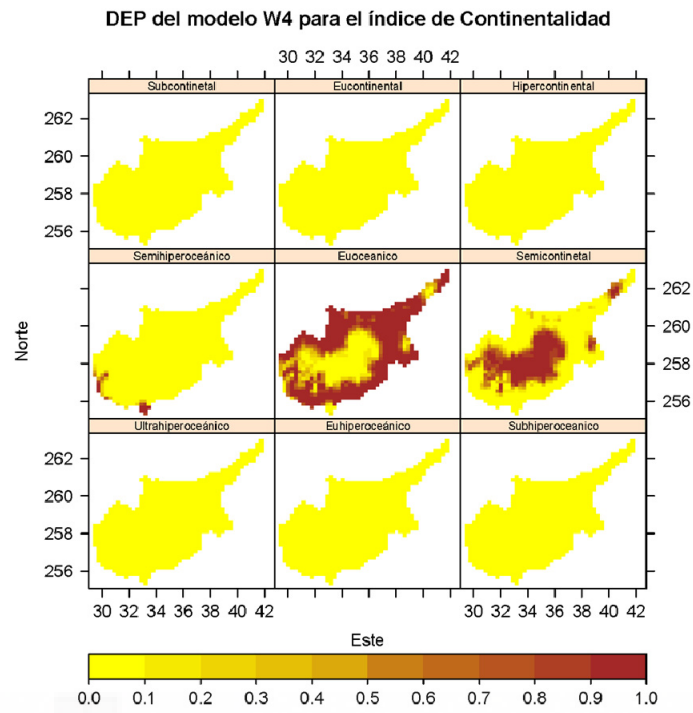










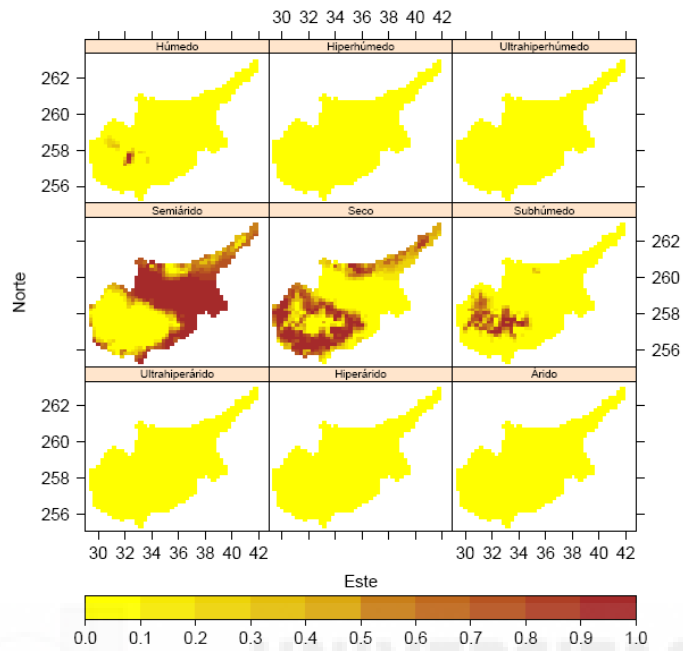


**Anexo X. Distribuciones Espaciales de Probabilidad
(Modelización Multivariante)**

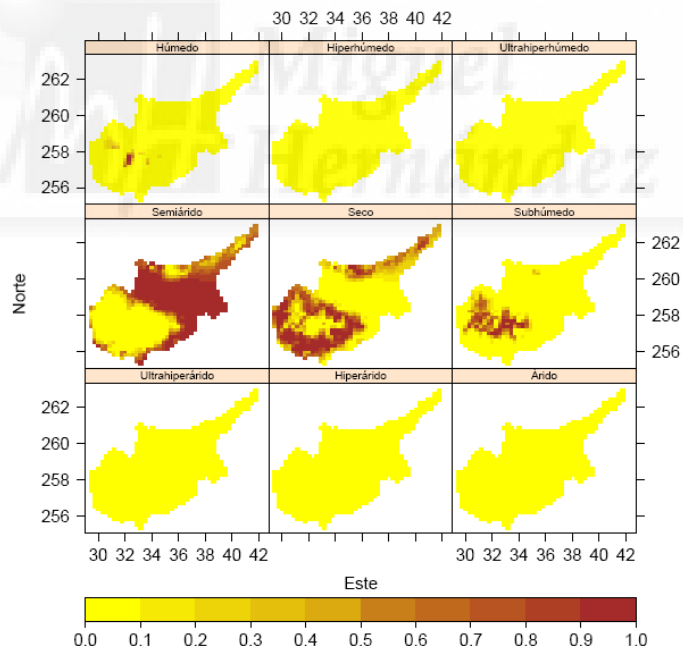


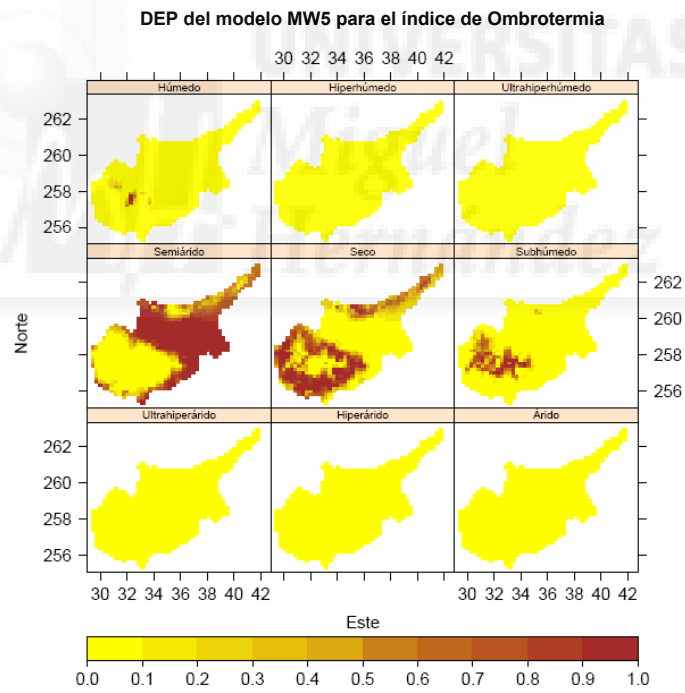
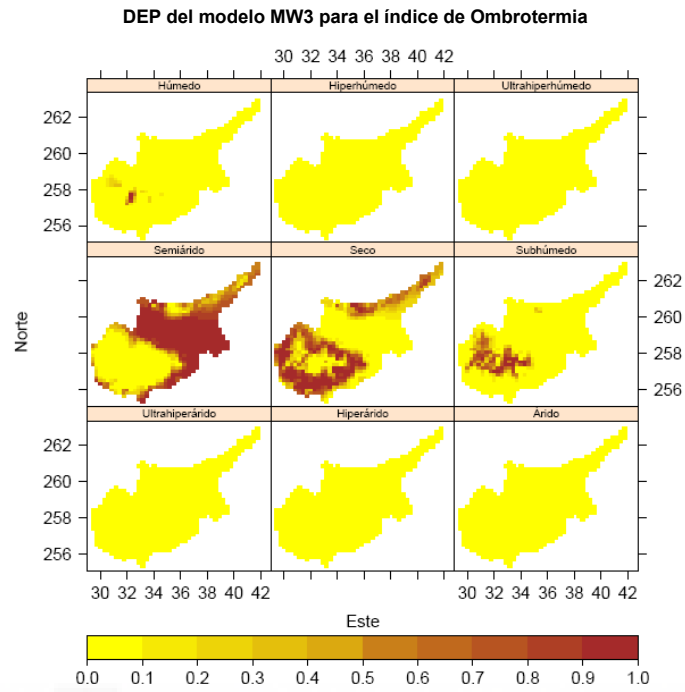
OMBROTERMIA

DEP del modelo MW1 para el índice de Ombrotermia



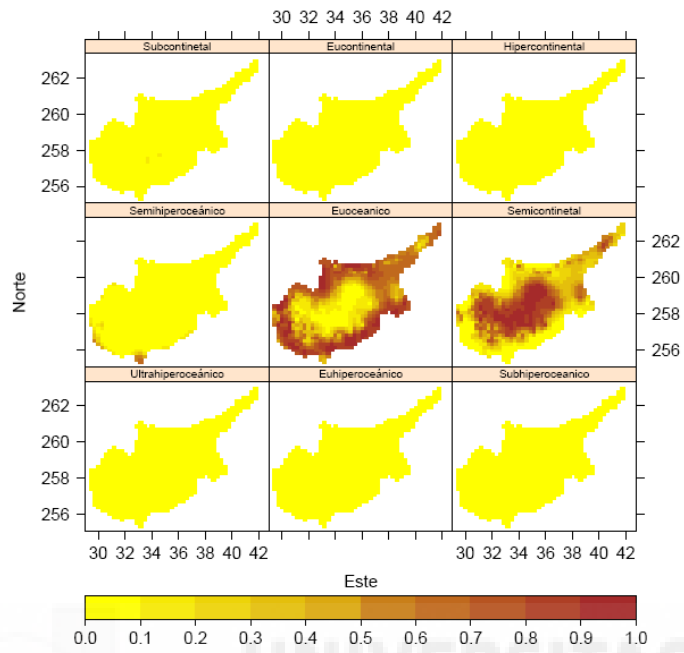
DEP del modelo MRW1 para el índice de Ombrotermia



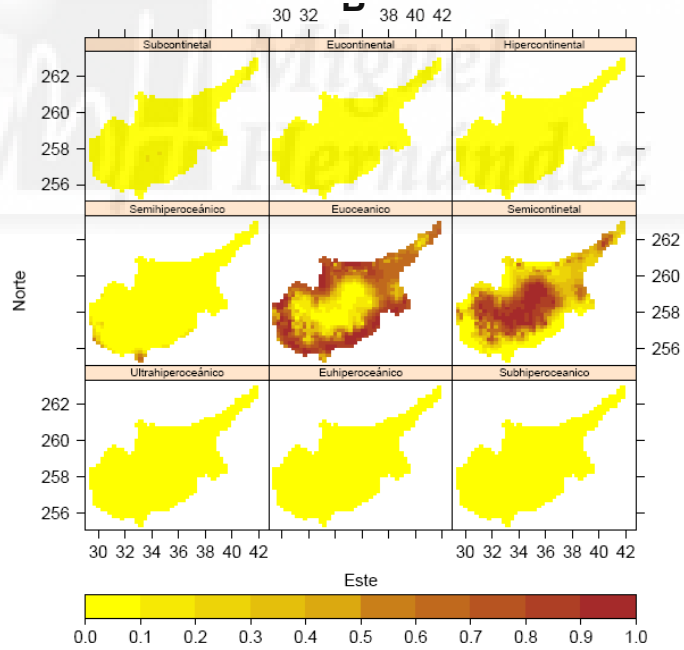


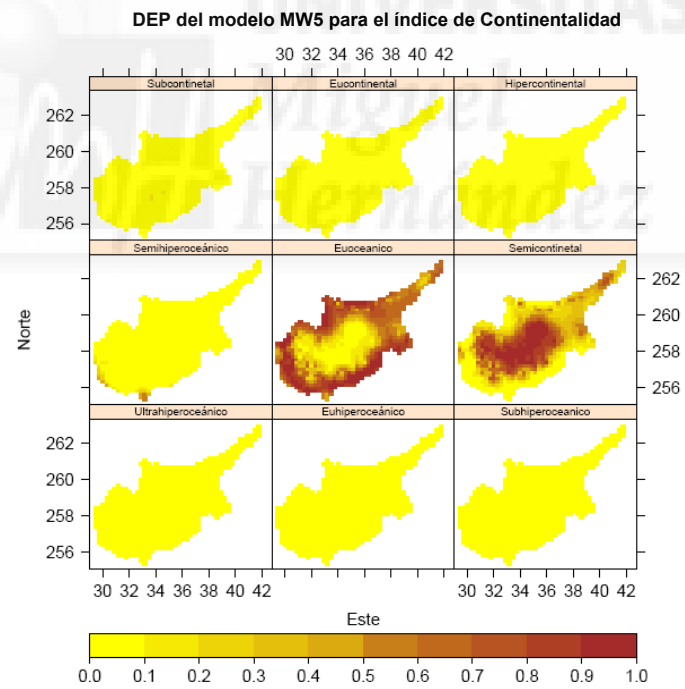
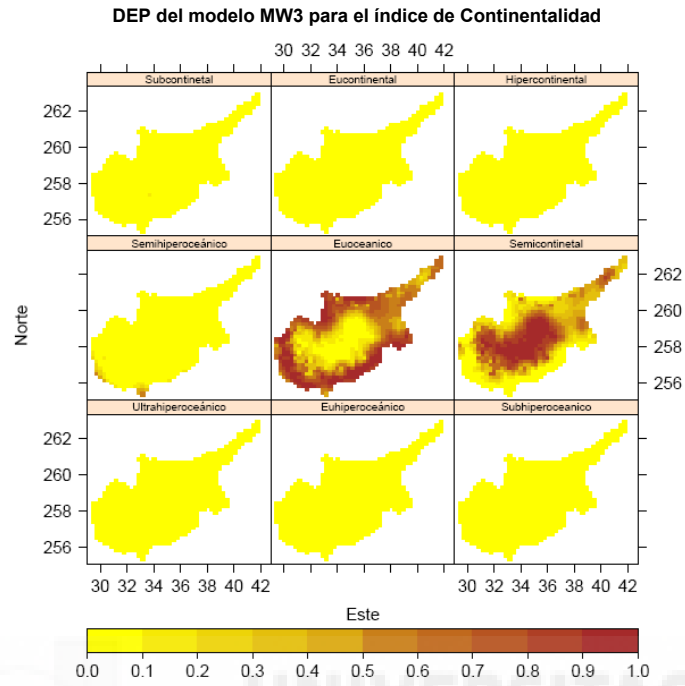
CONTINENTALIDAD

DEP del modelo MW1 para el índice de Continentalidad



DEP del modelo MRW1 para el índice de Continentalidad





Bibliografía

- Abrahamsen, N., 1993, Bayesian kriging for seismic depth conversion of a multilayer reservoir. In: A. Soares (Ed.), *Geostatistics Troia*. Academic Press, Boston, pp. 385-398.
- Abramowitz, M., 1972, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. John Wiley and Sons.
- Adams, N.M.; Kirby, S.P.J.; Harris, P. y Clegg, D.B., 1996. A review of parallel processing for statistical computation. *Statistics and Computing*, 6(1), 37-49.
- Agarwal, D.K. y Gelfand, A.E., 2005. Slice sampling for simulation based fitting of spatial data models. *Statistics and Computing*, 15(1), 61-69.
- Ahmed, S. y Demarsily, G., 1987. Comparison of Geostatistical Methods for Estimating Transmissivity Using Data on Transmissivity and Specific Capacity. *Water Resources Research*, 23(9), 1717-1737.
- Almeida, F.; Giménez, D.; Manitas, J.M. y Vidal, A.M., 2008, *Introducción a la programación paralela*. Paraninfo Cengage Learning, Madrid.
- Amigo, J. y Ramírez, C., 1998. A bioclimatic classification of Chile: woodland communities in the temperate zone. *Plant Ecology*, 136, 9-26.
- Arozena-Concepción, M.E. y Meaza-Rodríguez, G., 2000, *Metodología y práctica de la biogeografía*. : Serbal, Barcelona.
- Austin, M.P., 1981. Permanent quadrats: an interphase for theory and practice. *Vegetatio*, 46, 1-10.
- Austin, M.P. y Belvin, L., 1981. An analysis of succession along an environmental gradient using data from a lawn. *Vegetatio*, 46, 19-30.
- Bailey, N. T. J., 1980. Spatial Models in the Epidemiology of Infectious-Diseases. *Advances in Applied Probability*, 12(3), 560-561.
- Banerjee, S.; Carlin, B.P. y Gelfand, A.E., 2004, *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. Chapman & Hall/CRC
- Banerjee, S. y Gelfand, A.E., 2002. Prediction, Interpolation and Regression for Spatially Misaligned Data. *The Indian Journal of Statistics*, 64(A-2), 227-245.
- Barber, A., 1995. Contributions to the knowledge of the bioclimatology and vegetation of the island of Cyprus. Cyprus Forestry College, Higher Diploma in Forestry Thesis.
- Barber, A., 1999, Some considerations on the bioclimatology and potential vegetation of the Island of Cyprus (East Mediterranean), 42nd Annual Symposium of the IAVS: *Vegetation and Climate*, Bilbao.
- Barber, A.; Tun, J. y Crespo, M.B., 2001. A new approach on the bioclimatology and potential vegetation of the Yucatan Peninsula (Mexico). *Phytocoenologia*, 31(1), 1-31.
- Barry, R.G. y Chorley, R.J., 1972, *Atmósfera. Tiempo y clima*. Omega, Barcelona.
- Baxter, M., 1986. Geographical and Planning-Models for Data on Spatial Flows. *Statistician*, 35(2), 191-198.
- Bennett, R.J. y Haining, R.P., 1985. Spatial Structure and Spatial Interaction - Modeling Approaches to the Statistical-Analysis of Geographical Data. *Journal of the Royal Statistical Society Series a-Statistics in Society*, 148, 1-36.

- Berger, J.O.;DeOliveira, V. y Sansó, B., 2001. Objective Bayesian analysis of spatially correlated data. *Journal of the American Statistical Association*, 96, 1361-1374.
- Berke, O., 2004. Exploratory disease mapping: kriging the spatial risk function from regional count data. *International Journal of Health Geographics*, 3(1), 18.
- Berliner, L.M., 2000. Hierarchical Bayesian modeling in the environmental sciences. *Allgemeines Statistisches Archives, Journal of German Statistics Society*, 84, 141-153
- Besag, J., 1974. Spatial Interaction and Statistical-Analysis of Lattice Systems. *Journal of the Royal Statistical Society Series B-Methodological*, 36(2), 192-236.
- Blackford, L. S. ;Choi, J.;Cleary, A.;D' Azevedo, E. et al., 1997a, ScaLAPACK user's guide. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Blackford, L.S.;Choi, J.;Cleary, A.;D'Azevedo, E. et al., 1997b, ScaLAPACK users' guide. Incl. 1 CD-ROM. Software - Environments - Tools, 4. Philadelphia, PA: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics. 325 p.
- Bormann , F.H. y Likens, G.E., 1979, Pattern and process in a forested ecosystem. Springer-Verlag, New York.
- Bouma, J. y Verhagen, J., 1999, Environmental threshold values for agricultural production systems varying in space and time.
- Bourennane, H. ;King, D.;Chery, P. y Bruand, A., 1996. Improving the kriging of a soil variable using slope gradient as external drift. *European Journal of Soil Science*, 47(4), 473-483.
- Box, E.O., 1981, Macroclimate and plant forms: an introduction to predictive modeling in Phytogeography. W. Junk Publ, The Hague.
- Brooks, S.P. y Gelman, A. , 1997. General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7, 434-455.
- Brown, P.;Le, N. y Zidek, J.V., 1994a. Multivariate Spatial interpolation and exposure to air pollute. *The Canadian Journal of Statistics*, 22(489-509).
- Brown, P.J.;Le, N.D. y Zidek, J.V. , 1994b. Multivariate spatial interpolation and exposure to air pollutants. *Canadian Journal of Statistics*, 22, 489-510.
- Carballeira, A. et. al., 1987, Bioclimatología de Galicia. Fundación Pedro Barrié de la Maza.
- Carlin, B.P. y Louis, T.A., 2000, Bayes and Empirical Bayes methods for data analysis. 2nd edn. Chapman and Hall/ CRC Press, Boca Raton
- Carlin, B.P. y Louis, T.A., 2009, Bayesian methods for data analysis. 3rd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla; London.
- Clark, J.S., 2007, Models for ecological data : an introduction. Princeton University Press, Princeton, NJ. ; Oxford.
- Clark, J.S. y Gelfand, A.E., 2006, Hierarchical modelling for the environmental sciences: statistical methods and applications. Oxford University Press, Oxford.
- Congdon, P., 2001, Bayesian statistical modelling. Wiley, Chichester.
- Conradsen, K.;Nielsen, A. A. y Windfeld, K., 1992, Analysis of Geochemical Data Sampled on a Regional Scale, *Statistics in the Environmental and Earth Sciences*. Edward Arnold, London, England, pp. 283-300.
- Corsten, L.C.A. , 1989. Interpolation and optimal linear prediction. *Statistica Neerlandica* 43, 69-84.
- Cowles, M.K. y Carlin, B.P., 1996. Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434), 883-904.
- Cox, D.R. y Lewis, P.A.W., 1966, The Statistical analysis of series of events. Chapman and Hall, London.
- Cressie, N., 1986. Kriging Nonstationary Data. *Journal of the American Statistical Association*, 81(395), 625-634.
- Cressie, N., 1993, *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Cressie, N. y Hawkins, J., 1980. Robust estimation of the variogram. *Journal of Mathematical Geology*, 12(2), 115-116.

- Chen, M.;Shao, Q. y Ibrahim, J.G., 2000, Monte Carlo methods in Bayesian computation. Springer, New York.
- Chiles, J.P. y Delfiner, P., 1999, Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. Wiley, New York.
- De la Torre-García, A., 2007, Geobotánica. Universidad de Alicante, Alicante.
- del-Arco, M.;Acebes, J. R.;Perez-de-Paz, P. L. y Marrero, M. D., 1999. Bioclimatology and climatophilous vegetation of Hierro (part 2) and La Palma (Canary Islands). *Phytocoenologia*, 29(2), 253-290.
- del-Arco, M.;Perez-de-Paz, P. L.;Acebes, J. R.;Gonzalez-Mancebo, J. M. et al., 2006. Bioclimatology and climatophilous vegetation of Tenerife (Canary Islands). *Annales Botanici Fennici*, 43(3), 167-192.
- del-Arco, M.;Salas, M.;Acebes, J. R.;Marrero, M. D. et al., 2002. Bioclimatology and climatophilous vegetation of Gran Canaria (Canary Islands). *Annales Botanici Fennici*, 39(1), 15-41.
- Delcourt, H.R.;Delcourt, P.A. y Webb, T., 1983. Dynamic plant ecology: the spectrum of vegetational change in space and time. *Quaternary Science Reviews*, 153-175.
- DeOliveira, V., 2007. Objective Bayesian analysis of spatial data with measurement error. *The Canadian Journal of Statistics*, 35(2), 1-19.
- DeOliveira, V.;Kedem, B. y Short, D.A., 1997. Bayesian prediction of transformed Gaussian random fields. *Journal of the American Statistics Association*, 92(1422-1433).
- Diggle, P., 2003, Statistical analysis of spatial point patterns. Arnold, London.
- Diggle, P. y Ribeiro, P.J., 2007, Model-based Geostatistics. 2nd edition. Springer.
- Diggle, P.J., 1983, Statistical analysis of spatial point patterns. Academic Press, London.
- Diggle, P.J.;Tawn, J.A. y Moyeed, R.A., 1998. Model-based geostatistics. *Journal of the Royal Statistics Society. Serie C (Applied Statistics)*, 47, 299-350.
- Drury, W.H. y Nisbet, I.C.T., 1973. Succession. *Journal of Arnold Arboretum*, 54, 331-368.
- Ecker, M.D. y Gelfand, A., 1997. Bayesian variogram modeling for an isotropic spatial porces. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 2(347-369).
- Fernández-García, F., 1996, Manual de climatología aplicada: clima, medio ambiente y planificación. Síntesis, Madrid.
- Finley, A.O.;Banerjee, S. y Carlin, B.P., 2007. spBayes: An R Package for Univariate and Multivariate Hierarchical Point-referenced Spatial Models. *Journal of Statistical Software*, 19(4), 1-24.
- Forman, R.T.T. y Gordon, M., 1986, Landscape Ecology. John Wiley and Sons, New York.
- Fotheringham, A.S. y Rogerson, P., 1994, Spatial Analysis and GIS. Taylor & Francis, London.
- Gamerman, D., 1997, Markov chain Monte Carlo stochastic simulation for Bayesian inference. Chapman & Hall, London ; New York.
- Gelfand, A.E. ;Schmidt, A.M. y Sirmans, C.F. , 2003, Multivariate spatial process models: Conditional and unconditional Bayesian approaches using coregionalization, Working Paper Series 03-20, Institute of Statistics and Decision Sciences. Duke University, Durham, North Carolina.
- Gelfand, A.E. y Smith, A.F.M., 1990. Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85(410), 398-409.
- Gelman, A., 2004, Bayesian data analysis. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla; London.
- Gelman, A. y Rubin, D.B. , 1992. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, 457-511.
- Geman, S. y Geman, D., 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6), 721-741.
- Getis, A. y Boots, B. , 1978, Models of spatial processes. Cambridge University Press, Cambridge
- Geweke, J. , 1992, Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moment. In: J.M. Bernardo et al. (Eds.), *Bayesian Statistics 4* Clarendon Press, Oxford, UK. .

- Gilks, W.R.; Richardson, S. y Spiegelhalter, D.J., 1996, Markov Chain Monte Carlo in Practice. Chapman and Hall., London.
- Glenn-Lewin, D.C. y van del Maarel, E., 1992, Patterns and processes of vegetation dynamics. In: D.C. Glenn-Lewin et al. (Eds.), Plant succession theory and prediction. Population and Community Biology Series. Chapman & Hall, University Press, Cambridge, pp. 11-44.
- Golub, G.H. y Van Loan, C.F., 1996, Matrix computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore ; London.
- Good, I.J., 1965, The Estimation of probabilities: An essay on Modern Bayesian Methods. MIT Press, Cambridge.
- Goovaerts, P., 2000. Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall. *Journal of Hydrology*, 228(1-2), 113-129.
- Goovaerts, P., 2006. Geostatistical analysis of disease data: accounting for spatial support and population density in the isopleth mapping of cancer mortality risk using area-to-point Poisson kriging. *International Journal of Health Geographics*, 5(1), 52.
- Gotway, C.A. y Hartford, A.H., 1996. Geostatistical methods for incorporating auxiliary information in the prediction of spatial variables. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 1, 17-39.
- Grzebyk, M. y Wackernagel, H., 1994, Multivariate analysis and spatial/temporal scales: real and complex models, XVIIth International Biometrics Conference. International Biometrics Society, Ontario, pp. 19-33.
- Haining, R. P., 1990, Spatial Data Analysis in the Social and Environmental Sciences Cambridge University Press, Cambridge.
- Handcock, M.S y Stein, M.L., 1993. A bayesian Analysis of kriging. *Technometrics*, 35, 403-410.
- Handcock, M.S y Wallis, J., 1994. An approach to statistical spatial-temporal modeling of meteorological fields. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 368-390.
- Handcock, M.S., 1999. Prediction of Spatial Cumulative Distribution Functions Using Subsampling: Comment. *Journal of the American Statistical Association*, 94(445), 100-1002.
- Heinselman, M. L., 1973. Fire in the virgin forest of the Boundary Waters Canoe Area Minnesota. *Quaternary Research*, 3, 292-329.
- Hengl, T.; Heuvelink, G.B.M. y Stein, A., 2004. A generic framework for spatial prediction of soil variables based on regression-kriging. *Geoderma*, 120(1-2), 75-93.
- Hoef, J.M. y Cressie, N., 1993. Multivariable spatial prediction. *Mathematical Geology*, 25(2), 219-240.
- Holdrige, L.R., 1967, Life zone ecology, San José.
- Hudson, G. y Wackernagel, H., 1994. Mapping temperature using kriging with external drift: theory and an example from Scotland. *International Journal of climatology*, 14, 77-91.
- Huget del Villar, E., 1929, Geobotánica. Labor, Barcelona.
- Illian, J., 2008, Statistical analysis and modelling of spatial point patterns. John Wiley, Chichester.
- Inc., Wolfram Research, 2005, Mathematica Edition: Version 5.2. Wolfram Research Inc., Champaign, Illinois.
- Journel, A.G y Huijbregts, Ch.J., 1978, Mining Geostatistics. Academic Press, New York.
- Journel, A.G., 1983. Non-parametric estimation of spatial distributions. *Mathematical Geology*, 15(5), 673-687.
- Journel, A.G., 1986. Geostatistics, Models and Tools for the Earth Sciences. *Mathematical Geology*, 18(1), 119-140.
- Kaiser, M.S. y Cressie, N., 2000. The construction of multivariate distributions from Markov random fields. *Journal of Multivariate Analysis*, 73(2), 199-220.
- Karson, M.J.; Gaudard, M.; Linder, E. y Sinha, D., 1999. Bayesian analysis and computations for spatial prediction. *Environmental and Ecological Statistics*, 6, 147-182.

- Kitanidis, P.K., 1983. Statistical Estimation of Polynomial Generalized Covariance Functions and Hydrologic Applications. *Water Resources Research*, 19(4), 909-921.
- Kitanidis, P.K. y Lane, R.W., 1985. Maximum-Likelihood Parameter-Estimation of Hydrologic Spatial Processes by the Gauss-Newton Method. *Journal of Hydrology*, 79(1-2), 53-71.
- Köppen, W., 1918. Klassifikation der Klimate nach Temperatur, Niederschlag und Jahreslauf. *Petermanns Geogr. Mitt.*, 64, 193-203, 243-248.
- Köppen, W., 1936. *Grundriss der Klimakunde*, Berlin & Leipzig.
- Korenev, B. G., 2002. *Bessel functions and their applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton ; London.
- Krige, D.G., 1951a. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 52, 119-139.
- Krige, D.G., 1951b. A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand. MSc thesis. Thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg.
- Lahiri, S.N.;Kaiser, M.S.;Cressie, N. y Hsu, N-J., 1999. Prediction of spatial cumulative distribution functions using subsampling (with discussion.). *Journal of the American Statistical Association* 94, 86-110.
- Laslett, G. M., 1994. Kriging and Splines - an Empirical-Comparison of Their Predictive Performance in Some Applications - Rejoinder. *Journal of the American Statistical Association*, 89(426), 406-409.
- Lawson, A.B., 2008. *Hierarchical Modeling in Spatial Epidemiology* Chapman & Hall/CRC.
- Le, N. y Zidek, J.V., 1992. Interpolation with uncertain spatial covariances: A Bayesian alternative to kriging. *J. Mult. Anal*, 43, 351-374.
- Lee, D.J. y Durban, M., 2009. Smooth-CAR Mixed Models for Spatial Count Data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(8), 2968-2979.
- Lee, P.M., 1997. *Bayesian statistics : an introduction*. Arnold, London.
- Lee, S.;Wolberg, G. y Shin, S.Y., 1997. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3, 228-244.
- Lewis, Peter A. W., 1972. *Stochastic point processes : statistical analysis, theory, and applications: [papers presented at a conference held at the IBM Research Center, Yorktown Heights, New York on August 2-6, 1971]*. Wiley-Interscience, New York.
- Lunn, D.J.;Thomas, A.;Best, N. y Spiegelhalter, D., 2000. WinBUGS: A Bayesian modelling framework: Concepts, structure, and extensibility. *Statistics and Computing*, 10(4), 325-337.
- Mardia, K. V., 1984. Spatial Discrimination and Classification Maps. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 13(18), 2181-2197.
- Martinez Romos, M.;Alvarez-Buylla, E. y Sarukhan, J., 1989. Tree demography and gap dynamics in a tropical rain forest. *Ecology*, 70, 555-558.
- Matérn, B., 1960. *Spatial Variation*. Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut., 49(5).
- Matérn, B., 1986. *Spatial Variation*. 2nd Edition. Springer-Verlag, Berlin.
- Matheron, G., 1963. Principles of Geostatistics. *Economic Geology*, 58, 1246-1266.
- Matheron, G., 1982. La déstructuration des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices, Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- MATLAB version 6.5.1. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2003.
- Møller, J. y Waagepetersen, R.P., 2004. *Statistical inference and simulation for spatial point processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla. ; London.
- Mollié, A., 1996. Bayesian mapping of disease. In: S. Richardson & D.J. Spiegelhalter W.R. Gilks (Ed.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall. CRC Press/Boca Raton, London, pp. 360-379.
- Myers, D.E., 1982. Matrix Formulation of Co-kriging. *Mathematical Geology*, 14(249-257).
- Neal, R., 2000. Slice Sampling. *Annals of Statistics*, 31, 705-767.
- O'Hagan, A.;Forster, J. y Kendall, M.G., 2004. *Bayesian inference*. Arnold, London.
- Omre, H., 1987a. Bayesian Kriging-Merging Observations and Qualified Guesses in Kriging. *Mathematical Geology*, 19(1), 25-39.

- Omre, H., 1987b. A Bayesian kriging -merging observations and qualified.
- Omre, H. y Halvorsen, K. B., 1989. The Bayesian Bridge between Simple and Universal Kriging. *Mathematical Geology*, 21(7), 767-786.
- Patterson, H. D. y Thompson, R., 1971. Recovery of interblock information when block sizes are unequal. *Biometrika*, 58, 545-554.
- Peinado, M.;Alcaraz, F.;Delgadillo, J. y Aguado, I., 1994. Fitogeografía de la península de Baja California, México. *Anales del Jardín Botánico de Madrid*, 51(2), 255-277.
- Pena-Yewtukhiw, E.M.;Schwab, G.J.;Grove, J.H.;Murdock, L.W. et al., 2008. Spatial Analysis of Early Wheat Canopy Normalized Difference Vegetative Index: Determining Appropriate Observation Scale. *Agron. J.*, 100(2), 454-462.
- Pickett, S.T.A. y White, P.S. , 1985, *The ecology of natural disturbance and patch dynamics*. Academic Press, New York.
- Pielou, E. C., 1959. The Use of Point-to-Plant Distances in the Study of the Pattern of Plant-Populations. *Journal of Ecology*, 47(3), 607-613.
- R Development Core Team, 2009, R: A Language and Environment for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Ripley, B.D., 1981, *Spatial statistics*. Wiley, New York ; Chichester.
- Rivas-Martínez, S., 1981. Les étages bioclimatiques de la végétation de la Peninsule Ibérique. *Anales del Jardín Botánico de Madrid*, 37(2), 256.
- Rivas-Martínez, S., 1983. Pisos bioclimáticos de España. *Lazaroa* 5, 33-43.
- Rivas-Martínez, S., 1985a. Biogeografía y vegetación. Discurso ingreso Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 38-40.
- Rivas-Martínez, S., 1985b, Guiones de prácticas de Biogeografía y Bioclimatología.
- Rivas-Martínez, S., 1987a, Mapa de series de vegetación de España. ICONA, Madrid.
- Rivas-Martínez, S., 1987b, Nociones sobre Fitosociología, Biogeografía y Bioclimatología. In: M. Peinado yS. Rivas Martínez (Eds.), *La vegetación de España*. Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, pp. 17-45.
- Rivas-Martínez, S., 1990, Bioclimatic belts of West Europe (relations between bioclimate and plant ecosystems). . In: Depto. Biología Vegetal II (Botánica) (Ed.), *Eur. School Climate Nat. Hazards Course Univ. Complutense, Arles (Rhône)*. Strasbourg, pp. 225-246.
- Rivas-Martínez, S., 2004a, *Global Bioclimatics (Clasificación Bioclimática de la Tierra)*. Phytosociological Research Center.
- Rivas-Martínez, S., 2004b, *Worldwide Bioclimatic Classification System*. Phytosociological Research Center, Madrid.
- Rivas-Martínez, S.;Fernández-González, F. y Sánchez Mata, D., 1986. Datos sobre la vegetación del Sistema Central y Sierra Nevada. *Botanica Pharmaciae Complutensis*, 2, 21.
- Rivas-Martínez, S.;López, M.L. y Cantó, P., 2000, Mapa Termoclimático de Australia - Primera aproximación, III Encontro de Fitossociologia, Castelo Branco (Portugal).
- Rivas-Martínez, S.;Llousa, M.;Díaz, T.E.;Fernández-Gonzalez, F. et al., 1990. La vegetación del sur de Portugal (Sado, Alentejo y Algarve). *Itinera Geobotánica*, 3, 5-126.
- Rivas-Martínez, S.;Penas, A. y Díaz, T.E., 1997, Biogeographic Map of Europe: Regions, Provinces and Subprovinces. In: Servicio Cartográfico. Universidad de León (Ed.), León.
- Robert, C.P. y Casella, G., 1999, *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, New York.
- Rosenthal, J.S., 2000. Parallel computing and Monte Carlo algorithms. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 4(2), 207-236.
- Rossini, R.;Tierney, L. y Li, N. , 2003, Simple Parallel Statistical Computing in R. UW Biostatistics Working Paper Series, pp. <http://www.bepress.com/uwbiostat/paper193>.
- Royle, J.A. y Berliner, L.M., 1999. A hierarchical approach to multivariate spatial modeling and prediction. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 4, 29-56.
- Rübel, E., 1922, *Geobotanische Untersuchungsmethoden*, Berlin.

- Sampson, P.D. y Guttorp, P., 1992. Nonparametric-Estimation of Nonstationary Spatial Covariance Structure. *Journal of the American Statistical Association*, 87(417), 108-119.
- Short, M.;Carlin, B. P. y Gelf, A.E., 2002, Covariate-Adjusted and Bivariate Spatial CDF Modeling.
- Snyder, D.L., 1975, Random point processes. Wiley, New York ; London.
- Sousa, W. P., 1984. The role of disturbance in natural communities. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 15, 375-391.
- Stein, A. y Corsten, LCA., 1991. Universal Kriging and Cokriging as a Regression Procedure. *Biometrics* 47, 575-587.
- Stein, A.;Van Eijnsbergen, A. C. y Barendregt, L. G. , 1991. Cokriging Nonstationary. *Mathematical Geology*, 23(5), 703-719.
- Stein, M.L., 1999, Interpolation of Spatial Statistics Data: Some Theory for Kriging. Springer-Verlang, New York.
- Thornthwaite, C.W., 1931. The climates of North America according to a new classification. *Geogr. Rev.*, 21, 633-655.
- Thornthwaite, C.W., 1933. The climates of the Earth. *Geogr. Rev.*, 23, 433-440.
- Thornthwaite, C.W., 1984. An approach towards a rational classification of climate. *Geogr. Rev.* , 38, 55-94.
- Tuhkanen, S., 1980. Climatic parameters and indices in plant geography. *Acta Phytogeogr. Suecia*, 67, 1-110.
- Tuhkanen, S., 1984. A circumboreal system of climatic-phytogeographical regions. *Acta Botanica Fennica*, 127, 1-50.
- Upton, G.J.G. y Fingleton, B., 1985, Spatial data analysis by example. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex.
- van de Geijn, R. A.;Alpatou, P.;Baker, G.;Edwards, C. et al., 1997, Using PLAPACK: parallel linear algebra package. MIT Press.
- Van Dongen, 2006. Prior specification in Bayesian statistics: Three cautionary tales. *Journal of Theoretical Biology*, 242 90-100.
- Viers, Georges, 1975, Climatología. Oikos-Tau, Vilassar de Mar (Barcelona).
- Wackernagel, H., 1998, Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications, Second Edition, vol. 291. Springer-Verlag.
- Wackernagel, H., 2003, Multivariate Geostatistics: an Introduction with Applications, 3rd edition. Springer, New York.
- Watt, A. S., 1947. Pattern and process in the plant community. *Journal of Ecology*, 35, 1-22.
- Whiley, M. y Wilson, S.P., 2004. Parallel algorithms for Markov chain Monte Carlo methods in latent spatial Gaussian models. *Statistics and Computing*, 14(3), 171-179.
- Whittle, P., 1954. On Stationary Processes in the Plane. *Biometrika*, 41(3-4), 434-449.
- Woodbury, A., 1989. Bayesian updating revisited. *Mathematical Geology*, 21, 285-308.
- Woodward, F.I., 1987, Climate and plant distribution. Cambridge Univ. Press.
- Woodward, F.I. y Williams, B.G., 1987. Climate and plant distribution at global and local scales. *Vegetatio* 69, 189-197.
- Xiaoqian, S.;Zhuoqiong, H. y John, K., 2008. Bayesian spatial prediction of the site index in the study of the Missouri Ozark Forest Ecosystem Project. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(7), 3749-3764.
- Yan, J.;Cowles, M.K.;Wang, S. y Armstrong, M., 2007. Parallelizing MCMC for Bayesian spatiotemporal geostatistical models. *Statistics and Computing*, 17(4), 323-335.
- Zhu, J.;Lahiri, S. N. y Cressie, N., 2002. Asymptotic Inference for Spatial CDFS over Time. *Statistica Sinica*, 12, 843-861
- Zonneveld, I.S., 1995, Land ecology: An introduction to landscape ecology as a base for land evaluation, land management and conservation. SPB Academic Publishing, Amsterdam.

