



Programa de Doctorado en Economía  
Instituto Centro de Investigación Operativa

**Sistema de costos en cadenas de suministro y compras  
conjuntas con descuento: un enfoque de teoría de juegos**

**Gerardo Alexander Vergara Mesa**

Directora de la tesis

Dra. Dña. Ana Meca Martínez

Codirector de la tesis

Dr. D. José Antonio García Martínez

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE

2024





---

La presente Tesis Doctoral, titulada, “**Sistema de costos en cadenas de suministro y compras conjuntas con descuento: un enfoque de teoría de juegos**”, se presenta bajo la modalidad de **tesis convencional con el siguiente indicio de calidad:**

- Gerardo Alexander- Vergara Mesa, Ana Meca and José Antonio García Martínez. A Cooperative Purchasing with General Discount: A Game Theoretical Approach Mathematics 2022, 22, 4195,

DOI: <https://doi.org/10.3390/math10224195>

JCR 2022: 2.4 Q1



#### IV

---

La Dra. Dña. *Ana Meca Martínez*, directora y el Dr. D. *José Antonio García Martínez*, codirector de la tesis doctoral titulada **“Sistema de costos en cadenas de suministro y compras conjuntas con descuento: un enfoque de teoría de juegos”**

#### **INFORMAN:**

Que D. *Gerardo Alexander Vergara Mesa* ha realizado bajo nuestra supervisión el trabajo titulado **“Sistema de costos en cadenas de suministro y compras conjuntas con descuento: un enfoque de teoría de juegos”** conforme a los términos y condiciones definidos en su Plan de Investigación y de acuerdo al Código de Buenas Prácticas de la Universidad Miguel Hernández de Elche, cumpliendo los objetivos previstos de forma satisfactoria para su defensa pública como tesis doctoral.

Lo que firmamos para los efectos oportunos, en Elche a 19 de febrero de 2024.

Directora de la tesis  
Dra. Dña. *Ana Meca Martínez*

Codirector de la tesis  
Dr. D. *José Antonio García Martínez*



La Dra. Dña. *Ana Meca Martínez*, Coordinadora del Programa de Doctorado Interuniversitario en Economía (DEcIDE)

**INFORMA:**

Que D. *Gerardo Alexander Vergara Mesa* ha realizado bajo la supervisión de nuestro Programa de Doctorado el trabajo titulado **“Sistema de costos en cadenas de suministro y compras conjuntas con descuento: un enfoque de teoría de juegos”** conforme a los términos y condiciones definidos en su Plan de Investigación y de acuerdo al Código de Buenas Prácticas de la Universidad Miguel Hernández de Elche, cumpliendo los objetivos previstos de forma satisfactoria para su defensa pública como tesis doctoral.

Lo que firmo para los efectos oportunos, en Elche a 19 de febrero de 2024.

Prof. Dra. Dña. *Ana Meca Martínez*  
Coordinadora del Programa de Doctorado Interuniversitario en Economía (DEcIDE)

Con profunda gratitud, reconozco la guía divina que ha iluminado mi trayectoria académica. A Dios, fuente de fortaleza y sabiduría, le agradezco por cada paso en este camino hacia el conocimiento. Agradezco a mis excelentes tutores, Dr. José Antonio García Martínez y Dra. Ana Meca Martínez, por la dedicación que han generado en el presente trabajo, por sus sugerencias, lineamientos y rigor en el mismo, gracias por la confianza desde inicio.

A mi querida Familia; mi esposa Sonia Muñoz, mis hijos Lina Vanessa, José David, mi nieto Thomas y yerno Sebastián, de igual forma a mis queridos hermanos Jesús, Jorge y William por su apoyo incondicional.

El deseo es no olvidar a ninguna de las personas que me han apoyado de una u otra forma en este proceso, con sus ideas y mensajes de apoyo que siempre son necesarios.

# Índice general

<b>Índice de tablas</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Cadena de suministro del sector panificador en Colombia: sistema de costos</b>	<b>9</b>
Introducción . . . . .	9
1.1. Fundamentos de la cadena de suministro . . . . .	10
1.1.1. La contabilidad de costos y gestión en la cadena de suministros . . . . .	13
1.2. Metodología . . . . .	14
1.3. Cadena de suministros del sector panificador en Colombia . . . . .	14
1.3.1. Sistema de costos para el sector panificador en Colombia . . . . .	15
1.4. Aplicación del sistema de Costos . . . . .	24
1.5. Conclusiones . . . . .	31
<b>2. Compras conjuntas con descuento general</b>	<b>34</b>
Introducción . . . . .	34
2.1. Revisión de la literatura . . . . .	38
2.2. Juegos de compras conjuntas con descuento general . . . . .	41
2.3. Regla de Equal Price para juegos CCL . . . . .	44
2.4. Regla Balanced Different Price para juegos CCNL . . . . .	47
2.5. La familia de las reglas $\alpha$ -proporcionales . . . . .	51
2.6. Condición para que una regla $\alpha$ -proporcional sea una regla BDP . . . . .	54
2.7. Ilustración numérica . . . . .	59
2.8. Conclusiones y futuras líneas de investigación . . . . .	61

---

<b>3. Compras conjuntas en el sector panificador en Colombia: una aplicación</b>	<b>63</b>
Introducción . . . . .	63
3.1. Compras conjuntas en harina de trigo . . . . .	65
3.2. Compras conjuntas en fertilizantes . . . . .	67
<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>Apéndice A. Cooperative Purchasing with General Discount: A Game Theoretical Approach</b>	<b>79</b>

# Índice de tablas

1.1. Variables del modelo . . . . .	18
1.2. Parámetros del modelo . . . . .	19
1.3. Resultados de la aplicación del modelo de costos . . . . .	31
2.1. Ejemplo 1 con $\alpha^* > 0$ . . . . .	60
2.2. Ejemplo 2 con $\alpha^* = 0$ . . . . .	61
3.1. Caso 1. Harina de Trigo . . . . .	66
3.2. Caso 2. Fertilizantes . . . . .	68



## Resumen

La presente tesis doctoral propone inicialmente, un sistema de costos para la cadena de suministro del sector panificador en Colombia, especialmente conformado por Micro, Pequeñas y Medianas Empresas (MiPymes). Se introduce la metáfora de considerar la cadena de suministro como una sola empresa, lo cual facilita la generación de indicadores horizontales fundamentales y prácticos. Estos indicadores incluyen el costo unitario, precio y margen unitarios equivalentes, así como el peso relativo de cada eslabón en la cadena. La metodología utilizada se basa en un estudio de caso, donde los resultados pueden ser útiles para tomar decisiones que fomenten la colaboración, optimicen los recursos y mejoren la rentabilidad. Posteriormente, nos enfocamos en la cooperación en compras conjuntas en una parte de la cadena. Analizamos situaciones de compra cooperativa, denominadas juegos de compras conjuntas con descuento general (juegos CCDG). Demostramos que la gran coalición puede obtener reducciones significativas en los costos, ya que los juegos CCDG son subaditivos. Luego, mostramos que estos juegos son equilibrados mediante la aplicación de la regla *Equal Price* (EP), la cual garantiza la eficiencia y estabilidad en la asignación de costos reducidos generados por el modelo CCDG. Posteriormente, nos concentramos en un enfoque alternativo para obtener reglas *Different Price* (DP) para juegos de compra cooperativa con descuento lineal (juegos CCNL). Este enfoque consiste en repartir proporcionalmente el costo de la gran coalición, considerando los costos individuales y la regla EP. Obtenemos una familia paramétrica de reglas proporcionales, denominadas reglas  $\alpha$ -proporcionales, que están relacionadas con la familia de reglas *Balanced Different Price* (reglas BDP). Demostramos que siempre hay un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP, lo cual establece un rango de parámetros aceptables para todos los agentes, tanto grandes como pequeños compradores. Finalmente, se realiza una aplicación de compras conjuntas en el sector panificador en Colombia, en dos eslabones de la cadena, para validar las propiedades de las reglas utilizando datos reales. Esto confirma la coherencia teórica y proporciona información que facilita la comprensión e identificación de oportunidades para formular estrategias en compras cooperativas.

## Summary

This doctoral thesis initially proposes a costing system for the supply chain of the bakery sector in Colombia, especially for Micro, Small and Medium Enterprises (MSMEs). The metaphor of considering the supply chain as a single company is introduced, which facilitates the generation of fundamental and practical horizontal indicators. These indicators include unit cost, equivalent unit price and margin, as well as the relative weight of each link in the chain. The methodology used is based on a case study, where the results can be useful for making decisions that encourage collaboration, optimize resources and improve profitability. Subsequently, we focus on cooperation in joint purchasing in one part of the chain. We analyze cooperative purchasing situations, called joint purchasing games with general discount (CCDG games). We show that the large coalition can obtain significant cost reductions, as CCDG games are subadditive. Then, we show that these games are balanced by applying the Equal Price (EP) rule, which guarantees efficiency and stability in the allocation of reduced costs generated by the CCDG model. Also, we focus on an alternative approach to obtain Different Price (DP) rules for linearly discounted cooperative buying games (CCNL games). This approach consists of proportionally apportioning the cost of the large coalition, considering the individual costs and the EP rule. We obtain a parametric family of proportional rules, called  $\alpha$ -proportional rules, which are related to the family of balanced different price rules (BDP). We show that there is always a threshold  $\alpha$  above which any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule, which establishes a range of acceptable parameters for all agents, both large and small buyers. Finally, an application of joint purchases in the bakery sector in Colombia, in two links of the chain, is carried out to validate the properties of the rules using real data. This confirms the theoretical consistency and provides information that facilitates the understanding and identification of opportunities to formulate cooperative purchasing strategies.

## **Introducción**

Fomentar la colaboración en costos de operación entre empresarios involucrados en actividades productivas afines dentro de cadenas de suministro emerge como un objetivo estratégico para mejorar la rentabilidad de estos. No obstante, se presenta la complejidad de identificar cuáles son las cuentas de costos relevantes que pueden afectar negativamente la rentabilidad de los agentes. Posteriormente, se debe verificar si en estas cuentas de costos es factible la cooperación. Estas circunstancias, de identificar los costos significativos y las posibles acciones de cooperación entre agentes para mejorar los costos de operación, se convierten en un problema a resolver. En Colombia, los sistemas de acumulación de costos, tales como los sistemas por procesos, por órdenes de producción y los costos basados en actividades (ABC), son utilizados tradicionalmente y de manera individual. Estos sistemas proporcionan información a nivel individual por empresa y no articulan a los diversos agentes dentro de la cadena de suministro. Esta debilidad en la interconexión entre agentes destaca la necesidad de desarrollar una metodología de medición de costos conjunta que no solo capture información relevante, sino que también sea útil para identificar oportunidades, proponer y formular estrategias de cooperación, como las compras colaborativas entre los agentes involucrados.

En línea con este contexto, el objetivo inicial de la tesis es proponer un sistema de costos para la cadena de suministro del sector panificador en Colombia que facilite la medición conjunta de los costos más relevantes. En la metáfora de ver la cadena como una sola empresa, los resultados de la medición de costos pueden ser útiles para el análisis e identificación de oportunidades de colaboración entre agentes que deseen cooperar para mitigar los altos costos que se pueden generar en las operaciones consideradas clave en la cadena. Para apoyar este propósito, se realiza un análisis bibliográfico de los trabajos sobre sistemas de acumulación de costos para cadenas de suministro, que muestren cohesión o colaboración, en términos de contribución

con la información para el procesamiento de datos y análisis de resultados conjuntos. Luego, como oportunidad de cooperación en la cadena de suministro, se plantea un modelo de compras conjuntas con descuento general, con un enfoque de teoría de juegos, lo cual podría generar reducciones significativas en los costos de los agentes que estén dispuestos a colaborar. En este sentido, se lleva a cabo una revisión de la literatura sobre las investigaciones realizadas sobre modelos de compras conjuntas que pueden generar beneficios entre los agentes. Posteriormente, con el modelo propuesto, realizamos una aplicación en dos eslabones de la cadena de suministro del sector panificador en Colombia, con datos reales, lo cual permitió visualizar las diferentes situaciones de colaboración.

Para alcanzar el propósito inicial, se realiza una revisión de la literatura relacionada con las características generales de los sistemas de costos que puede ser aplicables para la cohesión y la colaboración en cadenas de suministro o similares. Se identifican los trabajos relacionados que aborden los temas gestión de costos con fines de proporcionar información procesable y analizable de manera conjunta. De manera complementaria se establecen alianzas con pequeños grupos de empresarios para identificar los problemas comunes relacionados con los altos costos de operación, así como en la definición de posibles acciones, como las compras conjuntas, que puedan implementarse para abordar los problemas de sobre costos en la operaciones habituales de las MiPymes.

Es necesario establecer los principios de los sistemas de costos, y su relación con procesos de colaboración para facilitar la gestión empresarial. Inicialmente, figuras precursoras como Frederick Taylor y Henri Fayol sentaron las bases para medir y optimizar los recursos (Taylor, 1911; Fayol, 1916 ). Sin embargo, la creciente interdependencia entre empresas requiere un enfoque colaborativo en la medición y gestión de costos. Con un enfoque que se centre en la eficiencia y organización de los procesos productivos, especialmente en contextos con predominio de MiPymes donde la colaboración es esencial para mantener la continuidad y la competitividad.

En relación con los sistemas de acumulación de costos, que son base fundamental para la adecuada medición, se destaca el enfoque de los sistemas de costos por procesos y por órdenes de producción que han sido fundamentales para la acumulación periódica de los recursos invertidos en la operación habitual de las empresas. El primero, introducido por Eggleston en 1906, se centró en asignar costos a cada etapa de producción, mientras que el segundo, desarrollado por Clark en 1923, fue esencial para empresas con producción personalizada o por lotes.

Posteriormente, el surgimiento de los Costos Basados en Actividades (ABC) en la década de 1980 revolucionó la asignación de costos al considerar primero las actividades y luego los productos, desagregando los procesos en actividades (Kaplan & Cooper, 1998). Aunque fue un avance, su complejidad limitó su capacidad para fomentar la colaboración entre empresas, ya que la desagregación de información a nivel de actividad puede exhibir acciones clave del éxito de algunos empresarios y en consecuencia considerarse información confidencial.

Otras contribuciones relevantes, como el Time-Driven Activity-Based Costing (TDABC) de Kaplan & Anderson (2007) y el enfoque de Horngren et al. (2009), profundizan en estas evoluciones. El TDABC, por ejemplo, incorpora los tiempos en las actividades, estandarizando los costos de los años 80 y mejorando el control y la optimización de la capacidad utilizada. Esto, a su vez, reduce los costos de implementación debido a la simplicidad en la asignación de costos. Por otro lado, el enfoque de Horngren et al. (2009), resalta la importancia de revisar constantemente la relación entre ingresos y costos para mantener el control. La información de la contabilidad de costos es crucial para tomar decisiones estratégicas que puedan impactar positivamente. En consecuencia, las investigaciones relacionadas subrayan la necesidad de modelos administrativos y de costos más colaborativos para abordar limitaciones y aprovechar oportunidades de cooperación entre grupos empresariales interconectados, que podrían considerarse cadenas de suministro contemporáneas.

Las organizaciones, en función de sus características y necesidades individuales y conjuntas, requieren la implementación de diversos enfoques en la medición y gestión de costos, lo que demanda una modelización especial y versátil. Los sistemas de acumulación de costos híbridos, según Rincón & Vergara (2013), son flexibles y pueden integrar múltiples sistemas de costos, siempre y cuando las condiciones y la colaboración sean posibles. Esto podría generar resultados sobre los costos por proceso, lote o actividad, permitiendo incluir información específica relevante para la cooperación entre organizaciones. Para lograr esto, es fundamental identificar claramente los datos útiles que deben generar estos sistemas, lo que facilitará un análisis deductivo para obtener resultados de información que sean fundamentales para la toma de decisiones y una posible gestión conjunta. Si bien este debería ser el alcance de todo sistema de costos en cadena, la presente tesis no alcanza este nivel debido a la complejidad del detalle de los datos, lo que podría desarrollarse en investigaciones futuras.

Algunos autores como los referidos a continuación señalan desafíos y virtudes en la implementación de modelos de costos colaborativos. Según Anderson (2006), concluyó proponiendo que los investigadores en contabilidad de gestión están excepcionalmente calificados para crear un conjunto de conocimientos sobre gestión de costos estratégicos que unifique la gestión de

costos estructurales y de ejecución. Este tipo de modelos, podrían definirse como herramientas que facilitan a los diversos actores en una cadena de suministro compartir información de costos de manera colaborativa, con el objetivo de alcanzar eficiencias y reducciones en los costos que mitiguen la deficiente comunicación y problemas tecnológicos, culturales y financieros (Arango-Serna et al., 2013). La ausencia de sistemas de costos colaborativos plantea la necesidad de desarrollar sistemas de acumulación de costos que fomenten la colaboración en la cadena de suministro. Además, es crucial considerar el alto interés en desarrollar este tipo de sistemas. Según estudios como el de Alamo & Mora (2013), los resultados indican que algunos empresarios no perciben como relevante la cooperación en sistemas de costos en cadena debido a la escasa interacción entre proveedores y distribuidores con la entrega a tiempo. No obstante, destacan la necesidad de reducir costos como objetivo principal.

Después, en lo concerniente a los estudios vinculados a las compras conjuntas, se resalta la popularidad de las actividades de grupos de compras y consorcios, impulsada por la tecnología. Estas prácticas ofrecen beneficios y mejoran el rendimiento mediante la compra conjunta. Tella (2005) define la compra cooperativa como el intercambio de información y recursos entre organizaciones. Schotanus et al. (2008) define la compra cooperativa como la puesta en común y/o la agrupación de información, procesos, recursos y/o volúmenes relacionados con las compras por parte de dos o más organizaciones de un grupo de compras con el fin de mejorar sus resultados. Un grupo de compras consta de dos o más organizaciones dependientes o independientes que compran juntas, ya sea formal o informalmente, o a través de un tercero. Hendrick (1996) indica que las cooperativas de minoristas y los organismos gubernamentales utilizan esta estrategia para reducir costos de adquisición.

La investigación en compras cooperativas ha recibido poca atención en el campo de la investigación de operaciones. Se ha enfocado en explicaciones inductivas y razonamiento cualitativo deductivo, con poco uso de la teoría de juegos. Heijboer (2003) menciona el método de asignación *Equal Price* (EP), donde todos los agentes pagan el mismo precio por artículo. Aunque intuitivamente atractivo, puede resultar injusto bajo ciertas circunstancias, como señalan Heijboer (2003) y Schotanus et al. (2008). Este último analiza la asignación de ganancias y cómo surge la injusticia con el método EP. Ambos temas son relevantes para los grupos de compra y ofrecen recomendaciones para tratar problemas relacionados con EP, los cuales serán tratados en el capítulo de compras conjuntas con descuento general.

## Objetivos, metodología y aportaciones

El primer objetivo establecido en la tesis es proponer un sistema de costos para empresarios de una cadena de suministro del sector panificador en Colombia. Este objetivo surge de la identificación de una brecha existente entre empresarios independientes y a nivel gremial. Ambos carecen de un sistema integrado de costos que les permita realizar mediciones, análisis, control y gestión conjunta de costos en cadena. Dado que el tejido empresarial de esta cadena está mayormente conformado por MiPymes las cuales cuentan con recursos y herramientas limitados, surge la imperiosa necesidad de implementar sistemas de este tipo.

La metodología empleada es el estudio de casos e integra tanto datos cualitativos como cuantitativos. Este enfoque busca desarrollar un sistema de costos en la cadena de suministro. Para ello, se requiere identificar los datos de entrada necesarios para alimentar el sistema. Estos datos pueden ser generales o específicos y provienen de diversas fuentes, como los estados financieros, de los periodos 2020 y 2021<sup>1</sup>, particularmente el estado de resultados, que puede proporcionar información sobre el margen bruto general de algunos empresarios. Además, se pueden contrastar con datos específicos aportados por los agentes interesados en colaborar en la cadena de suministro. Este y otros parámetros dependerán del sector, la región, la cultura y los niveles de cohesión entre los empresarios, ya sea a través de gremios o alianzas temporales. La información obtenida será la base para generar los resultados del sistema, es decir, los indicadores que, en nuestro caso, representan las variables de salida del sistema.

Una contribución clave que se ha obtenido en relación con este objetivo de investigación, son los resultados, expresados como indicadores horizontales fundamentales y prácticos que puede arrojar el sistema de costos en la metáfora de ver la cadena como una sola empresa, lo que facilita la medición, observación, el análisis y la posible gestión conjunta, que es en principio la forma de ver la contabilidad de costos no solo con el propósito de una empresa si no como grupo de empresas, que visualice la situación y sirva como fuente de inspiración para la formulación de estrategias colaborativas en costos o proyectos relevantes que puedan generar beneficios para los agentes al cooperar.

El segundo objetivo de la tesis consiste en proponer un modelo de compras cooperativas que pueda beneficiar a grupos empresariales que realicen compras conjuntas, aprovechando los descuentos en los precios que pueden obtener. Para lograr este propósito, se analiza la situación como un juego cooperativo con un enfoque basado en la teoría de juegos. Se reconoce que la aplicación exclusiva de la regla *equal price* (EP) puede generar discrepancias, por lo que se

<sup>1</sup>Se obtiene de los estados financieros públicos en plataformas como el Sistema de Información de Inspección Simultánea (SIIS) o en fuentes académicas como el Sistema de Información sobre la Gestión Educativa (EMIS)

investiga una alternativa adecuada que sea aceptada por todos los agentes que decidan realizar compras conjuntas. Este objetivo se complementa con el primero, ya que forma parte de las decisiones en gestión de costos que pueden abordar los agentes de algunos de los eslabones que decidan cooperar en la cadena de suministro del sector panificador en Colombia.

El diseño metodológico de este objetivo abarca diversas etapas. Comienza con una revisión de la literatura, seguida por el desarrollo del modelo CCDG para costos de compra conjunta. Posteriormente, se analizan modelos con funciones de precios lineales y decrecientes, proponiendo reglas para juegos de compra cooperativa con descuento no lineal (juego CCNL), mediante la regla *different price* (DP). Se introduce una alternativa, las reglas proporcionales ( $\alpha$ -reglas), y se establece su relación con las reglas de *Balanced Different Price* (reglas BDP). Se introduce una alternativa y se ilustra el modelo con una aplicación práctica.

Una de las contribuciones principales de este capítulo radica en la propuesta y análisis de la familia de reglas BDP como una alternativa clave en los juegos de compra cooperativa con descuento lineal. Demostramos cómo estas reglas ofrecen una solución equitativa y aceptable para todos los agentes involucrados, abordando las disputas generadas por la regla EP y asegurando una asignación justa y beneficiosa en este contexto. Además, demostramos que la naturaleza lineal de la función de precio de descuento revela información valiosa sobre el correspondiente juego de compra cooperativa con descuento lineal (juego CCL), mostrando que la contribución marginal de un agente disminuye a medida que crece la coalición, lo que se conoce como efecto bola de nieve.

El tercer objetivo de la tesis consiste en aplicar el modelo de compras conjuntas con descuento general en dos eslabones de la cadena de suministro del sector panificador, donde se pudo obtener información relevante. El propósito principal del mismo es analizar el comportamiento del modelo en diferentes situaciones.

La metodología utilizada en este último objetivo incluye aspectos cualitativos de la información y en su mayoría cuantitativos por la aplicación del modelo. En primer lugar, se identifican los recursos más significativos para los agentes debido a su alto costo, centrándose en los agentes dispuestos a colaborar en los eslabones 1 (agricultura trigo) y 4 (panaderías) de la cadena de suministro del sector panificador en Colombia. Luego, se recolectan datos individuales sobre las cantidades adquiridas por cada agente. Estos datos se incorporan al modelo de compras conjuntas para crear diferentes escenarios que se analizan y discuten posteriormente.

La contribución principal de este capítulo son los resultados que se obtienen de la aplicación del modelo, los cuales pueden ser utilizados por los agentes para visualizar el comportamiento de los mismos y analizar las diferentes situaciones. De igual forma son útiles para tomar

decisiones más fundamentadas, en la aplicación específica se logra visualizar las diferencias en los resultados y como estos pueden favorecer de manera más significativa a un grupo de agentes que a otros.

## Estructura de la tesis

La tesis se organiza en tres capítulos. Inicialmente incluye una breve introducción. Luego en el primer capítulo, se aborda la propuesta de un sistema de costos generado específicamente para la cadena de suministro en el sector panificador Colombia. Este capítulo contiene al principio una sección sobre los fundamentos de la cadena de suministros de manera general, posteriormente, de manera más específica se relacionan los fundamentos teóricos entre la contabilidad de costos y la gestión en la cadena de suministros, a continuación se incluye la metodología utilizada, después de manera más específica se relacionan características de la cadena de suministros del sector panificador en Colombia. Después, se presenta el modelo de costos propuesto y su aplicación con un caso, finalmente se presentan las conclusiones.

En el segundo capítulo se aborda el objetivo dos de la tesis, que busca generar situaciones de compras conjuntas con descuento general. Se comienza con una revisión de los aspectos teóricos pertinentes y la literatura relacionada. Posteriormente, se examinan los juegos de compras conjuntas con descuento general (juegos CCDG), seguido por un análisis de la regla Equal Price (EP) para juegos de compras conjuntas con descuento lineal (juegos CCL). Se profundiza en la regla BDP para juegos de costos con descuentos no lineales (CCNL), y se presenta la propuesta de la familia de reglas  $\alpha$ -proporcionales, explicando su condición para ser considerada una regla BDP. Finalmente, se realiza una ilustración numérica y se concluye el capítulo, junto con la presentación de posibles líneas de investigación futuras.

En el tercer capítulo, correspondiente al objetivo tres, aplicamos el modelo de compras conjuntas en dos eslabones del sector panificador de Colombia, con la siguiente estructura: se inicia con una breve exposición que contextualiza las particularidades del sector panificador y los datos de los agentes pertinentes para la aplicación. Posteriormente, se lleva a cabo la primera aplicación en compras conjuntas para el eslabón 4 panaderías, enfocada en la adquisición de harina de trigo. Seguidamente, utilizando la misma metodología, se presenta un segundo caso centrado en compras conjuntas de fertilizantes, aplicado al eslabón 1 agricultura trigo, donde solamente se tiene en cuenta el consumo de fertilizantes considerado como uno de los recursos

relevantes en la producción de trigo. Por último, se exponen las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos

# Capítulo 1

## Cadena de suministro del sector panificador en Colombia: sistema de costos

Las cadenas de suministros de un producto o servicio están integradas por múltiples etapas y procesos. Cuando está compuesta por MiPymes (Micro, pequeñas y medianas empresas), cada empresa se especializa y ofrece una o varias de estas etapas, lo que lleva a que los procesos de la cadena de suministro se gestionen de forma independiente. En una cadena de suministro agroindustrial, las etapas pueden integrar desde la producción agrícola hasta la entrega del producto final al cliente (López Joy et al., 2014, Sánchez-Galván et al., 2020). A las cadenas de suministros que analizan todo el proceso productivo hasta el cliente, algunos autores las consideran como cadenas productivas (Chiarelto et al., 2021). En este capítulo, los términos cadenas de suministros y cadenas productivas serán usados de forma indistinta. Las cadenas de suministros de producción interna de un país se ven comúnmente en crisis por la llegada de productos de otras naciones o con la entrada de las multinacionales extranjeras, las cuales tienen mejores tecnologías, conocimiento y flujo financiero, afectando la economía interna de los países emergentes. La desarticulación y el desacoplamiento en la administración de la cadena de suministro hace que no se puedan tomar estrategias concertadas de mayor envergadura e influencia en toda la cadena hacia el consumidor final (Chen et al., 2022). Hay instituciones que agrupan sectores de cadenas productivas, lo cual les permite tener presencia y voz ante las políticas estatales y de producción (Bada Carbajal et al., 2017). Estas últimas requieren de la cooperación y transparencia de las empresas asociadas con el gremio para crear una cadena productiva de mayor capacidad, calidad y precio para los consumidores. Las mejoras en la comunicación, integración y cooperación de las empresas que componen una cadena productiva hace que puedan competir de manera articulada ante las amenazas del mercado

(Bada Carbajal et al., 2017). Para ello, estas empresas requieren información e indicadores que revelen el flujo productivo para que puedan controlar, administrar y proponer estrategias conjuntas de producción, mercadeo y ventas. Los indicadores de productividad y costos hacen parte de los datos clave para la toma de decisiones y para el control de los procesos productivos de una cadena (Chand et al., 2020). Sin embargo, los modelos de costeo no están dirigidos habitualmente hacia el estudio de cadenas productivas (Vergara Mesa et al., 2017).

En este capítulo, nos centramos en realizar un estudio empírico de la cadena de suministro del sector panificador en Colombia, para lo cual se integra la cadena como si fuera una sola empresa, compuesta por 5 eslabones, utilizando un sistema de costos que se ajuste a las posibles necesidades de los usuarios (Rincón & Vergara, 2013), como instrumento para facilitar la cooperación. La aportación de este capítulo es el desarrollo de un sistema de costos empírico para la cadena, abordando una brecha existente, ya que actualmente no hay un modelo de costos similar desarrollado a nivel de este sector productivo en cadena. La información generada es vital para los sistemas de contabilidad de costos, permitiendo el cálculo de los costos, la elaboración de informes específicos y grupales que pueden beneficiar a las asociaciones o ser utilizados para desarrollar políticas públicas que impulsen la productividad de las MiPymes. También proporciona transparencia sobre el aporte de cada eslabón al costo del producto final. Es esencial destacar que la claridad y transparencia de la información son elementos fundamentales para la construcción de la cooperación (Ayala Espino, 1999; Löfgren et al., 2002; Poteete & Ostrom, 2012).

En este capítulo, abordaremos los fundamentos de la cadena de suministro, luego la relación entre la contabilidad de costos y la gestión en dicha cadena. Posteriormente, examinaremos la metodología junto con los aspectos específicos y relevantes de la cadena de suministro en el sector panificador. En este análisis, se describen los eslabones que conforman esta cadena. Con base en esta información, presentaremos el sistema de costos propuesto y su aplicación en un caso práctico. Finalmente, se presentan las conclusiones.

## **1.1. Fundamentos de la cadena de suministro**

En esta sección, nos concentramos inicialmente en describir algunas de las características de las cadenas de suministro y cómo estas pueden interactuar, y posteriormente, en la sección 1.1.1., estudiamos como las cadenas de suministro se pueden integrar en la contabilidad de costos y gestión. El concepto fue incorporado inicialmente con el nombre cadena de abasto, que proviene del inglés *supply chain*, después de una entrevista ofrecida por el consultor Keith

Oliver en 1982 al *Financial Times* (Heckmann et al., 2003). Según Bigliardi et al. (2022), las organizaciones que participan en las cadenas de suministro utilizan herramientas potentes y eficaces para la planificación de la demanda y de la gestión logística, pero se concentran menos en el desempeño a lo largo de la cadena de suministro.

Las mejores cadenas de suministro se centran en sobresalir en cuatro prioridades competitivas: velocidad, denominada usualmente ciclo de vida; calidad, fiabilidad relativa de las actividades de la cadena; suministro, los esfuerzos de las cadenas para gestionar el costo, mediante la reducción del gasto y flexibilidad, la capacidad de respuesta de la cadena ante cambios en las necesidades del cliente (Lee, 2004).

Una forma de ver cómo cumplir con las prioridades mencionadas anteriormente es a partir de la agilidad, la cual se puede obtener mediante el uso de políticas y alianzas para gestionar el exceso de capacidad; la gestión del dato es un vehículo que puede generar reacciones rápidas y oportunas, o la identificación y formulación de estrategias clave que minimicen los costos incluidos en los procesos productivos. Los mecanismos de integración externa para alcanzar estos beneficios pueden ser clasificados en integración por contratos, integración por medio de toma de decisiones conjunta, como el VMI (Vendor Managed Inventory, por sus siglas en inglés) y el CPFR (Collaborative Planning, Forecasting and Replenishment, por sus siglas en inglés), integración por información compartida e integración por medio de la tecnología de la información (Villa Marulanda & Torres Delgado, 2012).

Las cadenas de suministro deben desarrollar procesos de retroalimentación colaborativa e inversión de recursos para su gestión. Esto a partir de asociaciones basadas en la logística, que influyen en el establecimiento de cooperación entre empresas (Lindsey Hall et al., 2022) para mejorar la productividad de la cadena en temas de eficiencia y eficacia con estrategias emergentes y desarrollos de nuevas tecnologías (Kaplan & Norton, 2001); así como estrategias de comunicación, agremiación y cooperación (Brandenburger & Nalebuff, 1998) ajustadas a la dinámica actual con decisiones sobre costos, inventario y servicio al cliente. Chopra y Meindl (2013) y Gutiérrez (2012) indican que el objetivo de una cadena de suministro debe ser maximizar el valor total generado; esto se puede lograr con un alto nivel de confianza, que permite a una cadena obtener más capacidad de respuesta a un menor costo. Otro propósito es incluir la liberalización de las políticas comerciales, de inversión y de los costos de transporte más bajos generados por el desarrollo tecnológico como fuertes incentivos para que los fabricantes de equipos originales operen las cadenas de suministro, que en algunos casos pueden incluir procesos de remanufactura, con impactos positivos en los pilares económico, ambiental y social de la sustentabilidad (Li et al., 2022).

Para lograr este tipo de objetivos, los sistemas logísticos involucrados dentro de la cadena deben identificar la inversión de recursos requeridos, los cuales varían según el tipo y tamaño de la empresa, los productos, los canales de distribución y las características del cliente (Orjuela-Castro et al., 2020).

Según Kaneberg et al. (2021), se deben realizar estudios de red más explícitos que revelen la dinámica y las interacciones entre diferentes niveles de red, donde también se podrían incluir datos cuantitativos.

Los argumentos anteriores se pueden resumir en los siguientes supuestos importantes de la integración y posible colaboración posterior en la cadena de suministro, lo cual proporciona un marco que guíe sobre la recopilación y el análisis de datos:

- El aumento del costo en los eslabones de una cadena productiva aumenta el costo final del producto y disminuye las ventas finales al cliente, lo que afecta el volumen de venta de toda la cadena (Peng et al., 2022).
- La cooperación entre diferentes eslabones de una cadena productiva incrementa la calidad y las ventas de toda la cadena productiva (Cano et al., 2015).
- La cooperación entre diferentes eslabones de una cadena productiva aumenta el margen de rentabilidad y la distribución en cada uno de los eslabones. También, la falta de cooperación de los diferentes eslabones podría impactar negativamente en la rentabilidad y distribución de los eslabones que tienen menos control, lo que afecta la dinámica y velocidad de la cadena productiva (Woo & Suresh, 2022).
- Las grandes empresas panificadoras impactan la economía de las pequeñas y medianas empresas de la cadena panificadora porque tienen una mayor capacidad de compra, una alta captura de las materias primas y una acumulación de descuentos (Cambra Fierro & Polo Redondo, 2012; Vargas Sánchez & Rodríguez Peralta, 2016). La asociación y cooperación de la cadena productiva de las pymes es una estrategia para minimizar los impactos económicos y aumentar la competitividad (González et al., 2013).
- La transparencia de la información entre los actores que conforman la cadena productiva es importante para crear la confianza y garantizar la cooperación en una cadena productiva (Ayala Espino, 1999; Brickley et al., 2005).

### **1.1.1. La contabilidad de costos y gestión en la cadena de suministros**

La contabilidad de costos y de gestión entrega información a usuarios internos que sirve para el control de los procesos y para la toma de decisiones estratégicas (Porporato, 2022). Existen algunas derivaciones de la contabilidad de gestión con diferencias sutiles, como la contabilidad analítica de costos (Fullana & Paredes, 2008) o la contabilidad gerencial (Polimeni et al., 1994; Velásquez Peralta, 2019).

Sin embargo, para esta tesis, no se argumenta ni se resuelve el alcance de cada una y se asumen como sinónimos (Duque-Roldán et al., 2011). Para Kaplan & Norton (2001), la contabilidad de costos y la contabilidad de gestión no se pueden entender la una sin la otra, pues los costos entregan indicadores clave para el análisis de la gestión organizacional (Correa-Mejía et al., 2018; Rincón & Vergara, 2013; Rincón Soto, 2011).

Chen et al. (2022) propusieron que el costo de la cadena de suministro consta de tres partes: costos directos, costos de actividad y costos de transacción, lo que ha ganado la aceptación de muchos académicos y se ha aplicado en la contabilidad de costos de la cadena de suministro (Roslender & Hart, 2002). La alta competitividad y complejidad de los mercados evidenció la necesidad de que las organizaciones adapten los sistemas de contabilidad de gestión al nuevo entorno (Geiger & Ittner, 1996). De acuerdo con Orjuela-Castro et al. (2020), la gestión contable utiliza términos incompletos para la medición de los costos y de los procesos logísticos, ya que no desagregan por actividad ni tienen en cuenta la interconexión de la cadena de suministros. Además, de acuerdo con Duque-Roldán et al. (2011), para una organización es importante tener en cuenta los costos estándar, los cuales proveen indicadores de variación, indicadores de eficiencia e ineficiencia y otros indicadores para la toma de decisiones.

Los costos son considerados como inversiones, porque de ellos se esperan beneficios presentes y futuros (Sinisterra Valencia & Rincón Soto, 2017). Por lo tanto, un informe integral de costos demanda su comparación con los ingresos. La comparación de costos, ingresos y rentabilidad por cada proceso o departamento de producción se reconoce como un modelo de precios de transferencia (Rosenthal, 2008). Este ofrece un indicador de rentabilidad por procesos. El diseño de los costos de transferencia se puede integrar sin mayor complejidad en un modelo de cadenas productivas, porque cada empresa factura al próximo eslabón.

Las necesidades de información que proveen los métodos de costeo se pueden agrupar en la metodología de costos híbridos, la cual fomenta un diseño justificado en la información e indicadores de costos y de gestión basados en las necesidades de los usuarios directos de la información, para luego determinar el sistema de información adecuado para la organización (Rincón & Vergara, 2013). En la búsqueda bibliográfica no se encontró contribución académica

sobre el diseño de un sistema de información de costos orientado a las cadenas de suministros del sector panificador.

## **1.2. Metodología**

La metodología utilizada se basa en un estudio de caso (Martínez Carazo, 2006). Los datos recopilados provienen de diversas fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas. Se extrajeron datos e informes publicados por la Asociación de Fabricantes del Pan (Adepan), la Federación Nacional de Cultivadores de Cereales, Leguminosas y Soya (Fenalce) de los periodos 2020 y 2021, así como informes del sector productivo en cadena. Además, se llevaron a cabo entrevistas con empresarios. En estas entrevistas, se recolectaron datos relacionados con percepciones subjetivas sobre los retos operativos, procesos y precios de venta, estos datos se triangularon con información pública del mercado, y se utilizaron para desarrollar un sistema de costos que describe los procesos de los diferentes eslabones, algunos con mas detalle que otros, sin llegar a desarrollar los cálculos a nivel de procesos. Se expone la descripción como base para el desarrollo de futuras investigaciones específicas en costos.

Durante este proceso, algunos datos que no estaban disponibles se calcularon por diferencia entre el precio de venta equivalente, el costo unitario equivalente y el margen bruto equivalente entre eslabones. Aunque el sistema de costos base para la presente propuesta proyecta llegar a los costos por procesos de cada eslabón, los cálculos presentados en este caso se presentan solo a nivel de los costos equivalentes por eslabón. Esta situación surge debido a que, para lograr información al nivel de detalle del proceso, se requiere la colaboración de agentes interesados, situación que de lograrse pueden generar cohesión entre los mismos, los cálculos presentados son fuente para futuras investigaciones, que pueden lograr resultados más detallados.

## **1.3. Cadena de suministros del sector panificador en Colombia**

Según CONFECÁMARAS (2022) en Colombia, operan aproximadamente 25,000 panaderías, de las cuales al menos el 10% son consideradas microempresas. Aunque este sector productivo no ha experimentado un crecimiento significativo, se destaca por su estabilidad en la continuidad de los negocios y su resistencia a lo largo del tiempo. Esta solidez se evidencia incluso durante el inicio de la crisis generada por la pandemia del COVID-19, específicamente

en los meses de enero a mayo de 2020. Según INFORMA (2020), la industria panificadora exhibió una tendencia positiva en la producción y venta con un 6,4 % y 7,3 % respectivamente, superando las cifras registradas en el mismo período de 2019. Este indicador refleja la capacidad de adaptación y la resiliencia del sector panificador colombiano frente a condiciones adversas, como las impuestas por la pandemia, que causó cierres masivos en MiPymes en Colombia.

Con relación a lo anterior, es necesario resaltar que, si bien se exhibe un leve crecimiento en la producción y ventas del producto final del pan, los insumos utilizados en la cadena, como fertilizantes y la harina de trigo (que en gran parte se importa), hacen que los costos internos de producción estén supeditados a las variaciones del precio internacional del cereal y la tasa de cambio. De igual forma, a su vez, afectan el costo de producción de las trilladoras que transforman el trigo en harina de trigo. De forma consecuente, el eslabón de distribución de la harina de trigo se ve afectado en mayor forma con los altos costos de la gasolina, a causa de que el Gobierno ha venido haciendo ajustes graduales al precio de la gasolina corriente con el fin de corregir el alto déficit que presenta el Fondo de Estabilización de Precios de los Combustibles (FEPC). Finalmente, el valor final de la harina de trigo afecta el costo del productor final, que, a su vez, puede trasladar los aumentos al consumidor final. En este contexto, la situación debe motivar a los diferentes agentes de la cadena a realizar acciones que mitiguen estas afectaciones del costo.

### **1.3.1. Sistema de costos para el sector panificador en Colombia**

En primer lugar, vamos a describir los eslabones que componen la cadena de suministros del sector panificador, resultado de entrevistas y el apoyo de la Asociación Nacional de Industriales de la Panadería y alimentos complementarios "ANIPAN". Elaboración propia basada en los análisis de procesos y conceptos básicos del Value Stream Mapping "VSM", que es una técnica utilizada para visualizar y analizar de manera detallada los pasos y actividades involucrados en la producción de un producto o servicio, desde el inicio hasta la entrega al cliente.

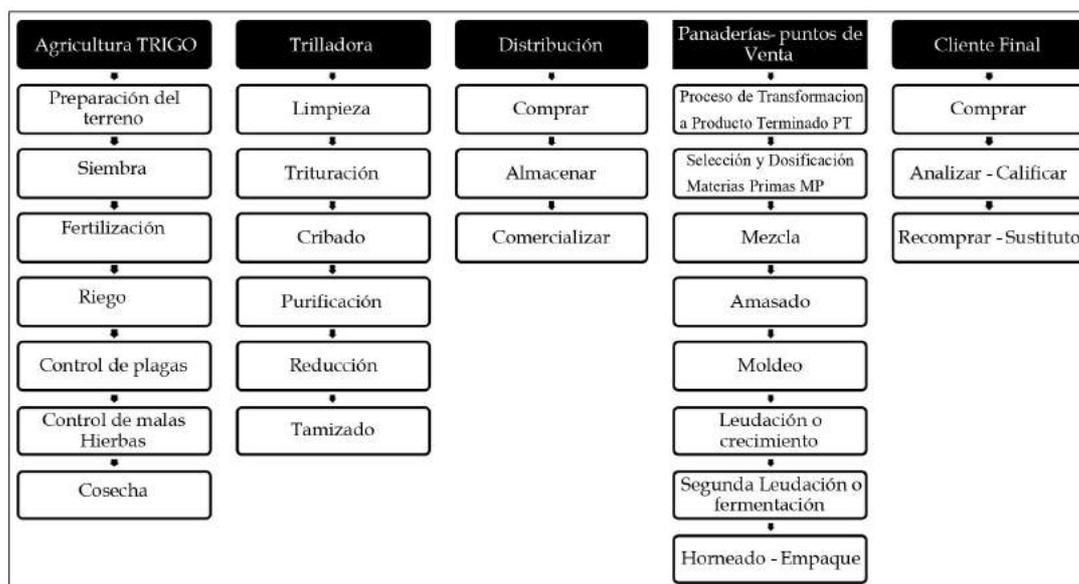


Figura 1.1 Procesos de la cadena productiva del sector panificador

Consideramos el eslabón 1, Agricultura Trigo, donde se lleva a cabo la siembra del insumo básico principal, el trigo. Este eslabón está compuesto por 7 procesos específicos. Luego, pasamos al eslabón 2, Trilladora, donde tiene lugar la transformación del trigo en harina de trigo. Aquí identificamos un total de 6 procesos. Seguidamente, abordamos el eslabón 3, distribución, encargado de la intermediación en la compra y distribución de la harina de trigo, el cual comprende 3 procesos. Posteriormente, examinamos el eslabón 4, Panaderías, que involucran procesos específicos o actividades, identificados en un total de 8 procesos. Finalmente, el eslabón 5 corresponde al cliente final o consumidor, compuesto por 3 procesos. Todos estos eslabones y procesos están detallados en la Figura 1.1.

En cada eslabón procederemos a calcular una serie de costos y precios, consideradas las variables del modelo, las cuales definimos a continuación:  $C_{ti}$  es el costo transferido del eslabón  $i - 1$  a  $i$ . Es decir, son los costos de los factores productivos que provienen del eslabón anterior. Es importante tener en cuenta que  $C_{t1} = 0$ , dado que se trata del primer eslabón.  $C_{ei}$  es el costo equivalente, son los costos de los recursos o factores productivos utilizados en este eslabón y que no provienen del eslabón anterior.  $C_{ai}$  representa los costos acumulados, son los costos de todos los factores productivos utilizados en este eslabón, es decir sumamos el costo transferido ( $C_{ti}$ ) y los costos equivalentes ( $C_{ei}$ ) para obtener  $C_{ai}$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ , que representa el costo total acumulado de todo el eslabón.

Posteriormente, ya con el costo total acumulado ( $C_{ai}$ ), procedemos a calcular, en su orden, el costo unitario equivalente ( $c_{ei}$ ), el precio unitario equivalente por cada eslabón ( $p_i$ ), y los márgenes brutos unitarios equivalentes ( $m_i$ ), por cada eslabón de la cadena, de la siguiente manera: inicialmente, calculamos el costo unitario equivalente por eslabón ( $c_{ei}$ ) con  $i = 1, 2, 3, 4$ , el cual representa el costo unitario equivalente del eslabón  $i$ , ( $c_{ei}$ ), es decir la cantidad que agrega cada eslabón al costo total unitario. Por lo que la suma de los cuatro costos unitarios equivalentes, uno por eslabón, nos da el costo final unitario de producir en este caso 1 kilo de pan.

A continuación, procedemos a calcular el precio del kilo de pan para el consumidor final que denotaremos  $P_p$ . Este precio lo vamos a descomponer en cuatro partes que corresponden a la cantidad que agrega cada eslabón al precio total que paga el consumidor. Lo vamos a llamar precio unitario equivalente del eslabón,  $p_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ . Es decir,  $P_p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ .

Para calcular el margen bruto unitario equivalente ( $m_i$ ), el cual representa el margen bruto unitario equivalente del eslabón  $i$ ,  $m_i$ , es la cantidad que agrega este eslabón al margen bruto total unitario que corresponde a este eslabón. Por lo que la suma de los cuatro márgenes brutos unitarios equivalentes, uno por eslabón, nos da el margen bruto unitario final, se calcula de igual forma para todos los eslabones, se realiza la diferencia entre los precios unitarios equivalentes y los costos unitarios equivalentes, ( $p_i - c_i$ ) con  $i = 1, 2, 3, 4$ , lo que representa el margen bruto unitario generado por cada eslabón de la cadena.

Después de calcular el  $c_{ei}$ ,  $p_i$  y  $m_i$ , por cada eslabón de la cadena, se podrán calcular el costo  $cr_i$  que representa el costo relativo unitario equivalente que agrega cada eslabón, en relación al costo total unitario equivalente,  $pr_i$  representa el precio relativo unitario equivalente que agrega cada eslabón, en relación al precio total unitario equivalente y  $mr_i$  representa el margen bruto relativo unitario equivalente que agrega cada eslabón, en relación al margen total unitario equivalente.

A continuación, se presenta la Tabla 1.1 que contiene la notación, donde se han separado tanto las variables como los parámetros. Estas notaciones son relevantes para el análisis del sistema de costos propuesto, y proporcionan información importante para comprender las funciones que se describen posteriormente.

En la Tabla 1.2, se detallan los parámetros necesarios para alimentar el sistema de costos:

Tabla 1.1 Variables del modelo

Terminología	Definiciones
$(C_{ai})$ con $i = 1, 2, 3, 4$	Costo acumulado de un eslabón determinado, representa $C_{ti} + C_{ei}$
$(C_{ti})$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5$	Costo transferido de un eslabón al siguiente eslabón, $(C_{ti})$ es el costo que se le transfiere del eslabón anterior, también representa el ingreso que recibe el eslabón en la transferencia, $C_{ti} = 0$ por ser el primer eslabón.
$(C_{ei})$ con $i = 1, 2, 3, 4$	Costo total equivalente de un eslabón determinado, son los costos de los recursos o factores productivos utilizados en este eslabón y que no provienen del eslabón anterior.
$c_{ei}$ con $i = 1, 2, 3, 4$	costo unitario equivalente por eslabón ( $c_{ei}$ , minúscula).
$p_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$	precio unitario equivalente por eslabón.
$m_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$	margen bruto unitario equivalente por eslabón.
$cr_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$	costo relativo unitario equivalente por cada eslabón de la cadena.
$pr_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$	precio relativo unitario equivalente por cada eslabón de la cadena.
$mr_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$	margen bruto relativo unitario equivalente por cada eslabón de la cadena.

### Eslabón 1. Agricultura trigo

En este caso,  $C_{t1} = 0$  porque el primer eslabón no recibe transferencias de costos de ningún eslabón anterior. Posteriormente, calculamos  $C_{e1}$  que en este caso es igual a  $C_{a1}$  ya que  $C_{a1} = (C_{t1} + C_{e1})$ , que en este primer eslabón representa los costos acumulados necesarios para las hectáreas cultivadas y cosechadas. Es importante aclarar que el modelo aquí expuesto no realiza el cálculo detallado de los costos de los procesos; simplemente se describen y podrían calcularse de manera detallada en aplicaciones posteriores si los agentes interesados proporcionararan los datos de costos de siembra asociados a cada proceso del eslabón.

Para nuestro modelo, el cálculo de  $C_{e1} = (c_h \cdot h)$  se obtiene integrando el valor reportado sobre el costo promedio de siembra por hectárea que proviene de las diferentes fuentes, como el Ministerio de Agricultura de Colombia, la Federación Nacional de Cultivos de Cereales "Fenalce", instituciones académicas u organizaciones internacionales como la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO).

Luego, calculamos el  $C_{a1} = (C_{t1} + C_{e1})$ , una vez obtenido  $C_{a1}$ , ya podemos calcular  $c_{e1}$  para ello, se divide  $C_{a1}$  que representa el costo del eslabón, entre las hectáreas cultivadas ( $h$ ), para hallar el costo por hectárea. Luego se divide entre la cantidad de trigo ( $q_t$ ) que se produce por hectárea y obtenemos el costo por kilogramo de trigo. Después, se multiplica por la cantidad de trigo necesaria para producir un kilo de harina ( $\rho$ ) y por la cantidad de harina necesaria para producir un kilo de pan ( $n$ ).

Tabla 1.2 Parámetros del modelo

$h$	<b>Número de hectáreas cultivadas y cosechadas en el eslabón 1.</b> Para el caso se estima que las hectáreas cultivadas y cosechadas son iguales hectáreas sembradas.
$q_t$	<b>Kilos de trigo producidos u obtenidos por hectárea en el eslabón 1.</b> La cantidad de trigo obtenida por hectárea dependerá de la región, el clima, la tecnología y las prácticas de producción empleadas.
$q_h$	<b>Cantidad de kilos de harina de trigo obtenidos de la transformación del trigo en el eslabón 2.</b> La cantidad de harina de trigo obtenida dependerá de la tecnología y las prácticas de producción empleadas.
$\rho$	<b>Cantidad estándar o ajustada de trigo necesaria para producir un kilo de harina.</b> dependerá de la tecnología y las prácticas de producción empleadas, para producir un kilo de harina de trigo en este caso se requiere 1.4 kilos de trigo.
$n$	<b>Cantidad estándar o ajustada de harina de trigo necesaria para producir un kilo de pan.</b> Dependerá de los métodos de producción, rendimiento de la harina y prácticas específicas, ya sea en diferentes países o entre procesos de producción manual e industrial, en este caso para obtener un kilo de pan se requiere 0,6 kilos de harina.
$P_t$	<b>Precio del kilo de trigo, fijado por el mercado,</b> refleja el monto que el agricultor percibe por cada kilo de trigo. Este precio se establece según las condiciones del mercado y no está determinado por los agricultores. En el contexto abordado en este capítulo, puede fluctuar de acuerdo con las políticas vigentes en cada país.
$c_h$	<b>Costo promedio de siembra por hectárea.</b> Este costo puede variar según la región o país, y se basa en estudios específicos de cada lugar.
$P_{hd}$	<b>Precio estimado de venta promedio del kilo de harina de trigo en el mercado entre la trilladora y el distribuidor.</b> Esta estimación se basa en datos disponibles sobre precios históricos o estimaciones derivadas de la información disponible sobre las transacciones entre la trilladora y el distribuidor.
$P_{hp}$	<b>Precio por kilo de harina de trigo que el distribuidor cobra al productor (panaderías).</b> Este precio puede variar según acuerdos comerciales individuales entre el distribuidor y las panaderías, así como factores del mercado.
$P_p$	<b>Precio del kilo de pan en el mercado para el consumidor final,</b> proporcionado por la agremiación panadera. Este precio puede variar según la oferta y la demanda en el mercado, así como las políticas comerciales de la agremiación de panaderías.
$M_i$	<b>Margen bruto relativo de cada eslabón,</b> calculado utilizando información proporcionada por algunos agentes de la cadena o estimado a partir del margen promedio reportado en los estados financieros de propósito general de dichos agentes.

$$c_{e1} = \left( \frac{\left( \frac{c_{a1}}{h} \right)}{q_t} \right) \cdot \rho \cdot n \quad (1.1)$$

Posteriormente, procedemos a calcular el precio unitario equivalente del trigo ( $p_i$ ) en el eslabón 1, el cual se determina con la multiplicación del Precio del kilo de trigo a su valor del mercado ( $P_t$ ), este valor se basa en determinaciones del mercado y no es establecido por los agricultores, y multiplicarlo por la cantidad estándar o ajustada de trigo necesaria para producir

un kilo de harina de trigo ( $\rho$ ) y luego por la cantidad estándar o ajustada de harina de trigo necesaria ( $n$ ), para producir un kilo de pan

$$p_1 = P_t \cdot \rho \cdot n \quad (1.2)$$

Con los datos del precio unitario equivalente y el costo unitario equivalente, se calcula el margen bruto unitario equivalente ( $m_i$ ), el cual se obtiene de la diferencia entre el precio unitario equivalente ( $p_1$ ) y se le resta el costo unitario equivalente ( $c_1$ ) resultado que indica el margen bruto unitario equivalente que genera cada eslabón, en la producción de un kilo de pan en la cadena de suministro

$$m_1 = p_1 - c_1 \quad (1.3)$$

### **Eslabón 2. Trilladora**

Calculamos los costos totales transferidos que provienen del eslabón 1 ( $C_{t2}$ ), el cual se obtiene tomando el total de los kilos de trigo producidos por las hectáreas sembradas y trasladadas como pedido ( $q_t \cdot h$ ) para el traslado a producción. Posteriormente, multiplicamos este resultado por el precio del kilo de trigo a su valor del mercado ( $P_t$ ), así:

$$C_{t2} = P_t \cdot (q_t \cdot h) \quad (1.4)$$

Seguidamente, procedemos a la transformación del trigo recibido en harina de trigo. Para producir un kilo de harina de trigo se requiere cierta cantidad de trigo ( $\rho$ ), una medida que puede variar según los métodos de producción, la región, el clima, entre otros, y que representamos con  $q_h$  el numerador de esta función son las hectáreas sembradas ( $h$ ), y se multiplican por los kilos de trigo obtenidos por hectárea ( $q_t$ ). Cantidad de kilos de harina de trigo obtenidos de la transformación del trigo en el eslabón 2.

$$q_h = \left( \frac{h \cdot q_t}{\rho} \right) \quad (1.5)$$

Luego, para calcular el  $C_{e2}$ , primero debemos calcular los costos que le transfiere el eslabón 2 al eslabón 3 ( $C_{t3}$ ), que se obtiene multiplicando la cantidad de harina de trigo producida y vendida en el lote ( $q_h$ ) por el precio estimado de venta promedio del kilo de harina de trigo en el mercado entre la trilladora y el distribuidor ( $P_{hd}$ ).

$$C_{t3} = q_h \cdot P_{hd} \quad (1.6)$$

Seguidamente, podemos calcular  $C_{e3}$  que es el costo equivalente del eslabón 3, representa los costos de los recursos productivos utilizados para convertir el trigo en harina de trigo, debemos tener en cuenta que  $C_{t3}$ , es un ingreso para el eslabón 2, luego a ese mismo ingreso le multiplicamos por el margen bruto relativo del eslabón 2,  $(M_2)^1$ , margen bruto relativo del eslabón: que representa el porcentaje de beneficio que obtiene el agente  $i$ . Por lo tanto, para calcular  $C_{e2}$ , en este caso  $C_{t3}$  representa el ingreso que recibe el eslabón 2, menos  $(C_{t3} \cdot M_2)$ , que representa el beneficio que obtiene el eslabón 2, menos  $C_{t2}$  que es el costo transferido del eslabón anterior

$$C_{e2} = (C_{t3}) - (C_{t3} \cdot M_2) - C_{t2} \quad (1.7)$$

Siguiendo la secuencia, calculamos el costo acumulado del eslabón 2,  $(C_{a2})$ , así;

$$C_{a2} = C_{t2} + C_{e2} \quad (1.8)$$

Luego, calculamos el costo total unitario equivalente del eslabón 2.  $(c_{e2})$ , cuya obtención se realiza de la siguiente manera:

$$c_{e2} = \left( \frac{C_{e2}}{q_h} \right) \cdot n \quad (1.9)$$

Luego, se procede al cálculo del precio unitario equivalente de la harina de trigo para el eslabón 2. Este cálculo considera los costos  $C_{a2}$ , los kilos de harina del pedido y  $M_2$ . Se realiza la operación tomando en cuenta la cantidad necesaria para producir un kilo de pan y luego restando el precio de venta equivalente del eslabón 1.

$$p_2 = \left( \left( \frac{C_{a2}}{q_h} \right) \cdot n \right) - p_1 \quad (1.10)$$

Con los datos del precio unitario equivalente y el costo unitario equivalente, procedemos a calcular el margen bruto unitario equivalente de la siguiente manera:

$$m_2 = p_2 - c_2 \quad (1.11)$$

### Eslabón 3. Distribución

<sup>1</sup>Lo que significa  $M_2$  se obtiene de los estados financieros públicos en plataformas como el Sistema de Información de Inspección Simultánea (SIIS) o en fuentes académicas como el Sistema de Información sobre la Gestión Educativa (EMIS)

Calculamos inicialmente el costo transferido del eslabón 3 al eslabón 4, ( $C_{t4}$ ), teniendo en cuenta el lote de producción seleccionado de harina de trigo ( $q_h$ ) y el precio de negociación estimado, entre el distribuidor ( $P_{hp}$ ) y la panadería.

$$C_{t4} = (q_h \cdot P_{hp}) \quad (1.12)$$

Luego, se calcula el  $C_{e3}$ , el resultado de esta variable representa los costos adicionales estimados de logística de entrada, almacenamiento y salida hacia el siguiente eslabón productor. El margen utilizado se puede estimar con el apoyo de agentes del sector y resulta de la siguiente forma;  $C_{t4}$  también representa un ingreso para el eslabón 3, luego a este valor se le resta, el resultado de multiplicar ese mismo ingreso por el margen del eslabón ( $C_{t4} \cdot M_3$ ) donde  $M_3$  representa el margen promedio del distribuidor en la comercialización de la harina de trigo, luego se le resta el costo transferido del eslabón anterior ( $C_{t3}$ ), así logramos  $C_{e3}$

$$C_{e3} = (C_{t4}) - (C_{t4} \cdot M_3) - C_{t3} \quad (1.13)$$

Posteriormente, calculamos el costo acumulado del eslabón 3, ( $C_{a3}$ ),

$$C_{a3} = C_{t3} + C_{e3} \quad (1.14)$$

Luego, se calcula el costo unitario equivalente ( $c_{e3}$ ), es decir es la parte del costo unitario que agrega cada eslabón para la producción de 1 kilo de pan, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$c_{e3} = \left( \frac{C_{e3}}{q_h} \right) \cdot n \quad (1.15)$$

Luego,  $p_3$  el cual se calcula, teniendo en cuenta los costos  $C_{a3}$ , relacionados con los kilos de harina del pedido y  $M_3$  que es un valor porcentual que se puede estimar, con la información proporcionada de las empresas distribuidoras, por la cantidad necesaria para producir un kilo de pan, para luego restarle el precio de venta equivalente de los eslabones 1 y 2,

$$p_3 = \left( \left( \frac{C_{a3}}{q_h} \right) \cdot n \right) - (p_1 + p_2) \quad (1.16)$$

Finalmente, en esta secuencia, realizamos el cálculo del margen bruto unitario equivalente del eslabón, así:

$$m_3 = p_3 - c_3 \quad (1.17)$$

#### Eslabón 4. Panaderías

Para este eslabón, calculamos el costo transferido del eslabón 4 al eslabón 5 ( $C_{t5}$ ), para obtenerlo debemos tener en cuenta que la cantidad de kilos de harina de trigo, ( $q_h$ ) se debe dividir por la cantidad necesaria para elaborar un Kilo de pan, es decir, dividir el lote de harina de trigo en  $n$  partes, lo que genera la cantidad de kilos de pan que se puede obtener, posteriormente el resultado de debe multiplicar por el precio del kilo de pan al consumidor final ( $P_p$ ), así:

$$C_{t5} = \left( \frac{q_h}{n} \cdot P_p \right) \quad (1.18)$$

Luego, se calcula  $C_{e4}$  de la siguiente forma; ya con el calculo previo de  $C_{t5}$  que también representa un ingreso para el eslabón 4, a este valor se le resta, el resultado de multiplicar ese mismo ingreso por el margen del eslabón 4 ( $C_{t5} \cdot M_4$ ) donde  $M_4$  representa el margen promedio de la panadería al vender los kilos de pan, luego se le resta el costo transferido del eslabón anterior  $C_{t4}$ , así logramos  $C_{e4}$

$$C_{e4} = C_{t5} - (C_{t5} \cdot M_4) - C_{t4} \quad (1.19)$$

Calculamos  $C_{a4}$  de la siguiente manera,

$$C_{a4} = C_{t4} + C_{e4} \quad (1.20)$$

Obtenemos  $c_{e4}$  de la siguiente manera:

$$c_{e4} = \left( \frac{C_{e4}}{q_h} \right) \cdot n \quad (1.21)$$

Luego,  $p_4$ , se calcula teniendo en cuenta los costos relacionados con los kilos de harina del pedido ( $C_{a4}$ ) y  $M_4$ , que es un valor porcentual estimado mediante entrevistas con el gremio productor. Este se procesa con la cantidad necesaria para producir un kilo de pan, restando luego el precio de venta equivalente de los eslabones 1, 2 y 3,

$$p_4 = \left( \left( \frac{C_{a4}}{q_h} \right) \cdot n \right) - (p_1 + p_2 + p_3) \quad (1.22)$$

Finalmente, calculamos  $m_4$  de la siguiente forma:

$$m_4 = p_4 - c_4 \quad (1.23)$$

### Eslabón 5. Cliente final

Al final de la cadena se calcula el precio que pagaría el consumidor por un kilo de pan, el cual se obtiene de la suma de los precios equivalentes por cada eslabón,

$$P_p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \quad (1.24)$$

Después de calcular los diferentes eslabones, procederemos a calcular los pesos relativos de las principales variables. Esto nos permitirá determinar el costo relativo unitario equivalente para cada eslabón de la cadena, denotado como  $cr_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ . Este cálculo nos brindará una visión del aporte relativo del costo en cada eslabón de la cadena en relación con el total, así:

$$cr_i = \frac{c_{ei}}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4} \quad (1.25)$$

Luego se obtiene el precio relativo unitario equivalente por cada eslabón ( $pr_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ ), con este análisis, revisamos el aporte equivalente de cada eslabón en el precio final del producto,

$$pr_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \quad (1.26)$$

También calculamos el margen relativo en la cadena ( $mr_i$ ) con  $i = 1, 2, 3, 4$  que representa el margen relativo de cada eslabón en relación con el margen bruto absoluto total de la cadena. Estos valores obtenidos sirven para conocer el comportamiento de los márgenes, simultáneamente fortalece la visión metafórica de visualizar la cadena como una sola empresa,

$$mr_i = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (1.27)$$

## 1.4. Aplicación del sistema de Costos

Aplicamos el modelo de costos propuesto en un estudio de caso con un lote de producción de 5 hectáreas. Para el eslabón 1, utilizamos datos obtenidos de fuentes públicas y estimaciones. En el segundo eslabón, se utilizaron datos del mercado y estimaciones relacionadas. En el tercer eslabón, se considerarán precios estimados de intermediación en la distribución. Por último, para el cuarto eslabón, utilizamos datos suministrados en las entrevistas realizadas a los empresarios de la agremiación.

A continuación, desarrollamos el caso, eslabón por eslabón, de manera progresiva, del 1 al 5, hasta llegar a los resultados consolidados. Para ello, tenemos en cuenta las variables del

modelo, las cuales se calculan para los eslabones 1, 2, 3 y 4, generando los acumulados del 5, que se presentan en la tabla 1.3.

Datos del caso para el **eslabón 1: (trigo)**

Inicialmente se calcularán las siguientes variables en su orden:

$C_{t1}$	$C_{e1}$	$C_{a1}$	$c_{e1}$	$p_i$	$m_i$
----------	----------	----------	----------	-------	-------

Luego, procedemos a describir los parámetros asociados con el eslabón. Estos parámetros pueden variar según la región en la que se realice la siembra. En este eslabón, la cantidad de trigo obtenida por hectárea dependerá de la tecnología y prácticas de producción empleadas. Además, influye el rendimiento del trigo para su transformación en harina de trigo. Se considera la cantidad estándar necesaria para producir un kilo de pan, así como el costo de siembra por hectárea que reportan algunas entidades oficiales, (FAO), o entidades académicas. Asimismo, se incluye el valor del mercado para la compra del trigo a los agricultores, emitido por entidades oficiales o autorizadas como la Federación Nacional de Cultivadores de Cereales, Leguminosas y Soya (Fenalce) de los periodos 2020 y 2021 <sup>2</sup>. Los agricultores en este caso no establecen el precio del mercado.

En este eslabón, vinculamos los parámetros esenciales para el cálculo de las variables, abordando cada uno de ellos;

$h$	$q_t$	$\rho$	$n$	$P_t$	$c_h$
5	3.070	1,4	0,6	475,4739	2.149.000

Posteriormente, con la información necesaria, realizamos los cálculos de las variables en su orden. Inicialmente, el  $C_{t1}$  es igual a 0, ya que no tiene costo transferido del eslabón anterior al ser el primer proceso. Luego, calculamos el  $C_{e1} = (C_h \cdot h)$ , que proviene del costo por hectárea reportado oficialmente, así,  $(2.149.000 \cdot 5) = 10.745.000$ . Es importante mencionar que si el agricultor dispone de un sistema de costos para conocer los costos reales de inversión, podría contar con información que le permita hacer un control frente a los precios de compra y realizar análisis de gestión de costos.

Posteriormente, calculamos  $C_{a1} = (C_{t1} + C_{e1})$ , generando el mismo resultado de 10.745.000. Luego, para hallar el costo unitario equivalente, utilizamos la función (1.1):

<sup>2</sup>Los datos utilizados para ilustrar el sistema fueron públicos hasta 2022, a la fecha las empresas privatizaron los datos, es decir no son de acceso al público

$$c_{e1} = \left( \frac{\left( \frac{10.745.000}{5} \right)}{3.070} \right) \cdot 1,4 \cdot 0,6 = 588$$

Luego usando (1.2), calculamos el precio unitario equivalente

$$p_1 = 745,4739 \cdot 1,4 \cdot 0,6 = 626,2$$

Finalmente, usando (1.3) se realiza el cálculo del margen unitario equivalente

$$m_1 = 626,2 - 588 = 38,2$$

### Eslabón 2. Trilladora

Continuando con la secuencia, procederemos a calcular las variables de la trilladora mencionadas al inicio del caso.

Para ello, detallamos los parámetros asociados al eslabón,

$h$	$q_t$	$q_h$	$P_t$	$\rho$	$n$	$P_{hd}$	$M_2$
5	3.070	10.964.28	745,4739	1,4	0,6	1.809,92	0,3657

Con los datos necesarios para el cálculo de las variables, procedemos a calcularlas en su orden. En primera instancia, realizamos el cálculo de  $C_{t2}$ , usando (1.4), que representa el valor de compra que las empresas trilladoras realizan a los agricultores, a un precio de mercado ( $P_t$ ).

$$C_{t2} = 745,4739 \cdot (3.070 \cdot 5) = 11.443.024$$

Después, es necesario convertir los kilos de trigo en kilos de harina de trigo. Para llevar a cabo este cálculo, procedemos usando (1.5) de la siguiente manera:

$$q_h = \left( \frac{5 \cdot 3.070}{1,4} \right) = 10.964,286$$

Luego, continuando con la secuencia, usamos (1.6) y calculamos los costos transferidos,

$$C_{t3} = 10.964,286 \cdot 1.809,92 = 19.844.438$$

Luego, usando (1.7) procedemos a calcular el  $C_{e2}$  que representa en esta circunstancia los costos adicionales diferentes a la adquisición del trigo, es decir los costos de los recursos productivos utilizados para convertir el trigo en harina de trigo.

$$C_{e2} = (19.844,438) - (19.844,438 \cdot 0,3657) - 11.443.024 = 1.144.302,7$$

Continuando con la secuencia, usando (1.8), determinamos el costo acumulado del eslabón 2, representado como  $C_{a2}$  ;

$$C_{a2} = 11.443.024 + 1.144.302,7 = 12.587.327$$

Posteriormente, usando (1.9), se determina el valor correspondiente a  $c_{e2}$  de la siguiente manera;

$$c_{e2} = \left( \frac{1.144.302,7}{10.964,286} \right) \cdot 0,6 = 62,62$$

Luego, es necesario calcular el precio unitario equivalente de la harina de trigo para el eslabón 2, usando (1.10)

$$p_2 = \left( \left( \frac{12.587.327}{10.964,286} \right) \cdot 0,6 \right) - 626,2 = 459,75$$

Con los datos del precio y costo unitarios equivalente, usando (1.11) calculamos  $m_2$ ;

$$m_2 = 459,75 - 62,62 = 397,13$$

### Eslabón 3. Distribución

Para hallar los resultados de este eslabón, integramos los parámetros necesarios según la secuencia y explicamos el proceso

$q_h$	$P_{hp}$	$n$	$M_3$
10.964,286	1.943,278	0,6	0,05

Calculamos el valor transferido del eslabón 3 al eslabón 4 ( $C_{t4}$ ), para el cálculo de este usamos (1.12)

$$C_{t4} = 10.964,286 \cdot 1.943,278 = 21.306.659,4$$

Luego, en su orden, calculamos el coste total equivalente del eslabón 3 que son los costos de los recursos utilizados en este eslabón de distribución y que no provienen del eslabón anterior trilladora ( $C_{e3}$ ), para este cálculo, se tiene en cuenta el costo transferido al eslabón 4 Panaderías

( $C_{t4}$ ). Este valor se obtiene multiplicando el lote harina de trigo transferido ( $q_h$ ) por un dato de la lista de precios de la distribuidora a las panaderías ( $P_{hp}$ ). Así, calculamos  $C_{t4} = (q_h \cdot P_{hp})$ , que representa el valor de traslado al eslabón de producción del pan, equivalente a 21.306.659, este valor representa el ingreso para el distribuidor. Luego, para hallar  $C_{e3}$ , tomamos el costo transferido al eslabón 4 ( $C_{t4}$ ) que también representa un ingreso para el eslabón 3 y le restamos ( $C_{t4} \cdot M_3$ ) que representa el margen que generará este ingreso al eslabón 3, ( $M_3$ ) en este caso representa el margen que genera de ingreso el eslabón 3, y luego le restamos los costos transferidos al eslabón 3 ( $C_{t3}$ ), como resultado de la ecuación se obtiene  $C_{e3}$  usando (1.13),

$$C_{e3} = (21.306.659,4) - (21.306.659,4 \cdot 0,05) - 19.844.438 = 396.888$$

Después, usando (1.14) calculamos la acumulación del eslabón.

$$C_{a3} = 19.844.438 + 396.888 = 20.241.326$$

Luego, usando (1.15) se calcula el  $c_{e3}$ , el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$c_{e3} = \left( \frac{396.888}{10.964,286} \right) \cdot 0,6 = 21,72$$

Entonces, para este cálculo debemos restar los precios unitarios equivalentes calculados en los eslabones anteriores ( $p_1 = 626,2 + p_2 = 459,75$ ) usando (1.16) obtenemos:

$$p_3 = \left( \left( \frac{20.241.326}{10.964,286} \right) \cdot 0,6 \right) - (626,2 + 459,75) = 80,02$$

Finalmente usando (1.17) obtenemos,

$$m_3 = 80,02 - 21,72 = 58,30$$

#### Eslabón 4. Panaderías

Integremos los parámetros necesarios según la secuencia para los resultados del eslabón,

$q_h$	$n$	$P_p$	$M_4$
10.964,28	0,6	3.000	0,4559

Calculamos los costos que conforman  $C_{a4}$ , usando (1.18), en este caso  $C_{t5}$  representa el ingreso para el eslabón 4,

$$C_{t5} = \left(\frac{q_h}{n} \cdot Pp\right) = (10.964,286/0,6) * 3000) = 54.821.428,57$$

Luego, usando (1.19)

$$C_{e4} = 54.821.428,57 - (54.821.428,57 \cdot 0,455882031) - 21.306.659 = 8.522.665$$

Posteriormente usando (1.20) calculamos

$$C_{a4} = 21.306.659,4 + 8.522.665 = 29.829.324,4$$

Luego, usando (1.21) se calculan los valores unitarios equivalentes

$$c_{e4} = \left(\frac{8.522.665}{10.964,286}\right) \cdot 0,6 = 466,39$$

Posteriormente, usando (1.22) calculamos,

$$p_4 = \left(\left(\frac{\frac{29.829.324}{10.964,286}}{1 - 0,455882031}\right) \cdot 0,6\right) - (626,2 + 459,75 + 80,02) = 1.834,03$$

Seguidamente, usando (1.23) realizamos el cálculo de  $m_4$ ,

$$m_4 = 1.834,03 - 466,39 = 1.367,65$$

#### **Eslabón 5. Cliente final**

Al final de la cadena, se calcula el precio final que el consumidor pagaría por un kilo de pan, integrando los precios unitarios equivalentes de cada eslabón de la cadena, usando (1.24)

$$P_p = 626,2 + 459,75 + 80,02 + 1.834,03 = 3.000$$

Después de realizar los cálculos de las variables propuestas para cada eslabón, procedemos a calcular los pesos relativos de las principales variables. Estos pesos son fundamentales para llevar a cabo un análisis del caso aplicado a la cadena de suministro del sector panificador.

En primer lugar, calculamos el peso relativo del costo unitario equivalente de cada eslabón de la cadena, en comparación con el costo total unitario equivalente.

Realizamos los cálculos relacionados con el costo unitario equivalente para determinar el peso relativo del costo de cada eslabón en relación con el costo total unitario equivalente, usando (1.25);

$$cr_1 = \frac{588}{588 + 62,62 + 21,72 + 466,39} = 0,516$$

$$cr_2 = \frac{62,62}{588 + 62,62 + 21,72 + 466,39} = 0,055$$

$$cr_3 = \frac{21,72}{588 + 62,62 + 21,72 + 466,39} = 0,019$$

$$cr_4 = \frac{466,39}{588 + 62,62 + 21,72 + 466,39} = 0,410$$

Después, usando (1.26), calculamos el peso relativo unitario equivalente con relación al precio final unitario equivalente al consumidor, con el fin de determinar la contribución de cada eslabón de la cadena al precio final;

$$pr_1 = \frac{626,20}{626,20 + 459,75 + 80,02 + 1.834,03} = 0,209$$

$$pr_2 = \frac{459,75}{626,20 + 459,75 + 80,02 + 1.834,03} = 0,153$$

$$pr_3 = \frac{80,02}{626,20 + 459,75 + 80,02 + 1.834,03} = 0,027$$

$$pr_4 = \frac{1.834,03}{626,20 + 459,75 + 80,02 + 1.834,03} = 0,611$$

Finalmente, usando (1.27) calculamos el peso relativo del margen bruto unitario equivalente de cada eslabón en comparación con el margen bruto equivalente total de la cadena;

$$mr_1 = \frac{38,2}{38,2 + 397,1 + 58,3 + 1.367,65} = 0,021$$

$$mr_2 = \frac{397,13}{38,2 + 397,1 + 58,3 + 1.367,65} = 0,213$$

$$mr_3 = \frac{58,3}{38,2 + 397,1 + 58,3 + 1.367,65} = 0,031$$

$$mr_4 = \frac{1.367,65}{38,2 + 397,1 + 58,3 + 1.367,65} = 0,735$$

A continuación en la Tabla 1.3, se presentan los resultados de la aplicación del modelo de costos

Tabla 1.3 Resultados de la aplicación del modelo de costos

Eslabones	1. Agricultura	2. Trilladora	3. Distribución	4. Panadería	Total Acumulado por la cadena 5. Cliente Final
$c_{ei}$	588,00	62,62	21,72	466,39	1.138,73
$cr_i$	0,5164	0,0550	0,0191	0,4096	1,00
$m_i$	38,20	397,13	58,30	1.367,65	1.861,27
$mr_i$	0,0205	0,2134	0,0313	0,7348	1,00
$p_i$	626,20	459,75	80,02	1.834,03	3.000
$pr_i$	0,2087	0,1533	0,0267	0,6113	1,00

## 1.5. Conclusiones

Las cadenas de suministro en los países emergentes se ven fuertemente afectadas por la intensa competencia internacional y los tratados de libre comercio. En este contexto, resulta esencial que aquellas cadenas de suministro que busquen cohesión emprendan acciones para recopilar información de manera conjunta sobre los recursos empleados, los ingresos y las utilidades generadas en sus operaciones habituales dentro de la cadena de productos o servicios. La información resultante puede actuar como un catalizador para el desarrollo de acciones estratégicas que contribuyan a la estabilidad, la competitividad y la óptima utilización de recursos por parte de los participantes en la cadena de suministro.

La propuesta de implementar un sistema de costos para una cadena de suministros dependerá de la recopilación de datos y del nivel de desagregación obtenido. A mayor nivel de depuración de la información, será más fácil identificar aquellos recursos específicos que impactan en mayor proporción en la inversión en los costos de operación. El modelo de costos propuesto en este capítulo para la cadena de suministros del sector panificador introduce la metáfora de considerar la cadena de suministro como una sola empresa. Esto facilitó la generación de

indicadores horizontales fundamentales y prácticos, a un nivel muy general, tales como el costo unitario, precio y margen unitarios equivalente, así como el peso relativo en la cadena para cada eslabón de esta, para producir 1 kilo de pan. Esta perspectiva facilita el análisis sobre la relación entre las variables seleccionadas, las cuales, según las entrevistas desarrolladas con algunos de los agentes de la cadena, son importantes para el análisis y la posterior gestión en costos. A pesar de las limitaciones en la generación de resultados, el modelo exhibe una coherente y aceptable capacidad analítica, siendo adaptable y valioso para los agentes vinculados a esta cadena productiva. Cabe destacar que, debido a la naturaleza del estudio de caso, la aplicabilidad del modelo se circunscribe al contexto de estudio y no se extiende a otras cadenas productivas distintas.

Los resultados presentados en la tabla 1.3 son el producto de la recopilación de información suministrada, en parte, por algunos de los agentes, así como de fuentes públicas. De igual forma, la aplicación del modelo en el caso propuesto permitió obtener datos como el costo equivalente ( $C_{ei}$ ), que son esenciales para realizar el cálculo de los valores unitarios equivalentes. Aunque los datos obtenidos de la aplicación del modelo de costos son generales, se pueden visualizar como una introducción para el desarrollo de estudios posteriores. Estos futuros estudios deben tender a lograr desagregar los costos a nivel de proceso o actividad, obteniendo información más detallada que permita tomar decisiones más fundamentadas. En el modelo de costos aquí propuesto, nos centramos en el principal componente del producto final, en este caso, el trigo, convertido en harina de trigo, que posteriormente se transformará en pan, este recurso representa un alto costo a lo largo de toda la cadena de suministro. Las decisiones en torno a este recurso principal afectan en mayor proporción los resultados de la cadena.

En las conclusiones derivadas de los resultados, se destaca que los eslabones de la cadena que generan los márgenes de utilidad bruta más significativos son la trilladora y las panaderías, con un 21,34% y un portentoso 73,48%, respectivamente. En contraste, los eslabones de Agricultura y Distribución presentan márgenes más bajos, del 2,05% y 3,13%, respectivamente.

Estos resultados apuntan a fortalecer la información sobre la estabilidad que han logrado las panaderías en función de la continuidad del negocio, incluso en épocas de crisis entre 2020 y 2021 por causa del Covid-19. De igual forma, el eslabón de las trilladoras ha logrado estabilidad por el alto nivel de ventas y las características de tener técnicas avanzadas en producción. Asimismo, estos resultados subrayan la falta de incentivo en el sector agrícola para la siembra de trigo en el país, ya que no son atractivos los márgenes que genera la siembra de este cereal.

A su vez, esto genera la necesidad de identificar las causas más específicas del alto costo de la siembra de este, lo cual se podría revisar con estudios más específicos de los costos invertidos

en la siembra por los pequeños y medianos agricultores. En nuestro cuadro de resultados del modelo, podemos observar que en agricultura se genera el costo relativo equivalente más alto en la cadena, con un 51,64 %, lo que visualiza la necesidad de generar acciones relacionadas con este eslabón en la siembra estudiada y ser fuente posterior para la formulación de políticas públicas relacionadas con incentivos para este tipo de cultivos lícitos y requeridos en el país.

Algunos datos de fuentes públicas del sector agricultura mencionan que la afectación principal de este tipo de siembra se debe al incremento del costo de los fertilizantes, que en parte son ocasionados por las crisis que han enfrentado los principales países productores y el aumento de la demanda de este tipo de insumo. Con relación a las márgenes estimadas de los distribuidores, con un 3,13 %, estos empresarios se han visto afectados en su rol de intermediarios por la constante inclinación de sus clientes en realizar compras directas con el productor, pero a su vez se desdibujan por la poca cantidad que compran las panaderías.

En conclusión, en contextos como el colombiano y en economías latinoamericanas similares, se destaca la necesidad urgente de adoptar modelos de costos en diferentes cadenas de suministros. Estos modelos son herramientas esenciales para identificar oportunidades de colaboración mediante estrategias conjuntas, fundamentales para contrarrestar los elevados costos generados por factores como la inflación y la reducción de subsidios en combustibles fósiles, que impactan en los insumos y recursos. Además, la disminución de las horas de trabajo mensual se suma a los desafíos, incrementando el costo unitario por hora y afectando los costos asociados a productos o servicios. Estas variables subrayan la importancia de estrategias colaborativas para mitigar los efectos adversos en la cadena de suministro y la sostenibilidad de los sectores afectados. Desarrollar modelos de costos para diferentes cadenas de suministro puede impulsar la optimización de recursos en un contexto donde la sostenibilidad económica, social y ambiental es crucial. Estudios futuros pueden aportar a la innovación en la gestión de recursos, promoviendo una economía circular y contribuyendo a la sostenibilidad global.

## Capítulo 2

### Compras conjuntas con descuento general

Desde tiempos inmemoriales, el comercio ha ofrecido a los compradores la oportunidad de pagar un precio más bajo por la compra de grandes cantidades de un producto. Hoy en día, los consumidores encuentran todo tipo de descuentos por cantidad a cada paso, tanto en tiendas minoristas como en plataformas en línea. Más allá de los consumidores, se puede ver que los descuentos por cantidad impregnan las transacciones de empresa a empresa. La mayoría de las empresas reciben un descuento por cantidad en algunas de sus compras y extienden un descuento por cantidad a algunos de sus clientes. Los operadores móviles en Europa reciben descuentos por volumen de los operadores de telecomunicaciones en función del número de llamadas internacionales realizadas Van de Klundert et al. (2005). En términos más generales, los grandes minoristas y fabricantes como Lidl e Ikea exigen descuentos a sus proveedores en función de un gran volumen de productos comprados. Al mismo tiempo, muchos grandes fabricantes y minoristas tienen programas para ofrecer descuentos por volumen a empresas externas, escuelas y organizaciones sin fines de lucro. Un ejemplo de tal programa es el Programa de compras por volumen de Apple, que ofrece descuentos por volumen personalizados para compras.

La omnipresencia de descuentos por cantidad para los compradores resalta la importancia de abordar preguntas como cuántas unidades deben pedirse cuando se trata de un programa de descuentos por cantidad. ¿Deberían los compradores unirse a una organización de compras grupales para tratar de reducir los precios de compra? Desde la década de 1950, el descuento de cantidades ha sido un tema de investigación importante, que también ha aparecido en la literatura de investigación económica y operativa. En las operaciones, gran parte del trabajo principal para determinar los tamaños óptimos de los pedidos para los compradores y para utilizar descuentos por cantidad para coordinar los tamaños de los lotes en las cadenas de suministro se llevó a cabo a finales del siglo pasado. Varios artículos de revisión de la literatura

abordan gran parte de este trabajo de varias maneras. Desde principios de siglo, ha seguido apareciendo un flujo constante de artículos. El área de investigación sigue siendo vibrante, con publicaciones de calidad que aparecen cada año solo en el campo de la gestión de operaciones. En Munson (2015), se puede encontrar una descripción completa de los descuentos por cantidad que cubre muchos de los artículos publicados en los últimos 25 años.

Aquí, nos centramos en la pregunta planteada anteriormente y demostramos que es beneficioso para los compradores unirse a un gran grupo de compras para obtener precios de compra más bajos y, por lo tanto, una reducción significativa en sus costos. Suponemos que los compradores (minoristas o productores) ya saben las cantidades de producto que van a comprar. Pueden ser productos terminados o materias primas para producir un determinado producto. Es decir, inicialmente saben cuántas unidades de un producto van a pedir cuando se trata de un programa de descuento por cantidad. Las iniciativas de compra cooperativa, como los grupos de compras, los consorcios de compras y las oficinas de compras, son cada vez más populares debido a los avances en la tecnología de la información y el desarrollo de los mercados en línea. Los grupos de compra generan múltiples beneficios para sus participantes: los compradores pueden obtener mejores precios al aumentar su poder adquisitivo y reducir costos al consolidar sus operaciones.

En la literatura de compras, la compra cooperativa se refiere usando muchos términos. Hay ciertos patrones en esos términos, pero la terminología aún no está completamente estabilizada (Tella, 2005). Definimos la compra cooperativa como el intercambio y / o agrupación de información, procesos, recursos y / o volúmenes relacionados con las compras por parte de dos o más organizaciones en un grupo de compras para mejorar su rendimiento (Schotanus et al., 2008). Un grupo de compras consiste en dos o más organizaciones dependientes o independientes que compran juntas, ya sea formal o informalmente, o a través de un tercero (Hendrick, 1996). La compra cooperativa es un tipo de acuerdo cooperativo, a menudo entre empresas, para acordar sumar la demanda a fin de obtener precios más bajos de proveedores seleccionados. Las cooperativas de minoristas son una forma de compra cooperativa. Las cooperativas son a menudo utilizadas por las agencias gubernamentales para reducir los costos de adquisición (Huber et al., 2004) y también están ganando popularidad en el sector privado (Hendrick, 1996). La investigación sobre compras cooperativas ha recibido relativamente poca atención en el campo de la investigación de operaciones. Hasta ahora se ha centrado principalmente en explicaciones inductivas de prácticas y razonamiento cualitativo deductivo. Sin embargo, hasta la fecha, se ha utilizado poco el enfoque de la teoría de juegos.

Una cuestión específica que ha recibido particularmente poca atención de investigación es la asignación de los costos resultantes de los ahorros de precios de compra logrados a través de la compra cooperativa utilizando el llamado método de asignación de *Equal Price* (EP). La regla EP es una práctica común que consiste en que todos los agentes pagan el mismo precio por artículo (Heijboer, 2003). La regla EP es práctica e intuitivamente atractiva, pero puede conducir a resultados injustos bajo ciertas circunstancias. Esto ha sido reportado previamente por Heijboer (2003) y analizado sistemáticamente por Schotanus et al. (2008). Este último se centra específicamente en la asignación de las ganancias totales resultantes de la cooperación y analiza formalmente cómo y en qué condiciones surge la injusticia cuando se utiliza la regla EP. Estas dos cuestiones son importantes para todos los tipos de grupos de compras, ya que todos tienen que tomar decisiones sobre cómo asignar sus ganancias. Proporcionan un análisis detallado sobre los resultados injustos de la regla EP y permiten comprender mejor los problemas asociados con ella.

En este capítulo, estudiamos situaciones en las que un vendedor de un determinado producto proporciona descuentos de precios para pedidos grandes de acuerdo con una función de precio unitario decreciente. Los compradores de este producto pueden cooperar y formar grupos de compra para beneficiarse de estos descuentos de precios. Se proporciona en Schotanus et al. (2009) una base analítica y empírica para una función general de descuento por cantidad (QDF) que se puede utilizar para describir la función subyacente de casi todos los tipos de descuento por cantidad. Muestran que este QDF encaja muy bien con 66 programas de descuento encontrados en la práctica. Schotanus et al. (2009) propone un modelo QDF que incluye una fórmula explícita que depende de ciertos parámetros, pero nosotros proponemos una función de precio general que mide el descuento por cantidad que encuentran los compradores cuando cooperan en la compra y satisface propiedades como la continuidad, decrecimiento, convexidad y la tasa de crecimiento limitada.

Por otro lado, como se mencionó, Schotanus et al. (2008) se centra en asignar las ganancias totales de la cooperación por medio de un juego de beneficio, y analizar la injusticia resultante del uso del método EP. Demuestran que esta injusticia se debe a que se descuida un componente particular del valor agregado de los miembros individuales del grupo. Discuten medidas que un grupo de compra podría considerar para mitigar la percepción de injusticia, pero no estudian en profundidad la clase de juegos cooperativos que tienen a mano ni proponen una alternativa a la regla EP. A diferencia de Schotanus et al. (2008), nosotros analizamos estas situaciones de compra cooperativa como juegos de costos cooperativos y las estudiamos de manera exhaustiva, buscamos alternativas de la regla EP y otras distribuciones reconocidas, pero complicadas de

calcular como el valor de shapley o el valor de compromiso (Borm et al., 1992). En particular, mostramos que cuando la función de precio unitario decreciente es lineal, la regla EP coincide con el valor de Shapley y el nucleolus. Sin embargo, algunos compradores pueden argumentar que la regla EP no es aceptable porque favorece a aquellos que compran solo unas pocas unidades del producto. Esto puede ser más problemático cuando la función de precio unitario decreciente no es lineal: en ese caso, EP pierde algunas de sus buenas propiedades y ya no coincide con el valor de Shapley o el nucleolus. A diferencia del caso lineal, en este caso no lineal, el valor de Shapley y el nucleolus no asignan el mismo precio a todos los agentes, por lo que son reglas de different price (DP). Sin embargo, tienen un problema de computabilidad ya que ambas son muy laboriosas de calcular para un gran número de agentes. Para encontrar una alternativa adecuada, primero estudiamos las propiedades que debe tener una regla DP en esta situación. En segundo lugar, proponemos una familia de reglas de DP que mantienen esas propiedades y son fáciles de calcular para un gran número de agentes.

Este capítulo, por lo tanto, contribuye a la literatura sobre modelos de compra cooperativa de la siguiente manera. Primero, ampliamos el estudio de dichos modelos con funciones de descuento generales e introducimos una nueva clase de juegos de costos de compra cooperativa con descuentos generales. En segundo lugar, analizamos exhaustivamente los juegos de costos de compra cooperativa con descuentos lineales y demostramos que la regla EP coincide con el valor de Shapley y el nucleolus. Esta igualdad no es válida para los juegos de costos de compra cooperativa con descuentos no lineales, por lo que luego estudiamos dichos juegos de costos con descuentos no lineales y proponemos una familia de reglas de DP que son aceptables para todos los agentes y más fáciles de calcular que el valor de Shapley y el nucleólo. Se llaman reglas  $\alpha$ -proporcionales. Para que nuestra familia de reglas  $\alpha$ -proporcionales sea aceptable para todos los agentes, distinguimos entre Agentes mayores ( $Am$ ), como agentes que compran grandes cantidades, en adelante "grandes compradores" y para que sea Agentes no mayores ( $Anm$ ) como agentes que compran pequeñas cantidades, en adelante "pequeños compradores".

Hasta donde sabemos, no existe una definición formal de tales agentes en la literatura de juegos de compra cooperativa. La belleza de nuestras reglas  $\alpha$ -proporcionales es que, con el factor de proporcionalidad  $\alpha$ , reducen el costo de los grandes compradores y aumentan el costo de los pequeños compradores. Afortunadamente, siempre hay un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es aceptable para todos los agentes.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. Comenzamos con la revisión de la literatura, que describe la literatura más estrechamente relacionada con nuestro capítulo. A continuación, en la Sección 2.2, desarrollamos un modelo formal de costo de compra conjunta

con un descuento general (modelo CCDG) y demostramos que la gran coalición (formada por todos los agentes) puede obtener reducciones significativas en los costos. La regla Equal Price (EP) resulta ser un método eficiente y (coalicionalmente) estable para asignar los costos reducidos generados por el modelo CCDG. Luego, la sección 2.3 analiza los modelos de compra cooperativa con funciones de precio unitario decrecientes y lineales. Demostramos que la naturaleza lineal de la función de precio de descuento proporciona información adicional sobre el correspondiente juego de compra cooperativa con descuento lineal (juego CCL): La contribución marginal de un agente disminuye a medida que crece una coalición. Además, la regla EP coincide con el valor de Shapley y el nucléolo. En la sección 2.4, proponemos una familia de reglas de asignación para los juegos de compra cooperativa con descuento no lineal (juegos CCNL). Nos centramos en el método de Different Price (DP) y proponemos una familia de reglas de asignación con DP que son aceptables para todos los agentes: reglas BDP. La sección 2.5 se centra en un enfoque alternativo para obtener reglas de DP para los juegos CCNL. Consiste en asignar proporcionalmente el coste de la gran coalición, con un factor de proporcionalidad que combina los costes individuales y la regla EP. Obtenemos una familia paramétrica altamente adecuada de reglas proporcionales, llamada reglas  $\alpha$ -proporcionales, que, notablemente, están relacionadas con la familia de reglas BDP. Concretamente, la sección 2.6 demuestra que siempre hay un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla proporcional es una regla BDP. En la sección 2.7, se ilustra nuestro modelo con un par de ejemplos numéricos. Finalmente, la sección 2.8 presenta las conclusiones y señala investigaciones futuras para académicos en el campo.

## 2.1. Revisión de la literatura

Como se mencionó anteriormente, el uso de la teoría de juegos para estudiar los modelos de compra cooperativa ha sido hasta ahora limitado. Sin embargo, hay trabajos que han abordado el tema desde diversas perspectivas. Aquí, describimos la literatura de los últimos 15 años más estrechamente relacionada con nuestro capítulo.

Se discute en Granot & Sosic (2005) el problema que surge cuando una pequeña organización compradora utiliza un contrato negociado por una gran organización compradora. Muestran que una organización relativamente pequeña se beneficiaría de unirse a un grupo de compras específico, pero la inclusión de tal organización podría disminuir las ganancias de las organizaciones más grandes en este intercambio. En Essig (2000), se señala que es importante evitar el tipo de desequilibrio de incentivos y contribuciones de las organizaciones en un grupo

de compra que puede ser causado por EP. Finalmente, razonando desde una perspectiva de teoría de la equidad Adams (1963), se puede observar que las personas que se sienten poco recompensadas intentarán restaurar la equidad. Al igual que en los grupos de compras, la regla EP puede conducir a organizaciones con recompensas insuficientes en un grupo. Esto puede conducir a un menor compromiso por parte de esas organizaciones o resultar en que abandonen el grupo Das & Teng (2001).

En Chen (2009), se considera un sistema de distribución que consiste en un conjunto de minoristas que se enfrentan a una demanda de un solo período dependiente del precio para un solo producto. Al aprovechar el efecto de combinación de riesgos y el descuento por cantidad/volumen proporcionado por los proveedores o transportistas externos, los minoristas pueden realizar pedidos conjuntos y mantener el inventario en almacenes centrales antes de la realización de la demanda, y asignar el inventario entre ellos después de la realización de la demanda para reducir sus costos operativos. Bajo ciertos supuestos, el autor muestra que hay una asignación estable de ganancias entre los minoristas y también muestra cómo calcularla.

En Groote et al. (2013), se introduce una nueva clase de situaciones de compra cooperativa: situaciones de compra cooperativa máxima (MCP). La asignación de posibles ahorros de costos en situaciones de MCP, en las que el precio unitario depende de la cantidad del pedido más grande dentro de un grupo de jugadores, se analiza definiendo los juegos MCP cooperativos correspondientes. Los autores muestran que un precio unitario decreciente es una condición suficiente para un núcleo no vacío: hay un conjunto de vectores marginales que pertenecen al núcleo. El núcleo de un juego MCP se puede derivar en tiempo polinómico de uno de estos vectores marginales. Usando la descomposición de un juego MCP en juegos de unanimidad, también encuentran una expresión explícita para el valor de Shapley.

Se estudia en Hezarkhani & Susic (2019) mecanismos para gestionar la compra grupal por un conjunto de compradores de un producto dado con una función cóncava de costo de compra. Los compradores sensibles a los costos están dispuestos a comprar una gama de cantidades de productos a diferentes precios. Investigan dos tipos de mecanismos que pueden ser utilizados por una organización de compras grupales: mecanismos de pedido y licitación. Bajo la elección de reglas apropiadas para compartir costos, introducen un mecanismo secuencial de pedidos conjuntos y una familia de estrategias de pedido bajo las cuales las desviaciones estratégicas de algunos compradores nunca dejan a otros compradores en peor situación.

Los juegos de costo de inventario con descuentos son un tipo particular de modelo de compra cooperativa. En un juego de costos de inventario Meca et al. (2004), un grupo de empresas que se ocupan del pedido de un determinado producto deciden cooperar y realizar sus

pedidos conjuntamente. Para coordinar la política de pedidos de las empresas, se necesita cierta revelación de información: la cantidad de información revelada por cada empresa al resto se mantiene lo más baja posible, ya que pueden ser competidores en el mercado de consumo.

En Meca et al. (2004), se centra en los mecanismos de división proporcional para compartir el costo conjunto, e introducir y caracterizar la regla SOC (compartir costos de inventario). Luego, se analiza en Meca et al. (2007) la clase de juegos de inventario que surge de problemas de inventario con precios de venta especiales. Un grupo de empresas que intentan minimizar sus costos de inventario conjunto cooperando puede recibir un descuento especial en el costo de instalación simplemente por ordenar. Las razones de tales reducciones de precios van desde guerras de precios competitivas hasta intentos de reducción de inventario por parte del proveedor. Esta situación cooperativa genera la clase de juegos de inventario con descuentos temporales no discriminatorios. La regla SOC modificada, una especie de regla proporcional, se propone como una asignación estable (pertenece al núcleo del juego) y consistente. Más recientemente, en Wenzhong et al. (2021), se extiende los juegos de costo de inventario a la situación en la que el fabricante proporciona a los minoristas un descuento de precio en compras superiores a una cierta cantidad de pedido. Los autores definen el juego de inventario correspondiente con descuento por cantidad, y muestran que existe una asignación estable del costo total, que llaman la regla de proporcionalidad de la demanda y que caracterizan. Al mismo tiempo, se considera en Krichen et al. (2011) un juego de costos de inventario que involucra a un solo proveedor que ofrece descuentos por cantidad y permite a los minoristas retrasar los pagos. Los minoristas están tentados a formar coaliciones para minimizar sus costos. Los autores proponen un método de solución que genera estructuras de coalición estables para los minoristas teniendo en cuenta el retraso en los pagos y el monto del descuento ofrecido por el proveedor. El enfoque propuesto incluye una regla de decisión que genera coaliciones preferidas para cada minorista y reduce considerablemente el número de estructuras de coalición exploradas para determinar soluciones estables.

En Albizuri (2010), se propone y estudia la familia de  $\alpha$ -serial cost-sharing rules para problemas de reparto de costos. Cada una de estas reglas es una combinación de la *serial cost-sharing rule* (Moulin & Shenker, 1992) y la *dual serial cost-sharing rule* (Albizuri & Zarzuelo, 2007). El parámetro  $\alpha$  determina cómo se obtiene esta combinación. Las  $\alpha$ -serial cost-sharing rules asignan el costo total de producción, en un problema de reparto de costes, de tal manera que los agentes con bajas demandas tienen que pagar incrementos de costos asociados a bajas producciones e incrementos de costos asociados a altas producciones ( $0 < \alpha < 1$ ). Si sólo se tiene en cuenta un tipo de incremento de costos, por ejemplo, los agentes con bajas demandas

sólo tienen que pagar incrementos de costos asociados a bajas producciones, obtenemos *serial cost-sharing rule* ( $\alpha = 1$ ). Por el contrario, si los agentes con bajas demandas sólo tienen que pagar incrementos de costos asociados a altas producciones, obtenemos la *dual serial cost-sharing rule* ( $\alpha = 0$ ). El enfoque y el contexto de Albizuri son diferentes a los nuestros en esta tesis. Mientras que su  $\alpha$ -*serial cost-sharing rules* se proponen para problemas generales de reparto de costos, nuestra regla  $\alpha$ -proporcional es una regla de asignación muy apropiada para modelos de compra cooperativa con un descuento general. Distribuye el costo de la gran coalición proporcionalmente, con un factor proporcional que combina el costo máximo que cada agente tiene que pagar individualmente (su propio costo individual) con el coste mínimo que se puede conseguir mediante la cooperación (la regla EP). La regla  $\alpha$  proporcional es natural e intuitiva y mucho más fácil de calcular que la  $\alpha$ -*serial cost-sharing rule*.

Finalmente, Algaba et al. (2019) muestra que el valor de Shapley es muy valorado por muchos investigadores como una regla útil y relevante para analizar, tanto desde una perspectiva teórica como aplicada, los problemas de asignación en el sentido más general. Está estructurado en tres partes. Primero presentan algunas de sus expresiones matemáticas más conocidas, comenzando con las introducidas por Lloyd Shapley en 1953. En segundo lugar, presentan algunas de sus caracterizaciones más importantes como una indicación de la gran cantidad de propiedades atractivas e interesantes que satisface este valor. Finalmente, seleccionan una muestra de las extensiones de valor de Shapley a un gran número de contextos y sus aplicaciones a campos y escenarios muy diferentes. Para ver un estudio reciente del valor de Shapley, el nucléolo y otros conceptos de solución en la gestión de operaciones Luo et al. (2022).

## 2.2. Juegos de compras conjuntas con descuento general

Consideramos un conjunto finito de agentes  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , que quieren comprar un determinado servicio o bien. Cada agente  $i \in N$  quiere comprar una cantidad  $q_i > 0$  unidades del producto a un costo  $P(q_i)q_i$ , donde  $P(q_i) > 0$  representa costos variables con descuento por unidad, es decir, el precio que el agente  $i$  paga por la cantidad  $q_i$ . Sin embargo, es independiente del jugador  $i$ . A lo largo de este capítulo y sin pérdida de generalidad, clasificamos a los agentes según cuánto compran. En otras palabras, asumimos que  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . Consideramos una función general de precio de descuento  $P : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  con las siguientes propiedades:

1. Clase  $C^2$  en  $(0, +\infty)$ : existe  $P''(q)$  en todos los puntos  $(0, +\infty)$  y es continua.

2. Decreciente<sup>1</sup>: para todo  $q > 0, P'(q) < 0$ .
3. Convex<sup>2</sup>: para todo  $q > 0, P''(q) \geq 0$ .
4. Tasa de crecimiento limitado: para todo  $q > 0, |P'(q)| \leq \frac{P(q)}{q}$

La propiedad 2 quiere decir que los agentes que compran grandes cantidades obtendrán mayores descuentos - por unidad de producto- que los agentes que compran pequeñas cantidades. La propiedad 3 quiere decir que el máximo descuento ocurre al inicio del trato. La última propiedad indica que el costo  $P(q)q$  es creciente en  $q$ , ya que lo contrario no tiene sentido económico. Esto significa que el costo promedio por unidad es mayor que el costo marginal.<sup>3</sup>

Nos referimos a nuestro modelo como un modelo de Compra Conjuntas con Descuento General  $(N, q, P)$  (en adelante, modelo CCDG), donde  $N$  es el número total de agentes en un grupo de compras (es decir, la gran coalición);  $q$  es el vector de cantidades que cada agente  $i \in N$  quiere comprar, es decir,  $q = (q_i)_{i \in N}$ ; y  $P$  es una función de descuento que satisface las propiedades 1–4.

Dado un modelo CCDG  $(N, q, P)$ , definimos el correspondiente juego de costo de compras conjuntas con descuento general  $(N, c)$ . Para cualquier coalición de agentes  $S \subseteq N$ , la función de costo  $c(S)$  se define como el costo total que la coalición tiene que pagar por la compra conjunta del producto:  $c(S) = P(q_S)q_S$ , con  $q_S = \sum_{i \in S} q_i$ . A partir de ahora, nos referiremos a este juego como juego CCDG.

La primera cuestión que surge es si es rentable para los agentes en  $N$  formar la gran coalición para obtener una reducción significativa de costos. La respuesta es sí, debido a que los juegos CCDG siempre son subaditivos. Se dice que un juego de costo  $(N, c)$  es subaditivo si  $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ , para todo  $S, T \subseteq N$  tal que  $S \cap T = \emptyset$ . La propiedad de subaditividad revela que el costo de la gran coalición es siempre menor que la suma de los costos de cualquier partición de  $N$  en dos coaliciones  $S$  y  $N \setminus S$ ; es decir,  $c(N) \leq c(S) + c(N \setminus S)$  para todo  $S \subseteq N$ . En consecuencia, los agentes tienen incentivos para formar la gran coalición en situaciones de CCDG.

La siguiente proposición muestra esta propiedad para los juegos CCDG.

**Proposición 1.** Cada juego CCDG  $(N, c)$  es subaditivo.

<sup>1</sup>Para todo  $0 < x \leq y, P(x) \geq P(y)$ .

<sup>2</sup>Para todo  $x, y > 0$ , y para todo  $0 \leq t \leq 1, P(tx + (1-t)y) \leq tP(x) + (1-t)P(y)$ .

<sup>3</sup>Esta propiedad viene del hecho que  $x \geq y \implies P(x)x \geq P(y)y$  is equivalente a  $P'(x) \geq -\frac{P(x)}{x}$

**Demostración.** Consideremos  $S, T \subseteq N$  s.t.  $S \cap T = \emptyset$ . Entonces

$$c(S \cup T) = P(q_{S \cup T})q_{S \cup T} = P(q_{S \cup T})q_S + P(q_{S \cup T})q_T \leq P(q_S)q_S + P(q_T)q_T = c(S) + c(T),$$

considerando que  $P(q_{S \cup T}) \leq P(q_S)$ , y  $P(q_{S \cup T}) \leq P(q_T)$ .  $\square$

Por lo tanto, hemos demostrado que la gran coalición puede obtener reducciones significativas en costos. En ese caso el costo total reducido está dado por  $c(N) = \sum_{i \in N} P(q_N)q_i$ , donde  $P(q_N)$  es el precio mínimo con descuento por unidad que la coalición  $N$  pueda obtener.

La segunda pregunta es si se puede encontrar un método para asignar los costos generados por el modelo CCDG que sea eficiente, coalicionalmente estable y fácil de calcular. La respuesta es nuevamente positiva, pero no es tan sencilla como la respuesta anterior. Se requiere un trabajo más elaborado que iremos desarrollando en las siguientes secciones.

Comenzamos definiendo una regla de asignación para los juegos CCDG. Esta es una aplicación  $\psi$  que asigna un vector  $\psi(c) \in \mathbf{R}^n$  para cada  $(N, c)$ , que satisface eficiencia, es decir  $\sum_{i \in N} \psi_i(c) = c(N)$ . Cada componente  $\psi_i(c)$  indica el costo asignado a  $i \in N$ , así una regla de asignación para juegos CCDG es un método para repartir el costo total reducido entre los agentes en  $N$  cuando ellos cooperan.

Un método muy natural y de uso común es la regla del Equal Price (EP). Dado un juego CCDG  $(N, c)$ , la regla EP es dada por  $\varepsilon(c) = (\varepsilon_i(c))_{i \in N}$  con  $\varepsilon_i(c) = P(q_N)q_i$ . Cada agente  $i \in N$  obtiene la cantidad  $q_i$  al costo mínimo  $P(q_N)$ , y paga  $P(q_N)q_i$ .

La regla EP tiene buenas propiedades para los juegos CCDG, al menos con respecto a la computabilidad (es fácilmente computable) y la estabilidad coalicional, en el sentido del núcleo.

El núcleo de un juego de costo  $(N, c)$  se define de la siguiente manera:

$$C(c) := \left\{ x \in \mathbf{R}^n / \sum_{i \in N} x_i = c(N), \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

Las asignaciones estables coalicionalmente en el sentido del núcleo se denominan reparto del núcleo. Un juego  $(N, c)$  es equilibrado si y solamente si  $C(c) \neq \emptyset$ . Nosotros interpretamos un núcleo no vacío para juegos de costo, los juegos equilibrados, como una situación en la cooperación de todos los agentes es factible, en el sentido de que hay posibles reducciones de costos que dejan a todos los agentes en mejor situación (o, al menos, no peor).

**Proposición 2.** Cada juego CCDG  $(N, c)$  es equilibrado.

**Demostración.** La idea es probar que  $\varepsilon(c)$  es una asignación de núcleo. Quiere decir,  $\sum_{i \in S} \varepsilon_i(c) \leq c(S)$  para cada  $S \subseteq N$ .

Consideramos una coalición  $S \subseteq N$ . Entonces,

$$\sum_{i \in S} \varepsilon_i(c) = \sum_{i \in S} P(p_N) p_i \leq \sum_{i \in S} P(q_S) q_i = c(S) \quad (2.1)$$

Por lo tanto,  $C(c) \neq \emptyset$  y  $(N, c)$  es un juego equilibrado.  $\square$

Como se muestra en la Sección 2.3, cuando  $P$  es lineal, el correspondiente juego de compras conjuntas con descuento lineal (en adelante, juego CCL) es cóncavo y la regla EP coincide con el valor de Shapley y el nucleolus. Por lo que en este caso la regla EP es una asignación aceptable. Sin embargo, algunos agentes pueden argumentar que la EP es cuestionable porque favorece a aquellos agentes que compran solo unas pocas unidades del producto. Debemos tener en cuenta, que estos agentes pagan el mismo precio que los grandes compradores. Las preocupaciones de estos agentes pueden ser realmente problemáticas cuando  $P$  no es lineal. En ese caso, la regla EP pierde algunas de sus buenas propiedades y ya no coincide con el valor de Shapley ni el nucléolo.

Además, la EP sólo tiene en cuenta dos elementos para un agente concreto  $i \in N$ : la cantidad exigida por este agente ( $q_i$ ) y la cantidad agregada de todos los agentes ( $q_N = \sum_{i \in N} q_i$ ). No tiene en cuenta la distribución de las cantidades individuales demandadas por los agentes, es decir,  $q_j$  para todo  $j \in N \setminus \{i\}$ . Esto puede ser un problema también cuando hay grandes asimetrías entre grandes y pequeños compradores.

Para resolver este problema, la Sección 2.4 propone una familia de reglas de asignación para los juegos de compras conjuntas con descuento no lineal (juegos CCNL). Nos centramos allí en la regla Different Price (DP) y proponemos una familia de reglas de asignación con precios diferentes que son aceptables para todos los agentes.

### 2.3. Regla de Equal Price para juegos CCL

Comenzamos estudiando la regla Equal Price (EP) para los juegos CCL. La naturaleza lineal de la función de precio de descuento proporciona información adicional sobre estos juegos: La contribución marginal de un agente disminuye a medida que crece una coalición. Esto es bien conocido como el efecto bola de nieve o propiedad de concavidad. La teoría de juegos cooperativos proporciona reglas de asignación para juegos cóncavos con buenas propiedades

(estabilidad coalicional y aceptabilidad). Destacamos el valor de Shapley, introducido por primera vez en Shapley (1953), y el nucléolo, presentado en Schmeidler (1969).

Aquí probamos que los juegos CCL son siempre cóncavos y la regla EP coincide con el valor de Shapley y el Nucleolo. Sea  $(N, c)$  un juego CCL con  $P$  siendo una función de descuento lineal. Es decir,  $P: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_+$ , tal que para todo  $q \in \mathbf{R}_+$ ,  $P(q) = a - bq$ , con  $b \geq 0$  y  $a$  suficientemente grande, tal que  $a - bq \geq 0$ , para todo  $0 < q \leq \frac{a}{b}$ . Por lo tanto, para todo  $S \subseteq N$ ,  $c(S) = aq_S - bq_S^2$ . Mostramos que es siempre cóncavo, en el sentido de que para todo  $i \in N$  y todo  $S, T \subseteq N$  tal que  $S \subseteq T \subset N$  con  $i \in S$ ,  $c(S) - c(S \setminus \{i\}) \geq c(T) - c(T \setminus \{i\})$ .

La siguiente proposición muestra que un juego CCL es siempre cóncavo.

**Proposición 3.** Cada juego CCL es cóncavo.

**Demostración.** Primero mostramos que la contribución marginal de un agente a cualquier coalición es siempre menor que su costo individual. Nosotros denotamos por  $M_i c(S)$  la contribución marginal del jugador  $i \in S \subseteq N$ ; es decir,  $M_i c(S) = c(S) - c(S \setminus \{i\})$ , para todo  $i \in S \subseteq N$ . Entonces,

$$\begin{aligned} M_i c(S) &= aq_S - bq_S^2 - aq_{S \setminus \{i\}} + bq_{S \setminus \{i\}}^2 = aq_i - b(q_S^2 - q_{S \setminus \{i\}}^2) \\ &= aq_i - b(q_S + q_{S \setminus \{i\}})(q_S - q_{S \setminus \{i\}}) = aq_i - bq_i^2 - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}} \\ &= c(\{i\}) - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Finalmente, Consideremos  $i \in N$  y  $S \subseteq T \subset N$  con  $i \in S$ , así

$$M_i c(S) = c(i) - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}} \geq c(i) - 2bq_i q_{T \setminus \{i\}} = M_i c(T),$$

donde  $q_{S \setminus \{i\}} \leq q_{T \setminus \{i\}}$ .  $\square$

Ahora nos centramos en el valor de Shapley y el nucléolo. El valor de Shapley asigna un único reparto (entre los agentes) del costo total generado por la gran coalición. Este reparto mide la importancia de cada agente en la cooperación y qué costo puede razonablemente esperar. El valor Shapley de un juego cóncavo es el centro de gravedad de su núcleo (véase Shapley, 1971). Ésta asignación de costos es en general difícil de calcular, cuando el número de agentes es grande. Dado un juego CCL  $(N, c)$ , se denota por  $\phi(c)$  el valor de Shapley donde para cada agente  $i \in N$ , la asignación de costes correspondiente es

$$\phi_i(c) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} [(c(T) - c(T \setminus \{i\}))], \text{ con } |T| = t. \quad (2.3)$$

El nucleolo maximiza el bienestar de las coaliciones peor tratadas, es decir, aquellas con el menor exceso. Denotamos por  $v(c)$  el *nucleolo* del juego CCL  $(N, c)$ . Primero, definimos el exceso de coalición  $S$  en  $(N, c)$  con respecto a la asignación  $x \in \mathbb{R}^n$  como  $e(S, x) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ .

Esta cantidad puede considerarse como un índice del bienestar de la coalición  $S$  con el reparto  $x$ : cuanto mayor sea  $e(S, x)$  mejor es tratada la coalición  $S$  con ese reparto  $x$ . Sea  $e^*(q)$  el vector de  $2^n$  excesos dispuestos en orden (débilmente) creciente, es decir,  $e_i^*(x) \leq e_j^*(x)$  para todo  $i < j$ . En segundo lugar, se define en orden lexicográfico  $\succ_l$ . Para cualquier  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \succ_l y$  si y solamente si existe un índice  $k$  tal que para cualquier  $i < k$ ,  $x_i = y_i$  y  $x_k > y_k$ . El nucleolo del juego CCL  $(N, c)$  es el conjunto

$$v(c) = \{x \in X : e^*(x) \succ_l e^*(y) \text{ para todo } y \in X\} \quad (2.4)$$

con  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = c(N), x_i \geq c(\{i\}) \text{ para todo } i \in N\}$ .

Es bien sabido que el nucleolo es único para juegos equilibrados y que siempre es una asignación del núcleo.

Esta última proposición muestra que la EP coincide con el valor de Shapley y el nucleolo para juegos CCL.

**Proposición 4.** Sea  $(N, c)$  un juego CCL. Entonces,  $\varepsilon(c) = \phi(c) = v(c)$ .

**Demostración.** Para demostrar esto, primero necesitamos definir la clase de juegos PS introducidos por Kar et al. (2009). Entonces, un juego de costos  $(N, c)$  satisface la propiedad PS si para todo  $i \in N$ , existe  $k_i \in \mathbb{R}$  tal que  $M_i c(S \cup \{i\}) + M_i c(N \setminus S) = k_i$ , para todo  $i \in N$  y  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ . Kar et al. (2009) muestra que para juegos PS, el valor Shapley coincide con el nucleolo; es decir,  $\phi_i(c) = v_i(c) = \frac{k_i}{2}$ , para todo  $i \in N$ .

Tomamos un juego CCL  $(N, c)$  y consideramos  $i \in N$ . Primero demostremos que es un juego PS con  $k_i = 2\varepsilon_i(c)$ . Sea  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ . Mediante (2.2), se satisface que

$$\begin{aligned} M_i c(S \cup \{i\}) + M_i c(N \setminus S) &= c(\{i\}) - 2bq_i q_S + c(\{i\}) - 2bq_i q_{(N \setminus S) \setminus \{i\}} \\ &= 2c(\{i\}) - 2bq_i q_S - 2bq_i (q_{(N \setminus S)} - q_i) \\ &= 2aq_i - 2bq_i q_S - 2bq_i q_{(N \setminus S)} = 2aq_i - 2bq_i q_N \\ &= 2q_i P(q_N) = 2\varepsilon_i(c). \end{aligned}$$

Segundo, se sabe que  $\phi_i(c) = v_i(c) = \frac{k_i}{2}$ , y así  $\phi_i(c) = v_i(c) = \varepsilon_i(c)$ , para todo  $i \in N$ .  $\square$

Se puede concluir que, para juegos CCL, la regla EP es una forma adecuada de asignar el costo total reducido.

## 2.4. Regla Balanced Different Price para juegos CCNL

Esta sección estudia los juegos CCNL con función P no lineal. Nos centramos en las reglas DP, donde una regla DP esta definida como  $DP(c) = (DP_i(c))_{i \in N}$  con  $\frac{DP_i(c)}{q_i} \neq \frac{DP_j(c)}{q_j}$  para todo  $q_i \neq q_j$  con  $i, j \in N$ . Notemos que  $\frac{DP_i(c)}{q_i}$  es el precio que el agente  $i$  pagará por unidad bajo esta regla DP. Nosotros analizaremos las propiedades que debe tener una regla de asignación DP para ser aceptable para todos los agentes.

Como se mencionó anteriormente, los agentes podrían argumentar que la regla EP no es aceptable porque favorece a aquellos agentes que compran solo unas pocas unidades del producto. Esto se vuelve más problemático cuando la función de descuento no es lineal. En ese caso, la regla EP pierde algunas de sus buenas propiedades. A diferencia del caso lineal, otras reglas aceptables, como el valor de Shapley y el nucléolo, no asignan el mismo precio a todos los agentes, es decir, son reglas DP pero tienen un problema de computabilidad en el sentido de que ambas son muy laboriosas para calcular un gran número de agentes.

Por lo tanto, aquellos que compran grandes cantidades del producto (grandes compradores) pueden no aceptar la regla de EP y preferirían pagar un precio más bajo que la regla EP. Se debe proponer una regla DP fácilmente computable en la que el precio dependa de la cantidad demandada (con esta nueva regla, los beneficios de la cooperación no se distribuyen tan uniformemente como en la regla de EP). En primer lugar, tenemos que definir "grandes compradores". Proponemos el siguiente enfoque: clasificar a los agentes según cuánto compran ( $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ ), los grandes compradores son aquellos  $i \in N$  tal que  $\sum_{j \in N} P(q_i)q_j < \sum_{j \in N} P(q_j)q_j$  es decir, si todos los agentes pagan el precio individual del agente  $i$ , el costo total es mas pequeño que si los agentes paguen su costo individual. Así, el conjunto de agentes puede ser dividido en dos subconjuntos: los grandes compradores ( $A_m$ )

$$A_m = \{i \in N, \sum_{j \in N} P(q_i)q_j < \sum_{j \in N} P(q_j)q_j\} \quad (2.5)$$

y los pequeños compradores ( $A_{nm}$ )

$$A_{nm} = \{i \in N, \sum_{j \in N} P(q_i)q_j \geq \sum_{j \in N} P(q_j)q_j\}. \quad (2.6)$$

La regla DP debe asignar un precio inferior que el EP a los grandes compradores, y uno más alto o igual que el EP para los pequeños compradores. Por lo tanto, cada agente  $i \in N$  debería pagar el precio  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)$  para el perfil de cantidades  $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \in R^n$  donde  $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$  where  $\sigma : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  es una función que determina la regla DP. Por lo tanto, el precio  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)$  no solo depende de la cantidad demandada por el agente  $i$ , sino que también depende de las cantidades demandadas por otros agentes y su distribución. Esta es otra diferencia significativa con respecto a la regla EP.

Se considera que si para agentes  $i \in N$ , tal que  $q_i \leq q_j$ , entonces la función toma un valor menor/igual, es decir,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$ ; por lo tanto, el precio diferente es mayor/igual para el agente  $i$ . También podemos considerar que esta propiedad de  $\sigma$  es limitada. Significa que cuanto mayor es la compra, el costo es más alto; es decir, si  $q_i \leq q_j$  para  $i, j \in N$ , entonces  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})P(q_N)q_j$  lo cual es equivalente a  $\sigma(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})q_j$ . Ambas son suposiciones bastante razonables.

También se asume que los grandes compradores pagarán un precio inferior a  $P(q_N)$  y los pequeños compradores un precio igual a  $P(q_N)$  o superior. Llamaremos a esta propiedad aceptabilidad de los grandes compradores (de ahora en adelante,  $A_m$ , por sus siglas en inglés). Formalmente, para todo  $i \in A_m$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$ , y para todo  $i \in A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq 1$ .

Para que la regla de asignación también sea aceptable para los pequeños compradores, se asume un límite superior para el precio que tienen que pagar. Por lo tanto, se supone que el precio a pagar por cualquier  $i \in A_{nm}$  es mayor o igual al precio que todos los pequeños compradores pueden obtener juntos, es decir,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$  con  $q_{A_{nm}} = \sum_{i \in A_{nm}} q_i$ , donde esta condición es equivalente a  $\sigma(q_1, q_{-1})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$  debido a  $\sigma(q_1, q_{-1}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$  para cualquier  $j \in N \setminus \{1\}$ . Esto significa que la función  $\sigma$  establece un límite superior para el precio diferente de los pequeños compradores:  $\sigma(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . Llamaremos a esta propiedad aceptabilidad de los pequeños compradores (de ahora en adelante,  $A_{nm}$ , por sus siglas en inglés).

Otra propiedad deseable para la regla DP es la eficiencia, es decir  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sum_{i \in N} P(q_N)q_i$ . Esto es equivalente a  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})q_i = \sum_{i \in N} q_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in A_m} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i = \sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i$ .<sup>4</sup> Así, una regla DP es eficiente si y solamente si  $\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i = \sum_{i \in A_{nm}} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i$ . Esto significa que la función  $\sigma$  pondera las cantidades de los grandes y pequeños compradores de tal forma que los conjuntos

<sup>4</sup>Notemos que,  $N = A_m \cup A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$  si  $i \in A_m$ , y  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq 1$  si  $i \in A_{nm}$

$A_m$  y  $A_{nm}$  están equilibrados. A esta propiedad la llamamos ponderación equilibrada (en adelante, BW).

Finalmente, se considera que hay un límite sobre cuánto puede decrecer la función  $\sigma$  si la cantidad demandada por un agente  $i \in N$  aumenta. Este límite está establecido por la relación  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i}$  de la siguiente forma. Sea  $q = (q_i, q_{-i})$  y  $q' = (q'_i, q_{-i})$ , si  $q_i \geq q'_i$ , entonces  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ . Primero, notemos que el cociente  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} < 1$ .<sup>5</sup> Así,  $\sigma(q_i, q_{-i})$  tiene que ser al menos mas grande que una porción de  $\sigma(q'_i, q_{-i})$ , es decir  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ .

Se define una regla DP balanceada (regla BDP, por sus siglas en inglés, *balanced different price*) como  $\beta(c) = (\beta_i(c))_{i \in N}$  con  $\beta_i(c) = \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  para todo  $i \in N$ , y la función  $\sigma : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  que satisface las siguientes propiedades:

1. **Monotonically decreasing through players (MDP)**. Dado un  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , si  $q_i \leq q_j$ , entonces  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$  para todo  $i, j \in N$ .
2. **Limited decrease through players (LDP)**. Dado un  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , si  $q_i \leq q_j$ , entonces  $\sigma(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})q_j$  para todo  $i, j \in N$ .
3. **Major-agents acceptability (MA)**. Para todo  $i \in A_m$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$ , y para todo  $i \in A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) > 1$ .
4. **Balanced weighting (BW)**.<sup>6</sup>  $\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i = \sum_{i \in A_{nm}} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i$
5. **Non-major agents acceptability (NMA)**.  $\sigma(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ .
6. **Limited decrease in a player quantity (LDQ)**. Sea  $(N, q, P)$  y  $(N, q', P)$  dos modelos CCDG con  $q = (q_i, q_{-i})$  y  $q' = (q'_i, q_{-i})$ . Si  $q_i \geq q'_i$ , entonces  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ .

Tenga en cuenta que una regla BDP siempre satisface las siguientes propiedades deseables:

1. **Symmetry (SYM)**. Si dos agentes  $i$  y  $j$  en un grupo se intercambian en el sentido de que  $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$  por cada  $S \subset N \setminus \{i, j\}$ , entonces  $\beta_i(c) = \beta_j(c)$ . Significa que los agentes simétricos en un grupo deben asumir el mismo costo.

En efecto,  $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\}) \Leftrightarrow q_i = q_j$ . Así,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sigma(q_j, q_{-j})P(q_N)q_j$ .

<sup>5</sup>En (2.13), se muestra que el EP  $\varepsilon_i(c) = P(q_N)q_i$  es creciente en  $q_i$ . Por lo tanto,  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} < 1$ .

<sup>6</sup>Una forma equivalente para esta propiedad es  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i}) \frac{q_i}{q_N} = 1$ . Notemos que,  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sum_{i \in N} P(q_N)q_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})q_i = \sum_{i \in N} q_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})q_i = q_N$

2. **Player monotonicity (PMON)**. Para todo  $i, j \in N$ , tal que  $q_i \leq q_j$ , se satisface que  $\beta_i(c) \leq \beta_j(c)$ .

Esta se verifica por la propiedad 2 de la función  $\sigma$ .

3. **Cost monotonicity (CMON)**. For all  $i \in N$  s.t.  $q_i \geq q'_i$ , se satisface que  $\beta_i(c) \geq \beta_i(c')$ , con  $(N, c), (N, c')$  siendo los juegos correspondientes con los modelos CCDG  $(N, q, P)$  y  $(N, q', P)$  donde  $q = (q_{-i}, q_i)$  y  $q' = (q_{-i}, q'_i)$ . Satisfacer esta propiedad significa que si el número de unidades del producto para ser comprado por un agente en un grupo de compras conjuntas sigue siendo el mismo o aumenta en comparación con una situación anterior, entonces ese agente debe pagar un costo igual o mayor. Esta se verifica por la propiedad 6 de la función  $\sigma$ .

4. **Fair ranking added cost (FRAC)**. Si para dos agentes  $i$  y  $j$  en un grupo  $c(N) - c(N \setminus \{i\}) \geq c(N) - c(N \setminus \{j\})$ , entonces  $\beta_i(c) \geq \beta_j(c)$ . Satisfacer ésta propiedad FRAC, significa que un agente con un costo agregado igual o mayor (esto también se llama costos marginales) debería pagar un costo igual o mayor.<sup>7</sup>

En efecto,  $c(N) - c(N \setminus \{i\}) \geq c(N) - c(N \setminus \{j\}) \Leftrightarrow P(q_{N \setminus \{i\}})q_{N \setminus \{i\}} \leq P(q_{N \setminus \{j\}})q_{N \setminus \{j\}}$ , y por la propiedad 4 (tasa de crecimiento limitada) de la función  $P$ ,  $q_{N \setminus \{i\}} \leq q_{N \setminus \{j\}} \Leftrightarrow q_i \geq q_j$ . Así por propiedad 2 de función  $\sigma$ , se verifica FRAC.

La propiedad Dummy player (DUM) no tiene sentido en este contexto. Para que exista un jugador ficticio, la función  $P$  debe ser constante, y en ese caso, todos los jugadores son ficticios.

La siguiente proposición muestra que la regla BDP es siempre eficiente y estable coalicionalmente. En la teoría de juegos cooperativos, la eficiencia y la estabilidad de la coalición son equivalentes a ser una asignación del núcleo. Esto significa que ninguna coalición tiene incentivos para romper la gran coalición para obtener un costo menor.

**Teorema 1.** Cada regla BDP para los juegos CCNL es eficiente y coalicionalmente estable.

**Demostración.** Sea  $(N, c)$  un juego CCNL.

Consideremos una regla BDP  $\beta(c) = (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)_{i \in N}$  con la función  $\sigma$  satisfaciendo 1-6. En primer lugar, la regla BDP es eficiente si  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = c(N)$ , que, como se mencionó anteriormente, es equivalente a la propiedad 4 (BW) de la función  $\sigma$ . En segundo lugar, para que sea coalicionalmente estable debe ser demostrado que  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq c(S)$ , para todo  $S \subseteq N$ . Se pueden distinguir tres casos.

<sup>7</sup>Esto se le llama costo marginal.

(1)  $S \subseteq A_m$ . Aquí, para todo  $i \in S$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$  and so  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S} P(q_S)q_i = c(S)$ .

(2)  $S \subseteq A_{nm}$ . Ahora probamos que  $\sum_{i \in S} (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S))q_i \leq 0$ . Por P.5 ( $A_{nm}$ ) sabemos que  $\forall i \in A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . Entonces,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$ . Tener en cuenta que  $P(q_{A_{nm}}) \leq P(q_S)$ , for all  $S \subseteq A_{nm}$ , se satisface que  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S) \leq 0$  para cualquier  $i \in S \subseteq A_{nm}$ . De aquí,  $\sum_{i \in S} (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S))q_i \leq 0$

(3)  $S \cap A_{nm} \neq S$ . Por un argumento similar al anterior

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i &= \sum_{i \in S \cap A_m} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i + \\ &\quad \sum_{i \in S \cap A_{nm}} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S \cap A_m} P(q_N)q_i + \sum_{i \in S \cap A_{nm}} P(q_N)q_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la propiedad de subaditividad,

$$\sum_{i \in S \cap A_m} P(q_N)q_i + \sum_{i \in S \cap A_{nm}} P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S} P(q_N)q_i = c(S),$$

y así,  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq c(S)$ .  $\square$

En resumen, cualquier regla BDP siempre satisface las propiedades SYM, PMON, CMON, FRAC, eficiencia y estabilidad de coalición. Además, es aceptable tanto para grandes compradores como para pequeños compradores. *Se puede concluir que una regla BDP es una buena regla DP para juegos CCNL.*

A continuación, nos centramos en un enfoque alternativo para obtener reglas DP para juegos CCNL. Consiste en repartir de forma proporcional el coste de la gran coalición, con un factor de proporcionalidad que combina los costes individuales (que se enfrentan cuando cada agente compra el producto por su cuenta) y la regla EP (disponible cuando los agentes realizan compras conjuntas). Obtenemos una familia paramétrica de reglas proporcionales muy adecuada que, notablemente, está relacionada con la familia de reglas BDP.

## 2.5. La familia de las reglas $\alpha$ -proporcionales

Considere un juego CCNL  $(N, c)$  y un parámetro  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Definimos una regla  $\alpha$ -proporcional como  $\Theta(c, \alpha) = (\Theta_i(c, \alpha))_{i \in N}$  donde

$$\Theta_i(c, \alpha) := \theta_i(\alpha)P(q_N)q_N \text{ for all } i \in N, \quad (2.7)$$

con

$$\theta_i(\alpha) := \frac{\alpha P(q_N)q_i + (1 - \alpha)P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1 - \alpha)P(q_j)q_j]} \quad (2.8)$$

Nótese que  $\theta_i(\alpha)$  es una combinación convexa de la regla EP  $P(q_N)q_i$  y el costo individual  $P(q_i)q_i$ , que se normaliza a uno. Por lo tanto,  $\theta \leq \theta_i(\alpha) \leq 1$  y  $\sum_{i \in N} \theta_i(\alpha) = 1$ . Así  $\Theta_i(c, \alpha)$  asigna el costo de la gran coalición  $P(q_N)q_N$  proporcionalmente a  $\theta_i(\alpha)$ .

Nótese primero que la regla 1-proporcional coincide con la regla EP, es decir, para todo  $i \in N$

$$\Theta_i(c, 1) = \theta_i(1)P(q_N)q_N = \frac{P(q_N)q_i}{\sum_{j \in N} P(q_N)q_j} P(q_N)q_N = \frac{P(q_N)q_i}{P(q_N)q_N} P(q_N)q_N = P(q_N)q_i = \varepsilon_i(c).$$

La regla 0-proporcional es la regla proporcional al costo individual, y esta relacionada a la regla EP: para todo  $i \in N$

$$\Theta_i(c, 0) = \frac{P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} P(q_N)q_N = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} P(q_N)q_i = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \varepsilon_i(c) = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \Theta_i(c, 1).$$

Por lo tanto,  $\Theta_i(c, 0)$  es mayor o menor que  $\Theta_i(c, 1)$  dependiendo de que el cociente  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}$  sea mayor o menor que 1. Asumimos w.l.o.g. que  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . Si al menos una de estas desigualdades es estricta, claramente,  $\frac{P(q_1)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \geq 1$  y  $\frac{P(q_n)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \leq 1$ . Como  $P$  es una función de descuento continuamente decreciente, existe un único umbral  $\bar{q} \in (q_1, q_n)$ , tal que

$$\frac{P(\bar{q})q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} = 1 \Leftrightarrow P(\bar{q}) = \frac{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}{q_N} \quad (2.9)$$

Este umbral  $\bar{q}$  permite definir dos conjuntos de agentes que son independientes del parámetro  $\alpha$ : los que compran pequeñas cantidades  $\bar{S} = \{i \in N, q_i < \bar{q}\}$ , y los que compran grandes cantidades  $\bar{L} = \{i \in N, q_i > \bar{q}\}$ .

Los agentes  $i \in \bar{S}$  que compran pequeñas cantidades, se ven perjudicados por la regla 0-proporcional en comparación con la EP porque  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} > 1$  para todo  $q_i < \bar{q}$ . Sin embargo, los agentes en  $i \in \bar{L}$  que compran grandes cantidades se benefician porque  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} < 1$  para todo  $q_i > \bar{q}$ . Si hay un agente tal que  $q_i = \bar{q}$ , ese agente es neutral a la regla, es decir,  $\Theta_i(c, 0) = \Theta_i(c, 1)$ , Ese agente pagará el EP para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$ .

La proposición que figura a continuación resume el razonamiento anterior relacionando las reglas  $\alpha$ -proporcionales  $\Theta(c, \alpha)$  con la regla EP  $\varepsilon(c)$ . También muestra el carácter creciente o decreciente de la regla  $\alpha$ -proporcional con respecto al parámetro  $\alpha$ .

**Proposición 5.** Sea  $(N, c)$  un juego CCL. La regla de asignación  $\alpha$ -proporcional satisface las siguientes propiedades:

1. Para  $\alpha = 1$ , todos los agentes pagan el EP:  $\Theta_i(c, 1) = \varepsilon_i(c)$ , para todo  $i \in N$ .
2. Para cualquier  $\alpha < 1$ ,
  - a) Para todo  $i \in \bar{L}$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) < \varepsilon_i(c)$  y  $\Theta_i(c, \alpha)$  es creciente en  $\alpha$ .
  - b) Para todo  $i \in \bar{S}$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) > \varepsilon_i(c)$  y  $\Theta_i(c, \alpha)$  es decreciente en  $\alpha$ .
  - c) Si hay  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$ , entonces  $\Theta_i(c, \alpha) = \varepsilon_i(c)$ .

**Demostración.** Es inmediato probar el punto 1, es decir  $\Theta_i(c, 1) = \varepsilon_i(c)$  para todo  $i \in N$ .

Para probar el punto 2, es necesario evaluar la derivada de la función  $\Theta_i(c, \alpha)$  con respecto a  $\alpha$ .

En efecto,  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = \frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha} P(q_N) q_N$ . Se calcula  $\frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha}$  escribiendola como función de  $\varepsilon_i(c) = P(q_N) q_i$  y  $c(\{i\}) = P(q_i) q_i$ . Así,

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha} &= \frac{d\left(\frac{\alpha\varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})}{\sum_{j \in N} [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})]}\right)}{d\alpha} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} (\varepsilon_i(c) - c(\{i\})) [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})] - \sum_{j \in N} (\alpha\varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})) [\varepsilon_j(c) - c(\{j\})]}{(\sum_{j \in N} [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})])^2} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} (\varepsilon_i(c) - c(\{i\})) [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})] - (\alpha\varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})) [\varepsilon_j(c) - c(\{j\})]}{(\sum_{j \in N} [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})])^2} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} \varepsilon_i(c) c(\{j\}) - \varepsilon_j(c) c(\{i\})}{(\sum_{j \in N} [\alpha\varepsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})])^2}. \end{aligned}$$

Observar que el signo de  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha}$  depende solo del signo de  $\sum_{j \in N} \varepsilon_i(c) c(\{j\}) - \varepsilon_j(c) c(\{i\})$ .

Examinamos esta última:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} \varepsilon_i(c) c(\{j\}) - \varepsilon_j(c) c(\{i\}) &= \varepsilon_i(c) \sum_{j \in N} c(\{j\}) - c(\{i\}) \sum_{j \in N} \varepsilon_j(c) \\ &= P(q_N) q_i \sum_{j \in N} P(q_j) q_j - P(q_i) q_i \sum_{j \in N} P(q_N) q_j \\ &= P(q_N) q_i \sum_{j \in N} P(q_j) q_j - P(q_i) q_i P(q_N) q_N \\ &= P(q_N) q_i (\sum_{j \in N} P(q_j) q_j - P(q_i) q_N). \end{aligned}$$

Claramente,  $\sum_{j \in N} \varepsilon_i(c) c(\{j\}) - \varepsilon_j(c) c(\{i\}) \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in N} P(q_j) q_j - P(q_i) q_N \leq 0$ . La última desigualdad se mantiene si y sólo si  $q_i < \bar{q}$  (ver ecuación 2.9). Por lo tanto, si  $i \in \bar{S}$ , entonces  $\Theta_i(c, \alpha) > \varepsilon_i(c)$  y  $\Theta_i(c, \alpha)$  es decreciente en  $\alpha$ .

Por otro lado,  $\sum_{j \in N} \varepsilon_i(c) c(\{j\}) - \varepsilon_j(c) c(\{i\}) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in N} P(q_j) q_j - P(q_i) q_N \geq 0$ . Esta última desigualdad se verifica si y solamente si  $q_i > \bar{q}$  ((ver ecuación 2.9). De aquí, si  $i \in \bar{L}$ , entonces  $\Theta_i(c, \alpha) < \varepsilon_i(c)$  y  $\Theta_i(c, \alpha)$  es creciente en  $\alpha$ .

Finalmente, si  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$ , entonces  $q_i = \bar{q}$ , así que  $\Theta_i(c, 0) = \Theta_i(c, 1) = \varepsilon_i(c)$ . Como  $\Theta_i(c, \alpha)$  es continua en  $\alpha$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) = \varepsilon_i(c)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .  $\square$

La Proposición 5 muestra que para  $\alpha = 1$  todos los agentes pagan según la regla EP. A medida que decrece en  $\alpha$ , los agentes que compran grandes cantidades ( $\bar{L}$ ) comienzan a pagar menos que bajo la regla EP y los que compran pequeñas cantidades ( $\bar{S}$ ) pagan más. Estas diferencias crecen con respecto a la regla EP conforme va disminuyendo  $\alpha$  y alcanzan su punto máximo cuando  $\alpha = 0$ . Por lo tanto, el parámetro  $\alpha$  cuantifica qué tan diferentes son los precios. Así, para  $\alpha = 1$ , no hay precios diferentes y para  $\alpha = 0$  la diferencia de precios es máxima.

La siguiente pregunta es si existe algún vínculo entre las reglas  $\alpha$ -proporcionales y las reglas BDP. En otras palabras, ¿es cualquier regla  $\alpha$ -proporcional una regla BDP? La siguiente sección se muestra que siempre hay un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP.

## 2.6. Condición para que una regla $\alpha$ -proporcional sea una regla BDP

Para comparar la regla  $\alpha$ -proporcional y la regla BDP, primero es necesario reescribir la primera para cualquier agente  $i \in N$  de la siguiente manera:

$$\Theta_i(c, \alpha) = \theta_i(\alpha) P(q_N) q_N = \frac{\alpha P(q_N) q_i + (1 - \alpha) P(q_i) q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} P(q_N) q_N =$$

$$\frac{\alpha P(q_N) + (1 - \alpha) P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} q_N P(q_N) q_i.$$

Denotamos

$$\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) := \frac{\alpha P(q_N) + (1 - \alpha) P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} q_N, \quad (2.10)$$

Entonces,  $\Theta_i(c, \alpha) = \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) P(q_N) q_i$ .

En primer lugar, tener en cuenta que la función  $\sigma_\alpha$  depende de la distribución de las cantidades de los agentes  $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$  a diferencia de la regla EP. Esta dependencia se refleja en el segundo término del denominador, que es la suma del costo individual sin cooperación, es decir,  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j$ . Notemos que (2.10) es igual a  $\frac{\alpha c(N) + (1-\alpha)P(q_i)q_N}{\alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}$ .

Recordemos que la regla BDP  $\beta(c)$  se define como  $\beta_i(c) = \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ , para todo  $i \in N$ , con la función  $\sigma$  que satisface las propiedades 1–6. La pregunta es si  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisface estas seis propiedades para cualquier  $q \in R_+^n$  en todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Aunque no es así, demostramos que siempre se puede encontrar un umbral  $\alpha < 1$  por encima del cual  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$ .

Volviendo a los grandes y pequeños compradores, tener en cuenta que aquí los grandes compradores son aquellos que compran grandes cantidades, es decir,  $A_m = \bar{L}$ . Esto se obtiene comparando las definiciones de  $A_m, \bar{L}$  y la ecuación (2.9). De manera análoga se puede demostrar que  $A_{nm}$  es igual al conjunto  $\bar{S}$  mas cualquier  $i \in N$  tal que  $q_i = \bar{q}$ , es decir,  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^c$ .

El siguiente teorema establece un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP.

**Teorema 2.** Para cualquier juego CCNL, siempre hay un  $\alpha^* < 1$ , tal que para cualquier  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$  cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP.

**Demostración** Sea  $(N, c)$  un juego CCNL y  $\Theta(c, \alpha)$  sea una regla  $\alpha$ -proporcional para ese juego, con  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  dado por (2.10). Para probar que  $\Theta(c, \alpha)$  es una regla BDP se debe demostrar que  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisface las propiedades 1-6 de la función  $\sigma$ .

1. (MDP) Consideremos  $i, j \in N$  s.t.  $q_i \leq q_j$  entonces, por la propiedad 2 (Decrecimiento) de función  $P$ , se deduce que  $P(q_i) \geq P(q_j)$ , y así  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) \geq \sigma_\alpha(q_j, q_{-j})$ .
2. (LDP) Consideremos  $i, j \in N$  s.t.  $q_i \leq q_j$ . Se puede demostrar que  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma_\alpha(q_j, q_{-j})q_j$ . En efecto, por la propiedad 4 (tasa de crecimiento limitada) de la función  $P$ , se verifica que  $\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i \leq \alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j$ . Por lo tanto, 
$$\frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N q_i < \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_j)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N q_j.$$
3. (MA) Ahora se demuestra que para  $\alpha < 1$ ,  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) < 1$ , para todo  $i \in A_m$ , y  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) > 1$ , para todo  $i \in A_{nm}$ .

En efecto, como se mencionó anteriormente  $A_m = \bar{L}$  y  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^c$ . Así, si  $\alpha < 1$ , del punto 2.a. de la Proposición 5, se sabe que, para todo  $i \in A_m$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) < \varepsilon_i(c)$ , que es equivalente a  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i < P(q_N)q_i \Leftrightarrow \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) < 1$ . Análogamente desde los puntos 2.b. y 2.c. de Proposición 5, se puede demostrar que, para todo  $i \in A_{nm}$ ,

$\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) \geq 1$ . Por último, tenga en cuenta que si  $\alpha = 1$ , entonces  $\Theta_i(c, 1) = \varepsilon(c)$  y  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) = 1$  para todo  $i \in N$ .

4. (BW) Es inmediato demostrar que  $\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})) q_i = \left| \sum_{i \in A_{nm}} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})) q_i \right|$ .

Ciertamente,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A_m} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})) q_i &= \left| \sum_{i \in A_{nm}} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})) q_i \right| \Leftrightarrow \\ \sum_{i \in N} (\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) - 1) q_i = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) q_i = \sum_{i \in N} q_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) q_i = q_N &\Leftrightarrow \sum_{i \in N} \left( \frac{\alpha P(q_N) + (1 - \alpha) P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} q_N \right) q_i = q_N \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \left( \frac{\alpha P(q_N) + (1 - \alpha) P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} \right) q_i &= 1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in N} [\alpha P(q_N) q_i + (1 - \alpha) P(q_i) q_i]}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} = 1. \end{aligned}$$

5. (NMA) Se muestra que siempre hay un  $\alpha^* < 1$  tal que para cualquier  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ ,  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . Notemos que, como se mostró anteriormente,  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^c$ .

Primero se muestra que para todo  $i \in A_{nm}$ ,  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  es decreciente en  $\alpha$ . En efecto, como  $\Theta_i(c, \alpha) = \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) P(q_N) q_i$ , así  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = \frac{d(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))}{d\alpha} P(q_N) q_i$ . Por lo tanto,  $\frac{d(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))}{d\alpha} < 0$ , si y solo si,  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} < 0$ , puesto que  $P(q_N) q_i > 0$ . El signo de la última derivada siempre se tiene para todo  $i \in \bar{S}$  (ver punto 2.b de la proposición 5). Además, si existe alguna  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$  entonces, por el punto 2.c de la Proposición 5,  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = 0$ .

Ahora, nótese que  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$  es equivalente a

$$\frac{\alpha P(q_N) + (1 - \alpha) P(q_1)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N) q_j + (1 - \alpha) P(q_j) q_j]} q_N \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}. \quad (2.11)$$

Esta última desigualdad siempre se tiene para  $\alpha = 1$ . De hecho,  $\frac{P(q_N)}{\sum_{j \in N} P(q_N) q_j} q_N = 1 < \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ , debido a  $q_{A_{nm}} < q_N$ . Así,  $\sigma_{\alpha=1}(q_1, q_{-1}) = 1$  y  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1})$  es decreciente en  $\alpha$ . Así, solo dos situaciones diferentes pueden ocurrir: Primero, existe una raíz  $\bar{\alpha} \in (0, 1)$  tal que  $\sigma_{\bar{\alpha}}(q_1, q_{-1}) = \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ , es decir (2.11) tiene con igualdad, así  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$  para todo  $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1)$ . Segundo, no hay tal  $\bar{\alpha}$  que  $\sigma_{\bar{\alpha}}(q_1, q_{-1}) = \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . En ese caso,  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ , para todo  $\alpha \in (0, 1)$ .

Se asume que  $\alpha^* = \bar{\alpha}$  si  $\bar{\alpha} \in (0, 1)$  y de otra manera  $\alpha^* = 0$ . Se concluye que, siempre hay un  $\alpha^* < 1$ , tal que para cualquier  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ ,  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ .

6. (LDQ) Consideremos  $(N, q, P)$  y  $(N, q', P)$  dos modelos CCDG con  $q = (q_i, q_{-i})$ ,  $q' = (q'_i, q'_{-i})$ , y  $q_i \geq q'_i$ . Se debe demostrar que  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) P(q_N) q_i \geq \sigma_\alpha(q'_i, q'_{-i}) P(q'_N) q'_i$ .

De hecho, se debe demostrar que la función  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  es creciente en  $q_i$ , es decir

$$\frac{\partial(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} \geq 0.$$

Para simplificar la demostración,  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  se puede reescribir como una función de  $\varepsilon_i(c) = P(q_N)q_i$ ,  $c(\{i\}) = P(q_i)q_i$  y  $c(N) = P(q_N)q_N$ . Además, para simplificar la notación, no indicamos explícitamente que todas las siguientes derivadas se refieren a  $q_i$ ; las denotamos por  $\varepsilon'_i(c)$ ,  $c'(\{i\})$ , and  $c'(N)$ .

Primero reescribimos la función  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  de la siguiente manera:

$$\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \frac{\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} P(q_N)q_N = \frac{(\alpha \varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c(N)}{\alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} c(\{j\})}.$$

Denotamos por  $f(q_i) = (\alpha \varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c(N)$  y  $g(q_i) = \alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} c(\{j\})$ , así

$$\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \frac{f(q_i)}{g(q_i)} \text{ y } \frac{\partial(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} = \frac{f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i)}{(g(q_i))^2}, \text{ con}$$

$$\frac{\partial(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} > 0 \Leftrightarrow f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i) > 0$$

Además, se sabe que

$$f'(q_i) = (\alpha \varepsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) + (\alpha \varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c'(N)$$

$$g'(q_i) = \alpha c'(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} c'(\{j\})$$

Después de algunos cálculos, se puede demostrar que

$$f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\alpha \varepsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) (\alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} c(\{j\}))$$

$>$

$$(\alpha \varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})) (1-\alpha) (c(N)c'(\{i\}) - c'(N)\sum_{j \in N} c(\{j\}))$$

Claramente,  $(\alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} c(\{j\})) > \alpha \varepsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})$ , debido a  $c(N) > \varepsilon_i(c)$  y  $\sum_{j \in N} c(\{j\}) > c(\{i\})$ .

Para terminar la prueba, mostramos que

$$(\alpha \varepsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) > (1-\alpha) \left( c(N)c'(\{i\}) - c'(N)\sum_{j \in N} c(\{j\}) \right) \quad (2.12)$$

Es inmediato demostrar que (2.12) es equivalente a

$$\alpha \varepsilon'_i(c) c(N) > -(1 - \alpha) c'(N) \sum_{j \in N} c(\{j\}),$$

lo cual es cierto porque  $\varepsilon'_i(c) > 0$  y  $c'(N) > 0$ . Notemos que, por la propiedad 4 (Tasa de Crecimiento Limitada) de la función  $P$ , es inmediato demostrar que  $c'(N) > 0$ . A continuación, mostramos que  $\varepsilon'_i(c) > 0$ ,

$$\varepsilon'_i(c) = P'(q_N) q_i + P(q_N) > P'(q_N) q_N + P(q_N) = c'(N) > 0, \quad (2.13)$$

debido a  $q_i < q_N$ ,  $P'(q_N) < 0$  (por propiedad 2 (Decreciente) de la función  $P$ ) y  $P(q_N) \geq 0$  (por definición). Esto completa la demostración de la propiedad 6 (LDQ).

Por lo tanto, concluimos que siempre hay un  $\alpha^* < 1$ , tal que para cualquier  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , la función  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisface las propiedades 1–6 de la función  $\sigma$ . Por lo tanto, para todo  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , cualquier regla  $\alpha$  proporcional es una regla BDP.  $\square$

Se puede ver en la demostración anterior que la función  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisface la propiedad 3 (MA) para  $\alpha < 1$ , la propiedad 5 (NMA) para  $\alpha > \alpha^*$ . Sin embargo, las otras cuatro propiedades se satisfacen para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ .

En resumen, la regla 1-proporcional es la regla EP. Si los grandes compradores no consideran aceptable esta regla de asignación, el parámetro  $\alpha$  puede disminuir (hasta el umbral  $\alpha^*$ ) y, por lo tanto, la regla de asignación se convierte en una regla BDP. Será entonces aceptable para los grandes compradores. Cuanto menor sea el parámetro  $\alpha$  mayores serán las diferencias de precio con respecto a la cantidad demandada. Además, cuanto más bajos son los precios de los grandes compradores, más altos son los precios de los pequeños compradores. Por esta razón, se necesita un umbral para el parámetro  $\alpha$ . Más allá de ese umbral, los pequeños compradores no encuentran aceptable la regla  $\alpha$ -proporcional, por lo que se vuelve inestable coalicionalmente, es decir, ya no es una asignación del núcleo.

Finalmente, si  $\alpha^* = 0$ , la regla  $\alpha$ -proporcional es siempre una regla BDP para todo  $\alpha \in [0, 1)$ . El siguiente corolario muestra una condición necesaria y suficiente para la función de descuento  $P$  para que esto suceda.

**Corolario 1** La regla  $\alpha$ -proporcional siempre es una regla BDP para todo  $\alpha \in [0, 1)$  si y solo si  $\sum_{j \in N} P(q_j) q_j \geq \frac{P(q_1)}{P(q_{Ann})} P(q_N) q_N$ .

**Demostración.** El umbral  $\alpha^*$  se obtiene en la demostración del Teorema 2 a partir de la desigualdad  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ . Como  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1})$  es decreciente en  $\alpha$ , si la desigualdad anterior se tiene para  $\alpha = 0$ , también se tiene para  $\alpha \in [0, 1)$ . Por lo tanto,

$$\sigma_{\alpha=0}(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)} \Leftrightarrow \frac{P(q_1)}{\sum_{j \in N} [P(q_j)q_j]} q_N \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j \in N} [P(q_j)q_j] \geq \frac{P(q_1)}{P(q_{Ann})} P(q_N) q_N. \quad \square$$

## 2.7. Ilustración numérica

En esta sección, damos una ilustración con datos sintéticos. Usamos una función de precio de descuento  $P(q_i)$  que tiene las propiedades 1-4 descritas en la sección 2.2. En el primer ejemplo, Tabla 2.1 muestra el precio y el costo para cada agente en tres casos para  $P(q_i) = 80 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$ .

Primero, no hay cooperación y cada agente compra individualmente, así el precio del agente  $i$  es  $P(q_i)$  y su costo  $P(q_i)q_i$ . Segundo, los agentes cooperan con una regla de EP. En este caso, el precio es  $P(q_N)$  y el costo es  $P(q_N)q_i$ . Tercero, los agentes cooperan pero con una regla de asignación BDP. En particular, se considera una regla  $\alpha$ -proporcional, donde el parametro  $\alpha$  considerado es el umbral  $\alpha^*$  dado por el Teorema 2. El precio en este caso es  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i})P(q_N)$  y el costo  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ . En este tercer caso, se muestra el valor de la función  $\sigma_{\alpha^*}$ , es decir  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i}) = \frac{\alpha^*P(q_N) + (1-\alpha^*)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha^*P(q_N)q_j + (1-\alpha^*)P(q_j)q_j]} q_N$ . Note que la función  $\sigma$  siempre es mayor que uno para todo comprador pequeño y menor que uno para grandes compradores. Así, en este caso, los pequeños compradores son los agentes 1-5 y 6-10 los grandes compradores.

También se sabe que la regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP para todo  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , de forma que cuando aumenta  $\alpha$ , el precio y el coste de los pequeños compradores disminuye mientras que para los grandes compradores aumenta. Por lo tanto, los agentes 1-5 preferirán el  $\alpha$  mas alto, y los agentes 6-10 el mas bajo. Note que en el caso límite, que es  $\alpha = 1$ , el valor de  $\sigma_1(q_i, q_{-i})$  es uno para todos los agentes y el precio se ajusta al equal price, el cual es la situación mas favorable para pequeños compradores. La situación opuesta es  $\alpha^* = 0.368$ , que es la situación más favorable posible para los grandes compradores. Si  $\alpha$  fuera estrictamente menor que  $0.368$ , esto no sería aceptable para un comprador pequeño, y en ese caso, la regla  $\alpha$ -proporcional no sería una regla BDP.

Nótese que, aquí, el umbral entre grandes compradores y pequeños compradores es  $\bar{q} = 493,75$ . Esto se puede obtener fácilmente de la ecuación (2.9). En efecto,

$$\bar{q} = \left( \frac{7.000}{\frac{\sum_{j \in N} c(j)}{q_N} - 80} \right)^2 = \left( \frac{7.000}{395,02 - 80} \right)^2 = \left( \frac{7.000}{315,02} \right)^2 = 493,75.$$

$P(q_i) = 80 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$								
Agente	$q_i$	No-Cooperativo		Cooperativo				
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proporcional) $_{ \alpha=\alpha^*=0.368}$		
		Precio	Costo	Precio	Costo	Precio	Costo	$\sigma_\alpha$
1	50	1069.9	53497.5	192.7	9633.4	448.9	22446.6	2.330
2	60	983.7	59021.8	192.7	11560.1	416.2	24970.9	2.160
3	70	916.7	64166.2	192.7	13486.8	390.7	27350.9	2.028
4	80	862.6	69009.9	192.7	15413.5	370.2	29616.8	1.921
5	100	780.0	78000.0	192.7	19266.9	338.8	33883.8	1.759
6	500	393.0	196524.8	192.7	96334.5	191.9	95955.5	0.996
7	600	365.8	219464.3	192.7	115601.4	181.6	108932.6	0.942
8	700	344.6	241202.6	192.7	134868.3	173.5	121453.6	0.901
9	800	327.5	261989.9	192.7	154135.2	167.0	133613.4	0.867
10	900	313.3	282000.0	192.7	173402.1	161.6	145478.2	0.839

Tabla 2.1 Ejemplo 1 con  $\alpha^* > 0$ 

Aunque en el primer ejemplo  $\alpha^* > 0$ , podría ser cero si la condición del Corolario 2.6 se satisface, es decir, si la función de descuento de precio se cumple que  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j \geq \frac{P(q_1)}{P(q_{Ann})} P(q_N)q_N$ . En este caso la regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP para todo  $\alpha \in [0, 1)$ .

La Tabla 2.2 muestra un segundo ejemplo con  $P(q_i) = 10 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$  donde  $\alpha^* = 0$ , puesto que  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j = 1.254.586 > 1.249.760,2 = \left(\frac{999,9}{378,93}\right)473.622 = \frac{P(q_1)}{P(q_5)} P(q_N)q_N$ . Se presenta la regla  $\alpha$ -proporcional para  $\alpha = 0$ . Notese que lo anterior es aceptable para todos los agentes  $\alpha \in [0, 1)$  y de nuevo  $\bar{q} = 493,75 = \left(\frac{7.000}{325,02-10}\right)^2$

$P(q_i) = 10 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$								
Agente	$q_i$	No-Cooperativo		Cooperativo				
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proportional) $_{\alpha=\alpha^*=0}$		
		Precio	Costo	Precio	Costo	Precio	Costo	$\sigma_\alpha$
1	50	999.9	49997.5	122.7	6133.4	377.4	18868.5	3.076
2	60	913.7	54821.8	122.7	7360.1	344.8	20689.2	2.811
3	70	846.7	59266.2	122.7	8586.8	319.5	22366.5	2.605
4	80	792.6	63409.9	122.7	9813.5	299.1	23930.3	2.438
5	100	710.0	71000.0	122.7	12266.9	267.9	26794.7	2.184
6	500	323.0	161524.8	122.7	61334.5	121.9	60957.8	0.994
7	600	295.8	177464.3	122.7	73601.4	111.6	66973.2	0.910
8	700	274.6	192202.6	122.7	85868.3	103.6	72535.3	0.845
9	800	257.5	205989.9	122.7	98135.2	97.2	77738.5	0.792
10	900	243.3	219000.0	122.7	110402.1	91.8	82648.4	0.749

Tabla 2.2 Ejemplo 2 con  $\alpha^* = 0$ 

## 2.8. Conclusiones y futuras líneas de investigación

Estudiamos situaciones en las que un vendedor ofrece descuentos generales de precios para pedidos grandes de acuerdo con una función de precio unitario decreciente. En estas situaciones, los compradores pueden cooperar y formar grupos de compra para beneficiarse de estos descuentos de precios. En este capítulo, analizamos estas situaciones de compra cooperativa como juegos de costos conjuntos y los llamamos juegos CCDG. Demostramos que la gran coalición puede obtener reducciones significativas en los costos (es decir, los juegos CCDG son subaditivos). Luego, mostramos que los juegos CCDG son equilibrados; es decir, siempre hay un método para asignar los costos reducidos generados por el modelo CCDG que es eficiente y (coalicionalmente) estable: la regla de Equal Price (EP).

A continuación, nos centramos en los modelos de compras conjuntas con funciones de precio unitario decrecientes y lineales. Demostramos que la naturaleza lineal de la función descuento-precio proporciona información adicional sobre el correspondiente juego de compra conjunta con descuento lineal (juego CCL): la contribución marginal de un agente disminuye a medida que crece la coalición. Esto es bien conocido como el efecto bola de nieve o propiedad de concavidad. También probamos que la regla EP coincide con el valor de Shapley y el nucléolo. En tales casos, parece que no hay mejor manera de repartir el costo total reducido. Sin embargo, algunos agentes pueden argumentar que el EP es cuestionable porque favorece a

aquellos agentes que compran y venden solo unas pocas unidades del producto. Tenga en cuenta que estos agentes pagan el mismo precio que los grandes compradores. Estas preocupaciones de los agentes pueden ser realmente problemáticas cuando la función del precio unitario no es lineal. Para resolver este problema, proponemos una familia de reglas de asignación para los juegos de compras conjuntas con descuento no lineal (juegos CCNL). Nos centramos en la regla Different Price (DP) y proponemos una familia de reglas de asignación con diferentes precios que son aceptables para todos los agentes: reglas BDP.

Finalmente, nos concentramos en un enfoque alternativo para obtener reglas de DP para juegos CCNL. Consiste en repartir de forma proporcional el costo de la gran coalición, con un factor de proporcionalidad que combina los costes individuales (afrontados cuando cada agente compra el producto por su cuenta) y la regla EP (disponible cuando los agentes realizan compras conjuntas). Obtenemos una familia de reglas proporcionales, denominadas reglas  $\alpha$ -proporcionales que, en particular, están relacionadas con la familia de reglas BDP. Específicamente, demostramos que siempre hay un umbral  $\alpha$  por encima del cual cualquier regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP. Hay, por lo tanto, un rango de parámetros alfa aceptables para todos los agentes, tanto a grandes compradores como a pequeños compradores.

En el siguiente capítulo aplicamos el modelo de compras conjuntas con descuento general en la cadena de suministro del sector panificador en dos casos específicos. Sin embargo, existe un amplio campo para futuras investigaciones que podrían explorar diferentes aplicaciones de este modelo. Por ejemplo, la investigación futura podría identificar otros sectores industriales o cadenas de suministro donde el modelo podría ser implementado en función de las propiedades requeridas en cada situación, determinar qué parámetro alfa dentro del intervalo sería el más adecuado, es decir, qué regla  $\alpha$ -proporcional es más adecuada para cada situación (una regla  $\alpha$ -proporcional que favorece a los grandes compradores o una que es más favorable a los pequeños compradores). En segundo lugar, los investigadores podrían buscar ciertas propiedades de las reglas  $\alpha$ -proporcionales que sólo son satisfechas por la familia de reglas  $\alpha$ -proporcionales con vistas a obtener una caracterización de la familia de reglas  $\alpha$ -proporcionales. En tercer lugar, el análisis puede extenderse a situaciones de dos etapas en las que se puede elegir la cantidad demandada por los agentes. estratégicamente en la primera etapa, es decir, modelos de dos etapas donde los agentes juegan un juego no cooperativo en la primera etapa para elegir la cantidad demandada y juegan nuestro juego CCDG (como un juego cooperativo) en la segunda etapa. Por lo tanto, es de gran interés estudiar las características del perfil de equilibrio de las cantidades demandadas por agentes inducidos por nuestra familia de reglas  $\alpha$ -proporcionales.

## **Capítulo 3**

# **Compras conjuntas en el sector panificador en Colombia: una aplicación**

En este capítulo de la tesis, aplicamos el modelo de compras conjuntas con descuento general, en la cadena de suministro del sector panificador en dos casos; un primer caso en "Panadería"(eslabón 4) y un segundo caso en "Trigo"(eslabón 1).

Para el primer caso de aplicación, se eligen los empresarios que forman parte del eslabón 4, representado por las panaderías. Este sector abarca aproximadamente 25,000 establecimientos en el país, en su mayoría Micro, Pequeñas y Medianas Empresas (MiPymes), generando alrededor de 400,000 empleos directos. Los empresarios de este eslabón han experimentado impactos negativos debido a los elevados costos de la harina de trigo, un componente crucial en la producción de pan. Esta situación ha llevado a una reducción en los márgenes de beneficio. Para preservar dichos márgenes, algunos empresarios pueden recurrir a medidas drásticas, como la reducción de la calidad mediante la incorporación de harinas de baja calidad o la disminución del tamaño del producto final manteniendo su precio habitual, práctica conocida como reduflación. Otra opción es aumentar significativamente los precios de venta, lo que podría resultar en la pérdida de clientes que opten por buscar alternativas diferentes al pan. En busca de mantener la estabilidad en el sector, es crucial explorar alternativas de cooperación, como la adopción de modelos de colaboración horizontal, es decir, colaboración entre empresas del mismo eslabón, con el objetivo de adquirir insumos, como la harina de trigo, de manera conjunta y más eficiente, lo que justifica la aplicación de nuestro modelo de compras conjuntas con descuento general, en aras de aprovechar los descuentos que se pueden lograr por volumen de compras.

En el segundo caso, llevamos a cabo la aplicación del modelo de compras conjuntas con descuento general en el eslabón 1, correspondiente a la Agricultura del trigo en Colombia. Este enfoque se justifica considerando la significativa incidencia de los costos asociados a los fertilizantes para los empresarios en este eslabón de la cadena de suministro del sector panificador. De acuerdo con informes sectoriales del año 2023, se identifica que la elevada tarifa de los fertilizantes se atribuye, en gran medida, a la insuficiencia de la producción nacional para cubrir la demanda interna. Colombia exhibe una dependencia del 95 % en importaciones para satisfacer sus necesidades de fertilizantes, lo que contribuye a la discrepancia entre la oferta y la demanda. En este contexto, los costos de los fertilizantes fabricados localmente resultan elevados, especialmente para los agricultores de menor escala, propiciando la importación por parte de aquellos con mayor capacidad organizativa. Además, la condición de Colombia como uno de los 20 países más dependientes de los fertilizantes europeos intensifica la necesidad de implementar estrategias colaborativas, como las compras conjuntas, para mitigar los impactos económicos adversos derivados de los altos costos de los fertilizantes agrícolas.

Asimismo, la problemática de los elevados costos asociados a los fertilizantes constituye una de las variables que desfavorecen el impulso de prácticas de siembra legales en el país. En este contexto, se hace imperativa la promoción de la colaboración entre los actores del sector agrícola. La implementación de procesos de compras conjuntas emerge como una estrategia clave para aprovechar los descuentos disponibles, representando así una contribución modesta pero significativa a la gestión eficiente de costos por parte de los empresarios de diferentes eslabones y cadenas de suministro.

La aplicación del modelo de compras conjuntas con descuento general en los dos casos mencionados sirve como ejemplo para fomentar la colaboración en otros grupos de agentes dentro del mismo eslabón o en diferentes eslabones y cadenas de suministro. Para ello, es esencial identificar las inversiones en costos operativos realizadas por distintos empresarios, utilizando sistemas de costos como el expuesto en el capítulo 1. Posteriormente, se deben crear escenarios de colaboración mediante la aplicación de modelos de compras conjuntas, presentados en el capítulo 2, con el fin de obtener descuentos por volumen de compras y distribuir equilibradamente los beneficios que estas generen. La aplicación conjunta de estos modelos expuestos en la tesis puede mejorar los resultados de los involucrados en la cooperación y contribuir a la estabilidad de la cadena de suministro del sector panificador en Colombia.

### 3.1. Compras conjuntas en harina de trigo

Para abordar la aplicación del modelo de compras conjuntas de harina de trigo en el eslabón 4 de las panaderías, es crucial considerar que este insumo representa el costo más elevado entre los insumos necesarios para la elaboración del pan. El precio de la harina de trigo se ve influenciado por las fluctuaciones en el precio internacional del cereal y en la tasa de cambio, factores que han provocado un aumento en el costo de adquisición para los agentes que importan este bien. Además, aquellos agentes que adquieren pequeñas cantidades de harina de trigo a empresas colombianas, como trilladoras o distribuidoras, también se han visto afectados por el incremento de precios. Esto se debe a los aumentos en los costos de transformación del trigo en harina y en los procesos de distribución.

En respuesta a esta situación, llevamos a cabo una aplicación del modelo de compras conjuntas con descuento general con datos reales, en el cual el vendedor ofrece descuentos generales de precios para pedidos grandes. Ante esta circunstancia, los compradores podrían optar por cooperar y formar grupos de compra para aprovechar los descuentos ofrecidos. Para ello, obtenemos datos generales de los compradores, sin detalles relacionados con su identidad, que incluyen las cantidades y los precios de las compras habituales de harina de trigo realizadas individualmente durante un período mensual. Posteriormente, utilizamos estos datos para simular un escenario de cooperación con 15 agentes y aplicarlo al modelo de compras conjuntas, con el objetivo de analizar los resultados obtenidos. Esta metodología nos permitirá evaluar la situación actual de viabilidad y eficacia de la colaboración en la adquisición de harina de trigo en el contexto de las panaderías.

Los datos de precios con descuento por cantidad utilizados en esta sección han sido facilitados por una empresa destacada en el sector de la molinería de trigo del Colombia. Para aplicar nuestro modelo necesitamos estimar una función de precios con descuentos que se ajuste a esos datos. Vamos a utilizar la forma funcional que se propone en Schotanus et al. (2009) y que ellos denominan función general de descuento por cantidad (QDF). Formalmente,  $P(q) = pm + \frac{S}{q^n}$ , donde,  $pm$  es el precio mínimo teórico,  $S$  escala la función  $p(q)$  para la cantidad  $q$ , y  $n$  determina la pendiente, porque cuanto mayor es, más rápido decrece el precio al aumentar la cantidad. Como resultado obtenemos la función <sup>1</sup>  $P(q) = 162.680542 + \frac{20.616814}{q^{0.492546}}$ .

En la tabla 3.1 se seleccionan quince compradores y se calculan los precios utilizando la función estimada en tres escenarios diferentes. En el primero, cada agente realiza sus compras

<sup>1</sup>Para estimar la función hemos utilizado el programa Mathematica.

de forma individual. En este caso, el precio de los agentes va de 164,556 a 163,594, y el costo varía entre 21392,2 y 91612,6.

En el segundo escenario, los agentes cooperan utilizando una regla EP, que asigna el mismo precio para todos los agentes. En esta situación, el precio para todos los agentes es 162,993 y el costo del agente varía entre 21189,1 y 91276,1.

En el tercer escenario, los agentes cooperan pero aplican una regla BDP. Específicamente, se considera una regla  $\alpha$ -proporcional, donde el parámetro  $\alpha^*$  es igual a 0,663642. El precio en este caso va de 163,231 hasta 162,908, y el costo varía entre 21220,1 y 91228,7.

En este caso, los pequeños compradores son los agentes 1-7 y los agentes 8-15 los grandes compradores.

Como se puede observar en la Tabla 3.1 que la regla  $\alpha$ -proporcional es una regla BDP para todo  $\alpha \in [0,6636, 1)$ . Es importante aclarar que en este caso los  $\sigma$  son todos muy parecidos y próximos a 1, que corresponde al EP, este efecto se genera porque los descuentos presentados en la Tabla 3.1 son muy pequeños.

$$P(q_i) = 162.680542 + \frac{20.616814}{q^{0.492346}}$$

Agente	$q_i$	No-Cooperativo		Cooperativo				
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proportional)  $\alpha=\alpha^*=0.663642$		
		Precio	Costo	Precio	Costo	Precio	Costo	$\sigma_\alpha$
1	130	164.556	21392.2	162.993	21189.1	163.231	21220.1	1.001462
2	180	164.278	29570.0	162.993	29338.7	163.138	29364.8	1.000890
3	200	164.197	32839.4	162.993	32598.6	163.111	32622.2	1.000723
4	220	164.128	36108.1	162.993	35858.5	163.088	35879.3	1.000580
5	230	164.096	37742.1	162.993	37488.4	163.077	37507.7	1.000516
6	274	163.979	44930.3	162.993	44660.1	163.038	44672.3	1.000275
7	330	163.866	54075.6	162.993	53787.7	163.000	53789.9	1.000040
8	350	163.832	57341.1	162.993	57047.5	162.988	57045.9	0.999971
9	370	163.801	60606.2	162.993	60307.4	162.978	60301.8	0.999907
10	375	163.793	61422.5	162.993	61122.4	162.975	61115.7	0.999891
11	383	163.782	62728.4	162.993	62426.3	162.971	62418.1	0.999868
12	401	163.757	65666.6	162.993	65360.2	162.963	65348.2	0.999817
13	450	163.698	73664.0	162.993	73346.8	162.943	73324.4	0.999695
14	490	163.656	80191.4	162.993	79866.6	162.929	79835.3	0.999609
15	560	163.594	91612.6	162.993	91276.1	162.908	91228.7	0.999481

Tabla 3.1 Caso 1. Harina de Trigo

Nótese que, aquí, el umbral  $\bar{q}$  entre grandes compradores y pequeños compradores es :

$$\bar{q} = \left( \frac{20,616814}{\frac{\sum_{j \in N} c(j)}{q_N} - 162,680542} \right)^{1/0,492546} = \left( \frac{20,616814}{163,846 - 162,680542} \right)^{1/0,492546} = 341,361879$$

En este caso se observa que la aplicación de la regla  $\alpha$ -proporcional en compras conjuntas con descuento general de harina de trigo no genera descuentos relevantes para los agentes dispuestos a cooperar. Este resultado no es un problema de la regla. Si se observa los descuentos que ofrece el vendedor por cantidad, se ve que son muy pequeños lo que limita enormemente los beneficios de una cooperación.

Esta situación, puede incitar a los compradores a explorar oportunidades de ahorro colaborativo con otros proveedores. También puede incentivar al vendedor a reevaluar su sistema de descuentos progresivos, potenciando la colaboración entre sus clientes compradores y promoviendo la fidelización de un grupo motivado por los descuentos ofrecidos.

## 3.2. Compras conjuntas en fertilizantes

En este segundo caso de aplicación del modelo de compras conjuntas en fertilizantes, específicamente en el eslabón 1 de la agricultura trigo, cabe destacar que las políticas gubernamentales actuales buscan reducir los precios de estos insumos para hacer que la producción agrícola sea más rentable. Además, desde esta perspectiva gubernamental se resaltan los beneficios que conlleva la utilización de los fertilizantes, ya que proveen los nutrientes esenciales para los cultivos, incrementan tanto la calidad como la cantidad de los alimentos producidos y contribuyen a mejorar la fertilidad de los suelos agotados por la sobreexplotación. En este sentido, el fomento de compras conjuntas de nuestro modelo aplicado en este eslabón de la cadena se erige como una estrategia relevante para facilitar el acceso a estos insumos tanto para los agricultores de trigo como para otros cultivos esenciales en estudios posteriores.

Los datos relativos a las transacciones de compra de fertilizantes, detallando tanto la cantidad como el precio, fueron proporcionados por una empresa destacada en el sector de la comercialización de productos agrícolas para la siembra en Colombia. En esta sección se ha seguido una metodología análoga a la sección anterior y obtenemos la siguiente función estimada de precios con descuentos  $P(q_i) = 16.310315 + \frac{1814.0816}{q^{0.124437}}$ .

En este segundo caso se evidencia una dinámica distinta en comparación con el primer caso. Aquí, la cooperación tiene un sentido mucho más evidente debido a los significativos descuentos que generan los vendedores, motivados tanto por las políticas gubernamentales como por estrategias de volumen y fidelización por parte de los agentes vendedores. Esta situación se puede observar en la Tabla 3.2. Es importante señalar que para este caso se observa una marcada diferencia entre los volúmenes de compra entre los agentes, situación que puede generarse por la diferencia en cuanto a la propiedad de las tierras en el país y la gestión de cultivos entre agentes. De los 15 agentes del caso, únicamente 3 son clasificados como grandes compradores según el umbral obtenido, mientras que el resto se consideran, según el modelo, pequeños compradores. Esta tendencia se alinea con la realidad de la región, donde prevalece un gran número de pequeños agricultores que habitualmente no cooperan, aunque les resultaría rentable hacerlo, como muestra nuestro modelo.

$$P(q_i) = 16.310315 + \frac{1814.0816}{q_i^{0.124437}}$$

Agente	$q_i$	No-Cooperativo		Cooperativo				
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proportional) $_{\alpha=\alpha^*=0.801216}$		
		Precio	Costo	Precio	Costo	Precio	Costo	$\sigma_\alpha$
1	400	877.035	350814.016	391.175	156470.119	464.007	185602.839	1.1861
2	500	853.464	426731.898	391.175	195587.649	459.550	229774.829	1.1747
3	1000	784.283	784283.079	391.175	391175.298	446.467	446467.236	1.1413
4	1500	746.496	1.120x10 <sup>6</sup>	391.175	586762.947	439.322	658982.376	1.1230
5	1750	732.623	1.282x10 <sup>6</sup>	391.175	684556.772	436.698	764221.733	1.1163
6	2200	712.513	1.568x10 <sup>6</sup>	391.175	860585.656	432.895	952369.386	1.1066
7	5000	644.901	1.225x10 <sup>6</sup>	391.175	1.956x10 <sup>6</sup>	420.109	2.101x10 <sup>6</sup>	1.0739
8	7000	619.126	3.334x10 <sup>6</sup>	391.175	2.738x10 <sup>6</sup>	415.235	2.907x10 <sup>6</sup>	1.0615
9	9000	600.566	5.405x10 <sup>6</sup>	391.175	3.521x10 <sup>6</sup>	411.725	3.706x10 <sup>6</sup>	1.0525
10	9500	596.648	5.668x10 <sup>6</sup>	391.175	3.716x10 <sup>6</sup>	410.985	3.904x10 <sup>6</sup>	1.0506
11	18600	550.102	1.023x10 <sup>7</sup>	391.175	7.276x10 <sup>6</sup>	402.182	7.481x10 <sup>6</sup>	1.0281
12	20000	545.303	1.091x10 <sup>7</sup>	391.175	7.824x10 <sup>6</sup>	401.275	8.025x10 <sup>6</sup>	1.0258
13	69000	469.756	3.241x10 <sup>7</sup>	391.175	2.699x10 <sup>7</sup>	386.989	2.670x10 <sup>7</sup>	0.9892
14	69500	469.348	3.262x10 <sup>7</sup>	391.175	2.719x10 <sup>7</sup>	386.912	2.689x10 <sup>7</sup>	0.9891
15	103500	447.445	4.631x10 <sup>7</sup>	391.175	4.049x10 <sup>7</sup>	382.769	3.962x10 <sup>7</sup>	0.9785

Tabla 3.2 Caso 2. Fertilizantes

En la tabla 3.2 se observa que el parámetro  $\alpha$  presenta mayores diferencias con relación al primer caso, con un umbral  $\alpha^*$  de 0,801216, considerado aceptable tanto para los pequeños como para los grandes compradores, y un umbral  $\bar{q}$  de 47000,044.

Podemos destacar en la regla  $\alpha$ -proporcional la relevancia del parámetro  $\alpha$  generado, en este caso tomamos los extremos de la tabla para el agente 1 clasificado como pequeño comprador

en la Tabla 3.2, cuyo  $\sigma_\alpha$  es igual a 1,1861, lo que representa un 18,61 % más del costo en relación con el EP pero un 47,01 % menos del costo en comparación con el precio individual sin cooperación. En cuanto al agente 15, clasificado como gran comprador,  $\sigma_\alpha$  es igual a 0,9785, indicando un 2,15 % menos del costo individual con respecto al EP y un 14,45 % menos del costo, en comparación con el precio individual sin cooperación. Estos resultados exhiben que la aplicación de la regla  $\alpha$ -proporcional en este caso genera descuentos significativos que pueden fomentar la cooperación entre pequeños y grandes compradores, lo que podrían contribuir a la estabilidad de los agentes que deseen participar, siempre y cuando los vendedores propongan como en este caso un programa atractivo de descuentos por compras en volumen, que motive la cooperación.

En la segunda aplicación del modelo de compras conjuntas con descuento general en fertilizantes, se evidencia una motivación significativa para fomentar la cooperación entre los distintos agentes. La variación en precios y costos, en función del umbral  $\alpha^*$ , emerge como una herramienta crucial para armonizar los intereses de pequeños y grandes compradores. Este enfoque no solo facilita una distribución más equitativa de los beneficios derivados de los descuentos ofrecidos, sino que también promueve un ambiente colaborativo más justo y sostenible para los agentes que deseen cooperar en la compra de fertilizantes dentro de la cadena de suministro del sector panificador en Colombia.

## Conclusiones

Como conclusión general de la tesis, en el primer objetivo, expuesto en el capítulo 1, se identificó, una brecha significativa para los empresarios pertenecientes a la cadena de suministro del sector panificador en Colombia. Estos empresarios llevan a cabo sus actividades de manera independiente, sin contar con herramientas de medición de costos conjunta que faciliten la colaboración entre los agentes. En respuesta a esta situación, se propuso como objetivo, un sistema de costos que permitiera visualizar la cadena como una sola entidad, con el fin de crear un sistema interconectado que facilitara la medición y el análisis conjunto.

Como resultado del primer capítulo, se logró proponer un sistema de costos a nivel general que obtiene resultados sobre el costo equivalente, el precio y el margen equivalentes, entre otros, para cada eslabón de la cadena de suministros en la producción de un kilo de pan. Esto facilita la medición y el análisis conjunto de los costos y precios en toda la cadena para la elaboración del producto referido, al tiempo que ayuda a identificar posibles oportunidades de colaboración entre agentes, lo que puede contribuir significativamente a la estabilidad de esta. Aunque el sistema no desagrega a nivel de procesos, estos se han descrito en el capítulo para que en futuras investigaciones se aborden los costos de forma más específica. De igual forma, se espera que las investigaciones futuras extiendan este tipo de sistemas propuestos para otras cadenas de suministros.

En el segundo propósito, abordado en el capítulo 2, nos hemos planteado un modelo de cooperación adaptado a las oportunidades que pueden surgir entre un grupo de agentes, potencialmente integrantes de una cadena de suministro. En esta perspectiva, analizamos casos en los que un vendedor ofrece descuentos generales para grandes pedidos, fundamentados en una función de precio unitario decreciente. Esta dinámica puede resultar beneficiosa para los agentes que opten por formar grupos de compras conjuntas para aprovechar dichos descuentos.

Como resultado del segundo capítulo se muestra que nuestra familia de reglas BDP propuestas ofrece una solución adecuada para todos los agentes participantes, cuando la función de

descuento es no lineal, asegurando una distribución justa y favorable en este contexto. Estas reglas emergen como una herramienta valiosa, destacando las oportunidades de colaboración entre agentes en una cadena de suministro u otros escenarios de compras conjuntas.

Al aplicar el modelo de compras conjuntas en el sector panificador en Colombia, pudimos mostrar la adaptabilidad de nuestra regla en dos casos específicos de la cadena de suministro, como parte del objetivo 3 de la tesis observamos que en algunas situaciones, los vendedores pueden ofrecer descuentos que fomentan la cooperación, como en el caso de los fertilizantes, mientras que en otros casos, trigo, donde el vendedor no ofrece descuentos considerables por compras en volumen, situación que no genera ahorro significativo. Este hallazgo servirá como un punto de partida para decidir si es necesario iniciar negociaciones o buscar vendedores que ofrezcan descuentos por volumen, al mismo tiempo esta acción puede beneficiar a los agentes vendedores al fidelizar grupos de agentes compradores.

Basándonos en estas conclusiones, tenemos como objetivo iniciar conversaciones con asociaciones pertinentes y presentar nuestras reglas para fomentar la cooperación entre los agentes interesados en optimizar sus costos mediante compras conjuntas y aprovechar los descuentos en los precios. Además, nos proponemos expandir nuestra labor hacia otros eslabones relacionados para ampliar la aplicación de nuestras reglas y, de esta manera, extender los beneficios a lo largo de toda la cadena y a otras cadenas de suministro.

Como resultado de la investigación, he establecido una oficina denominada Observatorio de Costos y Oportunidades (OCO), en la Universidad de San Buenaventura Cali, Colombia. Esta oficina estará enfocada en la recolección, análisis de datos y resultados, relacionados con los costos operativos empresariales, con el propósito de identificar oportunidades de cooperación en el ámbito empresarial, como las compras conjuntas en cadenas de suministro o estrategias para optimizar los costos. Este proceso ha sido posible gracias a la colaboración de profesores especializados en el área de costos y áreas afines



# Bibliografía

- Adams, J. (1963). Toward an understanding of equity. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 67, 422–436.
- Alamo, G. & Mora, J. (2013). Costo de las cadenas de suministros en las empresas metalmeccánicas en la costa oriental del lago. *Formación Gerencial*, (pp. 11–32).
- Albizuri, M. (2010). The  $\alpha$ -serial cost-sharing rule. *Math. Sci.*, 60, 24–29.
- Albizuri, M. & Zarzuelo, J. (2007). The dual serial cost-sharing rule. *Math. Soc. Sc*, 53, 150–163.
- Algaba, E., Fragnelli, V., & Sánchez-Soriano, J. (2019). *Handbook of the Shapley Value*. CRC Press: Boca Raton, FL, USA,.
- Anderson, S. W. (2006). *Managing Costs and Cost Structure throughout the Value Chain: Research on Strategic Cost Management*, volume 2 of *Handbooks of Management Accounting Research*, (pp. 481–506). Elsevier.
- Arango-Serna, Adarme-Jaimes, M. D., Zapata-Cortes, W., & Andres, J. (2013). Inventarios colaborativos en la optimización de la cadena de suministros. *DYNA*, 80(181), 71–80.
- Ayala Espino, J. (1999). *Instituciones y economía. Una introducción al neoinstitucionalismo económico*. Fondo de Cultura Económica.
- Bada Carbajal, L. M., Tovar, R., A., L., & Littlewood Zimmerman, H. F. (2017). Modelo de asociatividad en la cadena productiva en las mipymes agroindustriales. *Ingeniería*, 62, 1100–1117.
- Bigliardi, B., Filippelli, S., Petroni, A., & Tagliente, L. (2022). The digitalization of supply chain: a review. *Procedia Computer Science*, 200, 1806–1815.
- Borm, P., Keiding, H., Mclean, R., Oortwijn, S., & Tijs, S. (1992). The compromise value for ntu-games. *Int. J. Game Theory*, 21, 175–18.
- Brandenburger, A. & Nalebuff, B. (1998). *Co-Opetition*. Crown.
- Brickley, J. A., Smith, C. W., & Zimmerman, J. L. (2005). *Economía empresarial y arquitectura de la organización*. McGraw Hill.

- Cambra Fierro, J. & Polo Redondo, Y. (2012). El tamaño empresarial y la importancia del suministro como condicionantes en la generación de relaciones a largo plazo con empresas proveedoras. *Revista Española de Investigación de Marketing ESIC*, 16, 7–28.
- Cano, P., Carrasco, F. O., Martínez, J. L., Mayett, Y., & López, G. (2015). Logistics management model for small and medium sized enterprises in Mexico. *Contaduría y Administración*, 60, 181–203.
- Chand, P., Thakkar, J. J., & Kanti, K. G. (2020). Analysis of supply chain performance metrics for Indian mining and earthmoving equipment manufacturing companies using hybrid MCDM model. *Resources Policy*, 68, 3–20.
- Chen, P., Liu, X., Zhou, P., & Zhu, S. X. (2022). The interplay between strategic inventories and cost misreporting in supply chains. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 163, 1–19.
- Chen, X. (2009). Inventory centralization games with price-dependent demand and quantity discount. *Oper. Res.*, 57, 1394–1406.
- Chiarello, M., Pires, J. C., Lorin, H. E. F., & Damasceno, F. M. (2021). Composting organic waste from the broiler production chain: A perspective for the circular economy. *Journal of Cleaner Production*, 329, 1–12.
- CONFECÁMARAS (2022). 307.679 nuevas empresas se crearon en el país durante 2021, un aumento del 10,6% con respecto a 2020. *Red de Cámaras de Comercio*.
- Correa-Mejía, D. A., Martínez-Molina, L. Y., Ruiz-Criollo, M. C., & Yepes-Montoya, M. A. (2018). Cost indicators: A tool to manage value creation in Colombian industrial companies. *Estudios Gerenciales*, 34, 190–199.
- Das, T. & Teng, B. (2001). A risk perception model of alliance structuring. *J. Int. Manag.*, 7, 1–29.
- Duque-Roldán, M. I., Osorio-Agudelo, J. A., & Agudelo-Hernández, D. M. (2011). Costos estándar y su aplicación en el sector manufacturero colombiano. *Cuadernos de Contabilidad*, 12, 521–545.
- Essig, M. (2000). Purchasing consortia as symbiotic relationships: Developing the concept of consortium sourcing. *Eur. J. Purch Supply Manag.*, 6, 13–22.
- Fayol, H. (1916). Principios generales de gestión. *Clásicos de la teoría de la organización*, 2, 57–69.
- Fullana, C. & Paredes, J. L. (2008). *Manual de Contabilidad de Costes*. Delta Publicaciones.
- Geiger, D. R. & Ittner, C. D. (1996). The influence of funding source and legislative requirements on government cost accounting practices. *Accounting Organizations and Society*, 21, 549–567.

- González, C. A., Martínez, J. L., Malcon, C., & Cavazos, J. (2013). Metodología de gestión logística para el mejoramiento de pequeñas empresas. *Revista Internacional Administración y Finanzas*, 6, 121–129.
- Granot, D. & Sobic, G. (2005). Formation of alliances in internet-based supply exchanges. *Manag. Sci.*, 51, 92–105.
- Groote, M., Borm, P., Hamers, H., & Reijnierse, H. (2013). Game theoretic analysis of maximum cooperative purchasing situations. *Nav. Res.*, 60, 607–624.
- Gutiérrez, G. A. (2012). Un acercamiento a la teoría de los juegos. *Científica*, 1, 7–26.
- Heckmann, P., Shorten, D., & Engel, H. (2003). Supply chain management at 21 the hard road to adulthood. *The Accounting Review*.
- Heijboer, G. (2003). *Mathematical and Statistical Analysis of Inhasing Decisions*. PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, unpublished.
- Hendrick, T. (1996). Purchasing conhorizontal alliances among firms buying common goods and services: What? who? why?.,*How?* *Center for Advanced Purchasing Studies: Tempe, AZ, USA*.
- Hezarkhani, B. & Sobic, G. (2019). Who's afraid of strategic behavior? mechanisms for group purchasing. *Prod. Oper. Manag.*, 28, 933–954.
- Hornrgren, C., Datar, S., Foster, G., Rajan, M., & Ittner, C. (2009). *Cost Accounting: A Managerial Emphasis*. Charles T. Hornrgren series in accounting. Pearson Prentice Hall.
- Huber, B., Sweeney, E., & Smyth, A. (2004). Purchasing consortia and electronic markets: A procurement direction in integrated supply chain management. *Electron. Mark.*, 14, 284–294.
- INFORMA (2020). Informe sector industria panicadora. <https://sectorial.co/informativa-industria-panicadora-y-de-pastas/> Ultimo acceso marzo 2024.
- Kaneberg, E., Jensen, L.-M., & Hertz, S. (2021). Managing network responsiveness in emergency preparedness supply chains for safety and security in developed nations. *Revista Científica General José María Córdova*, 19, 453–477.
- Kaplan, R. & Anderson, S. (2007). *Time-Driven Activity-Based Costing: A Simpler and More Powerful Path to Higher Profits*. Harvard Business Review Press.
- Kaplan, R. & Cooper, R. (1998). *Cost & Effect: Using Integrated Cost Systems to Drive Profitability and Performance*. Strategy/Management/Finance/Accounting / Harvard Business School Press. Harvard Business School Press.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (2001). Cómo utilizar el cuadro de mando integral. para implantar y gestionar su estrategia. *Gestión 2000*.
- Kar, A., Mitra, M., & Mutuswami, S. (2009). On the coincidence of the prenucleolus and the shapley value. *Mathematical Social Sciences*, 57(1), 16–25.

- Krichen, S., Laabidi, L., & Abdelaziz, F. (2011). Single supplier multiple cooperative retailers inventory model with quantity discount and permissible delay in payments. *Comput. Ind. Eng.*, 60, 164–172.
- Lee, H. L. (2004). The triple-a supply chain. *Harvard Business Review*, 80(9), 2–14.
- Li, W., Sun, H., Dong, H., Gan, Y., & Koh, L. (2022). Outsourcing decision-making in global remanufacturing supply chains: The impact of tax and tariff regulations. *European Journal of Operational Research*, 304, 997–1010.
- Lindsey Hall, K. K., Qi, J. M., G., R. J. R., & Patil, R. K. (2022). Collaboration, feedback, and performance: Supply chain insights from service-dominant logic. *Journal of Business Research*, 146, 385–397.
- Luo, C., Zhou, X., & Lev, B. (2022). Core, shapley value, nucleolus and nash bargaining solution: A survey of recent developments and applications in operations management. *Omega*, 110, 102638.
- López Joy, T., Acevedo Urquiaga, A., & Sablon Cossio, N. (2014). Procedimiento para el desarrollo de cadenas de suministro. aplicación en cadenas agroalimentarias cubanas. *Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura*.
- Löfgren, K.-G., Persson, T., & Weibull, J. W. (2002). Markets with asymmetric information: The contributions of george akerlof, michael spence and joseph stiglitz. *The Scandinavian Journal of Economics*, 104, 195–211.
- Martínez Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20, 165–193.
- Meca, A., Guardiola, L., & Toledo, A. (2007). p-additive games: A class of totally balanced games arising from inventory situations with temporary discounts. *Top*, 15, 322–340.
- Meca, A., Timmer, J., García-Jurado, I., & Borm, P. (2004). Inventory games. *Eur. J. Oper. Res.*, 156, 127–139.
- Moulin, H. & Shenker, S. (1992). Serial cost sharing. *Econometrica*, 60, 1009–1037.
- Munson, C.L. and Jackson, J. (2015). Quantity discounts: An overview and practical guide for buyers and sellers. *Found. Trends Technol. Inf. Oper. Manag.*, 8, 1–130.
- Orjuela-Castro, J. A., Suárez-Camelo, N., & Chinchilla-Ospina, Y. I. (2020). Costos logísticos y metodologías para el costeo en cadenas de suministro: una revisión de la literatura. *Cuadernos de Contabilidad*, 17, 377–420.
- Peng, Y., W., W., Li, S., & Veglianti, E. (2022). Competition and cooperation in the dual-channel green supply chain with customer satisfaction. *Economic Analysis and Policy*, 76, 95–113.
- Polimeni, R. S., Fazio, F., Adelberg, A., & Kole, M. (1994). *Contabilidad de costos*. Technical report, McGraw-Hill Bogotá.

- Porporato, M. (2022). Contabilidad de gestión para controlar o coordinar en entornos turbulentos: su impacto en el desempeño organizacional. *Contaduría y Administración*, 60, 511–534.
- Poteete, A. R. & Ostrom, M. A. J. E. (2012). *Trabajar juntos. Acción colectiva, bienes comunes y múltiples métodos en la práctica*. Ciudad de México: Universidad Autónoma Metropolitana, 1.ª ed. edition.
- Rincón, A. & Vergara, A. (2013). La metodología de los costos híbridos como fuente en el diseño de los indicadores de costos y gestión: Perspectiva de aplicación micro, pequeñas, medianas y grandes empresas. *Libre Empresa*, 10, 99–120.
- Rincón Soto, C. A. (2011). Indicadores de costos. *Libre Empresa*, 8, 109–141.
- Rosenthal, E. C. (2008). A game-theoretic approach to transfer pricing in a vertically integrated supply chain. *International Journal of Production Economics*, 115, 542–552.
- Roslender, R. & Hart, S. J. (2002). Integrating management accounting and marketing in the pursuit of competitive advantage: The case for strategic management accounting. *Critical Perspectives on Accounting*, 13, 255–277.
- Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(6), 1163–1170.
- Schotanus, F., Telgen, J., & de Boer, L. (2008). Unfair allocation of gains under the equal price allocation method in purchasing groups. *European Journal of Operational Research*, 187(1), 162–176.
- Schotanus, F., Telgen, J., & de Boer, L. (2009). Unraveling quantity discounts. *Omega*, 37, 510–521.
- Shapley, L. (1953). A value for n-person games. *Ann. Math. Stud.*, 28, 307–317.
- Shapley, L. (1971). Cores of convex games. *Int. J. Game Theory*, 1, 11–26.
- Sinisterra Valencia, G. & Rincón Soto, C. A. (2017). Contabilidad de costos con aproximaciones a las normas internacionales. *ECOE ediciones*.
- Sánchez-Galván, F., Bautista-Santos, H., Martínez-Flores, J. L., Ireta-Paredes, A. d. R., & Sánchez-Partida, D. (2020). Cadena de suministro de productos agrícolas de traspatio. *Agro Productividad*, 13, 39–46.
- Taylor, F. W. (1911). *The principles of scientific management*. NuVision Publications, LLC.
- Tella, E. and Virolainen, V. (2005). Motives behind purchasing consortia. *Int. J. Prod. Econ.*, (pp. 93–94, 161–168).
- Van de Klundert, J., Kuipers, J., Spijksma, F., & Winkels, M. (2005). Selecting telecommunication carriers to obtain volume discounts. *Interfaces*, 35, 124–132.

- Vargas Sánchez, G. & Rodríguez Peralta, C. M. (2016). Oligopolio y estrategias de competencia en el mercado de minoristas en México. *Economía Informa*, 400, 3–23.
- Velásquez Peralta, N. (2019). *Contabilidad Gerencial*. Universidad Católica los Ángeles de Chimbote, 1.ª ed. edition.
- Vergara Mesa, G. A., Ramírez Reyes, J. C., Santana Naranjo, S., & Carranza Jiménez, J. T. (2017). Una estrategia de autosostenibilidad de bajo costo para pasar de la economía informal a la economía formal. el caso de la comuna 10 de cali, colombia. *Revista Científica General José María Córdova*, 15, 201.
- Villa Marulanda, M. & Torres Delgado, J. F. (2012). Análisis de teoría de juegos en cadenas de suministros de dos niveles, productor-comprador, bajo esquema vendor managed inventory (vmi). *ITECKNE*, 9, 67–82.
- Wenzhong, L., Genjiu, X., & Jun, S. (2021). Inventory games with quantity discount. *J. Syst. Sci. Complex*, 34, 1538–1554.
- Woo, D. & Suresh, N. C. (2022). Voluntary agreements for sustainability, resource efficiency and firm performance under the supply chain cooperation policy in south korea. *International Journal of Production Economics*, 252, 1–14.

## **Apéndice A**

# **Cooperative Purchasing with General Discount: A Game Theoretical Approach**



Article

# Cooperative Purchasing with General Discount: A Game Theoretical Approach

Jose A. García-Martínez <sup>1,\*</sup> , Ana Meca <sup>2</sup>  and G. Alexander Vergara <sup>3,4</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Estudios Económicos y Financieros, Universidad Miguel Hernández de Elche, 03202 Elche, Spain

<sup>2</sup> I. U. Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche, 03202 Elche, Spain

<sup>3</sup> Interuniversity Doctorate in Economics (DEcIDE), I. U. Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche, 03202 Elche, Spain

<sup>4</sup> Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de San Buenaventura Cali, Cali 760031, Colombia

\* Correspondence: jose.garciam@umh.es

**Abstract:** In some situations, sellers of certain commodities usually provide price discounts for large orders according to a decreasing unit price function. Buyers of such commodities can cooperate and form purchasing groups to benefit from these price discounts. A natural way to allocate the corresponding cost reductions is the equal price rule. We analyze this situation as a cooperative game. We show that when the decreasing unit price function is linear, the equal price rule coincides with the Shapley value and the nucleolus of the cooperative game. However, some buyers may argue that the equal price rule is not acceptable because it favors those who buy just a few units of the product. This can be more problematic when the decreasing unit price function is nonlinear: In that case, the equal price rule loses some of its good properties and it no longer matches the Shapley value or the nucleolus. Unlike the linear case, in this nonlinear case, the Shapley value and nucleolus do not assign the same price to all agents, so there are different price rules. However, they have a computability problem, as both are very laborious to calculate for a large number of agents. To find a suitable alternative, we first study the properties that a different price rule should have in this situation. Second, we propose a family of different price rules that hold those properties and are easy to calculate for a large number of agents. This family of different price rules provides buyers (companies, institutions, consumers, etc.) with an easy-to-implement method which ensures stability in cooperative purchasing.

**Keywords:** cooperative purchasing; price discounts; equal price rule; different price rules; game theory

**MSC:** 91A12, 91A80



check for updates

**Citation:** García-Martínez, J.A.; Meca, A.; Vergara, G.A. Cooperative Purchasing with General Discount: A Game Theoretical Approach. *Mathematics* **2022**, *10*, 4195. <https://doi.org/10.3390/math10224195>

Academic Editors: Encarnación Algaba, Stefano Moretti, Marina Núñez and Agnieszka Rusinowska

Received: 11 October 2022

Accepted: 1 November 2022

Published: 9 November 2022

**Publisher's Note:** MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



**Copyright:** © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

## 1. Introduction

Since time immemorial, trade has offered buyers the opportunity to pay a lower price for the purchase of large quantities of a product. Today, consumers encounter all kinds of quantity discounts at every turn in both retail shops and online platforms. Beyond consumers, quantity discounts can be seen to permeate business-to-business transactions. Most companies receive a quantity discount on some of their purchases and extend a quantity discount to some of their customers. Mobile operators in Europe receive volume discounts from telecommunications operators based on the number of international calls made [1]. More generally, large retailers and manufacturers such as Lidl and Ikea demand discounts from their suppliers based on a large volume of products purchased. At the same time, many large manufacturers and retailers have programs in place to offer volume discounts to external companies, schools and non-profit organizations. One example of such a program is Apple's Volume Purchase Program, which offers customized volume discounts for purchases.

The omnipresence of quantity discounts for buyers highlights the importance of addressing questions such as how many units should be ordered when dealing with a quantity discount schedule? Should buyers join a group-purchasing organization to try to lower purchase prices? Since the 1950s, quantity discounting has been an important research topic, which has also appeared in economics and operations research literature. In operations, much of the core work for determining optimal order sizes for buyers and for using quantity discounts to coordinate lot sizes in supply chains was carried out by the end of the last century. Several literature review papers address much of this work in various ways. Since the turn of the century, a steady flow of papers has continued to appear. The research area remains vibrant, with quality publications appearing every year in the operations-management field alone. A comprehensive overview of quantity discounts by [2] covers many of the papers published in the last 25 years.

Here, we focus on the questions raised above and demonstrate that it is beneficial for buyers to join a large purchasing group to obtain lower purchase prices and, thus, a significant reduction in their costs. We assume that the buyers (retailers or producers) already know how many units of the product they are going to buy. They may be finished products or raw materials to produce a certain product. That is, they initially know how many units of a commodity they are going to order when they deal with a quantity-discount schedule. Cooperative purchasing initiatives such as purchasing groups, purchasing consortia, and buying offices are becoming increasingly popular due to advances in information technology and the development of online markets. Purchasing groups generate multiple benefits for its participants: buyers can obtain better prices by increasing their purchasing power and reduce costs by consolidating their operations.

In purchasing literature, cooperative purchasing is referred to using many terms. There are certain patterns in those terms, but the terminology is not yet fully stabilized [3]. We define cooperative purchasing as the sharing and/or bundling of purchasing-related information, processes, resources, and/or volumes by two or more organizations in a purchasing group in order to improve their performances [4]. A purchasing group consists of two or more dependent or independent organizations that purchase together, either formally or informally, or through a third party [5]. Cooperative purchasing is a type of cooperative arrangement, often among businesses, to agree to add up demand so as to obtain lower prices from selected suppliers. Retailers' cooperatives are a form of cooperative purchasing. Cooperatives are often used by government agencies to reduce procurement costs [6] and they are also gaining popularity in the private sector [5].

Research on cooperative purchasing has received relatively little attention in the field of operations research. It has so far focused mainly on inductive explanations of practices and deductive qualitative reasoning. There has been little use of game-theory reasoning, to date. One specific issue which has received particularly little research attention is the allocation of costs resulting from purchasing price savings achieved through cooperative purchasing using the so-called equal price (EP) allocation method. This EP method is commonly used, and is defined as all agents paying the same price per item [7]. EP is practically and intuitively appealing, but it may lead to unfair outcomes under certain circumstances. This has been reported previously by [7] and analyzed systematically by [4]. The latter focuses specifically on allocating the total gains resulting from cooperation and formally analyzes how and under what conditions unfairness arises when EP is used. These two issues are important to all types of purchasing groups as they all have to make decisions on how to allocate their gains. They provide an analytical analysis of unfair outcomes of EP, provide recommendations for purchasing groups as to how to deal with them, and contribute to increased awareness and understanding of EP-related problems.

In this paper, we study situations in which a seller of a certain commodity provides price discounts for large orders according to a decreasing unit-price function. Buyers of this commodity can cooperate and form purchasing groups to benefit from these price discounts. It is provided in [8] an analytical and empirical basis for a general quantity-discount function (QDF) which can be used to describe the underlying function of almost

all types of quantity discount. They show that this QDF fits very well with 66 discount schedules found in practice. It is proposed in [8] a QDF with an explicit formula depending on certain parameters, but we propose a general price function which measures the quantity discount buyers encounter when cooperating in purchasing and satisfies properties such as continuity, decreasingness, convexity, and limited growth rate.

On the other hand, as mentioned, it is focused in [4] on allocating the total gains from cooperation by means of a benefit game, and analyze the unfairness resulting from using the commonly used EP method for allocating such gains. They demonstrate that this unfairness is caused by neglecting a particular component of the added value of individual group members. They discuss measures that a purchasing group might consider to mitigate the perception of unfairness, but they do not study in depth the class of cooperative games that they have at hand or propose an alternative to the EP rule. Unlike [4], we analyze these cooperative purchasing situations as cooperative cost games and study them comprehensively. We go beyond the EP rule and other well-known but difficult-to-calculate distributions such as the Shapley value or the compromise value [9]. In particular, we show that when the decreasing unit price function is linear, the EP rule coincides with the Shapley value and the nucleolus. However, some buyers may argue that the EP rule is not acceptable because it favors those who buy just a few units of the product. This can be more problematic when the decreasing unit-price function is nonlinear: In that case, EP loses some of its good properties and no longer matches the Shapley value or the nucleolus. By contrast to the linear case, in this nonlinear case, the Shapley value and nucleolus do not assign the same price to all agents, so they are different price (DP) rules. However, they have a computability problem in that both are very laborious to calculate for a large number of agents. To find an adequate alternative, we first study the properties that a DP rule should have in this situation. Second, we propose a family of DP rules that hold those properties and are easy to calculate for a large number of agents.

Our paper, thus, contributes to the literature on cooperative purchasing models in the following way: First, we extend the study of such models with general discount functions and introduce a new class of cooperative-purchasing cost games with general discounts. Second, we comprehensively analyze cooperative-purchasing cost games with linear discounts and show that the EP rule coincides with the Shapley value and the nucleolus. This equality does not hold for cooperative-purchasing cost games with nonlinear discounts, so we then study such cost games with nonlinear discounts and propose a family of DP rules that are acceptable to all agents and easier to compute than the Shapley value and the nucleolus. They are called  $\alpha$ -proportional rules. To make our family of  $\alpha$ -proportional rules acceptable to all agents, we distinguish between major agents (who buy large quantities) and non-major agents (who buy small quantities). To the best of our knowledge, there is no formal definition of such agents in the cooperative-purchasing-games literature. The beauty of our  $\alpha$ -proportional rules is that, with the proportionality factor  $\alpha$ , they reduce the cost of major agents and increase the cost of non-major agents. Fortunately, there is always an  $\alpha$  threshold above which any  $\alpha$ -proportional rule is acceptable for all agents.

The paper is organized as follows. We begin with a Related Literature section, which describes the literature most closely related to our paper. Next, in Section 3, we develop a formal model of cooperative-purchasing cost with a general discount (CPGD model) and prove that all the buyers included (grand coalition) can obtain significant reductions in costs. The equal price (EP) rule turns out to be an efficient and (coalitionally) stable method for allocating the reduced costs generated by the CPGD model. Then, Section 4 looks at cooperative-purchasing models with decreasing and linear unit-price functions. We demonstrate that the linear nature of the discount price function provides additional information about the corresponding cooperative-purchasing game with linear discount (CPL-game): The marginal contribution of an agent diminishes as a coalition grows. Moreover, the EP rule matches the Shapley value and the nucleolus. In Section 5, we propose a family of allocation rules for cooperative-purchasing games with non-linear discount (CPNL-games). We focus on the different price (DP) method and propose a family of

allocation rules with different prices that are acceptable for all agents: BDP rules. Section 6 focuses on an alternative approach to obtain DP rules for CPNL-games. This consists of allocating the cost of the grand coalition proportionally, with a proportionality factor which combines individual costs and the EP rule. We obtain a highly suitable parametric family of proportional rules, named  $\alpha$ -proportional rules, which, notably, is related to the family of BDP rules. Specifically, Section 7 proves that there is always an  $\alpha$  threshold above which any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule. Finally, we illustrate our model with a couple of examples in Section 8. Finally, Section 9 draws conclusions and points out further research for scholars in the field.

## 2. Related Literature

As mentioned above, the use of game theory to study cooperative-purchasing models has so far been limited. However, there are works that have approached the subject from various perspectives. Here, we describe the literature from the past 15 years most closely related to our paper.

It is discussed in [10] the problem that arises when a small buying organization uses a contract negotiated by a large buying organization. They show that a relatively small organization would benefit from joining a specific purchasing group, but the inclusion of such an organization might decrease the profits of the bigger organizations in this exchange. In [11], it is noted that it is important to avoid the kind of imbalance of incentives for and contributions by organizations in a purchasing group that can be caused by EP. Finally, reasoning from an equity-theory perspective [12], it can be observed that individuals who feel under-rewarded will try to restore equity. As in purchasing groups, EP may lead to under-rewarded organizations in a group. This may lead to lower commitment on the part of those organizations or result in them leaving the group [13].

In [14], it is considered a distribution system consisting of a set of retailers who face a single-period price-dependent demand for a single product. By taking advantage of the risk-pooling effect and the quantity/volume discount provided by suppliers or third-party carriers, the retailers may place joint orders and keep inventory at central warehouses before demand realization, and allocate inventory among themselves after demand realization to reduce their operating costs. Under certain assumptions, the author shows that there is a stable allocation of profits among the retailers and also shows how to compute it.

In [15], it is introduced a new class of cooperative-purchasing situations: maximum cooperative purchasing (MCP) situations. The allocation of possible cost savings in MCP situations, in which the unit price depends on the quantity of the largest order within a group of players, is analyzed by defining corresponding cooperative MCP-games. The authors show that a decreasing unit price is a sufficient condition for a non-empty core: There is a set of marginal vectors that belong to the core. The nucleolus of an MCP-game can be derived in polynomial time from one of these marginal vectors. Using the decomposition of an MCP-game into unanimity games, they also find an explicit expression for the Shapley value.

It is studied in [16] mechanisms for managing group purchasing by a set of buyers of a given product with a concave purchase-cost function. Cost-sensitive buyers are willing to buy a range of product quantities at different prices. They investigate two types of mechanism that can be used by a group-purchasing organization: ordering and bidding mechanisms. Under the choice of appropriate cost-sharing rules, they introduce a sequential joint-ordering mechanism and a family of ordering strategies under which some buyers' strategic deviations never leave other buyers worse off.

Inventory cost games with discounts are a particular type of cooperative-purchasing model. In an inventory cost game [17] a group of firms dealing with the ordering of a certain commodity decide to cooperate and place their orders jointly. To coordinate the ordering policy of the firms, some revelation of information is needed: the amount of information revealed by each firm to the rest is kept as low as possible, since they may be competitors in the consumer market. In [17], it is focused on proportional division mechanisms for sharing

the joint cost, and introduce and characterize the SOC rule (share the ordering costs). Later, it is analyzed in [18] the class of inventory games that arises from inventory problems with special sale prices. A group of firms trying to minimize their joint inventory costs by cooperating may receive a special discount on set-up cost just by ordering. Reasons for such price reductions range from competitive price wars to attempted inventory reduction by the supplier. This cooperative situation generates the class of inventory games with non-discriminatory temporary discounts. The modified SOC rule, a kind of proportional rule, is proposed as a stable (core-allocation), consistent allocation. More recently, in [19], it is extended inventory-cost games to the situation where the manufacturer provides the retailers with a price discount on purchases in excess of a certain order quantity. The authors define the corresponding inventory game with quantity discount, and show that there is a stable allocation of the total cost, which they call the demand-proportionality rule and which they characterize. At the same time, it is considered in [20] an inventory-cost game involving a single supplier that offers quantity discounts and allows retailers to delay payments. The retailers are tempted to form coalitions in order to minimize their costs. They propose a solution approach which generates stable coalition structures for the retailers taking into account the delay in payments and the amount of the discount offered by the supplier. The approach proposed includes a decision rule that generates preferred coalitions for each retailer and considerably reduces the number of coalition structures explored in order to determine stable solutions.

In [21], it is proposed and studied the family of  $\alpha$ -serial cost-sharing rules for cost-sharing problems. Each rule in this family is a parametric combination of the serial cost-sharing rule [22] and the dual serial cost-sharing rule [23]. The parameter  $\alpha$  determines how this combination is obtained. The  $\alpha$ -serial cost-sharing rule allocates the total production cost, in a cost-sharing problem, in such a way that agents with low demands have to pay cost increments associated with low outputs and cost increments associated with high outputs ( $0 < \alpha < 1$ ). If only one type of cost increase is taken into account, e.g., agents with low demands only have to pay cost increments associated with low outputs, we obtain the serial cost-sharing rule ( $\alpha = 1$ ). On the contrary, if agents with low demands only have to pay cost increments associated with high outputs, we obtain the dual serial cost-sharing rule ( $\alpha = 0$ ). Albizuri's approach and the context are different from ours in this paper. While her  $\alpha$ -serial cost-sharing rule is proposed for general cost-sharing problems, our alpha-proportional rule is a very appropriate allocation rule for cooperative-purchasing models with a general discount. It distributes the cost of the grand coalition proportionally, with a proportional factor that combines the maximum cost that each agent has to pay individually (its own individual cost) with the minimum cost that can be achieved through cooperation (the EP rule). The  $\alpha$ -proportional rule is natural and intuitive and much easier to calculate than the  $\alpha$ -serial cost-sharing rule.

Finally, the book [24] shows that the Shapley value is highly valued by many researchers as a useful and relevant model to analyze, both from a theoretical and applied perspective, allocation problems in the most general sense. It is structured in three parts. They first present some of its very well-known mathematical expressions, starting with those introduced by Lloyd Shapley in 1953. Secondly, they present some of its most important characterizations as an indication of the large number of appealing and interesting properties that this value satisfies. Finally, they select a sample of the Shapley-value extensions to a large number of contexts and their applications to very different fields and sceneries. For a recent survey of Shapley value, nucleolus and other solution concepts in operation management, see [25].

### 3. Model

We consider a finite set of agents  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , who want to buy a certain service or good. Each agent  $i \in N$  wants to buy a quantity  $q_i > 0$  units of the product at a cost  $P(q_i)q_i$ , where  $P(q_i) > 0$  represents variable costs with discount per unit, i.e., the price that agent  $i$  pays for quantity  $q_i$ . It is, however, independent of player  $i$ . Throughout the paper and with no loss of generality, we rank agents according to how much they buy. In other

words, we assume that  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . We consider a general discount price function  $P : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  with the following properties:

Properties of $P$
1. Class $C^2$ at $(0, +\infty)$ : there exists $P''(q)$ at all points of $(0, +\infty)$ and it is continuous.
2. Decreasing: for all $q > 0, P'(q) < 0$ .
3. Convex: for all $q > 0, P''(q) \geq 0$ .
4. Limited growth rate: for all $q > 0,  P'(q)  \leq \frac{P(q)}{q}$

Notice that property 2 means that agents who buy large quantities will obtain greater discounts—per unit of product—than agents that buy small quantities. Property 3 means that the biggest discounts occur at the start of the deal. The last property indicates that the cost  $P(q)q$  is increasing in  $q$ , as the opposite makes no economic sense. This means that the average cost per unit is greater than the marginal cost (this property comes from the fact that  $x \geq y \implies P(x)x \geq P(y)y$  is equivalent to  $P'(x) \geq -\frac{P(x)}{x}$ ).

We refer to our model as a cooperative-purchasing model with general discount  $(N, q, P)$  (henceforth, CPGD-model), where  $N$  is the total number of agents in a purchasing group (i.e., the grand coalition);  $q$  is the vector of quantities that each agent  $i \in N$  wants to buy, i.e.,  $q = (q_i)_{i \in N}$ ; and  $P$  is a discount function satisfying properties 1–4.

Given a CPGD-model  $(N, q, P)$ , we define the corresponding cooperative purchasing cost game with general discount  $(N, c)$ . For any coalition of agents  $S \subseteq N$ , the cost function  $c(S)$  is defined as the total cost that the coalition has to pay on buying the product together:  $c(S) = P(q_S)q_S$ , with  $q_S = \sum_{i \in S} q_i$ . From now on, we refer to this as a CPGD-game.

The first question that comes to mind is whether it is profitable for the agents in  $N$  to form the grand coalition to obtain a significant reduction in costs. The answer is yes because CPGD-games are always subadditive. A cost game  $(N, c)$  is said to be subadditive if  $S \cap T = \emptyset$ , so  $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ , for all  $S, T \subseteq N$ . The subadditivity property reveals that the cost of the grand coalition is always less than the sum of the costs of any partition of  $N$  in two coalitions  $S$  and  $N \setminus S$ ; that is,  $c(N) \leq c(S) + c(N \setminus S)$  for all  $S \subseteq N$ . Consequently, agents have incentives to form the grand coalition in CPGD situations.

The following proposition shows this property for CPGD-games.

**Proposition 1.** *Every CPGD-game  $(N, c)$  is subadditive.*

**Proof.** Take  $S, T \subseteq N$  s.t.  $S \cap T = \emptyset$ . Then

$$c(S \cup T) = P(q_{S \cup T})q_{S \cup T} = P(q_{S \cup T})q_S + P(q_{S \cup T})q_T \leq P(q_S)q_S + P(q_T)q_T = c(S) + c(T),$$

considering that  $P(q_{S \cup T}) \leq P(q_S)$ , and  $P(q_{S \cup T}) \leq P(q_T)$ .  $\square$

We have, thus, proved that the grand coalition can obtain significant reductions in costs. In that case, the reduced total cost is given by  $c(N) = \sum_{i \in N} P(q_N)q_i$ , where  $P(q_N)$  is the minimum price with discount per unit that coalition  $N$  can obtain.

The second question is whether a method can be found for allocating the costs generated by the CPGD model that is efficient, coalitionally stable and easy to compute. The answer is again yes, but it is not as straightforward as the previous answer. More elaborate work is required, as set out in the following sections.

We start by defining an allocation rule for CPGD-games. This is a map  $\psi$  which assigns a vector  $\psi(c) \in \mathbb{R}^n$  to every  $(N, c)$ , satisfying efficiency, that is,  $\sum_{i \in N} \psi_i(c) = c(N)$ . Each component  $\psi_i(c)$  indicates the cost allocated to  $i \in N$ , so an allocation rule for CPGD-

games is a method for allocating the reduced total cost among the agents in  $N$  when they cooperate.

A very natural, commonly used method is the equal price (EP) rule. Given a CPGD-game  $(N, c)$ , the EP rule is given by  $\epsilon(c) = (\epsilon_i(c))_{i \in N}$  with  $\epsilon_i(c) = P(q_N)q_i$ . Each agent  $i \in N$  obtains the quantity  $q_i$  at the minimum cost  $P(q_N)$ , and pays  $P(q_N)q_i$ . The EP rule has good properties for CPGD-games, at least with respect to computability (it is easily computable) and coalitional stability, in the sense of the core. The core of a cost game  $(N, c)$  is defined as follows:

$$C(c) := \left\{ x \in \mathbf{R}^n / \sum_{i \in N} x_i = c(N), \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

Coalitional stable allocations in the core sense are called core-allocations. A game  $(N, c)$  is balanced if and only if  $C(c) \neq \emptyset$ . We interpret a non-empty core for cost games as indicating a setting where all included cooperation is feasible, in the sense that there are possible cost reductions that leave all agents better off (or, at least, not worse off).

**Proposition 2.** *Every CPGD-game  $(N, c)$  is balanced.*

**Proof.** The idea is to prove that  $\epsilon(c)$  is a core allocation. That is,  $\sum_{i \in S} \epsilon_i(c) \leq c(S)$  for every  $S \subseteq N$ .

Take a coalition  $S \subseteq N$ . Thus,

$$\sum_{i \in S} \epsilon_i(c) = \sum_{i \in S} P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S} P(q_S)q_i = c(S).$$

Hence,  $C(c) \neq \emptyset$  and  $(N, c)$  is balanced.  $\square$

As shown in Section 4, when  $P$  is linear, the corresponding cooperative-purchasing game with linear discount (henceforth, CPL-game) is concave and the EP rule matches the Shapley value and the nucleolus. In such cases, there is no better way to allocate the reduced total cost. However, some agents may argue that the EP is questionable because it favors those agents who buy just few units of the product. Note that these agents pay the same price as the major buyers. The concerns of these agents can be really problematic when  $P$  is not linear. In that case, the equal price rule loses some of its good properties and no longer matches the Shapley value or the nucleolus.

In addition, the EP rule takes only two elements into account for a particular agent  $i \in N$ : the quantity demanded by this agent ( $q_i$ ) and the aggregate of all quantities ( $q_N = \sum_{i \in N} q_i$ ). It does not take into account the distribution of the individual quantities demanded by agents, i.e.,  $q_j$  for all  $j \in N \setminus \{i\}$ . This can also be a problem when there are large asymmetries between large and small buyers.

To solve this problem, Section 5 proposes a family of allocation rules for cooperative-purchasing games with non-linear discount (henceforth, CPNL-games). We focus there on the different price (DP) method and propose a family of allocation rules with different prices that are acceptable for all agents.

#### 4. Equal Price Rule for CPL-Games

We begin by studying CPL-games. The linear nature of the discount price function provides additional information about these games: The marginal contribution of an agent diminishes as a coalition grows. This is well-known as the snowball effect or concavity property. Cooperative game theory provides allocation rules for concave games with good properties (coalitional stability and acceptability). We highlight the Shapley value, first introduced in [26], and the nucleolus, presented in [27].

Here we prove that CPL-games with linear discounts are always concave and the EP rule matches the Shapley value and the nucleolus.

Let  $(N, c)$  be a CPL-game with  $P$  being a linear discount function. That is,  $P : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , such that, for all  $q \in \mathbb{R}_+$ ,  $P(q) := a - bq$ , with  $b \geq 0$  and  $a$  large enough that  $a - bq \geq 0$ , for all  $0 < q \leq \frac{a}{b}$ . Thus, for all  $S \subseteq N$ ,  $c(S) = aq_S - bq_S^2$ .

The next proposition shows that a CPL-game is always concave, in the sense that for all  $i \in N$  and all  $S, T \subseteq N$  such that  $S \subseteq T \subset N$  with  $i \in S$ ,  $c(S) - c(S \setminus \{i\}) \geq c(T) - c(T \setminus \{i\})$ .

**Proposition 3.** *Every CPL-game is concave.*

**Proof.** We first show that an agent’s marginal contribution to any coalition is always smaller than its individual cost. We denote by  $M_i c(S)$  the marginal contribution of player  $i \in S \subseteq N$ ; that is,  $M_i c(S) = c(S) - c(S \setminus \{i\})$ , for all  $i \in S \subseteq N$ . Thus,

$$\begin{aligned} M_i c(S) &= aq_S - bq_S^2 - aq_{S \setminus \{i\}} + bq_{S \setminus \{i\}}^2 = aq_i - b(q_S^2 - q_{S \setminus \{i\}}^2) \\ &= aq_i - b(q_S + q_{S \setminus \{i\}})(q_S - q_{S \setminus \{i\}}) = aq_i - bq_i^2 - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}} \\ &= c(\{i\}) - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Finally, take  $i \in N$  and  $S \subseteq T \subset N$  with  $i \in S$ ; thus

$$M_i c(S) = c(i) - 2bq_i q_{S \setminus \{i\}} \geq c(i) - 2bq_i q_{T \setminus \{i\}} = M_i c(T),$$

where  $q_{S \setminus \{i\}} \leq q_{T \setminus \{i\}}$ .  $\square$

Now we focus on the Shapley value and the nucleolus. The Shapley value assigns a unique allocation (among the agents) of the total surplus generated by the grand coalition. It measures how important each agent is to overall cooperation, and what cost it can reasonably expect. The Shapley value of a concave game is the center of gravity of its core (see [28]). This allocation is, in general, hard to compute when the number of agents is large. Given a CPL-game  $(N, c)$ , we denote by  $\phi(c)$  the Shapley value, where for each agent  $i \in N$ , the corresponding cost allocation is

$$\phi_i(c) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} [(c(T) - c(T \setminus \{i\}))], \text{ with } |T| = t. \tag{2}$$

The nucleolus maximizes the “welfare” of the worst treated coalitions, i.e. those with the smallest excess. We denote by  $\nu(c)$  the nucleolus of the CPL-game  $(N, c)$ . First, we define the excess of coalition  $S$  in  $(N, c)$  with respect to allocation  $x \in \mathbb{R}^n$  as  $e(S, x) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ . This number can be considered as an index of the “welfare” of coalition  $S$  at  $x$ : The greater  $e(S, x)$ , the better coalition  $S$  is at  $x$ . Let  $e^*(q)$  be the vector of the  $2^n$  excesses arranged in (weakly) increasing order, i.e.,  $e_i^*(x) \leq e_j^*(x)$  for all  $i < j$ . Second, we define the lexicographical order  $\succ_l$ . For any  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \succ_l y$  if and only if there exists an index  $k$  such that for any  $i < k$ ,  $x_i = y_i$  and  $x_k > y_k$ . The nucleolus of the CPL-game  $(N, c)$  is the set

$$\nu(c) = \{x \in X : e^*(x) \succ_l e^*(y) \text{ for all } y \in X\}$$

with  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = c(N), x_i \geq c(\{i\}) \text{ for all } i \in N\}$ .

It is well-known that the nucleolus is a singleton for balanced games and that it is always a core allocation.

This last Proposition shows that the EP coincides with the Shapley value and the nucleolus for CPL-games.

**Proposition 4.** *Let  $(N, c)$  be a CPL-game. Thus,  $\epsilon(c) = \phi(c) = \nu(c)$ .*

**Proof.** To prove this, we first need to describe the class of PS-games introduced by [29]. Thus, a cost game  $(N, c)$  satisfies the PS property if for all  $i \in N$ , there exists  $k_i \in \mathbb{R}$  such

that  $M_i c(S \cup \{i\}) + M_i c(N \setminus S) = k_i$ , for all  $i \in N$  and  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ . In [29], it is shown that for PS games, the Shapley value coincides with the nucleolus; that is,  $\phi_i(c) = v_i(c) = \frac{k_i}{2}$ , for all  $i \in N$ .

Take a CPL-game  $(N, c)$ , and take  $i \in N$ . First we prove that it is a PS-game with  $k_i = 2\epsilon_i(c)$ . Take  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ . By (1), it holds that

$$\begin{aligned} M_i c(S \cup \{i\}) + M_i c(N \setminus S) &= c(\{i\}) - 2bq_i q_S + c(\{i\}) - 2bq_i q_{(N \setminus S) \setminus \{i\}} \\ &= 2c(\{i\}) - 2bq_i q_S - 2bq_i (q_{(N \setminus S)} - q_i) \\ &= 2aq_i - 2bq_i q_S - 2bq_{(N \setminus S)} = 2aq_i - 2bq_i q_N \\ &= 2aq_i P(q_N) = 2\epsilon_i(c). \end{aligned}$$

Second, we know that  $\phi_i(c) = v_i(c) = \frac{k_i}{2}$ , and thus  $\phi_i(c) = v_i(c) = \epsilon_i(c)$ , for all  $i \in N$ . □

It can be concluded that, for CPL-games, the EP rule is an appropriate way to allocate the reduced total cost.

**5. Balanced Different Price Rule for CPNL-Games**

This section studies CPNL-games, where  $P$  function is not linear. We focus on DP rules, where a DP rule is defined as  $DP(c) = (DP_i(c))_{i \in N}$  with  $\frac{DP_i(c)}{q_i} \neq \frac{DP_j(c)}{q_j}$  for all  $q_i \neq q_j$  with  $i, j \in N$ . Note that  $\frac{DP_i(c)}{q_i}$  is the price that agent  $i$  will pay per unit under this DP rule. We analyze the properties that a different price allocation rule (DP rule) should have in order to be acceptable to all agents.

As mentioned above, the agents could argue that the equal price rule is not acceptable because it favors those agents who buy just few units of the product. This becomes more problematic when the discount function is non-linear. In that case, the equal price rule loses some of its good properties. Unlike the linear case, other acceptable rules, such as the Shapley value and the nucleolus, do not assign the same price to all agents, i.e., they are DP rules but they have a computability problem in that both are very laborious to calculate for a large number of agents.

Therefore, those who buy large quantities of the product (major agents) may not accept the EP rule and they would prefer to pay a lower price than the EP. An easily computable DP rule should be proposed in which the price depends on the quantity demanded (with this new rule, the benefits of cooperation are not distributed as uniformly as in the equal price rule). First, we need to define “major agents”. We propose the following approach: ranking agents according to how much they buy ( $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ ), the major agents are all  $i \in N$  such that  $\sum_{j \in N} P(q_i)q_j < \sum_{j \in N} P(q_j)q_j$ , i.e., if all agents pay the individual price of agent  $i$ , the total cost is smaller than if agents pay their individual costs. Thus, the set of agents can be split into two subsets: the major agents

$$A_m = \{i \in N, \sum_{j \in N} P(q_i)q_j < \sum_{j \in N} P(q_j)q_j\} \tag{3}$$

and the non-major agents

$$A_{nm} = \{i \in N, \sum_{j \in N} P(q_i)q_j \geq \sum_{j \in N} P(q_j)q_j\}. \tag{4}$$

The DP rule should assign a price lower than the EP to the major agents, and one higher than or equal to the EP to the non-major agents. Therefore, each agent  $i \in N$  should pay the price  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)$  for the profile of quantities  $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$  where  $\sigma : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  is a function which determines the different prices. Thus, the price  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)$  not only depends of the quantity demanded by agent  $i$ , but

possibly also on the quantities demanded by other agents and their distribution. This is another significant difference with regard to the equal price rule.

We consider that if for agents  $i, j \in N$   $q_i \leq q_j$ , then the function takes a smaller/equal value, i.e.,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$ ; thus, the different price is greater/equal for agent  $i$ . We also consider that this property of  $\sigma$  is limited. This means that the larger one's purchase is, the higher one's cost; i.e., if  $q_i \leq q_j$  for  $i, j \in N$ , then  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})P(q_N)q_j$  which is equivalent to  $\sigma(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})q_j$ . Both are quite reasonable assumptions.

We also assume that the major agents will pay a price lower than  $P(q_N)$  and the non-major agents a price of  $P(q_N)$  or higher. We name this property major agent acceptability (henceforth, MA). Formally, for all  $i \in A_m$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$  and for all  $i \in A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq 1$ .

To make the allocation rule also acceptable to the non-major agents, we assume an upper bound for the price that they have to pay. Thus, the price payable by any  $i \in A_{nm}$  is assumed to be greater than or equal to the price that all non-major agents can obtain together, i.e.,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$  with  $q_{A_{nm}} = \sum_{i \in A_{nm}} q_i$ , where this condition is equivalent to  $\sigma(q_1, q_{-1})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$  because  $\sigma(q_1, q_{-1}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$  for any  $j \in N \setminus \{1\}$ . This means that the  $\sigma$  function sets an upper bound for the different price of the non-major agents:  $\sigma(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . We call this property non-major agent acceptability (henceforth, NMA).

Another desirable property for the DP rule is efficiency, that is,  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sum_{i \in N} P(q_N)q_i$ . This is equivalent to  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})q_i = \sum_{i \in N} q_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in A_{nm}} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i = \sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i$  (Note that  $N = A_m \cup A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$  if  $i \in A_m$ , and  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq 1$  if  $i \in A_{nm}$ ). Thus, a different price rule is efficient if and only if  $\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i = \sum_{i \in A_{nm}} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i$ . This means that the function  $\sigma$  weighs the quantities of the major and non-major agents in such a way that the sets  $A_m$  and  $A_{nm}$  are balanced. We call this property balanced weighting (henceforth, BW).

Finally, we consider that there is a limit to how much the function  $\sigma$  can decrease if the quantity demanded by one agent  $i \in N$  increases. This limit is set by the ratio  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i}$  in the following way. Let  $q = (q_i, q_{-i})$  and  $q' = (q'_i, q_{-i})$ , if  $q_i \geq q'_i$ , then,  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ . First, note that the ratio  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} < 1$  (in (11), it is shown that the equal price  $\epsilon_i(c) = P(q_N)q_i$  is increasing in  $q_i$ . Therefore,  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} < 1$ ). Thus,  $\sigma(q_i, q_{-i})$  has to be at least greater than a portion of  $\sigma(q'_i, q_{-i})$ , that is  $\frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ .

We thus define a balanced different price rule (BDP rule) as  $\beta(c) = (\beta_i(c))_{i \in N}$  with  $\beta_i(c) = \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  for all  $i \in N$ , and the function  $\sigma : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  satisfying the following properties:

1. **Monotonically decreasing through players (MDP).** Given a  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , if  $q_i \leq q_j$ , then  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \sigma(q_j, q_{-j})$  for all  $i, j \in N$ .
2. **Limited decrease through players (LDP).** Given a  $q \in \mathbb{R}_+^n$ , if  $q_i \leq q_j$ , then  $\sigma(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma(q_j, q_{-j})q_j$  for all  $i, j \in N$ .
3. **Major-agents acceptability (MA).** For all  $i \in A_m$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$ , and for all  $i \in A_{nm}$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) > 1$ .
4. **Balanced weighting (BW).**  $\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma(q_i, q_{-i}))q_i = \sum_{i \in A_{nm}} (\sigma(q_i, q_{-i}) - 1)q_i$ .
5. **Non-major agents acceptability (NMA).**  $\sigma(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ .
6. **Limited decrease in a player quantity (LDQ).** Let  $(N, q, P)$  and  $(N, q', P)$  be two CPGD-models with  $q = (q_i, q_{-i})$  and  $q' = (q'_i, q_{-i})$ . If  $q_i \geq q'_i$ , then  $\sigma(q_i, q_{-i}) \geq \frac{P(q'_N)q'_i}{P(q_N)q_i} \sigma(q'_i, q_{-i})$ .

Note that a BDP rule always satisfies the following desirable properties:

1. **Symmetry (SYM).** If two agents  $i$  and  $j$  in a group are interchanged in the sense that  $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$  for every  $S \subset N \setminus \{i, j\}$ , then  $\beta_i(c) = \beta_j(c)$ . It means that equal

agents in a group should pay equal costs. Indeed,  $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\}) \Leftrightarrow q_i = q_j$ . Thus,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sigma(q_j, q_{-j})P(q_N)q_j$ .

2. **Player monotonicity (PMON).** For all  $i, j \in N$  s.t.  $q_i \leq q_j$ , it holds that  $\beta_i(c) \leq \beta_j(c)$ . This holds by property 2 of function  $\sigma$ .
3. **Cost monotonicity (CMON).** For all  $i \in N$  s.t.  $q_i \geq q'_i$ , it holds that  $\beta_i(c) \geq \beta_i(c')$ , with  $(N, c), (N, c')$  being the CPGD-games corresponding to CPGD-models  $(N, q, P)$  and  $(N, q', P)$  where  $q = (q_{-i}, q_i)$  and  $q' = (q_{-i}, q'_i)$ . Satisfying this property means that if the number of units of the product to be purchased by one agent in a purchasing group remains the same or increases in comparison to a previous situation, then that agent should pay an equal or higher cost. This holds by property 6 of function  $\sigma$ .
4. **Fair ranking added cost (FRAC).** If for two agents  $i$  and  $j$  in a group  $c(N) - c(N \setminus \{i\}) \geq c(N) - c(N \setminus \{j\})$ , then  $\beta_i(c) \geq \beta_j(c)$ . Satisfying this FRAC property means that an agent with an equal or larger added cost (this is also called marginal costs) should pay an equal or larger cost. Indeed,  $c(N) - c(N \setminus \{i\}) \geq c(N) - c(N \setminus \{j\}) \Leftrightarrow P(q_{N \setminus \{i\}})q_{N \setminus \{i\}} \leq P(q_{N \setminus \{j\}})q_{N \setminus \{j\}}$ , and by property 4 (limited growth rate) of function  $P$ ,  $q_{N \setminus \{i\}} \leq q_{N \setminus \{j\}} \Leftrightarrow q_i \geq q_j$ . Thus, by property 2 of function  $\sigma$ , FRAC holds.

The Dummy player property (DUM) is meaningless in this context. For a dummy player to exist, the function  $P$  must be constant, and in that case, all players are dummies.

The following proposition shows that the BDP rule is always efficient and coalitionally stable. In cooperative game theory, efficiency and coalition stability is equivalent to being a core allocation. This means that no coalition has incentives to break the grand coalition to obtain a lower cost.

**Theorem 1.** *Every BDP rule for CPNL-games is efficient and coalitionally stable.*

**Proof.** Let  $(N, c)$  be a CPNL-game. Take a BDP rule  $\beta(c) = (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)_{i \in N}$  with the function  $\sigma$  satisfying 1–6. First, the BDP rule is efficient if  $\sum_{i \in N} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = c(N)$ , which, as mentioned above, is equivalent to property 4 (BW) of the function  $\sigma$ . Second, for it to be coalitionally stable it must be proved that  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq c(S)$ , for all  $S \subseteq N$ . Three cases can be distinguished.

- (1)  $S \subseteq A_m$ . Here, for all  $i \in S$ ,  $\sigma(q_i, q_{-i}) < 1$  and so  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S} P(q_S)q_i = c(S)$ .
- (2)  $S \subseteq A_{nm}$ . We now prove that  $\sum_{i \in S} (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S))q_i \leq 0$ . By P.5 (NMA) we know that  $\forall i \in A_{nm}, \sigma(q_i, q_{-i}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . Then,  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) \leq P(q_{A_{nm}})$ . Take into account that  $P(q_{A_{nm}}) \leq P(q_S)$ , for all  $S \subseteq A_{nm}$ , it is found that  $\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S) \leq 0$  for any  $i \in S \subseteq A_{nm}$ . Hence,  $\sum_{i \in S} (\sigma(q_i, q_{-i})P(q_N) - P(q_S))q_i \leq 0$ .
- (3)  $S \cap A_{nm} \neq S$ . By an argument similar to that above

$$\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \sum_{i \in S \cap A_m} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i + \sum_{i \in S \cap A_{nm}} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S \cap A_m} P(q_N)q_i + \sum_{i \in S \cap A_{nm}} P(q_N)q_i$$

Hence, by the subadditive property,

$$\sum_{i \in S \cap A_m} P(q_N)q_i + \sum_{i \in S \cap A_{nm}} P(q_N)q_i \leq \sum_{i \in S} P(q_N)q_i = c(S),$$

and so,  $\sum_{i \in S} \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \leq c(S)$ .  $\square$

Summarizing, any BDP rule always satisfies the properties SYM, PMON, CMON, FRAC, efficiency and coalitional stability. Moreover, it is acceptable for both major and non-major agents. *It can be concluded that a BDP rule is a good DP rule for CPNL-games.*

Below, we focus on an alternative approach for obtaining DP rules for CPNL-games. This consists of allocating the cost of the grand coalition proportionally, with a proportionality factor that combines the individual costs (faced when each agent buys the product on its own) and the EP rule (available when agents face cooperative purchasing). We obtain a highly suitable parametric family of proportional rules which, notably, is related to the family of BDP rules.

### 6. The Family of $\alpha$ -Proportional Rules

Consider a CPNL-game  $(N, c)$  and a parameter  $0 \leq \alpha \leq 1$ . We define an  $\alpha$ -proportional rule as  $\Theta(c, \alpha) = (\Theta_i(c, \alpha))_{i \in N}$  where

$$\Theta_i(c, \alpha) := \theta_i(\alpha)P(q_N)q_N \text{ for all } i \in N, \tag{5}$$

with

$$\theta_i(\alpha) := \frac{\alpha P(q_N)q_i + (1 - \alpha)P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1 - \alpha)P(q_j)q_j]}. \tag{6}$$

Note that  $\theta_i(\alpha)$  is a convex combination of the EP rule  $P(q_N)q_i$  and the individual cost  $P(q_i)q_i$ , which is normalized to one. Hence,  $0 \leq \theta_i(\alpha) \leq 1$  and  $\sum_{i \in N} \theta_i(\alpha) = 1$ . Thus,  $\Theta_i(c, \alpha)$  allocates the cost of the grand coalition  $P(q_N)q_N$  proportionally to  $\theta_i(\alpha)$ .

Note first the 1-proportional rule matches the EP rule, that is, for all  $i \in N$

$$\Theta_i(c, 1) = \theta_i(1)P(q_N)q_N = \frac{P(q_N)q_i}{\sum_{j \in N} P(q_N)q_j} P(q_N)q_N = \frac{P(q_N)q_i}{P(q_N)q_N} P(q_N)q_N = P(q_N)q_i = \epsilon_i(c).$$

The 0-proportional rule is the rule proportional to the individual cost, and it is related to the EP rule: for all  $i \in N$

$$\Theta_i(c, 0) = \frac{P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} P(q_N)q_N = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} P(q_N)q_i = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \epsilon_i(c) = \frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} \Theta_i(c, 1)$$

Therefore,  $\Theta_i(c, 0)$  is greater or less than  $\Theta_i(c, 1)$  depending on the ratio  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}$  is greater or less than 1. We assume w.l.o.g. that  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . If at least one of these inequalities is strict, clearly,  $\frac{P(q_1)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} > 1$  and  $\frac{P(q_n)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} < 1$ . As  $P$  is a continuously decreasing discount function, there is a unique threshold  $\bar{q} \in (q_1, q_n)$ , such that,

$$\frac{P(\bar{q})q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} = 1 \Leftrightarrow P(\bar{q}) = \frac{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}{q_N} \tag{7}$$

This threshold  $\bar{q}$  makes it possible to define two sets of agents that are independent of the parameter  $\alpha$ : those who buy small quantities  $\bar{S} = \{i \in N, q_i < \bar{q}\}$ , and those who buy large quantities  $\bar{L} = \{i \in N, q_i > \bar{q}\}$ .

The agents  $i \in \bar{S}$ , who buy small quantities, are harmed by the 0-proportional rule in comparison to the EP because  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} > 1$  for all  $q_i < \bar{q}$ , which implies that  $\Theta_i(c, 0) > \Theta_i(c, 1) = \epsilon_i(c)$ . However, the agents in  $i \in \bar{L}$  who buy large quantities benefit because  $\frac{P(q_i)q_N}{\sum_{j \in N} P(q_j)q_j} < 1$ , for all  $q_i > \bar{q}$ . If there is an agent  $i \in$  such that  $q_i = \bar{q}$ , that agent is neutral to the rule, i.e.,  $\Theta_i(c, 0) = \Theta_i(c, 1)$ . That agent will pay the equal price for any  $\alpha \in (0, 1)$ .

The proposition below summarizes the above reasoning by relating the  $\alpha$ -proportional rules  $\Theta(c, \alpha)$  to the EP rule  $\epsilon(c)$ . It also shows the increasing or decreasing character of the  $\alpha$ -proportional rule with respect to the parameter  $\alpha$ .

**Proposition 5.** *Let  $(N, c)$  be a CPNL-game. The  $\alpha$ -proportional allocation rule holds:*

1. For  $\alpha = 1$ , all agents pay the equal price:  $\Theta_i(c, 1) = \epsilon_i(c)$ , for all  $i \in N$ .
2. For any  $\alpha < 1$ ,
  - (a) For all  $i \in \bar{L}$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) < \epsilon_i(c)$  and  $\Theta_i(c, \alpha)$  decreases in  $\alpha$ .
  - (b) For all  $i \in \bar{S}$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) > \epsilon_i(c)$  and  $\Theta_i(c, \alpha)$  increases in  $\alpha$ .
  - (c) If there is  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$ , then  $\Theta_i(c, \alpha) = \epsilon_i(c)$ .

**Proof.** It is straightforward to prove point 1, i.e.,  $\Theta_i(c, 1) = \epsilon_i(c)$  for all  $i \in N$ .

To prove point 2, it is necessary to assess the derivative of function  $\Theta_i(c, \alpha)$  with respect to  $\alpha$ .

Indeed,  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = \frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha} P(q_N)q_N$ . We now calculate  $\frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha}$  by writing it as a function of  $\epsilon_i(c) = P(q_N)q_i$  and  $c(\{i\}) = P(q_i)q_i$ . Thus,

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta_i(\alpha))}{d\alpha} &= \frac{d\left(\frac{\alpha\epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})}{\sum_{j \in N} [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})]}\right)}{d\alpha} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} (\epsilon_i(c) - c(\{i\})) [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})] - \sum_{j \in N} (\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})) [\epsilon_j(c) - c(\{j\})]}{\left(\sum_{j \in N} [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})]\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} (\epsilon_i(c) - c(\{i\})) [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})] - (\alpha\epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})) [\epsilon_j(c) - c(\{j\})]}{\left(\sum_{j \in N} [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})]\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{j \in N} \epsilon_i(c)c(\{j\}) - \epsilon_j(c)c(\{i\})}{\left(\sum_{j \in N} [\alpha\epsilon_j(c) + (1-\alpha)c(\{j\})]\right)^2}. \end{aligned}$$

Note that the sign of  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha}$  depends only on the sign of  $\sum_{j \in N} \epsilon_i(c)c(\{j\}) - \epsilon_j(c)c(\{i\})$ . Let us look at the latter:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} \epsilon_i(c)c(\{j\}) - \epsilon_j(c)c(\{i\}) &= \epsilon_i(c) \sum_{j \in N} c(\{j\}) - c(\{i\}) \sum_{j \in N} \epsilon_j(c) \\ &= P(q_N)q_i \sum_{j \in N} P(q_j)q_j - P(q_i)q_i \sum_{j \in N} P(q_N)q_j \\ &= P(q_N)q_i \sum_{j \in N} P(q_j)q_j - P(q_i)q_i P(q_N)q_N \\ &= P(q_N)q_i \left( \sum_{j \in N} P(q_j)q_j - P(q_i)q_N \right). \end{aligned}$$

Clearly,  $\sum_{j \in N} \epsilon_i(c)c(\{j\}) - \epsilon_j(c)c(\{i\}) \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in N} P(q_j)q_j - P(q_i)q_N \leq 0$ . The last inequality holds if and only if  $q_i > \bar{q}$  (see expression (7)). Hence, if  $i \in \bar{L}$ , then  $\Theta_i(c, \alpha) < \epsilon_i(c)$  and  $\Theta_i(c, \alpha)$  decreases in  $\alpha$ .

On the other hand,  $\sum_{j \in N} \epsilon_i(c)c(\{j\}) - \epsilon_j(c)c(\{i\}) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in N} P(q_j)q_j - P(q_i)q_N \geq 0$ . This last inequality holds if and only if  $q_i < \bar{q}$  (see expression (7)). Hence, if  $i \in \bar{S}$ , then  $\Theta_i(c, \alpha) > \epsilon_i(c)$  and  $\Theta_i(c, \alpha)$  increases in  $\alpha$ .

Finally, if there is  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$ , then  $q_i = \bar{q}$ , so  $\Theta_i(c, 0) = \Theta_i(c, 1) = \epsilon_i(c)$ . As  $\Theta_i(c, \alpha)$  is continuous in  $\alpha$ ,  $\Theta_i(c, \alpha) = \epsilon_i(c)$  for all  $\alpha \in [0, 1]$ .  $\square$

Proposition 5 shows that for  $\alpha = 1$  all agents pay as per the EP rule. As  $\alpha$  decreases, those agents who buy large quantities ( $\bar{L}$ ) start to pay less than under the EP rule and those who buy small quantities ( $\bar{S}$ ) pay more. These differences with respect to the EP rule increase with  $\alpha$  and peak when  $\alpha = 0$ . Therefore, the parameter  $\alpha$  quantifies how different the prices are. Thus, for  $\alpha = 1$ , there are no different prices and for  $\alpha = 0$  the difference in prices is maximum.

The next question is whether there is any link between the  $\alpha$ -proportional rules and BDP rules. In other words, is any  $\alpha$ -proportional rule a BDP rule? The following section shows that there is always an  $\alpha$  threshold above which any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule.

### 7. Condition for an $\alpha$ -Proportional Rule to be a BDP Rule

To compare the  $\alpha$ -proportional rule and the BDP rule, it is first necessary to rewrite the former for any agent  $i \in N$  as follows:

$$\begin{aligned} \Theta_i(c, \alpha) &= \theta_i(\alpha)P(q_N)q_N = \frac{\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} P(q_N)q_N = \\ &= \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N P(q_N)q_i. \end{aligned}$$

Denote

$$\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) := \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N, \tag{8}$$

thus,  $\Theta_i(c, \alpha) = \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ .

First, note that the function  $\sigma_\alpha$  depends on the distribution of the agents' quantities  $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$  unlike the equal price rule. This dependence is reflected in the second term of the denominator, which is the sum of the individual cost without cooperation, i.e.,  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j$ . Note that (8) is equal to  $\frac{\alpha c(N) + (1-\alpha)P(q_i)q_N}{\alpha c(N) + (1-\alpha)\sum_{j \in N} P(q_j)q_j}$ .

Remember that a BDP rule  $\beta(c)$  is defined as  $\beta_i(c) = \sigma(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ , for all  $i \in N$ , with the function  $\sigma$  satisfying properties 1–6. The question is whether  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisfies these six properties for any  $q \in R_+^n$  and all  $\alpha \in [0, 1]$ . Although it does not, we show that a threshold  $\alpha < 1$  can be always found above which  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  does so.

Returning to the major and non-major agents, note that here major agents are those who buy large quantities, i.e.,  $A_m = \bar{L}$ . This follows comparing the definitions of  $A_m, \bar{L}$  and expression (7). Analogously, it can be shown that  $A_{nm}$  is equal to set  $\bar{S}$  plus any  $i \in N$  such that  $q_i = \bar{q}$  (if any), i.e.,  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^C$ .

The following theorem states an  $\alpha$  threshold above which any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule.

**Theorem 2.** For any CPNL-game, there is always an  $\alpha^* < 1$ , such that for any  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$  any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule.

**Proof.** Let  $(N, c)$  be a CPNL-game and  $\Theta(c, \alpha)$  be an  $\alpha$ -proportional rule for that game, with  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  given by (8). To prove that  $\Theta(c, \alpha)$  is a BDP rule, it must be shown that  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisfies properties 1–6 of function  $\sigma$ .

1. (MDP) Take  $i, j \in N$  s.t.  $q_i \leq q_j$  then, by property 2 (Decreasingness) of function  $P$ , it follows that  $P(q_i) \geq P(q_j)$ , and so  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) \geq \sigma_\alpha(q_j, q_{-j})$ .
2. (LDP) Take  $i, j \in N$  s.t.  $q_i \leq q_j$ . It can be shown that  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})q_i \leq \sigma_\alpha(q_j, q_{-j})q_j$ . Indeed, by property 4 (limited growth rate) of function  $P$ , it emerges that  $\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i \leq \alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j$ . Hence, 
$$\frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N q_i < \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_j)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N q_j$$
.
3. (MA) We now prove that for  $\alpha < 1, \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) < 1$ , for all  $i \in A_m$ , and  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) > 1$ , for all  $i \in A_{nm}$ .

Indeed, as mentioned above,  $A_m = \bar{L}$  and  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^C$ . Thus, if  $\alpha < 1$ , from point 2.a. of Proposition 5, we know that, for all  $i \in A_m, \Theta_i(c, \alpha) < \epsilon_i(c)$ , which is equivalent to  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i < P(q_N)q_i \Leftrightarrow \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) < 1$ . Analogously, from point 2.b. and 2.c. of Proposition 5, it can be shown that, for all  $i \in A_{nm}, \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) \geq 1$ . Finally, note that if  $\alpha = 1$ , then  $\Theta_i(c, 1) = \epsilon_i(c)$  and  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) = 1$  for all  $i \in N$ .

4. (BW) It is straightforward to prove that 
$$\sum_{i \in A_m} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))q_i = \left| \sum_{i \in A_{nm}} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))q_i \right|$$
.  
Indeed, 
$$\begin{aligned} \sum_{i \in A_m} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))q_i &= \left| \sum_{i \in A_{nm}} (1 - \sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))q_i \right| \Leftrightarrow \\ \sum_{i \in N} (\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}) - 1)q_i &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})q_i = \sum_{i \in N} q_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})q_i &= q_N \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \left( \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N \right) q_i = q_N \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \left( \frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} \right) q_i &= 1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in N} [\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i]}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} = 1. \end{aligned}$$

5. (NMA) We show that there is always an  $\alpha^* < 1$  such that for any  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ ,  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$ . Note that, as shown above,  $A_{nm} = \bar{S} \cup (\bar{L} \cup \bar{S})^C$ .

We first prove that for all  $i \in A_{nm}, \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  is decreasing in  $\alpha$ . Indeed, as  $\Theta_i(c, \alpha) = \sigma_\alpha(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ , thus  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = \frac{d(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))}{d\alpha} P(q_N)q_i$ . Therefore,  $\frac{d(\sigma_\alpha(q_i, q_{-i}))}{d\alpha} < 0$  if and only if  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} < 0$ , since  $P(q_N)q_i > 0$ . The sign of the last derivative always holds for all  $i \in \bar{S}$  (see point 2.b of Proposition 5). In addition, if there exists any  $i \notin \bar{L} \cup \bar{S}$  then, by point 2.c of Proposition 5,  $\frac{d(\Theta_i(c, \alpha))}{d\alpha} = 0$ .

Now note that  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{A_{nm}})}{P(q_N)}$  is equivalent to

$$\frac{\alpha P(q_N) + (1-\alpha)P(q_1)}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} q_N \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}. \tag{9}$$

This last inequality always holds for  $\alpha = 1$ . Indeed,  $\frac{P(q_N)}{\sum_{j \in N} P(q_N)q_j} q_N = 1 < \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ , because of  $q_{Ann} < q_N$ . Thus,  $\sigma_{\alpha=1}(q_1, q_{-1}) = 1$  and  $\sigma_{\alpha}(q_1, q_{-1})$  is decreasing in  $\alpha$ . Thus, only two different situations can occur: First, there is a root  $\bar{\alpha} \in (0, 1)$  such that  $\sigma_{\bar{\alpha}}(q_1, q_{-1}) = \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ , i.e., (9) holds with equality, thus,  $\sigma_{\alpha}(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$  for all  $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1)$ . Second, there is no such  $\bar{\alpha}$  that  $\sigma_{\bar{\alpha}}(q_1, q_{-1}) = \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ . In that case,  $\sigma_{\alpha}(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ , for all  $\alpha \in (0, 1)$ .

Assume that  $\alpha^* = \bar{\alpha}$  if  $\bar{\alpha} \in (0, 1)$  and  $\alpha^* = 0$  otherwise. We conclude that there is always an  $\alpha^* < 1$ , such that for any  $\alpha \in [\alpha^*, 1, \sigma_{\alpha}(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ .

- 6. (LDQ) Take  $(N, q, P)$  and  $(N, q', P)$  two CPGD-models with  $q = (q_i, q_{-i}), q' = (q'_i, q_{-i})$ , and  $q_i \geq q'_i$ . It must be shown that  $\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i \geq \sigma_{\alpha}(q'_i, q_{-i})P(q'_N)q'_i$ . In fact, it must be proven that the function  $\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  is increasing in  $q_i$ , i.e.

$$\frac{\partial(\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} \geq 0.$$

To simplify the proof,  $\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  can be rewritten as a function of  $\epsilon_i(c) = P(q_N)q_i, c(\{i\}) = P(q_i)q_i$  and  $c(N) = P(q_N)q_N$ . In addition, to simplify the notation, we do not explicitly indicate that all the following derivatives are in regard to  $q_i$ ; we denote them by  $\epsilon'_i(c), c'(\{i\})$ , and  $c'(N)$ .

First we rewrite the function  $\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$  as follows:

$$\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \frac{\alpha P(q_N)q_i + (1-\alpha)P(q_i)q_i}{\sum_{j \in N} [\alpha P(q_N)q_j + (1-\alpha)P(q_j)q_j]} P(q_N)q_N = \frac{(\alpha \epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c(N)}{\alpha c(N) + (1-\alpha) \sum_{j \in N} c(\{j\})}.$$

Denote by  $f(q_i) = (\alpha \epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c(N)$  and  $g(q_i) = \alpha c(N) + (1-\alpha) \sum_{j \in N} c(\{j\})$ , thus

$$\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i = \frac{f(q_i)}{g(q_i)} \text{ and } \frac{\partial(\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} = \frac{f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i)}{(g(q_i))^2}, \text{ with}$$

$$\frac{\partial(\sigma_{\alpha}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i)}{\partial q_i} > 0 \Leftrightarrow f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i) > 0$$

In addition, it is known that

$$f'(q_i) = (\alpha \epsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) + (\alpha \epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))c'(N)$$

$$g'(q_i) = \alpha c'(N) + (1-\alpha) \sum_{j \in N} c'(\{j\})$$

After some calculations, it can be shown that

$$f'(q_i)g(q_i) - f(q_i)g'(q_i) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\alpha \epsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) (\alpha c(N) + (1-\alpha) \sum_{j \in N} c(\{j\}))$$

$>$

$$(\alpha \epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\}))(1-\alpha) (c(N)c'(\{i\}) - c'(N) \sum_{j \in N} c(\{j\}))$$

Clearly,  $(\alpha c(N) + (1-\alpha) \sum_{j \in N} c(\{j\})) > \alpha \epsilon_i(c) + (1-\alpha)c(\{i\})(1-\alpha)$ , because  $c(N) > \epsilon_i(c)$  and  $\sum_{j \in N} c(\{j\}) > c(\{i\})$ .

To end the proof, we prove that

$$(\alpha \epsilon'_i(c) + (1-\alpha)c'(\{i\}))c(N) > (1-\alpha) \left( c(N)c'(\{i\}) - c'(N) \sum_{j \in N} c(\{j\}) \right) \tag{10}$$

It is straightforward to show that (10) is equivalent to

$$\alpha \epsilon'_i(c)c(N) > -(1-\alpha)c'(N) \sum_{j \in N} c(\{j\}),$$

which always holds because  $c'_i(c) > 0$  and  $c'(N) > 0$ . Note that, by property 4 (limited growth rate) of function  $P$ , it is straightforward to prove that  $c'(N) > 0$ . Next, we show that  $c'_i(c) > 0$ ,

$$c'_i(c) = P'(q_N)q_i + P(q_N) > P'(q_N)q_N + P(q_N) = c'(N) > 0, \tag{11}$$

because of  $q_i < q_N$ ,  $P'(q_N) < 0$  (by property 2 (decreasingness) of function  $P$ ) and  $P(q_N) \geq 0$  (by definition). This completes the proof of property 6 (LDQ)

We thus conclude that there is always an  $\alpha^* < 1$ , such that for any  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , the function  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisfies properties 1–6 of function  $\sigma$ . Hence, for all  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule.  $\square$

It can be seen from the above demonstration that the function  $\sigma_\alpha(q_i, q_{-i})$  satisfies property 3 (MA) for  $\alpha < 1$ , property 5 (NMA) for  $\alpha > \alpha^*$ . However, the other four properties are satisfied for any  $\alpha \in [0, 1]$ .

Summarizing, the 1-proportional rule is the EP rule. If major agents do not find this allocation rule acceptable, the parameter  $\alpha$  may decrease (to the threshold  $\alpha^*$ ) and the allocation rule thus becomes a BDP rule. It will be then acceptable to major agents. The smaller the parameter  $\alpha$  is, the greater the price differences are in regard to the quantity demanded. Moreover, the lower the major-agent prices are, the higher the non-major-agent prices are. For this reason, a threshold for parameter  $\alpha$  is needed. Beyond that threshold, non-major agents do not find the  $\alpha$ -proportional rule acceptable, so it becomes coalitionally unstable, i.e., it is no longer a core allocation.

Finally, if  $\alpha^* = 0$ , the  $\alpha$ -proportional rule is always a BDP rule, for all  $\alpha \in [0, 1)$ . The following corollary shows a necessary and sufficient condition on the price function  $P$  for this to happen.

**Corollary 1.** *The  $\alpha$ -proportional rule is always a BDP rule for all  $\alpha \in [0, 1)$  if and only if  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j \geq \frac{P(q_1)}{P(q_{Ann})} P(q_N)q_N$ .*

**Proof.** The threshold  $\alpha^*$  is obtained in the proof of Theorem 2 from the inequality  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)}$ . As  $\sigma_\alpha(q_1, q_{-1})$  is decreasing in  $\alpha$ , if the above inequality holds for  $\alpha = 0$ , it also holds for all  $\alpha \in [0, 1)$ . Thus,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha=0}(q_1, q_{-1}) \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)} &\Leftrightarrow \frac{P(q_1)}{\sum_{j \in N} [P(q_j)q_j]} q_N \leq \frac{P(q_{Ann})}{P(q_N)} \\ \Leftrightarrow \sum_{j \in N} [P(q_j)q_j] &\geq \frac{P(q_1)}{P(q_{Ann})} P(q_N)q_N. \quad \square \end{aligned}$$

### 8. Numerical Illustration

In this section, we give a numerical illustration. We use a discount price function  $P(q_i)$  which has the properties 1–4 described in the Model section. As we mentioned, it is provided in [8] an analytical and empirical basis for a general quantity-discount function (QDF). They show that this QDF fits very well with 66 discount schedules found in practice. They propose a QDF with an explicit formula depending on certain parameter:  $P(q) = p_m + \frac{S}{q^\eta}$ , where  $p_m$  is the theoretical minimum price,  $S$  scales the function  $P(q)$  for quantity  $q$ , and  $\eta$  represent the steepness of a quantity-discount function. As it is carried out in [4], we also assume that  $\eta = 0.5$  because, as they show in [8], the schedules with a positive steepness have a mean steepness of 0.58. In the first example, Table 1 shows the price and cost for each agent in three cases for  $P(q_i) = 80 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$ .

**Table 1.** Example 1 with  $\alpha^* > 0$ .

		$P(q_i) = 80 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$						
Agent	$q_i$	No-Cooperate				Cooperate		
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proportional)  $_{\alpha=\alpha^*=0.368}$		
		Price	Cost	Price	Cost	Price	Cost	$\sigma_\alpha$
1	50	1069.9	53,497.5	192.7	9633.4	448.9	22,446.6	2.330
2	60	983.7	59,021.8	192.7	11,560.1	416.2	24,970.9	2.160
3	70	916.7	64,166.2	192.7	13,486.8	390.7	27,350.9	2.028
4	80	862.6	69,009.9	192.7	15,413.5	370.2	29,616.8	1.921
5	100	780.0	78,000.0	192.7	19,266.9	338.8	33,883.8	1.759
6	500	393.0	196,524.8	192.7	96,334.5	191.9	95,955.5	0.996
7	600	365.8	219,464.3	192.7	115,601.4	181.6	108,932.6	0.942
8	700	344.6	241,202.6	192.7	134,868.3	173.5	121453.6	0.901
9	800	327.5	261,989.9	192.7	154,135.2	167.0	133,613.4	0.867
10	900	313.3	282,000.0	192.7	173,402.1	161.6	145,478.2	0.839

First, there is no cooperation and each agent buys individually; thus, the price of agent  $i$  is  $P(q_i)$  and its cost  $P(q_i)q_i$ . Second, agents cooperate with an equal price allocation rule. In this case, the price is  $P(q_N)$  and the cost  $P(q_N)q_i$ . Third, agents cooperate but with a BDP allocation rule. In particular, we consider an  $\alpha$ -proportional rule, where the parameter  $\alpha$  considered is the threshold  $\alpha^*$  given by Theorem 2. The price is, in this case,  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i})P(q_N)$  and the cost  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i})P(q_N)q_i$ . In this third case, we also show the value of function  $\sigma_{\alpha^*}$ , i.e.,  $\sigma_{\alpha^*}(q_i, q_{-i}) = \frac{\alpha^*P(q_N) + (1-\alpha^*)P(q_i)}{\sum_{j \in N} [\alpha^*P(q_N)q_j + (1-\alpha^*)P(q_j)q_j]}q_N$ . Note that function  $\sigma$  is always greater than one for all non-major agents and less than one for major agents. Thus, in this case, the non-major agents are players 1–5 and 6–10 the major ones.

It is also known that the  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule for all  $\alpha \in [\alpha^*, 1)$ , so as  $\alpha$  increases the price and cost of non-major agents will decrease and those of major agents will increase. Hence, agents 1–5 will prefer the highest possible  $\alpha$ , and agents 6–10 the lowest. Note that, in the limit case, that is  $\alpha = 1$ , the value of  $\sigma_1(q_i, q_{-i})$  is one for all agents and the price matches the equal price, which is the most favorable situation for non-major agents. The opposite situation is  $\alpha^* = 0.368$ , which is the most favorable situation possible for major agents. If  $\alpha$  were strictly lower than 0.368, this would not be acceptable to non-major agents, and in that case, the  $\alpha$ -proportional rule would not be a BDP rule.

Notice that, here, the threshold between major and non-major agents is  $\bar{q} = 493,75$ . This can be easily obtained from Equation (7). Indeed,

$$\bar{q} = \left( \frac{7.000}{\frac{\sum_{j \in N} c(j)}{q_N} - 80} \right)^2 = \left( \frac{7.000}{395,02 - 80} \right)^2 = \left( \frac{7.000}{315,02} \right)^2 = 493,75.$$

Although, in the first example,  $\alpha^* > 0$ , it could be zero if the condition from Corollary 1 holds, i.e., if the discount-price function holds that  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j \geq \frac{P(q_1)}{P(\bar{q}_{Ann})}P(q_N)q_N$ . In that case, the  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule for all  $\alpha \in [0, 1)$ .

Table 2 shows a second example with  $P(q_i) = 10 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$  where  $\alpha^* = 0$ , since  $\sum_{j \in N} P(q_j)q_j = 1.254.586 > 1.249.760, 2 = \left(\frac{999,9}{378,93}\right)473.622 = \frac{P(q_1)}{P(\bar{q}_S)}P(q_N)q_N$ . We present the  $\alpha$ -proportional for  $\alpha = 0$ . Notice that the former is acceptable to all agents for all  $\alpha \in [0, 1)$  and again  $\bar{q} = 493,75 = \left(\frac{7.000}{325,02-10}\right)^2$ .

Table 2. Example 2 with  $\alpha^* = 0$ .

		$P(q_i) = 10 + \frac{7000}{\sqrt{q_i}}$						
Agent	$q_i$	No-Cooperate		Cooperate				
		Individual		Equal Price		BDP( $\alpha$ -Proportional) $_{ \alpha=\alpha^*=0}$		
		Price	Cost	Price	Cost	Price	Cost	$\sigma_\alpha$
1	50	999.9	49,997.5	122.7	6133.4	377.4	18,868.5	3.076
2	60	913.7	54,821.8	122.7	7360.1	344.8	20,689.2	2.811
3	70	846.7	59,266.2	122.7	8586.8	319.5	22,366.5	2.605
4	80	792.6	63,409.9	122.7	9813.5	299.1	23,930.3	2.438
5	100	710.0	71,000.0	122.7	12,266.9	267.9	26,794.7	2.184
6	500	323.0	161,524.8	122.7	61,334.5	121.9	60,957.8	0.994
7	600	295.8	177,464.3	122.7	73,601.4	111.6	66,973.2	0.910
8	700	274.6	192,202.6	122.7	85,868.3	103.6	72,535.3	0.845
9	800	257.5	205,989.9	122.7	98,135.2	97.2	77,738.5	0.792
10	900	243.3	219,000.0	122.7	110,402.1	91.8	82,648.4	0.749

### 9. Conclusions, Limitations and Implications

We study situations in which a seller provides general price discounts for large orders according to a decreasing unit-price function. In these situations, buyers can cooperate and form purchasing groups to benefit from these price discounts. In this paper, we analyze these cooperative-purchasing situations as cooperative cost games and call them CPGD-games. We prove that the grand coalition can obtain significant reductions in costs (i.e., CPGD-games are subadditive). Then, we show that CPGD-games are balanced; that is, there is always a method for allocating the reduced costs generated by the CPGD model that is efficient and (coalitionally) stable: the equal erice (EP) rule.

Next, we focus on cooperative-purchasing models with decreasing and linear unit-price functions. We demonstrate that the linear nature of the discount-price function provides additional information about the corresponding cooperative purchasing game with linear discount (CPL-game): the marginal contribution of an agent diminishes as a coalition grows. This is well-known as the snowball effect or concavity property. We also prove that the EP rule matches the Shapley value and the nucleolus. In such cases, it seems that there is no better way to allocate the reduced total cost. However, some agents may argue that the EP is questionable because it favors those agents who produce and sell just a few units of the product. Note that these agents pay the same price as major buyers. These agent concerns can be really problematic when the unit price function is not linear. To solve this problem, we propose a family of allocation rules for cooperative purchasing games with non-linear discount (CPNL-games). We focus on the different price (DP) method and propose a family of allocation rules with different prices that are acceptable to all agents: balanced different price rules (BDP rules).

Finally, we concentrate on an alternative approach to obtain DP rules for CPNL-games. This consists of allocating the cost of the grand coalition proportionally, with a proportionality factor that combines the individual costs (faced when each agent buys the product on its own) and the EP rule (available when agents face cooperative purchasing). We obtain a highly suitable parametric family of proportional rules, named  $\alpha$ -proportional rules which, notably, are related to the family of BDP rules. Specifically, we prove that there is always an  $\alpha$  threshold above which any  $\alpha$ -proportional rule is a BDP rule. There is, thus, a range of acceptable alpha parameters for all agents, both major (agents who buy large quantities) and non-major (agents who buy small quantities).

This family of  $\alpha$ -proportional rules provides a cost-sharing method, for the cooperative-purchasing model with general discount, that is easy to calculate, and guarantees stability

in the cooperation because it is acceptable to both major and non-major buyers. All of them are fully satisfied with this cost-sharing method. We believe that our rule can be a useful tool for cooperative-purchasing organizations with any kind of buyers (firms, institutions, consumers, etc.).

Future research can look first for real situations in which our model could be applied and, based on the properties required in each situation, determine what alpha parameter(s) within the interval would be most suitable, i.e., which  $\alpha$ -proportional rule is most suitable for each situation (an  $\alpha$ -proportional rule that favors majors or one that is more favorable to non-majors). Secondly, researchers could look for certain properties of the  $\alpha$ -proportional rules that are only satisfied by the family of  $\alpha$ -proportional rules with a view to obtaining a characterization of the family of  $\alpha$ -proportional rules. Third, the analysis can be extended to two-stage situations in which the quantity demanded by agents can be chosen strategically in the first stage, i.e., two-stage models where agents play a non-cooperative game in the first stage to choose the quantity demanded and play our GPGD-game (as a cooperative game) in the second stage. It is, therefore, of great interest to study the characteristics of the equilibrium profile of quantities demanded by agents induced by our family of  $\alpha$ -proportional rules.

**Author Contributions:** J.A.G.-M.: Conceptualization, formal analysis, methodology, writing. A.M.: Conceptualization, formal analysis, methodology, writing. G.A.V.: Conceptualization, formal analysis, methodology, writing. These authors contributed equally to this work. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

**Funding:** This work is part of the R+D+I project grant PGC2018-097965-B-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and by “ERDF A way of making Europe”/EU. This research was also funding by project PROMETEO/2021/063 from the Comunidad Valenciana, and from the Junta de Andalucía-FEDER through projects P18-FR-3840 and UMA18-FEDERJA-243.

**Data Availability Statement:** Not applicable.

**Conflicts of Interest:** The authors declare no conflict of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; or in the decision to publish the results.

## Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

EP	Equal price
QDF	Quantity-discount function
DP	Different price
CPGD-model	Cooperative-purchasing model with general discount
CPGD-game	Cooperative-purchasing cost game with general discount
CPL-game	Cooperative-purchasing game with linear discount
CPNL-game	Cooperative-purchasing game with non-linear discount
MCP-situations	Maximum cooperative-purchasing situations
MCP-games	Maximum cooperative-purchasing games
MDP	Monotonically decreasing through players
LDP	Limited decrease through players
MA	Major-agents' acceptability
BW	Balanced weighting
NMA	Non-major agents' acceptability
LDQ	Limited decrease in a player quantity
SYM	Symmetry
PMON	Player monotonicity
CMON	Cost monotonicity
FRAC	Fair ranking added cost

## References

1. Van de Klundert, J.; Kuipers, J.; Spijksma, F.C.R.; Winkels, M. Selecting Telecommunication Carriers to Obtain Volume Discounts. *Interfaces* **2005**, *35*, 124–132. [[CrossRef](#)]
2. Munson, C.L.; Jackson, J. Quantity Discounts: An Overview and Practical Guide for Buyers and Sellers. *Found. Trends Technol. Inf. Oper. Manag.* **2015**, *8*, 1–130.
3. Tella, E.; Virolainen, V.M. Motives behind purchasing consortia. *Int. J. Prod. Econ.* **2005**, *93–94*, 161–168. [[CrossRef](#)]
4. Schotanus, F.; Telgen, J.; de Boer, L. Unfair allocation of gains under the Equal Price allocation method in purchasing groups. *Eur. Oper. Res.* **2008**, *187*, 162–176. [[CrossRef](#)]
5. Hendrick, T.E. *Purchasing Consortia: Horizontal Alliances Among Firms Buying Common Goods and Services: What? Who? Why? How?*; Center for Advanced Purchasing Studies: Tempe, AZ, USA, 1996.
6. Huber, B.; Sweeney, E.; Smyth, A. Purchasing consortia and electronic markets: A procurement direction in integrated supply chain management. *Electron. Mark.* **2004**, *14*, 284–294. [[CrossRef](#)]
7. Heijboer, G. Mathematical and Statistical Analysis of Initial Purchasing Decisions. Ph.D. Thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2003, *unpublished*.
8. Schotanus, F.; Telgen, J.; de Boer, L. Unraveling quantity discounts. *Omega* **2009**, *37*, 510–521. [[CrossRef](#)]
9. Borm, P.; Keiding, H.; Mclean, R.; Oortwijn, S.; Tijs, S. The compromise value for NTU-games. *Int. J. Game Theory* **1992**, *21*, 175–189. [[CrossRef](#)]
10. Granot, D.; Sobic, G. Formation of alliances in internet-based supply exchanges. *Manag. Sci.* **2005**, *51*, 92–105. [[CrossRef](#)]
11. Essig, M. Purchasing consortia as symbiotic relationships: Developing the concept of consortium sourcing. *Eur. J. Purch. Supply Manag.* **2000**, *6*, 13–22. [[CrossRef](#)]
12. Adams, J.S. Toward an understanding of equity. *J. Abnorm. Soc. Psychol.* **1963**, *67*, 422–436. [[CrossRef](#)]
13. Das, T.K.; Teng, B.S. A risk perception model of alliance structuring. *J. Int. Manag.* **2001**, *7*, 1–29. [[CrossRef](#)]
14. Chen, X. Inventory Centralization Games with Price-Dependent Demand and Quantity Discount. *Oper. Res.* **2009**, *57*, 1394–1406. [[CrossRef](#)]
15. Groote, M.; Borm, P.; Hamers, H.; Reijniere, H. Game Theoretic Analysis of Maximum Cooperative Purchasing Situations. *Nav. Res.* **2013**, *60*, 607–624.
16. Hezarkhani, B.; Sobic, G. Who's Afraid of Strategic Behavior? Mechanisms for Group Purchasing. *Prod. Oper. Manag.* **2019**, *28*, 933–954. [[CrossRef](#)]
17. Meca, A.; Timmer, J.; García-Jurado, I.; Borm, P. Inventory games. *Eur. J. Oper. Res.* **2004**, *156*, 127–139. [[CrossRef](#)]
18. Meca, A.; Guardiola, L.A.; Toledo, A. p-additive games: A class of totally balanced games arising from inventory situations with temporary discounts. *Top* **2007**, *15*, 322–340. [[CrossRef](#)]
19. Wenzhong, L.I.; Genjiu, X.U.; Jun, S.U. Inventory Games with Quantity Discount. *J. Syst. Sci. Complex* **2021**, *34*, 1538–1554.
20. Krichen, S.; Laabidi, L.; Abdelaziz, F.B. Single supplier multiple cooperative retailers inventory model with quantity discount and permissible delay in payments. *Comput. Ind. Eng.* **2011**, *60*, 164–172. [[CrossRef](#)]
21. Albizuri, M.J. The  $\alpha$ -serial cost-sharing rule. *Math. Sci.* **2010**, *60*, 24–29.
22. Moulin, H.; Shenker, S. Serial cost sharing. *Econometrica* **1992**, *60*, 10091037. [[CrossRef](#)]
23. Albizuri, M.J.; Zarzuelo, J.M. The dual serial cost-sharing rule. *Math. Soc. Sci.* **2007**, *53*, 150–163. [[CrossRef](#)]
24. Algaba, E.; Fragnelli, V.; Sánchez-Soriano, J. (Eds.) *Handbook of the Shapley Value*; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2019.
25. Luo, C.; Zhou, X.; Lev, B. Core, shapley value, nucleolus and nash bargaining solution: A Survey of recent developments and applications in operations management. *Omega* **2022**, *110*, 10263. [[CrossRef](#)]
26. Shapley, L.S. A value for n-person games. *Ann. Math. Stud.* **1953**, *28*, 307–317.
27. Schmeidler, D. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.* **1969**, *17*, 1163–1170. [[CrossRef](#)]
28. Shapley, L.S. Cores of convex games. *Int. J. Game Theory* **1971**, *1*, 11–26. [[CrossRef](#)]
29. Kar, A.; Mitra, M.; Mutuswami, S. On the coincidence of the prenucleolus and the Shapley value. *Math. Soc. Sci.* **2009**, *57*, 16–25. [[CrossRef](#)]