UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ

Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de van Hiele y la estrategia STEAM

Juan Narciso Roldán Zafra

Directora de tesis: MARIA DEL CARMEN PEREA MARCO

Codirector de tesis: PEDRO CAMPILLO HERRERO

UNIVERSITAS Miguel Hernández INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

EOMA

Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada

2023

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE

Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y

Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS EN UN MUSEO DE CIENCIAS BASADAS EN EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ESTRATEGIA STEAM

Juan Narciso Roldán Zafra

Tesis presentada para optar al grado de

Doctora por la Universidad Miguel Hernández de Elche,

realizada bajo la dirección de Carmen Perea Marco

y la codirección de Pedro Campillo Herrero

El Dr. D. *Domingo Morales González,* Coordinador del Programa de Doctorado en **Estadística, Optimización y Matemática Aplicada**

INFORMA:

Que Don Juan Narciso Roldán Zafra ha realizado bajo la supervisión de nuestro Programa de Doctorado el trabajo titulado **Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de van Hiele y la estrategia STEAM** conforme a los términos y condiciones definidos en su Plan de Investigación y de acuerdo al Código de Buenas Prácticas de la Universidad Miguel Hernández de Elche, cumpliendo los objetivos previstos de forma satisfactoria para su defensa pública como tesis doctoral.

Lo que firmo para los efectos oportunos, en Elche a 26 de septiembre de 2023

Dr. D. *Domingo Morales González*
Coordinador del Programa de Doctorado en Estadística, Optimización
y Matemática Aplicada

La Dra. Dña. *Carmen Perea Marco,* directora y el Dr. D. *Pedro Campillo Herrero*, codirector de la tesis doctoral titulada **Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de van Hiele y la estrategia STEAM**

INFORMAN:

Que Don Juan Narciso Roldán Zafra ha realizado bajo nuestra supervisión el trabajo titulado **Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de van Hiele y la estrategia STEAM** conforme a los términos y condiciones definidos en su Plan de Investigación y de acuerdo al Código de Buenas Prácticas de la Universidad Miguel Hernández de Elche, cumpliendo los objetivos previstos de forma satisfactoria para su defensa pública como tesis doctoral.

Lo que firmamos para los efectos oportunos, en Elche a 8 de marzo de 2022

Directora de la tesis	Codirector de la tesis
Dra. Dña. *Carmen Perea Marco*	Dr. D. *Pedro Campillo Herrero*

La presente Tesis Doctoral, titulada "Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de van Hiele y la estrategia STEAM", se presenta bajo la modalidad de tesis convencional con el siguiente indicio de calidad:

Autor principal de un artículo junto a la directora de tesis: María del Carmen Perea Marco, el Codirector de tesis: Pedro Campillo Herrero y la colaboradora: Irene Polo Blanco.
Roldán-Zafra, J., Perea, C., Polo-Blanco, I., & Campillo, P. (2022). Design of an Interactive Module Based on the van Hiele Model: Case Study of the Pythagorean Theorem. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(1), em0672. https://doi.org/10.29333/iejme/11556

Autor principal de un artículo junto a la directora de tesis: María del Carmen Perea Marco.
Roldán-Zafra J, Perea C. Math Learning in a Science Museum—Proposal for a Workshop Design Based on STEAM Strategy to Learn Mathematics. The Case of the Cryptography Workshop. *Mathematics*. 2022; 10(22):4335. https://doi.org/10.3390/math10224335

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a los directores de esta tesis doctoral, Dra. Carmen Perea Marco y Dr. Pedro Campillo Herrero, por la dedicación que han brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor de las mismas. Gracias por la confianza que me han ofrecido desde el inicio.

A mi familia por su apoyo incondicional, su paciencia, tiempo robado y confianza que siempre han manifestado en el buen fin de esta tesis.

A la gran familia que forma el personal del MUDIC y en especial a Jesús Carnicer Murillo que me animó a empezar este proyecto y ha estado presente, como referente, hasta su culminación.

No quisiera que nadie fuese olvidado, por lo que estas líneas de agradecimiento son para todas las personas que me han acompañado durante esta etapa animándome a presentar esta tesis.

ÍNDICE

Abreviaturas 1

Listado de figuras y tablas 1

Resumen 4

Capítulo I. Introducción 6

Capítulo II. Contextualización 10

2.1 Aprendizaje de la Geometría. Modelo de van Hiele 10

2.2 Educación STEAM 14

2.3 Aprendizaje en museos de ciencia 15

2.4 Capital científico 19

Capítulo III. Creencias del profesorado con respecto a la educación y el aprendizaje STEAM en museos de ciencias 21

3.1 Objetivos, diseño de la investigación y metodología 22

3.2 Resultados 25

3.3 Discusión 36

Capítulo IV. Diseño de un Módulo Interactivo Basado en el Modelo de van Hiele: Caso de Estudio del Teorema de Pitágoras 38

4.1 Teorema de Pitágoras y van Hiele 38

4.2 Caracterización de los niveles de van Hiele para la enseñanza del teorema de Pitágoras 40

4.3 Propuesta de módulo interactivo para el aprendizaje del teorema de Pitágoras en una visita a un museo de ciencias 41

4.4 Análisis de la propuesta 46

Capítulo V. Propuesta para diseño de un taller basado en la estrategia STEAM para el aprendizaje de las matemáticas. El caso del taller de criptografía 48

5.1 Uso didáctico de la criptografía para el aprendizaje de las matemáticas .. 48
5.2 Preliminares 51
5.3 Objetivos, diseño de la investigación y metodología 53
5.4 Propuesta para un taller de criptografía 58
5.5 Discusión 71
Capítulo VI. Estadística y STEAM 72
6.1 Preliminares: ANOVA 72
6.2 Objetivos, diseño de la investigación y metodología 73
6.3 Instrumento de evaluación para el aprendizaje del análisis de la varianza de un factor (ANOVA) 89
Capítulo VII. Conclusiones y futuras investigaciones 93
7.1 Conclusiones 93
7.2 Trabajos futuro 96
REFERENCIAS 98
ANEXOS 111
Anexo I: Cuestionario 111
Anexo II: Resultado de la ejecución con Rstudio 116
Anexo III: Resultado de la ejecución con Python 119
Anexo IV: Informe de evaluación de investigación responsable 121

ABREVIATURAS

STEM ……………..………… Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas.
STEAM …………..………… Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas.
UMH ……………………….. Universidad Miguel Hernández.
MUDIC-VBS-CV ………….. Museo Didáctico e Interactivo de Ciencias de la Vega Baja del Segura de la Comunitat Valenciana.
CEDEFOP …………………Centro Europeo para el Desarrollo de la Formación Profesional.
MA …………………………. Media aritmética.
CV ………………………….. Coeficiente de variación.
M …………………………… Mediana.
ANOVA ……………………. Análisis de la varianza.

LISTADO DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 1. Características de los profesores participantes.

Figura 2. Metodología de trabajo en el aula.

Figura 3. Valor de la mediana de la relación con la materia que imparto

Figura 4. Valor de la mediana de la comodidad para impartir otra materia

Figura 5. Dificultades en la implementación de la estrategia STEAM.

Figura 6. Visitas a museos de ciencia y estrategia STEAM.

Figura 7: Acepción geométrica del teorema de Pitágoras.

Figura 8: Primera actividad: reconocimiento de triángulos rectángulos

Figura 9: Demostración atribuida a Pitágoras (~569 a.C.,~ 476 a.C.)

Figura 10: Demostración de Bhaskara (1114-1185)

Figura 11. Esquema general del canal de transmisión.

Figura 12. Sistema criptográfico.

Figura 13. Estudiantes encriptando con la escítala.

Figura 14. Rueda César diseñada en el MUDIC.

Figura 15. Simulador Enigma. (a) Simulador de enigma de rueda de MUDIC. (b) Máquina de papel enigma para tubo.

Figura 16. Organigrama para resolución de ANOVA de un factor mediante Rstudio y Python.

Tabla 1. Relación entre la materia que enseño y otras.

Tabla 2. Capacidad para enseñar otra materia.

Tabla 3. Impacto de STEAM en el alumnado.

Tabla 4. Dificultades en la implementación de la estrategia STEAM.

Tabla 5. Visitas a museos de ciencia y estrategia STEAM.

Tabla 6. Niveles de van Hiele y teorema de Pitágoras.

Tabla 7. Niveles de van Hiele y habilidades de Hoffer.

Tabla 8. Taller de fortalezas de la ciencia en museo, proyecto STEAM y fases de aprendizaje de matemáticas.

Tabla 9. Descriptores de los niveles I, II y III de van Hiele para criptografía.

Tabla 10. Características del taller STEAM.

Tabla 11. Equivalencia de las letras del alfabeto en números.

Tabla 12. Datos ejemplo 1.

Tabla 13. ANOVA de un factor.

Tabla 14. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni resueltas manualmente.

Tabla 15. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni con Rstudio.

Tabla 16. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni con Python.

Tabla 17. Datos ejemplo 2.

Tabla 18. Datos ejemplo 3.

Tabla 19. Datos ejemplo 4.

Tabla 20. Datos ejemplo 5.

Tabla 21. Datos ejemplo 6.

Tabla 22. Datos ejemplo 7.

Tabla 23. Datos ejemplo 8.

Tabla 24. Datos ejemplo 9.

Tabla 25. Datos ejemplo 10.

Tabla 26. Habilidades Hoffer ampliadas.

Resumen.

En la enseñanza de las matemáticas, se hacen grandes esfuerzos, y se emplean diversas estrategias de enseñanza con el fin de facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Debido a la cantidad de espacios, experiencias y talleres de matemáticas que podemos encontrar en los museos de ciencia, así como al reciente incremento de museos específicos de matemáticas que han surgido en los últimos años, se hace necesario disponer de herramientas que nos permitan diseñar y evaluar propuestas de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en este contexto no formal. Estos entornos han demostrado ser espacios propicios y motivadores para el aprendizaje de la ciencia. En particular, los museos de ciencias pueden utilizarse como complemento y colaborar con el fin de aprovechar cada una de sus fortalezas para motivar el aprendizaje de las matemáticas. Una gran variedad de estrategias de enseñanza se utiliza a menudo para fortalecer el proceso de aprendizaje en la educación científica. STEAM adopta un enfoque multidisciplinario para aprender ciencias, combinando diferentes áreas de conocimiento, como Arte, Ciencia, Física, Química, Matemáticas y Tecnología.

En esta tesis, utilizamos un cuestionario y una entrevista con el objetivo de analizar las creencias del profesorado en la aplicación de la estrategia STEAM dentro y fuera del aula.

A continuación, para desarrollar el estudio, partimos de los tres elementos y procesos principales establecidos en el modelo de van Hiele: niveles de razonamiento, fases de aprendizaje y competencia del alumno. La percepción o competencia del estudiante se formula a través de las habilidades de Hoffer y, para el desarrollo de las actividades de las fases de aprendizaje, la estrategia STEAM.

Como ejemplo particular, se presenta el diseño y construcción de un módulo interactivo para el aprendizaje del teorema de Pitágoras en un museo de ciencias. Análogamente, presentamos el diseño y el proceso de implementación de un taller STEAM para el aprendizaje de las matemáticas sobre criptografía. Finalmente, desarrollamos una

propuesta para evaluar el aprendizaje de los estudiantes y su implementación en el caso particular del análisis de la varianza de un factor y su aplicación en la vida real.

Summary

In the teaching of mathematics, great efforts are made and diverse teaching strategies are employed in order to facilitate the learning process for students. Due to the abundance of spaces, experiences, and mathematics workshops that can be found in science museums, as well as the recent increase in specific mathematics museums that have emerged in recent years, it is necessary to have tools that allow us to design and evaluate teaching and learning proposals for mathematical content in this non-formal context. These environments have proven to be conducive and motivating spaces for science learning. In particular, science museums can be used as supplements and can collaborate in order to leverage each of their strengths to motivate the learning of mathematics. A wide variety of teaching strategies are often used to enhance the learning process in science education. STEAM adopts a multidisciplinary approach to learning science, combining different areas of knowledge such as Art, Science, Physics, Chemistry, Mathematics, and Technology.

In this thesis, we use a questionnaire and an interview with the aim of analyzing teachers' beliefs in the implementation of the STEAM strategy inside and outside the classroom.

Next, to develop the study, we start from the three main elements and processes established in the van Hiele model: levels of reasoning, learning phases, and student competence. The student's perception or competence is formulated through Hoffer's skills, and for the development of activities in the learning phases, the STEAM strategy is employed.

As a specific example, the design and construction of an interactive module for learning the Pythagorean theorem in a science museum are presented. Similarly, we introduce the design and implementation process of a STEAM workshop for learning mathematics through cryptography. Finally, we develop a proposal to assess student learning and its implementation in the particular case of one factor analysis of variance and its real-life application.

1. Introducción.

No podemos predecir el camino que seguirá la sociedad actual y cómo debemos actuar para adaptarnos al desarrollo tecnológico en términos del futuro mercado laboral. Pero, si de algo podemos estar seguros, es de que la era de la robótica y la inteligencia artificial nos presentará retos para los que debemos estar preparados, alcanzando la resiliencia adecuada que nos permita afrontar los desafíos que cambiarán nuestra concepción del mundo y nuestros hábitos personales. La cultura en general y, el aumento del capital científico de la población, en particular, nos proporcionará el apoyo que la sociedad necesita y, la educación dentro y fuera del aula jugará un papel importante en esta tarea.

La alfabetización tecnológica y digital son habilidades críticas del siglo XXI que todos los estudiantes necesitan desarrollar para participar efectivamente en nuestro mundo en constante cambio como aprendices de por vida [1-3]. El crecimiento exponencial de las tecnologías digitales en los últimos años ha cambiado la forma en que se concibe el sistema educativo [4], ahora se requiere que los estudiantes desarrollen nuevas competencias para participar efectivamente en nuestro mundo digital [5].

La importancia y la validez del aprendizaje de las ciencias en general y, de las matemáticas en particular, en un entorno no formal, como son los museos de ciencias, no es algo nuevo y, es un hecho estudiado extensamente. Encontramos, entre muchos otros, los siguientes trabajos que los constatan: Allen [6], Anderson y otros [7], Falk y Dierking [8], Guisasola y otros [9], Griffin [10], Hein [11], McManus [12], Rennie y Johnston [13], Salmi [14] y Tuckey [15]. Cualquier listado que intente recopilar toda la bibliografía al respecto dejará fuera trabajos importantes.

Sin duda, la existencia de este gran número de estudios relativos al aprendizaje en los museos de ciencias está influida por el enorme crecimiento de este tipo de centros en los últimos 50 años. En general, en los museos de ciencias encontramos exhibiciones de todas las áreas del ámbito científico y tecnológico. Si nos centramos en las matemáticas, podemos observar que han estado presentes en la evolución de los centros de ciencia ya sea con la exposición de aparatos e instrumentos como con secciones que presentan conceptos y procedimientos matemáticos.

En los últimos años han aparecido museos dedicados exclusivamente al aprendizaje de las matemáticas. Así encontramos: MOMATH de Nueva York (EE. UU.), Mathematikum de Giessen (Alemania), MMACA Museo de Matemàtiques en Cornellà (España), Museo de Matemáticas en Seúl (Corea), El Jardín de Arquímedes en Florencia (Italia), Haus der Mathematik en Viena (Austria), NAVET en Borås (Suecia) y el Atractor en Oporto (Portugal), entre otros por todo el mundo.

Aunque recientemente se han publicado trabajos en los que se menciona específicamente el aprendizaje de las matemáticas en los museos [16,17], son escasos los estudios específicos sobre el aprendizaje del ámbito matemático en museos.

A la vista de lo anterior, se ve necesario elaborar herramientas que nos ayuden en el diseño , evaluación de módulos y talleres de matemáticas, con el objetivo de garantizar un aprendizaje efectivo de esta materia durante las visitas a los museos. Con este fin se propone en este trabajo la aplicación del modelo de van Hiele que describe el razonamiento matemático de los alumnos de diferentes niveles educativos [18, 19]. Este modelo es considerado de referencia en el ámbito de la educación matemática y ha servido de base tanto para la estructuración y evaluación de la enseñanza de contenidos matemáticos como para el diseño curricular de esta materia a niveles tanto de Primaria como de Secundaria [20].

La aplicación del modelo de van Hiele en este contexto proporciona una fundamentación teórica en el diseño de módulos interactivos y talleres de experiencias de matemáticas. Este modelo puede ser aplicado tanto en el diseño, como en la reestructuración de actividades ya existentes centradas en cualquier contenido matemático de cualquier nivel educativo. Para una mejor orientación en la aplicación de este modelo, proponemos una caracterización explícita del mismo teniendo en cuenta, tanto la descripción de los niveles, como las habilidades identificadas por Hoffer [21].

Recientemente, se ha dado prioridad a la implementación de metodologías activas y proyectos interdisciplinarios tanto en centros educativos como en entornos de aprendizaje no formal, como los museos de ciencias. La enseñanza y el aprendizaje innovadores en la educación científica formal y no formal son esenciales para aumentar el capital científico y abordar los desafíos a los que se enfrentan los jóvenes al optar por profesiones del ámbito científico o tecnológico.

En esta línea cabe destacar que numerosos estudios han detectado una disminución notable en el número de estudiantes en titulaciones STEM. Según datos de Eurostat, 15 de cada 1.000 estudiantes han completado estudios en estas áreas. Según los datos del CEDEFOP, se espera que la demanda de perfiles profesionales con competencias STEM crezca un 8% para 2025, frente al 3% esperado para todas las ocupaciones. También es importante tener en cuenta que hay estudios como Lindahl [22] que concluyen que las aspiraciones profesionales y el interés en la ciencia se hicieron evidentes a los 13 años y la probabilidad de involucrar a los estudiantes en actividades relacionadas con la ciencia a edades posteriores fue progresivamente más difícil.

Como consecuencia de dichas necesidades, recientemente podemos encontrar trabajos como Toma y otros [23] en los que despliegan un enfoque educativo STEM integrador basado en la investigación para las clases de educación primaria en España. Queiruga-Dios y otros [24] detallan una experiencia de proyecto STEAM llevada a cabo con alumnos de secundaria en la que analizan las conexiones que se establecen entre las diferentes materias, así como, las conexiones que se establecen entre la comunidad educativa y los agentes externos (artistas, investigadores, etc.). Además, constatan el aumento de rendimiento y del interés por las materias del ámbito científico tecnológico. Ton de Jong [25] intenta esbozar una postura más matizada y equilibrada hacia la elección de enfoques educativos STEM. Así como Stracke y otros [26] discute cómo innovar el aprendizaje y la educación STEM dentro y fuera del aula, proponiendo utilizar un marco de proceso holístico para el aprendizaje centrado en el alumno llamado Learn STEM.

Sin embargo, muchos de estos autores muestran en la discusión y conclusión de sus trabajos que los profesores eran reacios a utilizar una educación STEAM integradora que utiliza la metodología de enseñanza de investigación y exige más instrucciones directivas. Además, también concluyen que se requiere más investigación para enfocar con precisión los requisitos específicos de los maestros sobre cómo pueden introducir y facilitar la educación STEM centrada en el alumno con diferentes enfoques metodológicos dentro y fuera del aula.

Para avanzar en las necesidades de formación del profesorado en metodologías con enfoques STEM o STEAM y su implementación exitosa, consideramos que un punto de partida es conocer la situación actual del profesorado. Es decir, las metodologías que suelen utilizar, su formación tecnológica, las relaciones que consideran oportunas o estables con otras materias, etc. Para ello, en esta tesis proponemos un cuestionario y una entrevista que nos permita analizar las creencias del profesorado en la aplicación de estrategias STEAM tanto fuera como dentro del aula.

Por otra parte, asignar actividades que relacionen el trabajo en el aula con el aprendizaje no formal, tal y como indica Allen [6] es complicado. Utilizar el museo como una extensión de la escuela sería un error, es mejor hacer que se complementen y colaboren para aprovechar cada una de sus fortalezas para motivar el aprendizaje de las matemáticas [27]. Es esencial que los equipos educativos del museo y los profesores colaboren entre sí para diseñar las diferentes experiencias. Estas experiencias deben comenzar en el centro educativo, continuar durante la visita al museo y terminar en el aula. Gracias a esta estructura podemos lograr intervenciones didácticas que creen espacios reales de aprendizaje [7].

Las actividades del museo tienen que estar enfocadas en los visitantes, motivándolos a participar. Su interacción con el personal, los instrumentos y los materiales del museo debe permitir su propio proceso de aprendizaje. Todo ello solicitando su propia intervención manual, intelectual y afectiva. El aprendizaje activo define un espacio donde los visitantes son curiosos, pueden participar creativamente y utilizar sus propios conocimientos para construir más conocimiento [28]. Los experimentos prácticos y la participación interactiva de las personas son una forma probada de mejorar el aprendizaje y la retención de conceptos [29]. El personal del Museo o un acompañante asume el papel de facilitador. Por lo tanto, el aprendizaje se convierte en un proceso agradable y relevante.

En este trabajo, como ya hemos comentado, presentamos una propuesta para desarrollar módulos interactivos, talleres y actividades basadas en el modelo de van Hiele, el aprendizaje en museos y la educación STEAM. Para ello, en el capítulo 2 vemos el estado del arte sobre el modelo de enseñanza de van Hiele, el aprendizaje de las matemáticas en un museo de ciencias, la educación STEAM y el capital científico. En el capítulo 3 analizamos las creencias del profesorado con respecto a la educación y el aprendizaje STEAM en museos de ciencias. En el capítulo 4 presentamos el diseño de un Módulo Interactivo Basado en el Modelo de van Hiele: Caso de Estudio del Teorema de Pitágoras. En el capítulo 5 desarrollamos la propuesta de diseño de un taller basado en la estrategia STEAM para aprender matemáticas, proponiendo el caso particular del taller de criptografía. Finalmente, en el capítulo 6 llevamos a cabo una propuesta de evaluación del aprendizaje mediante las habilidades de Hoffer que mostramos para el caso particular de actividades STEM que tienen como materia central la Estadística.

Capítulo II: Contextualización.

En el desarrollo del presente trabajo se hace necesario comenzar definiendo un marco teórico sobre el que fundamentar las diferentes actividades de aprendizaje de las matemáticas en él definidas. Para ello estructuramos el capítulo en cuatro secciones. La primera sección se centra en el modelo de aprendizaje de las matemáticas de van Hiele En la segunda, describimos la estrategia de aprendizaje STEM y su evolución hacia el enfoque STEAM. En la tercera sección analizamos el aprendizaje de la ciencia en entornos museísticos y, finalmente, en la sección cuatro presentamos el concepto de capital científico asociado a cada ciudadano.

2.1 Aprendizaje de la Geometría. Modelo de van Hiele

Numerosos trabajos de investigación se han basado en el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele [19] para explicar el aprendizaje de distintos conceptos geométricos, como los llevados a cabo por Gutiérrez y Jaime [20]; Sarasua [30] ; Jaime [31] y Jaime y Gutiérrez [32]. Además, este modelo ha tenido gran repercusión en el desarrollo e implantación de los currículums de numerosos países (la Unión Soviética en los años 60, Holanda y Estados Unidos en los años 70, y España en los años 80) [31].

El modelo de van Hiele fue diseñado inicialmente para la educación primaria y temas relacionados con la geometría. Sin embargo, desde la década de 1990, el campo de aplicación del modelo se ha extendido con éxito a otras áreas de las matemáticas y a cursos preuniversitarios y universitarios [33-40]. Esta probada generalidad del modelo le proporciona la solidez necesaria para ser utilizado en trabajos que tratan sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos.

En este trabajo, hacemos uso de estas extensiones, en las que la referencia es Llorens [33] y que enuncia el modelo de la siguiente manera:

- Hay diferentes niveles de razonamiento en los estudiantes, en referencia a la temática.

- Cada nivel supone una forma de entender, una forma particular de pensar, de modo que un estudiante sólo puede entender y razonar con los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
- Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adaptarse al nivel de razonamiento del estudiante.
- El proceso de enseñanza debe estar orientado a facilitar el progreso a nivel de razonamiento, para que este progreso se realice de manera rápida y efectiva.

Los elementos y procesos establecidos en el modelo se estructuran en sus tres componentes principales: competencia, niveles de razonamiento y fases de aprendizaje.

El propósito de la competencia es asegurar que los estudiantes sean competentes, es decir, capaces de actuar correcta y adecuadamente en situaciones desconocidas, con las acciones requeridas en cada situación. Los estudiantes aprenden las tareas que deben realizar, por qué deben realizarlas y cuándo deben realizarse y. por lo tanto, pueden aplicar sus conocimientos para resolver problemas.

En esta adquisición de "comprensión" o competencia surge el segundo elemento, los niveles de razonamiento. El modelo de van Hiele propone la existencia de cuatro niveles de razonamiento que sirven para caracterizar el pensamiento geométrico del individuo. Dichos niveles son: (1) Visualización, (2) Análisis, (3) Clasificación y (4) Deducción Formal. Aunque normalmente se consideran cuatro niveles, en ocasiones se contempla la existencia de un quinto nivel, denominado rigor [32,41]. El propio Van Hiele en [19] destaca la importancia de los niveles I, II y III. Tampoco existe unanimidad en los trabajos de investigación en la manera de numerarlos (tanto del 1 al 4 como del 0 al 3) [31]. Los diferentes niveles se caracterizan por descriptores o características principales que nos permiten reconocer cada uno de estos niveles de pensamiento matemático a partir de la actividad del alumno.

Los objetivos para cada uno de estos niveles son los siguientes:

Nivel I. De reconocimiento visual. Se identifican los elementos básicos de estudio y sus propiedades, dadas distintas situaciones se aprende el vocabulario relacionado con el concepto y se determinan distintas relaciones entre los elementos básicos.

Nivel II. De análisis. Los objetos son proposiciones que relacionan las propiedades. Se analizan las relaciones entre los elementos básicos de estudio.

Nivel III. De clasificación, de relación. Los objetos son las ordenaciones parciales (sucesiones) de las proposiciones. Se relacionan los elementos básicos de estudio y se analizan sus propiedades llegando a dar definiciones verbales del concepto tratado.

Nivel IV. De deducción formal. Los objetos son las propiedades que analizan las ordenaciones. Se analiza el concepto en distintas situaciones y se llega a construir demostraciones formales.

Las principales características de este modelo de razonamiento son la jerarquización y secuenciación de estos niveles (no es posible pasar al siguiente nivel de razonamiento si no se ha superado el anterior), y el paso de un nivel al siguiente de forma continua (con un periodo de transición en el que combinará razonamientos de dos niveles) [32,34].

Además, existe una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles. Cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele no sólo se reflejan en las formas de resolver problemas, sino que se manifiestan también en la forma de expresarse y en el significado que se da al vocabulario específico.

Por otro lado, el modelo de van Hiele propone unas fases de aprendizaje que sugieren al profesor cómo organizar los contenidos con el fin de facilitar el progreso de los estudiantes de un nivel a otro. Estas fases son: (1) Información, (2) Orientación Dirigida, (3) Explicitación, (4) Orientación Libre e (5) Integración [31,32].

(1) La primera fase de Información es una fase de toma de contacto en la que el profesor informa a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar. En esta fase los alumnos adquieren una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático. Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar.
(2) En la segunda fase de Orientación Dirigida los estudiantes descubren, comprenden y aprenden los conceptos y propiedades principales del área que se está trabajando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.
(3) En la tercera fase de Explicitación los estudiantes intercambian sus experiencias, explican como han resuelto las actividades en un contexto de diálogo en el grupo. Esta fase tiene también como objetivo conseguir que los estudiantes terminen de aprender

el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar.

(4) En la fase de Orientación Libre, los alumnos aplican los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores para perfeccionar el conocimiento del tema. Esto se lleva a cabo mediante el planteamiento por parte del profesor de problemas que puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones.

(5) Finalmente, en la fase de Integración los estudiantes deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que se han trabajado, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos.

A partir de la propuesta de van Hiele, muchos investigadores se han preocupado por elaborar instrumentos que evalúen los niveles de razonamiento de los alumnos [42,43]. Con el fin de obtener mayor precisión en la evaluación de estos niveles, Gutiérrez y Jaime [20] identifican una serie de procesos de razonamiento clave: (1) reconocimiento, (2) uso y formulación de definiciones, (3) clasificación y (4) prueba, que son característicos de todos los niveles de van Hiele.

Otro modelo que se considera de referencia en la aplicación del modelo de van Hiele es el de Alan Hoffer (1981) [21]. Este autor definió una perspectiva interesante de dicho modelo en su artículo: Geometry is more than Proof. Si bien Hoffer considera que las demostraciones son un componente importante, opina que existen otras habilidades valiosas que deben fortalecerse dentro del plan de estudios de geometría. Hoffer categorizó el contenido de la geometría en cinco habilidades: visual, verbal, pictórica, lógica y aplicada e integró estas habilidades como una segunda dimensión a los niveles de van Hiele. Propuso que la instrucción debería apoyar el avance del estudiante a través de los niveles de van Hiele en cada una de las dimensiones de las habilidades geométricas.

Este autor considera por ejemplo que un alumno en un nivel 2 (Análisis) de van Hiele debe ser capaz de identificar visualmente una figura como parte de otra que la contiene (destreza visual), describir de forma precisa las propiedades de una figura (destreza verbal), utilizar propiedades de figuras para dibujarlas (destreza pictórica), entender que las figuras tienen unas propiedades que las caracterizan (destreza lógica) y utilizar las figuras y sus propiedades para aplicarlas en otros ámbitos (destreza aplicada).

El uso de la tecnología y los entornos virtuales de aprendizaje se ha convertido actualmente en otra habilidad a alcanzar por el alumnado [44,45], por lo que consideramos que esta última habilidad, que llamaremos digital, debe agregarse a las mencionadas anteriormente. La filosofía de "aprender haciendo" nos permite acostumbrarnos a una práctica donde la innovación educativa es constante y garantiza el desarrollo de la capacidad de crear y desarrollar el pensamiento lógico matemático [46,47]. Por lo tanto, también consideramos necesario complementar la habilidad pictórica con el desarrollo de una destreza en la interacción manipulativa con los objetos. En otras palabras, para pasar de un nivel de pensamiento matemático al siguiente, debemos alcanzar el nivel anterior: visual, verbal, pictórico-manipulador, lógico, aplicado y digital. El logro de estas habilidades nos proporciona una medida para evaluar el aprendizaje.

2.2 Educación STEM y STEAM.

El origen de STEM se remonta a los años 90, cuando las preocupaciones por el bajo rendimiento en áreas científico-tecnológicas y la necesidad de preparar a los estudiantes para los desafíos tecnológicos del futuro se hicieron evidentes. Este enfoque educativo se centró en fomentar habilidades y conocimientos en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, con el propósito de preparar a las personas para trabajar en un mundo tecnológico en constante evolución.

Sin embargo, con el tiempo se reconoció que las disciplinas artísticas y creativas también eran fundamentales para el desarrollo integral de los estudiantes. Esto condujo a la evolución de STEM a STEAM [49], que incorpora el componente de Artes en la educación. STEAM integra el arte y el diseño en el currículo, fomentando la creatividad, el pensamiento crítico y la resolución de problemas desde una perspectiva multidisciplinaria.

Varios estudios respaldan la importancia de esta evolución. Por ejemplo, el artículo de Kimmons y Hall [49] destaca cómo el arte y la creatividad fomentan la innovación y la resolución de problemas en campos científicos y tecnológicos. Asimismo, el trabajo de Besemer y O'Quin [50] muestra cómo las habilidades artísticas están vinculadas al pensamiento divergente y a la generación de ideas originales.

Otro artículo relevante es el de Fortus et al. [51] que demuestra cómo la incorporación de componentes artísticos en proyectos de robótica y programación puede mejorar el interés y la identidad de los estudiantes en la ciencia y la ingeniería.

Además, el informe "STEM to STEAM: Resources Toolkit" [52] proporciona una guía práctica para la implementación de enfoques STEAM en las aulas, y destaca los beneficios de la colaboración entre disciplinas.

Todo ello se deriva de que los procesos artísticos como los científicos comparten etapas similares. En primer lugar, ambos comienzan con una observación detallada para captar los detalles y peculiaridades relevantes. A continuación, se plantean preguntas fundamentales y se llevan a cabo pruebas y experimentos para buscar respuestas y soluciones. Por último, en ambas disciplinas, se promueve un enriquecedor intercambio y comunicación de ideas, fomentando la colaboración y el aprendizaje continuo [53].

Podemos considerar STEAM, no como una metodología de aprendizaje, sino como una estrategia que abarca herramientas tecnológicas, perspectivas pedagógicas y enfoques metodológicos que pueden contribuir a lograr los objetivos STEAM. Couso y Zollman [54,55] destacan dos características esenciales de esta estrategia: el uso de conceptos de las disciplinas involucradas, y el hecho de que esto se hace para comprender y resolver diferentes problemas. Según Balka [56] la alfabetización STEAM es la capacidad de identificar, aplicar e integrar conceptos de ciencia, tecnología y matemáticas para comprender problemas complejos e innovar para resolverlos.

La última fase del aprendizaje matemático en el modelo de van Hiele consiste en la integración de los contenidos trabajados con otros campos de estudio [31,32]. Asimismo, la estrategia STEAM consiste en aprovechar las sinergias entre las asignaturas de ciencia, tecnología, arte y matemática, para desarrollar un enfoque integrador del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, podemos considerar STEAM como una estrategia para la resolución de problemas que, para las matemáticas se aborda al final del proceso de aprendizaje. Por lo tanto, es necesario ser cauteloso a la hora de llevar a cabo proyectos STEAM en los que las competencias matemáticas se desarrollan subsidiariamente después de asignaturas en diferentes contextos [55].

2.3. Aprendizaje en museos de ciencia.

El interés por el aprendizaje en entornos museísticos ha sido considerado prácticamente desde el origen de los museos públicos. Esto se ve reflejado en numerosos trabajos de distinta índole: desde los que tratan recorridos históricos de estudios sobre el impacto y valor educativo de las visitas a los museos [11], hasta los que se centran en diferentes metodologías para evaluar el impacto en el aprendizaje [8]. Si nos centramos en los museos de ciencias, nos encontramos que desde los años 60 el número de estos centros ha crecido de forma espectacular, están en continua evolución y se han realizado diferentes clasificaciones útiles y sencillas según su orientación [57].

Desde la apertura de los primeros centros de ciencia y tecnología interactivos, como el Exploratorium de San Francisco, hasta su proliferación en la década de 1980, el crecimiento de este tipo de instituciones ha dado lugar al desarrollo de numerosos estudios e investigaciones en torno a los museos de ciencias. Esto resalta la importancia y validez del aprendizaje de las ciencias en un entorno no formal [11,10,27]. Estudios que abordan la dificultad para diseñar exhibiciones de museos que no solo mantengan entretenidos a los visitantes, sino que también les permitan comprender un concepto del campo científico, Alen, Falk, Falk y Dierking con Brajčić y otros [6,8,58,59] destacan la importancia que los estudiantes dan al aprendizaje en los museos, llegando a la conclusión de que los alumnos le dan un alto valor a este tipo de aprendizaje considerándolo eficiente y necesario en su educación. También concluyen que estos resultados debieran servir para fomentar la expansión de la cooperación entre los museos y las instituciones educativas. MacManus [12] conecta temas tratados en museos de ciencias con la educación científica. Rennie y Johmston [13] estudian la naturaleza del aprendizaje en entornos no formales para tratar el aprendizaje en los museos. Guisasola y Morentín [60] hacen una revisión bibliográfica de los diferentes estudios sobre el aprendizaje de la ciencia en los museos. Todo ello con el fin de dar una idea sobre el papel de las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de la ciencia.

Algunos estudios [61] muestran que los museos de ciencias tienen los recursos adecuados para formar profesores del campo científico-tecnológico y otros [27] sugieren que la relación entre profesores y museos debe verse como un proyecto educativo, donde el profesorado desempeña el papel de vínculo entre los museos y la escuela.

Museo 4.0 es el nombre que damos a la transformación de una institución con una organización monolítica a una entidad generadora de eventos flexibles y cambiantes para su comunidad [62]. La estrategia de aprendizaje STEAM desarrollada en ellos se transforma sobre la base de actividades que pueden comenzar fuera del museo y luego continuar dentro como una parte más integrada del mismo. Las actividades STEAM promueven experiencias que crecen y evolucionan dependiendo de la participación del usuario y la comunidad, en lugar de crear experiencias de "seguir la receta" donde se obedece una instrucción específica. El futuro de las acciones del Museo 4.0 apunta a experiencias abiertas que se personalicen según los intereses, conocimientos y habilidades de los usuarios.

Podemos encontrar varios estudios específicos sobre temas o conceptos en el campo de las matemáticas [63-66]. Anderson y otros [67] realizan un estudio sobre cómo aprenden electricidad y magnetismo a partir de complementar las clases con actividades en un museo de ciencias y actividades ligadas a los módulos visitados en el museo, poniendo de manifiesto la importancia de la preparación de las actividades de la pre y post visita.

Sin embargo, Guisasola y Morentín [68,69] destacan el hecho de que los profesores apenas se preparan para las visitas. Diseñan y presentan en su estudio las conexiones entre lo que la escuela necesita y lo que los museos pueden ofrecer, solo para garantizar que el profesorado adquiera las competencias necesarias que les permitan preparar visitas a un museo centrado en el aprendizaje. Dado que el objetivo final es facilitar el aprendizaje, proponen una estructura general de actividades que consiste en: Actividades y recursos antes de la visita (Pre-visita), Actividades de interacción y búsqueda de información durante la visita y, actividades de reflexión sobre las experiencias vividas después de la visita (Post-visita).

El diseño de visitas escolares que sirvan de puente entre el conocimiento escolar (currículo) y el no formal (alfabetización científica) no es una tarea fácil, ni obvia, y exige la colaboración entre los educadores del museo, el profesorado y los investigadores en enseñanza de las ciencias. Allen [6] pone de manifiesto la dificultad que entraña el diseño de contenidos museísticos para el aprendizaje de un concepto del ámbito científico y la gran carga investigadora y de evaluación que dicho proceso conlleva. Es difícil medir el impacto que un módulo o taller de un museo tiene en los visitantes, entre otros motivos, porque estos no siempre utilizan los diferentes bloques de información suministrados en la visita con la intencionalidad que se pretende. Los estudios analizados encuentran que los escolares pueden adquirir información factual y conceptual después de interaccionar con un conjunto de módulos que contienen conceptos científicos relacionados, pero un desarrollo conceptual significativo sólo ocurre cuando la visita es explícitamente conectada con objetivos de aprendizaje que relacionen la actividad escolar y la visita al museo [59]. Por este motivo, se considera muy importante para el aprendizaje que la actividad quede organizada con una pre y post visita en el centro educativo.

Guisasola y Morentín [62] concluyen que las investigaciones sobre Museos de Ciencia y visitas escolares indican que es necesario integrar la visita en la programación del aula, para que se obtengan resultados de aprendizaje que vayan más allá de los contenidos actitudinales. De ahí la importancia de implicar al profesorado que organiza la salida con sus estudiantes, en la preparación y adaptación de la oferta del museo a sus propios objetivos de aprendizaje.

Además de la estructura de la visita que hemos expuesto, mucha bibliografía apoya una metodología activa y el juego como poderosas herramientas de aprendizaje [70-74], proporcionando un diseño muy efectivo para las actividades del aula y el museo de ciencias cuando se utilizan juegos para aprender matemáticas. Gracias a los juegos, obtenemos actividades que son fácilmente aceptadas por los visitantes, que mejoran la relación entre los escolares, la atención a la diversidad, el uso de estrategias similares a la resolución de problemas y despiertan la competitividad.

Desarrollamos nuestro trabajo en el *Museo Didáctico e Interactivo de Ciencias de la Vega Baja del Segura de la Comunitat Valenciana* Jesús Carnicer (MUDIC-VBS-CV). Es un museo de ciencias didáctico e interactivo centrado en el aprendizaje de la ciencia y la tecnología en un entorno no formal. El museo está ubicado dentro de uno de los campus de la Universidad Miguel Hernández y está gestionado por profesores del ámbito científico-tecnológico en los diferentes niveles educativos.

Además de un planetario, un jardín de ciencias con relojes de sol, un huerto y un estudio de radio, el lugar cuenta con tres salas de experiencias y dos aulas taller en las que se desarrollan una treintena de talleres STEAM. Los profesores de primaria y secundaria visitan el museo con sus alumnos regularmente. Visitan las salas de experiencia en grupos de entre cinco y diez alumnos guiados por un divulgador que desarrolla los talleres con ellos también. Además, el museo ofrece varias actividades de divulgación como charlas y stands en ferias, así como teatro y cine científico, formación para profesorado y jornadas de innovación científica.

Por todas las instalaciones mencionadas de las que consta el museo y, por la metodología utilizada, podemos asumir que el MUDIC-VBS-CV es un entorno ideal para llevar a cabo estudios sobre el aprendizaje en museos. Todo ello se ve reforzado con la estrecha relación entre el personal del museo, el profesorado y el personal investigador, tan demandada en los diferentes estudios mencionados sobre el aprendizaje en un entorno no formal. El profesorado colaborador forma parte del equipo dedicado a diseñar los módulos y puede recibir formación al respecto. Además, debido a la ubicación del museo en el entorno universitario, los investigadores también forman parte del equipo que genera los contenidos STEAM y conocen el tipo de actividades que desarrollan los museos de ciencia.

2.4 Capital científico.

El concepto de capital científico es una forma de abarcar todos los conocimientos, actitudes, experiencias y contactos sociales relacionados con la ciencia que una persona pueda tener. Los jóvenes que tienen bajos niveles de capital científico no tienden a verse a sí mismos como "científicos" y es menos probable que intenten estudiar ciencia en el futuro. Del mismo modo, aquellos que no consideran la ciencia como significativa y relevante encuentran más difícil comprometerse con esta área [75].

El capital científico se está adoptando cada vez más en el aprendizaje formal y no formal STEAM como un marco para ayudar a los maestros y profesionales. Ayuda a comprender mejor por qué las experiencias de aprendizaje STEAM pueden mejorar las vidas y experiencias de algunos jóvenes frente a otros tipos de experiencias [76-80].

El progreso científico significa que las personas necesitarán cada vez más la alfabetización STEAM si quieren ser ciudadanos activos con una opinión en la sociedad. Esto se puede hacer proporcionando a las jóvenes oportunidades de aprendizaje STEAM que contribuyan a aumentar su capital científico, pero sin olvidar que todavía hay un largo camino por recorrer. Hay varios elementos involucrados en este proceso. Se ha descubierto que los niveles de recursos relacionados con el capital científico fomentan, desarrollan y mantienen activamente el interés y las aspiraciones científicas de los jóvenes. Esto es a través de la divulgación científica en la vida familiar cotidiana, Archer y otros y Domènech y otros [75,79] confirman que es necesario tener cuidado con el reconocimiento generalizado de que la interdisciplinariedad en sí misma resulta en un mayor valor de competencia de las actividades docentes. Además, según un estudio de Park y otros [80], la educación STEAM sería más exitosa y sostenible cuando forma parte de un plan de estudios formal. Por su parte, Wang y otros [81] afirman que se necesita un cierto desarrollo de nivel profesional para que la integración de STEAM sea sostenible.

Se ha demostrado que los visitantes de museos con niveles más altos de capital cultural pueden usarlo para aumentar ese capital y mejorar su aprendizaje científico en sus visitas, [82,83].

Los contextos no formales de aprendizaje de ciencias tienen el potencial de proporcionar formas de capital científico a través de las oportunidades de aprendizaje científico que brindan, como una mayor alfabetización científica. Sin embargo, la disponibilidad y asequibilidad de los museos puede contribuir a aumentar las desigualdades sociales en diferentes contextos nacionales, [84].

En este trabajo no abordamos directamente la relación entre educación STEM y STEAM con el capital científico, aunque hemos querido introducir el concepto porque quizás es una forma de entender la importancia que tienen en un enfoque educativo STEM o STEAM la interconexión entre experiencias en diferentes ámbitos, tanto formales como no formales e informales, para alcanzar uno de los objetivos que tiene el enfoque STEM, es decir, el estímulo de vocaciones en el ámbito de las ciencias y la tecnología [85,86].

Capítulo III: Creencias del profesorado sobre la estrategia de aprendizaje STEAM en museos de ciencia.

La dificultad actual que reportan profesores y estudiantes con respecto al logro de competencias y habilidades en los campos científico y tecnológico invita a explorar nuevas formas de facilitar este proceso. Como hemos comentado en el capítulo anterior, la educación STEAM aparece como una de las principales estrategias para el aprendizaje de las ciencias, sin embargo, hay estudios, algunos ya mencionados, y otros como [87,88] revelan que los profesores son reacios a su implementación.

En este capítulo la investigación se sitúa en el marco de las creencias del profesorado de secundaria sobre la estrategia de aprendizaje STEAM, las dificultades que pueden enfrentar en su desarrollo en el aula, y en qué medida realizar visitas a museos de ciencias, como el MUDIC, pueden influir positivamente en la aplicación efectiva de esta estrategia.

A través de estos análisis, se busca identificar en qué áreas específicas se pueden desarrollar actividades diseñadas para alinear las creencias del profesorado con sus prácticas educativas, facilitando así una implementación coherente y efectiva del enfoque STEAM en el aula.

Para ello, en la primera sección presentamos los objetivos y metodología de trabajo, en la segunda sección los resultados y finalmente en la tercera sección vemos la discusión de dichos resultados.

3.1 Objetivos, diseño de la investigación y metodología.

Para analizar las creencias del profesorado planteamos el estudio de dos objetivos:

1. Creencias del profesorado de STEAM de secundaria sobre la integración de STEAM para el aprendizaje de ciencias. ¿Qué entienden por integración STEAM? Beneficios de aplicar esta estrategia y dificultades en su implementación.
2. Creencias sobre el impacto de las visitas a museos de ciencias en la integración STEAM.

Para alcanzar estos objetivos hemos diseñado un cuestionario y una entrevista semiestructurada para el profesorado (ANEXO I).

Las preguntas 1 a 8 del cuestionario, están diseñadas para identificar diferentes aspectos del profesorado como: género, tipo de escuela donde enseñan, años de experiencia y visitas realizadas a museos de ciencias.

Las preguntas 9 a 13 y 17 evalúan el primer objetivo.

Las preguntas 14, 15 y 16 evalúan el segundo objetivo.

De las preguntas 1 a 6 obtenemos que los participantes han sido profesorado activo de asignaturas STEM en la escuela secundaria pública que visitan el museo con sus estudiantes. Conforme a los resultados de la figura 1, fueron un total de 65 profesores con 35 mujeres y 30 hombres; 19 de ellos entre 31 y 40 años, 23 de ellos entre 41 y 50 años y el resto 23 restantes 50 años. 42 de ellos tienen entre 10 y 20 años de experiencia, y los 23 se fueron más de 20 años. Esta es la distribución entre las asignaturas: 11 en Ciencias Naturales, 14 en Física y Química, 30 en Matemáticas y 10 en Tecnología-Informática. El número de veces que han visitado un museo de ciencias es de 36 entre 1 y 5 veces y de 29 con más de 5 veces.

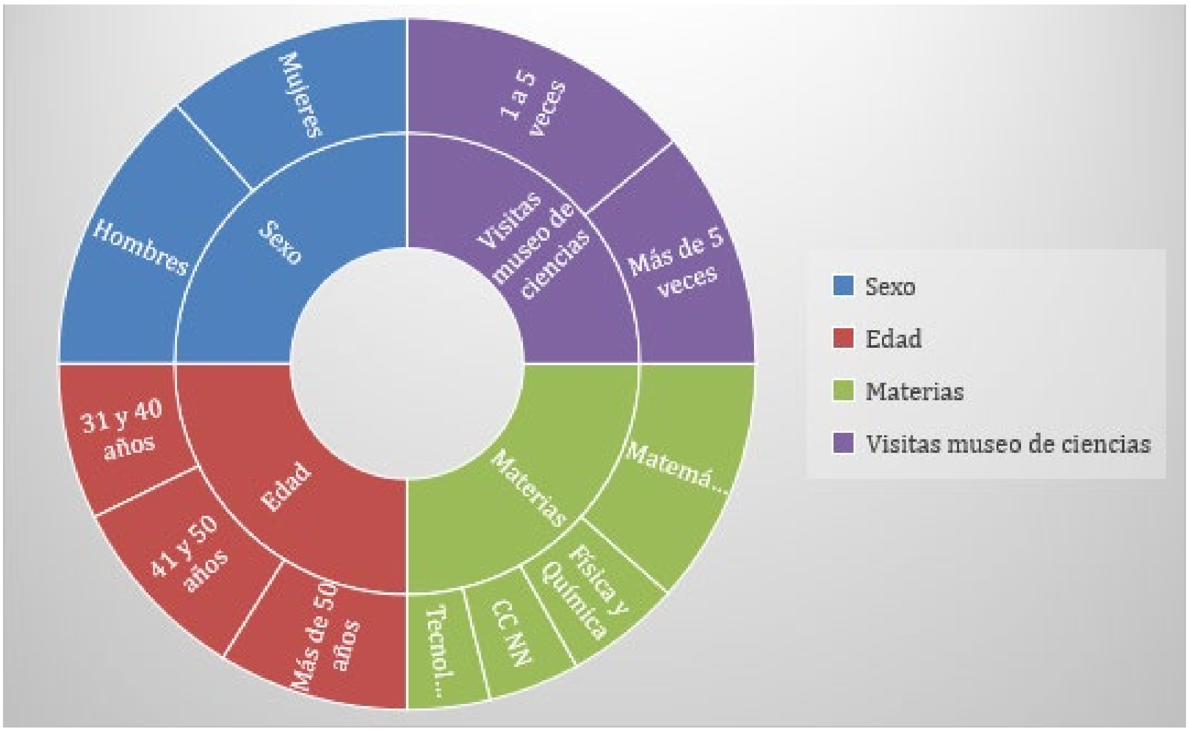


Figura 1. Características de los profesores participantes.

La validación del cuestionario incluyó dos procedimientos: verificación de adecuación y cálculo de confiabilidad. Se recurrió al juicio de expertos para delimitar la adecuación, aplicando la técnica Delphi [89] en la materia evaluada. Posteriormente, revisaron el cuestionario en dos fases respondiendo a un cuestionario de adecuación antes y después de realizar un estudio piloto. Su formación académica y su trabajo en diferentes universidades, escuelas secundarias y centros de formación del profesorado fueron los criterios de selección de los expertos. Como Escobar-Pérez y otros [90] concluyeron, los factores de ambigüedad del contenido de la tarea y su forma de presentación deben manejarse en el procedimiento de juicio pericial para que no aumente el error ni disminuya la confiabilidad.

El estudio piloto para evaluar la comprensión se desarrolló con un grupo de 10 docentes que desarrollaron las 17 preguntas con un total de 42 ítems de forma normal y con un tiempo promedio de 7 minutos aproximadamente.

Para el cálculo de la fiabilidad, la consistencia interna de los ítems se analizó utilizando el coeficiente alfa de Cronbach [91] y la confiabilidad. Es decir, la estabilidad o consistencia de los resultados obtenidos mediante el procedimiento de dos mitades. El coeficiente alfa de Cronbach es el método más utilizado entre los métodos basados en la covarianza de ítems. En general, este es preferible al método de dos mitades. Sin embargo, ambos métodos proporcionarían un coeficiente de confiabilidad aceptable [92].

La muestra seleccionada para recopilar los datos se llevó a cabo de entre los profesores que acompañaron en las visitas escolares al museo. Los estudiantes asistentes llevaron a cabo un taller científico apoyado por una estrategia STEAM, y al final de la visita, los profesores completaron el cuestionario. Decidimos usar una escala Likert de cuatro niveles ya que este tipo de instrumento nos ayuda a forzar al entrevistado a tomar partido en favor o en contra de la declaración, evitando el problema de centralidad en las respuestas, según Fox y Colás y Buendía [93,94].

Aplicamos la propuesta de Hamblenton [95], cuantificando las calificaciones en una escala de 0 a 3, donde 0 significa una falta de ajuste entre el ítem del cuestionario y el objeto del cuestionario, mientras que 3 es un ajuste perfecto entre ambos. Las cuatro opciones de respuesta para los ítems formulados son: "Totalmente en desacuerdo" = 0; "En desacuerdo" = 1; "De acuerdo" = 2; " Totalmente de acuerdo" = 3.

Para la entrevista seleccionamos a cinco profesores de manera aleatoria y proporcional a partir de la muestra que completó el cuestionario. Una profesora de Biología y Geología (B&G) con más de 20 años de experiencia docente; una profesora de Física y Química (F&C) con una experiencia de enseñanza entre 10 y 20 años; un profesor de Tecnología (TEC) con más de 20 años de experiencia docente; una profesora de Matemáticas (MAT1) con más de 20 años de experiencia, y un profesor de Matemáticas (MAT2) con una experiencia de enseñanza entre 10 y 20 años. Además, todos ellos habían utilizado diferentes metodologías de aprendizaje, pero no estaban familiarizados con la estrategia STEAM hasta que participaron en este estudio.

La información recopilada en estas entrevistas fue analizada utilizando las técnicas del discurso biográfico narrativo que propone Martín Izard [96], basadas en la experiencia profesional. Las preguntas fueron revisadas por los expertos mencionados anteriormente y probadas con tres miembros del cuerpo docente para verificar que las preguntas fueran comprensibles para todos los entrevistados: se utilizaron varias preguntas iniciales cortas para identificar y establecer confianza con el entrevistado, seguidas de tres preguntas abiertas. El entrevistado debía responder estas preguntas escribiéndolas después de discutirlas con el entrevistador. Las preguntas también estaban destinadas a profundizar en los objetivos a estudiar.. La primera pregunta abierta correspondió al primer objetivo, y las preguntas abiertas 2 y 3 correspondieron al segundo objetivo.

El procedimiento de recolección de datos fue planificado en cuatro etapas. Las tres primeras se realizaron en el museo y la última en el centro educativo.

Etapa 1: La etapa inicial tiene lugar a la llegada de los visitantes. Se contacta con el profesor para indicar cómo se organizará la visita y se requiere su aprobación para participar en el estudio de creencias del profesorado sobre el aprendizaje de los estudiantes utilizando una estrategia STEAM y el papel que puede desempeñar un museo de ciencias en dicho.

Etapa 2: Es la etapa de intervención y se desarrolla en el museo. El grupo de alumnos y el docente realizan un taller diseñado con una estrategia STEAM.

Etapa 3: En esta etapa, mientras los alumnos visitan el museo, el docente responde un cuestionario y se le informa sobre la posibilidad de contribuir al estudio con una entrevista.

Etapa 4: Finalmente, la entrevista se realiza en el centro educativo durante la semana siguiente a la visita al museo.

En las etapas 1, 3 y 4 se preservaron las garantías de cumplimiento ético a través del consentimiento informado.

3.2 Resultados

3.2.1. Adecuación del cuestionario

De los datos obtenidos de todos los profesores, el Alfa de Cronbach obtenido es $\alpha = 0{,}923$ y $R = 0{,}962$ en el método de dos mitades; para el profesorado de matemáticas, obtenemos $\alpha = 0{,}861$ y $R = 0{,}997$; y para el resto del profesorado, obtenemos $\alpha = 0{,}940$ y $R = 0{,}997$, que demuestran un alto índice de confiabilidad.

3.2.2. Creencias del profesorado respecto al enfoque STEAM para el aprendizaje de materias del ámbito científico y tecnológico.

Todos los profesores que han rellenado el cuestionario y, por tanto, la entrevista, declaran que utilizan con frecuencia medios tecnológicos en sus clases.

- **Resultados del cuestionario**.

De las preguntas 7 y 8 del cuestionario, además, tal y como podemos apreciar en la figura 2, el 91% usan libros de texto; más del 60% trabaja por proyectos o cooperativamente; pero los que utilizan las metodologías más actuales no superan el 20%, y solo el 9% de ellos conoce y utiliza la estrategia STEAM en sus clases.

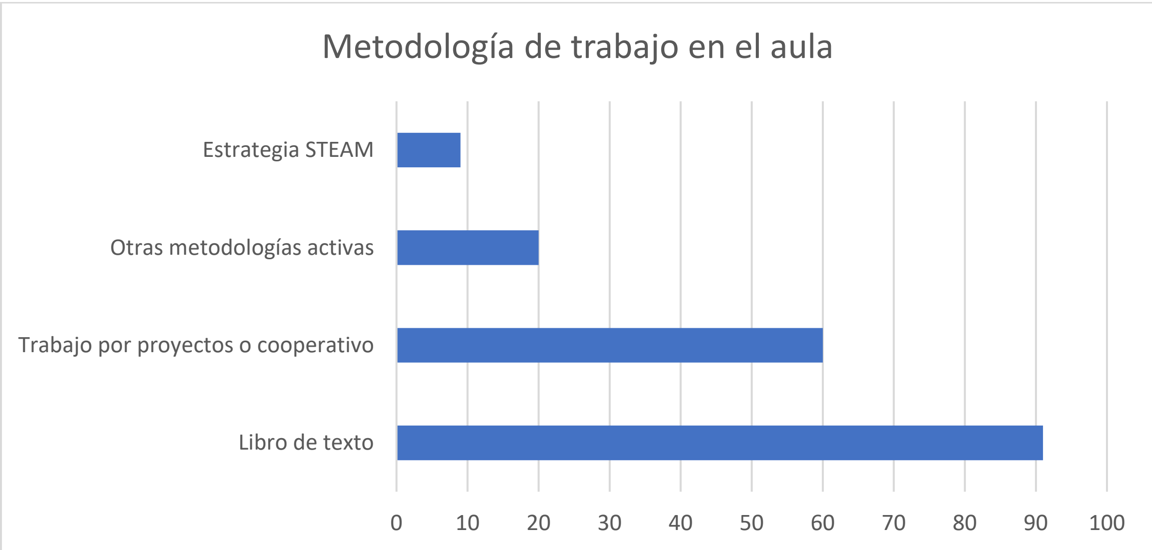


Figura 2. Metodología de trabajo en el aula

Los resultados obtenidos de la pregunta 9, relacionada con las creencias del profesorado de asignaturas del ámbito científico tecnológico de secundaria han sido que se encontraron predispuestos para trabajar simultáneamente en diferentes disciplinas del campo científico-tecnológico con una media aritmética (MA) 2.523, un coeficiente de variación (CV) 28,12% y una mediana (M) 3.

En la tabla 1 y figura 3 recogemos los resultados correspondientes a la cuestión 10 en las que se les pregunta si consideran que las siguientes asignaturas están relacionadas con la que enseñan:

Materia	MA	CV	M
Física y Química	2.538	26,13%	3
Matemáticas	2.292	36,76%	3
Biología y Geología	2.477	25,84%	3
Tecnología	2.277	33,40%	2
Informática	2.154	44,37%	2
Arte y Diseño	1.631	60,91%	2
Música	1.292	72,02%	1
Lenguas	1.800	54,86%	2
Educación Física	1.077	90,37%	1

Tabla 1. Relación entre la materia que enseño y otras.

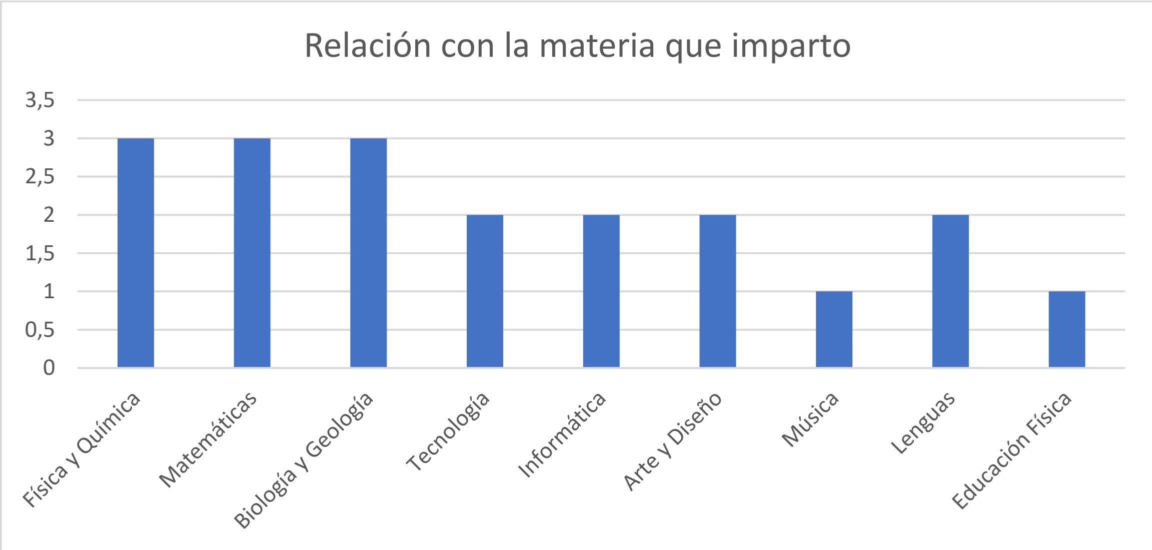


Figura 3. Valor de la mediana de la relación con la materia que imparto

Como era de esperar las asignaturas del área científica son las que establecen mayor relación entre ellas, seguidas de las del ámbito tecnológico y artístico. Finalmente, la música y la educación física son con las que menor relación encuentran respecto a la que imparten.

En la cuestión 11, relacionada con la percepción de si el profesorado se sentiría cómodo combinando la materia que enseña con otras, se obtienen los datos de la tabla 2 y la figura 4:

Materia	MA	CV	M
Física y Química	2.369	31,27%	3
Matemáticas	2.031	45,21%	2
Biología y Geología	2.585	25,49%	3
Tecnología	2.446	31,53%	3
Informática	2.431	30,83%	3
Arte y Diseño	1.892	53,76%	2
Música	1.354	74,36%	1
Lenguas	1.769	59,76%	2
Educación Física	1.231	84,69%	1

Tabla 2. Capacidad para enseñar otra materia.

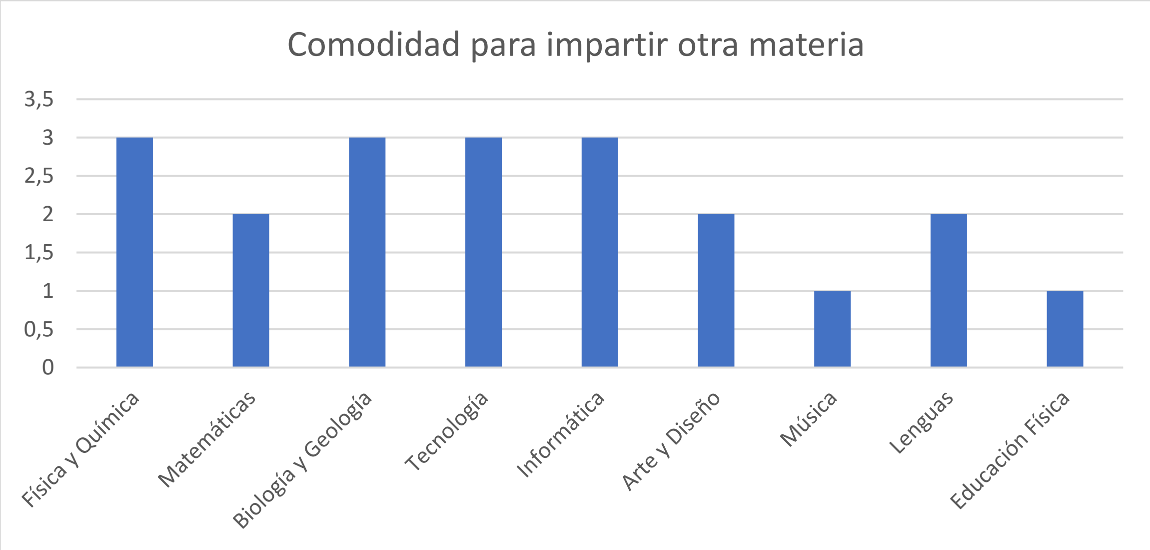


Figura 4. Valor de la mediana de la comodidad para impartir otra materia

En este caso las asignaturas Biología y Geología, Tecnología e Informática obtuvieron las medias aritméticas más altas, con valores de 2.585, 2.446 y 2.431 respectivamente. Esto sugiere que los participantes perciben una relativa comodidad en combinar estas materias con otras. Frente a las materias de Música y Educación Física que tienen las medias más bajas, con valores de 1.354 y 1.231 respectivamente. En términos de variabilidad en las respuestas, Música y Educación Física también presentan los coeficientes de variación más altos, con valores del 74.36% y 84.69% respectivamente. Esto sugiere que hay una mayor dispersión en las opiniones de los profesores en estas asignaturas en comparación con otras.

Las asignaturas de Matemáticas y Lenguas presentan coeficientes de variación del 45.21% y 59.76% respectivamente, lo que indica una variabilidad moderada en las opiniones sobre la comodidad de combinar estas materias.

Estos resultados reflejan que, en general, los docentes parecen sentirse más cómodos combinando ciertas asignaturas, como Biología y Geología, Tecnología e Informática, mientras que podrían enfrentar más retos en la combinación de asignaturas como Música y Educación Física. La variabilidad en las respuestas sugiere que existen opiniones divergentes en estas áreas en particular.

En la cuestión 12, describe la percepción del profesorado sobre el impacto de la estrategia STEAM, se obtienen los datos de la tabla 3:

Percepción profesorado impacto estrategia STEAM	MA	CV	M
Aprendizaje del estudiante	2.492	25,69%	3
La motivación del alumno	2.508	25,54%	3
Creatividad del alumno	2.477	26,81%	
El afianzamiento de conocimientos del alumno	2.431	29,96%	3
El estímulo de vocaciones científico-tecnológicas	2.431	28,14%	3

Tabla 3. Impacto de STEAM en el alumnado.

En este caso podríamos decir que los resultados revelan que los docentes perciben un impacto considerable de la estrategia STEAM en todos los aspectos considerados.

En la cuestión 13, relacionada con la percepción del profesorado sobre las dificultades en la aplicación de la estrategia STEAM, se obtienen los datos de la tabla 4 y la figura 5:

Percepción profesorado aplicación estrategia STEAM	MA	CV	M
Falta de apoyo administrativo y financiero	2.415	36,51%	3
Aumento de cargas de trabajo	1.846	33,49%	2
Falta de tiempo para preparar recursos STEAM	1.846	47,13%	2
Desconocimiento del uso de medios tecnológicos	1.938	42,65%	2
Desconocimiento de otras materias STEAM	1.938	41,67%	2
Falta de coordinación entre los diferentes departamentos	2.292	35,94%	2
Falta de tiempo para cumplir con el currículo	2.123	43,67%	2

Tabla 4. Dificultades en la implementación de la estrategia STEAM.

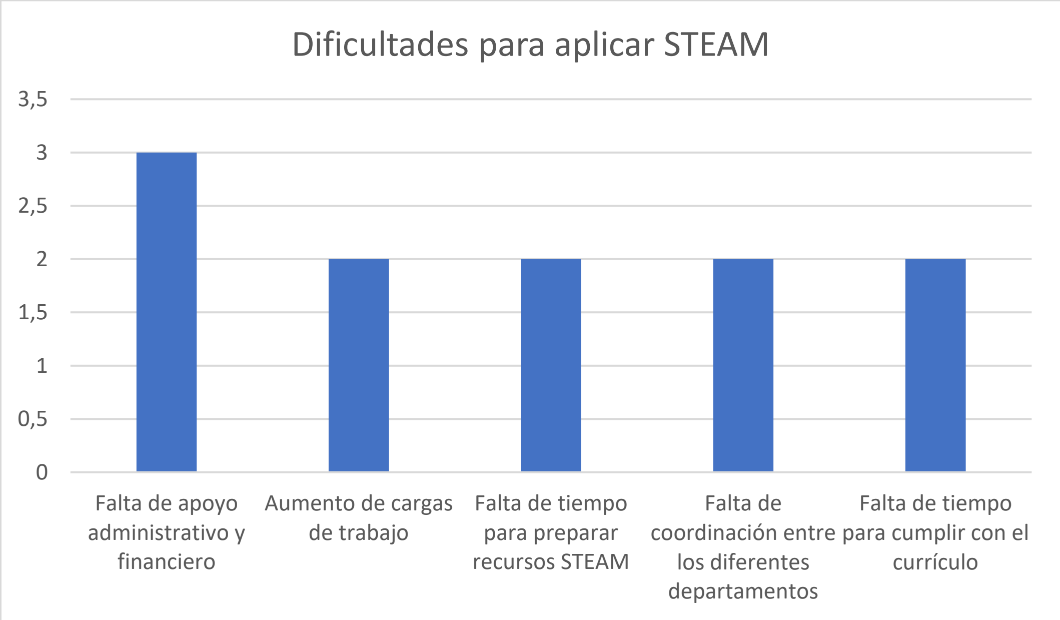


Figura 5. Dificultades en la implementación de la estrategia STEAM

En este caso cabe resaltar que la falta de apoyo administrativo y financiero emerge como la dificultad más significativa, con una media aritmética de 2.415. Esto sugiere que los docentes perciben que la falta de apoyo en términos administrativos y financieros es una de las principales barreras para la implementación exitosa de STEAM.

Falta de tiempo para cumplir con el currículo, también se destaca con una media aritmética de 2.123. Esto indica que los profesores sienten que la presión para cubrir el currículo existente puede interferir con la implementación efectiva de la estrategia STEAM.

El desconocimiento del uso de medios tecnológicos y el desconocimiento de otras materias STEAM presentan medias aritméticas de 1.938 en ambas categorías. Esto resalta la importancia de la formación y el conocimiento tecnológico interdisciplinario para una implementación fluida de STEAM.

Aumento de cargas de trabajo también se identifica como una dificultad relevante, con una media aritmética de 1.846. Esto sugiere que los profesores consideran que la integración de STEAM puede llevar a una mayor carga de trabajo.

Finalmente, la falta de tiempo para preparar recursos STEAM y la falta de coordinación entre los diferentes departamentos también son desafíos reconocidos, con medias aritméticas de 1.846 y 2.292, respectivamente.

Por otra parte, es interesante mostrar las diferencias encontradas si hacemos dos grupos: uno formado por los 30 profesores de Matemáticas y otro formado por los 35 profesores restantes de diferentes materias, que presentamos a continuación en la tabla 5.

	Mediana entre los profesores de Matemáticas	**Mediana entre el resto de profesores**
(10.8) Considero que la asignatura de lengua está relacionada con la materia que yo imparto	2	1
(11.4) Me sentiría cómodo combinando la materia que imparto con la Tecnología	3	2
(11.5) Me sentiría cómodo combinando la materia que imparto con la Informática	3	2
(11.8) Me sentiría cómodo combinando la materia que imparto con Lengua	2	1
(12) Creo que la estrategia STEAM puede tener un impacto positivo en el aprendizaje del alumno, la motivación, la creatividad, el afianzamiento de conocimientos del alumno y, el estímulo de vocaciones del ámbito científico-tecnológico.	3	2
(13.3) Creo que me voy a encontrar dificultades a la hora de aplicar la estrategia STEAM por falta de tiempo para preparar recursos.	3	2
(13.7) Creo que me voy a encontrar dificultades a la hora de aplicar la estrategia STEAM por falta de tiempo para cumplir con el currículo.	2	3

Tabla 5. Diferencias entre las creencias del profesorado de Matemáticas y el resto sobre la estrategia STEAM.

En el resto de apartados del cuestionario ambos grupos y, por tanto, en general están de acuerdo.

- **Resultados de las entrevistas**

En cuanto al uso de la estrategia STEAM para el aprendizaje de las ciencias, los entrevistados opinaron lo siguiente:

B&G dice que "mi materia que es Biología se complementa perfectamente con otras disciplinas ya que me permite realizar diferentes proyectos que requieren conocimientos de Tecnología, Agricultura, Electrónica, etc. Es muy complicado compaginar varias disciplinas ya que el profesor es un especialista en su materia y sólo tiene un conocimiento práctico de otras materias. Por eso es fundamental coordinar proyectos o programas con otros departamentos donde los profesores puedan ayudarse unos a otros. La ventaja fundamental aquí es que el estudiante puede ver el aprendizaje como un conjunto de habilidades y conocimientos para alcanzar un mismo objetivo".

F&C evalúa que "la interconexión de asignaturas y la coordinación entre departamentos es fundamental para determinar los contenidos básicos, el tiempo correcto de enseñanza y evitar la duplicación de otros. La ciencia está interrelacionada en el mundo real, por lo que no solo es posible sino, la mayoría de las veces, necesario mostrar esto en el aula. Hoy en día, el mayor problema que te puedes encontrar en el aula es la brecha de desarrollo del currículo en la materia y siempre depende de la materia que domine el profesor. Creo que si los integramos juntos y superamos este obstáculo, pero también se ralentiza el proceso, lo que desanima en muchos casos. Otra debilidad destacable sería la movilidad de los docentes y su temporalidad".

El TEC destaca que "para la asignatura de Tecnología es importante utilizar lo aprendido en otras asignaturas. Quiero que no solo aprendan sobre mi tema en una sola visita, sino que también aprendan sobre otros temas. Es importante tener una actitud más activa hacia su autoformación en Ciencia y Tecnología en aquellas áreas que les interesen. También es fundamental que se sientan capaces de hacer algo por sí mismos a través de proyectos. La posible debilidad en esta área es el deseo de abarcar demasiado y saturarse de nuevos conocimientos que seguramente olvidan rápidamente".

MAT1 considera que "la enseñanza de las matemáticas ya está relacionada con otras disciplinas ya que los docentes tratan de contextualizarlas y hacer comprender a los estudiantes su posible aplicación. Creo que no sería tan positivo integrar las Matemáticas con otras disciplinas ya que esta ciencia acabaría reduciéndose a un mero instrumento para desarrollar otras materias."

MAT2 considera que "es sumamente positivo que otras disciplinas apliquen las Matemáticas para enseñar. Cuando enseñamos Matemáticas a través de problemas, ya los estamos relacionando con otras disciplinas: la realidad, las situaciones de hoy, las noticias, etc. Por otro lado, las Matemáticas se convierten en un instrumento, lo que le hace perder su sentido abstracto y su propia identidad como un lenguaje de toda la ciencia."

3.2.3. Creencias de los profesores del ámbito científico tecnológico sobre el impacto de las visitas a los Museos de Ciencias en la integración de la estrategia STEAM.

- **Resultado del cuestionario.**

  En las cuestiones 14, 15 y 16 relacionadas con la percepción del profesorado sobre el impacto de las visitas a museos de ciencias en la integración de la estrategia STEAM, se obtienen los datos de la tabla 6 y la figura 6 en la que utilizamos la mediana (M) para visualizar los resultados:

	MA	CV	M
Considero un museo de ciencias como un espacio de aprendizaje para el alumnado	2.938	8.242%	3
Considero que las vistas de los museos de ciencias podrían ayudar a aplicar la estrategia STEAM con mis alumnos	2.708	21,38%	3
La estrategia STEAM se adapta mejor a un entorno extraescolar, como un museo de ciencias, que en el aula	2.323	29,58%	2

Tabla 6. Visitas a museos de ciencia y estrategia STEAM.

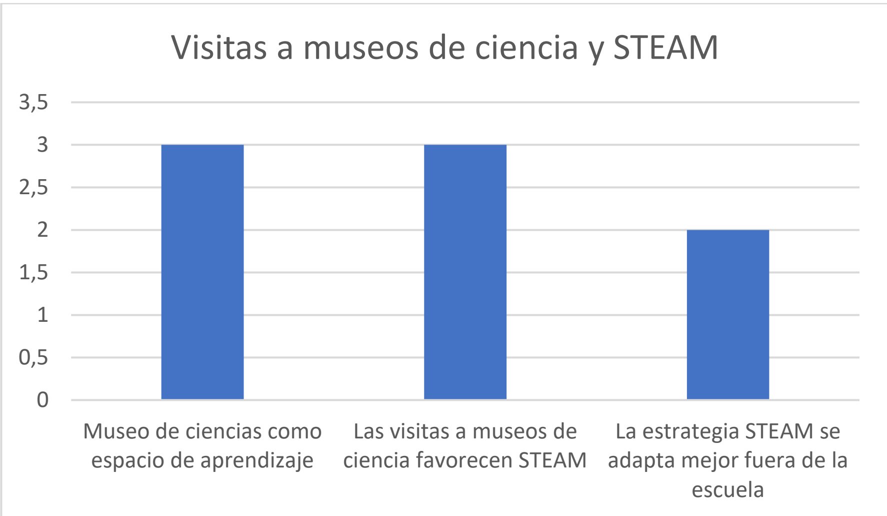


Figura 6. Visitas a museos de ciencia y estrategia STEAM.

Considero un museo de ciencias como un espacio de aprendizaje para el alumnado obtiene una puntuación significativa, con una media aritmética de 2.938. Esto indica que los docentes en general ven los museos de ciencias como lugares adecuados para el aprendizaje de los estudiantes.

En el caso de considerar que las visitas a los museos de ciencias podrían ayudar a aplicar la estrategia STEAM con mis alumnos, presenta una media aritmética de 2.708. Esto sugiere que los profesores reconocen el potencial de las visitas a museos de ciencias para fortalecer la implementación de STEAM en el aula.

Finalmente, la estrategia STEAM se adapta mejor a un entorno extraescolar, como un museo de ciencias, que en el aula, obtiene una media aritmética de 2.323. Atendiendo a los resultados podríamos decir que algunos docentes consideran que STEAM puede ser más adecuado para ser implementado en contextos externos al aula, como los museos de ciencias.

- **Resultados de la encuesta.**

En este apartado incluimos los resultados de las preguntas 2 y 3 libres realizadas a los profesores entrevistados.

Respecto a las actividades que producen los museos de ciencia los entrevistados valoran:

B&G afirma que: “los talleres son indispensables porque los estudiantes prestan más atención al estar fuera del ámbito escolar, y además son impartidos por alguien que no es el docente habitual. Los estudiantes están en condiciones de mostrar los conocimientos adquiridos en el aula o también pueden utilizar lo aprendido en el taller para utilizarlo en el aula. Por otro lado, los módulos interactivos permiten el autoaprendizaje. Es importante reconocer que muchos de los módulos o talleres son imposibles de realizar en clase y es la única forma de mostrar algunas teorías o demostraciones, de manera sencilla.”

F&C destaca que “los talleres específicos complementan lo aprendido en el aula, especialmente los diseñados como trabajo de investigación”.

TEC comenta que “cada actividad es interesante. Tienen la oportunidad de ver y manipular ideas en el museo que no podemos ver en nuestras clases. Las actividades no tienen que estar relacionadas con el tema. El museo les permite descubrir un mundo de posibilidades para ellos. Los contenidos específicos de la materia no son importantes en absoluto, lo es tanto las habilidades que los estudiantes puedan adquirir. Además, pueden analizar y manejar diferentes dispositivos que no están disponibles en la escuela para conocer de primera mano algunos de los conceptos con los que que no están en contacto en su vida diaria”.

MAT1 apunta que “lo mejor del museo son los talleres y las actividades interactivas dirigidas por el personal del museo, explicando el origen y los posibles resultados de la experiencia, ya que los alumnos muchas veces interactúan con la actividad, pero no saben de qué se trata. "

MAT2 añade que “es importante contextualizar las Matemáticas haciéndolas comprensibles para los alumnos. Además, considero que la comprensión de conceptos y algoritmos es una de las partes más relevantes en el aprendizaje de las Matemáticas.”

Respecto a la pregunta sobre el papel del museo como catalizador de nuevas metodologías y estrategias de aprendizaje, como la STEAM, es percibido por el docente de la siguiente forma:

B&G dice que “estoy completamente de acuerdo con el uso de este tipo de espacios para el aprendizaje, especialmente si están enfocados en la etapa inicial de la educación. Estos ambientes atraen también a la familia, punto muy importante para despertar su interés. El museo nos enseña a todos”.

F&C muestra que “los estudiantes encuentran la experiencia más emocionante cuando van al museo y están en un ambiente no formal, aunque están haciendo lo mismo que en el aula. Son mucho más receptivos. De ahí la importancia de que la visita al museo forme parte de la programación del aula, como puede ser el patio de recreo o el recibidor de una casa. La visita al museo puede ser un momento donde el docente encuentra la oportunidad de aplicar este método en las clases y cambiar su metodología.”

El TEC comenta que “el museo es totalmente complementario a la escuela. Puede adaptarse mejor que las escuelas porque puede tener diferentes recursos que en las aulas no tienen. Al mismo tiempo, el museo puede preparar actividades que tanto tiempo y recursos requerirían de los profesores. Por otro lado, las escuelas podrían realizar actividades STEAM con sus posibles recursos, pero requerirían mucho tiempo y seguimiento por parte de los docentes. Si el museo pudiera ayudarnos a hacer este cambio metodológico, sería un gran beneficio para nosotros. Además, una posible ventaja del MUSEO sería que los alumnos se acercaran más al aprendizaje saliendo de la rutina: diez minutos en el museo son más útiles que una hora en el aula.”

MAT1 enfatiza que “el museo es un lugar maravilloso para hacer esto. Los recursos materiales son más grandes que cualquier escuela pública. Si consideramos la buena formación del personal, puede ser un complemento perfecto para la formación de nuestros alumnos.”

MAT2 cree que “el museo puede adaptarse mejor a una estrategia STEAM. Básicamente, esto se debe a que lo más probable es que tengan más recursos para contextualizar las Matemáticas y hacer más visibles las aplicaciones en otras disciplinas”.

3.3 Discusión.

Comenzando nuestra discusión sobre el diseño del cuestionario podemos decir que, como hemos mostrado en los diferentes gráficos, y tras analizar los resultados, consideramos las medianas como la mejor medida de las creencias del profesorado, ya que tenemos coeficientes de variación muy elevados. Sin embargo, hay una excepción en la pregunta 15, donde parece haber un gran consenso de que un museo de ciencias es un espacio de aprendizaje para los estudiantes.

El profesorado evalúa muy positivamente la posibilidad de trabajar de manera interdisciplinaria en el campo científico. Esto favorecerá tanto la motivación como la creatividad de los estudiantes, redundando en un mejor aprendizaje y una mayor predisposición a desarrollar vocaciones científico-tecnológicas. Dentro de las asignaturas STEAM, se consideran en mayor medida las Matemáticas, y la Tecnología, la Informática y el Dibujo en menor medida. Además, resaltan la importancia de la comprensión lectora. Sin embargo, a la hora de expresar su confianza en la enseñanza de su asignatura junto con otra asignatura del campo, es Matemáticas con la que se enfrentan a la mayor dificultad.

Por otra parte, las mayores dificultades que experimentanen la implementación de la estrategia STEAM son en el apoyo institucional y financiero, y la coordinación entre los diferentes departamentos.

Por último, aunque ven el museo como un espacio ideal para desarrollar nuevas estrategias de aprendizaje STEAM, cabe destacar que creen que también sería apropiado en el aula.

Capítulo IV: Diseño de un módulo interactivo basado en el modelo de van Hiele: El caso del teorema de Pitágoras.

En este capítulo, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo anterior y, con el propósito de incorporar contenidos a la exposición permanente del museo apropiados para facilitar la integración de la estrategia STEAM, proponemos la aplicación de un modelo de referencia en educación matemática, el modelo de van Hiele, para el diseño de módulos interactivos de museos centrados en cualquier contenido matemático. Como ejemplo particular se plantea una caracterización de dicho modelo para el caso del aprendizaje del teorema de Pitágoras. Además, se propone el diseño de un módulo interactivo basado en dicha caracterización para el Museo Didáctico e Interactivo de Ciencias MUDIC-VBS-CV centrado en este contenido matemático.

4.1 Teorema de Pitágoras y van Hiele.

En primer lugar, presentamos el teorema de Pitágoras desde su recorrido histórico, la importancia en el currículo de Secundaria, y desde propuestas metodológicas para su enseñanza. En particular recogemos investigaciones que consideran el modelo de van Hiele como referencia en la enseñanza de este contenido matemático.

El teorema de Pitágoras es considerado con frecuencia como el más famoso de la historia [97]. En la Edad Media se le conocía como el “pons asinorum” que quiere decir “el puente de los asnos”, el cual había que cruzar (saber el teorema) para ser considerado una persona culta.

El teorema afirma que para cualquier triángulo rectángulo de catetos A, B e hipotenusa C se cumple que $C^2 = A^2 + B^2$. La acepción geométrica de dicho teorema se basa en la comparación de las áreas de los cuadrados que se forman sobre los lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la siguiente figura:

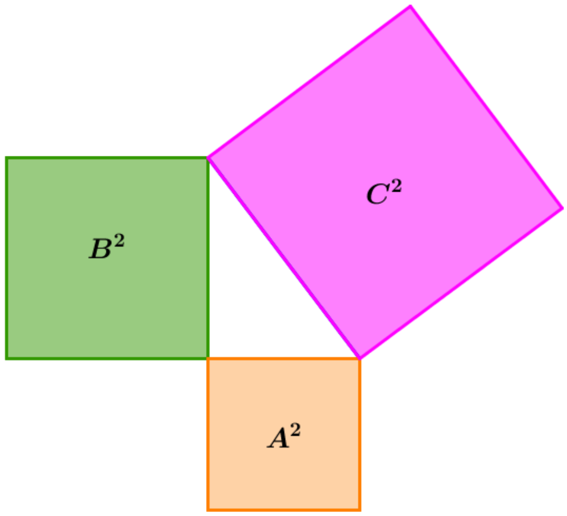


Figura 7: Acepción geométrica del teorema de Pitágoras

A lo largo de la historia se han propuesto una infinidad de demostraciones del teorema utilizando métodos muy diversos. Por ejemplo, el matemático estadounidense Loomis catalogó 367 pruebas diferentes en su libro [98]. Además, clasificó las demostraciones en cuatro grandes grupos: algebraicas (donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo), geométricas (en las que se realizan comparaciones de áreas), dinámicas (a través de las propiedades de fuerza, masa) y las cuaterniónicas (que utilizan vectores).

El teorema de Pitágoras supone una pieza fundamental del currículo de Secundaria. Su enseñanza se considera crucial no solo por su valor formativo sino por su aspecto instrumental (imprescindible para el cálculo de distancias, magnitudes vectoriales, etc.). Es por ello que numerosas investigaciones del ámbito educativo se han preocupado por profundizar en el aprendizaje de este teorema y de sus demostraciones.

En concreto varios trabajos proponen distintas estrategias metodológicas con el propósito de contribuir a la enseñanza del teorema de Pitágoras. Por ejemplo, Arrieta et al. [99] plantean el uso de materiales manipulativos como el del geoplano para su enseñanza.

Por otro lado, numerosos estudios plantean demostraciones del teorema a lo largo de la historia como herramienta didáctica [100-103]. Estos trabajos se centran en demostraciones geométricas del teorema basadas en la comparación de áreas. Este tipo de demostraciones permiten ser planteadas en forma de puzle geométrico lo que supone una oportunidad para los alumnos de trabajar las habilidades de visualización y la exploración mediante diferentes representaciones.

A pesar de la relevancia del modelo de van Hiele en la estructuración de la enseñanza de contenidos geométricos, existen pocas propuestas basándose en este modelo que tratan la enseñanza del teorema de Pitágoras. En una de ellas [104] se propone una estrategia que se apoya en el uso del software de geometría dinámica GeoGebra para alumnos de Secundaria. A pesar de que el estudio pretende identificar el nivel de razonamiento geométrico de cada estudiante a través de actividades relacionadas con el teorema de Pitágoras, no se proporcionan descriptores de los niveles para este concepto.

Por otro lado, Flores [105] realiza una propuesta para una unidad didáctica donde se muestra la posibilidad de desarrollar conocimiento sobre el teorema de Pitágoras en cada uno de los niveles de van Hiele. En su trabajo Flores presenta distintas versiones de la demostración de Euclides para cada uno de los niveles de van Hiele.

A la vista de la escasez de trabajos que vinculan la enseñanza del teorema de Pitágoras con el modelo de van Hiele, se propone a continuación una caracterización de los niveles teniendo en cuenta las habilidades de Hoffer [21]. Cabe destacar que esta caracterización puede servir para diseñar distintos módulos de distintos niveles que estén relacionados con esta temática. Posteriormente (sección 4.3) se realiza una propuesta concreta de módulo interactivo para el aprendizaje del teorema de Pitágoras en el Museo de Ciencias MUDIC basada en esta caracterización.

4.2 Caracterización de los niveles de van Hiele para la enseñanza del teorema de Pitágoras

A continuación, se realiza una propuesta de aplicación del modelo de van Hiele para el aprendizaje del teorema de Pitágoras y sus demostraciones. Dicha propuesta se recoge en la tabla 7, y consiste en una caracterización explícita de los cuatro niveles de razonamiento contemplando además todas las destrezas o habilidades básicas identificadas por Hoffer: visual, verbal, pictórica, lógica y aplicada. Como se ha dicho anteriormente, estas habilidades caracterizan el conocimiento geométrico en cada uno de los niveles de van Hiele y pueden ser descritas explícitamente para estructurar el dominio de distintos contenidos geométricos.

Para la confección de la tabla se ha seguido la clasificación en cuatro niveles de van Hiele teniendo en cuenta el modelo de Hoffer y el trabajo de Jaime y Gutiérrez [32]. Dicha tabla recoge las diferentes habilidades que se podrían desarrollar en la interacción con el módulo interactivo, y servirá de base para su diseño, así como para el guión y la formación de los mediadores y educadores.

Destrezas\ Niveles	Nivel 1 Visualización	Nivel 2 Análisis	Nivel 3 Clasificación	Nivel 4 Deducción formal
VISUAL	Reconoce distintos triángulos y ángulos en un dibujo.	Reconoce ángulos rectos y triángulos rectángulos, también como parte de figuras más grandes.	Comprende la congruencia de superficies por adición y sustracción. Comprende demostraciones visuales del teorema de Pitágoras.	Comprende relaciones entre distintas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras.
VERBAL	Asocia el nombre de triángulo con su figura. Interpreta frases que describen los triángulos.	Describe triángulos rectángulos haciendo alusión a sus partes: catetos, hipotenusa, base, altura, ángulo recto.	Formula una definición precisa de triángulo rectángulo. Formula el teorema de Pitágoras en términos de la relación entre entre superficies cuadradas construidas a partir de catetos e hipotenusa.	Comprende el teorema de Pitágoras como propiedad necesaria y suficiente para definir un triángulo como rectángulo.
PICTÓRICA	Dibuja ángulos y triángulos, etiquetando con precisión sus partes.	Traduce información verbal sobre propiedades de triángulos rectángulos para dibujarlos.	Es capaz de construir otras figuras partiendo de triángulos rectángulos.	Traduce información verbal sobre demostraciones del teorema de Pitágoras en representaciones pictóricas.
LÓGICA	Diferencia triángulos de otras figuras geométricas. Comprende la conservación de la forma de los triángulos al variar de posición.	Comprende la clasificación de triángulos según sus lados y ángulos. Identifica el cuadrado de la longitud de un lado del triángulo rectángulo con el área de dicho cuadrado	Comprende los sucesivos pasos de una demostración del teorema de Pitágoras Utiliza el recíproco del teorema de Pitágoras para determinar qué triángulos son rectángulos y cuáles no.	Comprende la necesidad de realizar demostraciones para verificar el teorema de Pitágoras. Es capaz de realizar demostraciones del teorema de Pitágoras utilizando reglas lógicas.
APLICADA	Reconoce ejemplos de triángulos y ángulos en objetos físicos.	Reconoce el uso del teorema de Pitágoras en otros ámbitos.	Es capaz de resolver problemas de la vida cotidiana aplicando el teorema de Pitágoras.	Desarrolla modelos matemáticos que involucran el teorema de Pitágoras para representar sistemas abstractos o para describir fenómenos naturales, físicos os sociales.

Tabla 7. Niveles de van Hiele y teorema de Pitágoras.

Cabe recordar que los visitantes del museo MUDIC son principalmente alumnos de Educación Primaria y Secundaria que se encuentran sobre todo en los niveles 1 (visualización) y 2 (análisis). La propuesta incluye también la descripción de los cuatro niveles con el fin de brindar la posibilidad de avanzar a alumnos en niveles de razonamiento más avanzados. Además, pretende servir de guía para el diseño de otros módulos que abarquen distintos niveles de razonamiento geométrico.

4.3 Propuesta de módulo interactivo para el aprendizaje del teorema de Pitágoras en una visita a un museo de ciencias.

Partiendo de la caracterización desarrollada en la tabla 7, a continuación proponemos un diseño de módulo interactivo para el aprendizaje del teorema de Pitágoras. Las actividades de aprendizaje quedan secuenciadas en tres etapas: actividades pre-visita, actividades de interacción con el módulo y actividades post-visita. La secuenciación presentada tiene en cuenta la propuesta de estructuración de actividades de visitas a museos que faciliten el aprendizaje del alumnado [70]. Además, se relacionan dichas etapas con las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de van Hiele (ver capítulo 2.1). En la propuesta se trabajan los cuatro niveles de razonamiento de van Hiele y las cinco habilidades identificadas por Hoffer (ver capítulo 2.1). Para cada etapa se plantea además su correspondiente aplicación al interactuar con los mediadores o educadores y el módulo.

El desarrollo de las tres etapas es el siguiente:

ETAPA 1: Pre-visita.

La pre-visita coincide con la fase de información descrita por van Hiele. Como se ha visto en la sección 2.1. Durante esta fase el docente realizará actividades diseñadas para averiguar el conocimiento previo de los alumnos sobre los principales elementos que se usarán durante la interacción con el módulo. Con este fin se preguntará sobre figuras geométricas para comprobar si distinguen los triángulos y si conocen sus propiedades. Si no es un grupo escolar o el profesor no ha realizado la pre-visita, el educador conversará con los estudiantes o visitantes sobre los triángulos aprovechando la interacción con ellos para introducir vocabulario específico a su nivel correspondiente de van Hiele.

A los visitantes situados en el comienzo de un nivel 1 de van Hiele, como podrían ser alumnos de Educación Infantil, se les pedirá que elijan de entre varias fotografías de un cajón las que corresponden a triángulos después de haber descrito sus características y comentando posteriormente los acierto o errores. Con alumnos en niveles superiores se comenzará utilizando láminas con diferentes ángulos para compararlos y medirlos con el fin de distinguir ángulos rectos de otros. A continuación, se presentará una colección amplia de diferentes triángulos con el fin de confeccionar un listado de propiedades que los caracterizan según sus lados o ángulos. Además, se realizarán comprobaciones numéricas de la verosimilitud del teorema de Pitágoras en diferentes situaciones donde aparezcan triángulos rectángulos.

En esta etapa se abordarán todas las destrezas de Hoffer de los niveles de visualización y análisis.

ETAPA 2: Interacción con el módulo (visita al museo).

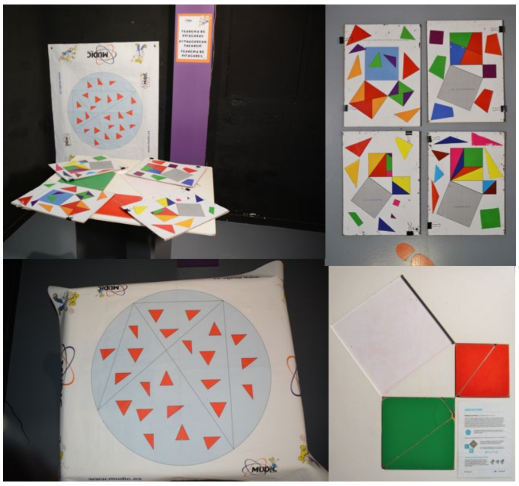


Figura 8. Módulo Teorema de Pitágoras

En esta etapa se desarrollan las fases de orientación dirigida y explicitación (ver sección 2.1) del modelo de van Hiele a través de tres actividades.

Primera actividad de interacción con el módulo: Reconocimiento de Triángulos rectángulos.

Los estudiantes, mediante la orientación dirigida de educador o profesor, exploran los triángulos con la esquina de una hoja de papel para distinguir triángulos rectángulos, obtusángulos y acutángulos. El módulo que tiene forma de mesa, aparece oculto bajo una cubierta, como un mantel, en la que aparecen dibujados múltiples triángulos para identificar aquellos que sean rectángulos. Un ejemplo se muestra en la figura 9.

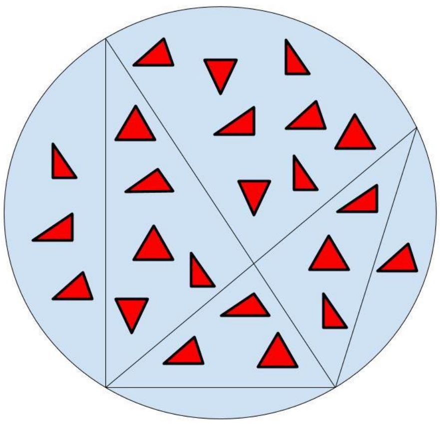


Figura 9: Primera actividad: reconocimiento de triángulos rectángulos

A continuación, se considerarán para esta actividad varias fotografías de figuras artísticas o cotidianas que podrán explorar para buscar diferentes triángulos.

En esta primera actividad afrontaremos las destrezas visual, verbal, lógica y aplicada de los niveles 1 y 2, así como la visual del nivel 3.

Segunda actividad de interacción con el módulo: Puzles de demostración del teorema de Pitágoras.

Al tratar con un museo interactivo en el que se prioriza la manipulación por parte de los visitantes es primordial desarrollar estas destrezas a través del módulo. Por ello en esta etapa los estudiantes, distribuidos en grupos y mediante la orientación dirigida de educador o profesor, intentarán reconstruir diversos puzles que demuestran el teorema de Pitágoras.

Los puzles se basan en demostraciones por comparación de superficies de figuras congruentes por adición o sustracción. Las demostraciones seleccionadas abarcan distintos niveles de dificultad y se pueden encontrar en la recopilación de Loomis [98] o González Urbaneja [103]. A continuación, se muestran dos de ellas a modo de ejemplo. La primera se le atribuye a Pitágoras y es de nivel sencillo de resolución (ver figura 10). En la figura se presenta la descomposición de un cuadrado en cinco partes: un cuadrado de lado la hipotenusa y cuatro triángulos rectángulos. Estas partes reordenadas convenientemente (figura 10 derecha) dan lugar los cuatro triángulos rectángulos y dos cuadrados construidos sobre los catetos. Sustrayendo en ambas partes los cuatro triángulos rectángulos se obtiene la relación del teorema de Pitágoras.

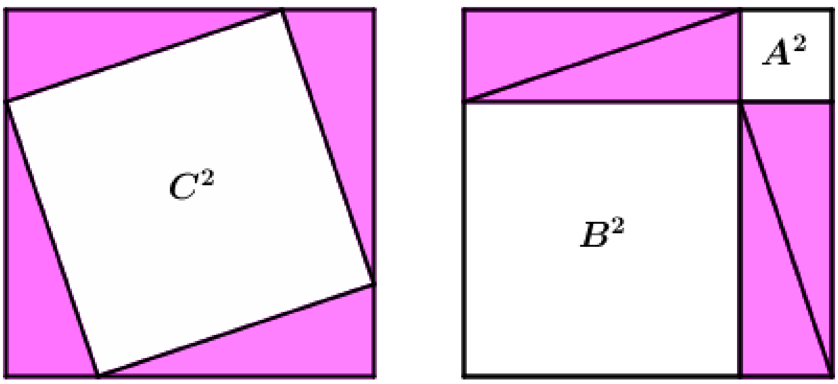


Figura 10: Demostración atribuida a Pitágoras (~569 a.C.,~ 476 a.C.)

El segundo ejemplo de demostración es la propuesta por el matemático Bhaskara (1114-1185) de nivel más avanzado (ver figura 11). Dado un triángulo rectángulo de catetos

A y B e hipotenusa C, la primera configuración (figura 11, izquierda) presenta un cuadrado de lado C dividido en 5 partes. Estas partes se reordenan dando lugar a otra figura (figura 11 derecha) que puede descomponerse en dos cuadrados: uno de lado A y otro de lado B. Comparando áreas se obtiene la igualdad deseada: $C^2=A^2 + B^2$.

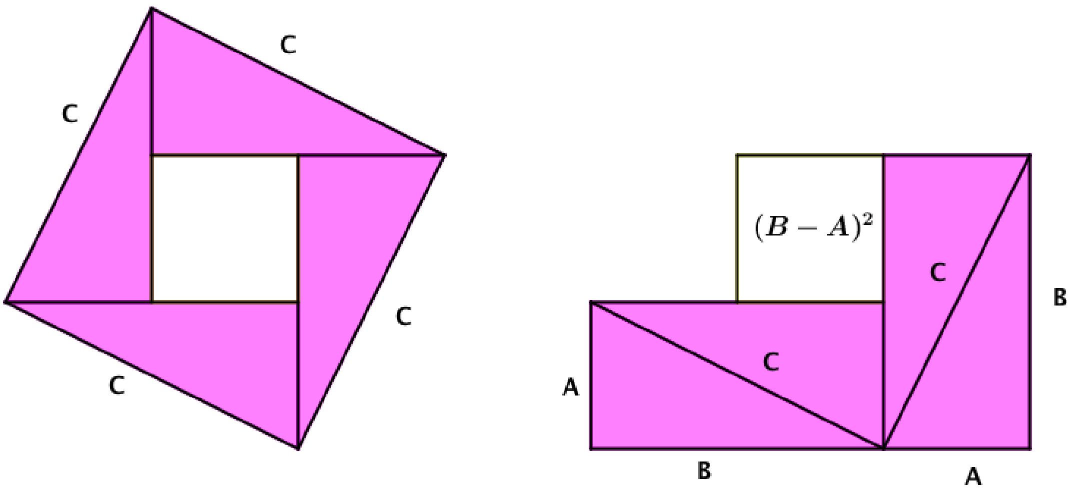


Figura 11: Demostración de Bhaskara (1114-1185)

Para completar la colección de puzles se consideran además las siguiente demostraciones por su fácil adaptación a la manipulación: Demostración de Liu Hui (China 300 d. C.), de Thâbit Ibn Qurra (826-901), de Leonardo da Vinci (1452-1519), de Henry Perigal (1801–1898), de Frédéric Ozanam (1813-1853), de Anaricio-Göpel (Hacia 1824), de Johannes Eduard Böttcher (1847-1919) y de Elisha Scott Loomis(1852-1940). Todas ellas pueden encontrarse en el trabajo recopilatorio de Loomis [98] o González Urbaneja [103].

A lo largo de esta actividad se animará a los estudiantes de todos los niveles a explorar las distintas demostraciones mientras se trabaja el lenguaje correspondiente a cada nivel. Esta actividad acomete destrezas como la visual de nivel 2, 3 y 4 y lógica de nivel 2 y 3.

Tercera actividad de interacción con el módulo: Puesta en común.

Durante las dos actividades anteriores se han trabajado tanto la fase 2 (orientación dirigida) como la fase 3 (explicitación) de van Hiele (ver sección 2.1). Al finalizar dichas actividades, se propone una tercera que se centrará en la fase 3 (explicitación). Durante esta tercera actividad los estudiantes intercambian sus visiones sobre las estructuras que han sido observadas (ángulos, triángulos, lados, área, perímetro) construyendo sobre sus experiencias previas.

Esta actividad de puesta en común podrá beneficiar a los visitantes de distintos niveles de van Hiele. Por ejemplo, algunos visitantes de nivel 1 podrán intentar identificar el cuadrado de la longitud de los lados con el área de las figuras cuadradas correspondientes y de enunciar el teorema de Pitágoras. A visitantes de niveles superiores se les invitará a comparar las diferentes demostraciones con sus compañeros y reflexionar sobre si son generalizables a cualquier triángulo rectángulo. Además, se pondrá de manifiesto si la actividad anterior ha generado en ellos el interés por encontrar una generalización de estas demostraciones o una demostración más formal.

Esta actividad aborda principalmente las destrezas verbal y lógica de los tres primeros niveles, la aplicada de los dos primeros niveles y la visual de los cuatro niveles.

ETAPA 3: Post-visita.

Esta etapa abarca las fases 4 (orientación libre) y 5 (integración) de van Hiele (ver sección 2). Los estudiantes se enfrentan a retos más complejos que pueden resolverse de diferentes formas. Orientándose ellos mismos, muchas relaciones entre los objetos de estudio se hacen explícitas. Además, se revisa y resume lo aprendido.

Para esta etapa se pueden proponer actividades para integrar el teorema de Pitágoras en otros ámbitos, siendo capaces de resolver problemas de la vida cotidiana haciendo uso de él, graduando la dificultad dependiendo del nivel de razonamiento de los alumnos. Además de utilizar paquetes informáticos como Cabri o GeoGebra para reproducir demostraciones del teorema de Pitágoras y compararlas.

En esta etapa se abordarán las destrezas verbal, pictórica, lógica de los niveles 3 y 4, y aplicada de todos los niveles.

4.4 Análisis de la propuesta

Para el análisis de la visita propuesta se ha tenido en cuenta de qué manera podría contribuir cada una de las etapas (pre-visita, módulo y post-visita) a visitantes de los cuatro niveles de van Hiele teniendo en cuenta las habilidades de Hoffer: visual, verbal, pictórica, lógica y aplicada. El análisis se recoge en la siguiente tabla.

Destrezas\ Niveles	Nivel 1 Visualización	Nivel 2 Análisis	Nivel 3 Clasificación	Nivel 4 Deducción formal
VISUAL	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3)	Pre-visita Módulo (actividades 1, 2 y 3)	Módulo (actividades 1, 2 y 3)	Módulo (actividades 2 y 3) Post-visita
VERBAL	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3)	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3)	Módulo (actividad 3) Post-visita	Post-visita
PICTÓRICA	Pre-visita	Pre-visita	Post-visita	Post-visita
LÓGICA	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3)	Pre-visita Módulo (actividades 1, 2 y 3)	Módulo (actividades 2 y 3) Post-visita	Post-visita
APLICADA	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3) Post-visita	Pre-visita Módulo (actividades 1 y 3) Post-visita	Post-visita	Post-visita

Tabla 8. Niveles de van Hiele y habilidades de Hoffer.

Como se observa en la tabla 8, la visita completa se ha diseñado de tal manera que pueda contribuir a trabajar las habilidades de visitantes en cualquier nivel de razonamiento. Así, un visitante situado en un nivel 1 de van Hiele puede beneficiarse por ejemplo de las actividades 1 y 3 del módulo trabajando las habilidades visual, verbal, lógica y aplicada, y de la actividad 2 para las destrezas visual y lógica, adquiriendo de esa forma conocimientos propios del nivel 2. Por otro lado, visitantes en niveles de van Hiele superiores pueden trabajar las habilidades de Hoffer tanto en el módulo como en la post-visita.

Capítulo V: Propuesta para el diseño de un taller basado en la estrategia STEAM para el aprendizaje de las matemáticas. El caso del taller de criptografía.

En la enseñanza de las matemáticas, se hacen grandes esfuerzos, y se emplean diversas estrategias de enseñanza con el fin de facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En el capítulo anterior hemos visto cómo los profesores consideran que la estrategia STEAM puede resultar muy positiva en el proceso de aprendizaje del alumno, pero que encuentran obstáculos para su implementación debido a la falta de tiempo, de recursos económicos y, en el caso de las matemáticas que esta materia no se reduzca a un mero instrumento.

Por ello, en este capítulo nos planteamos el diseño de talleres cuyas actividades se integren en el currículo y, por tanto, se puedan integrar de manera eficiente en la programación de aula, que sean prácticas y enmarcadas en contextos reales y atractivas para los estudiantes, al mismo tiempo que el profesor considere los materiales creados como recursos válidos también para trabajar en el aula.

Para ello, considerando el aprendizaje en entornos no formales de los museos de ciencia, la estrategia STEAM y el modelo de van Hiele como referencia didáctica, proponemos el diseño de un taller general que tenga entre sus objetivos el aprendizaje de las matemáticas y lo utilizamos para diseñar un taller científico para el aprendizaje de matemáticas sobre criptografía.

5.1 Uso didáctico de la criptografía para el aprendizaje de las matemáticas.

Criptografía, algoritmo, redes sociales y grafos, arte, modelado... Hay muchos temas actuales y cotidianos relacionados con el conocimiento matemático. También podríamos usar estudios de casos en situaciones ficticias como una forma de desarrollar el taller de manera significativa. Podrían actuar como examinadores médicos, analistas deportivos, testigos expertos, espías o matemáticos. Hemos elegido la criptografía porque se ha utilizado durante miles de años. De hecho, hoy en día, está cada vez más presente en nuestra vida cotidiana, aunque no nos demos cuenta la mayor parte del tiempo. Por ejemplo, esto sucede cuando pagamos con nuestra tarjeta de crédito o débito comprando en Internet, cuando iniciamos sesión en el correo electrónico o utilizando nuestra firma digital, entre muchos otros ejemplos. La protección de información valiosa es una prioridad en la sociedad actual. Los ataques cibernéticos a empresas, gobiernos e individuos han crecido exponencialmente. El robo de identidad, el fraude, la extorsión, el malware, el phishing, el spam, el spyware, los troyanos y los virus son solo una pequeña muestra de esta actividad.

La criptografía es el arte de crear mensajes secretos y la sofisticación de su técnica está directamente relacionada con los avances científicos. Proviene de una rama de las matemáticas conocida como teoría de la información. Esta rama estudia las diferentes técnicas y algoritmos para ocultar (cifrar) y revelar (descifrar) la información que se considera útil. El criptoanálisis es la contraparte, que intenta romper ese cifrado para recuperar la información oculta.

En toda comunicación hay un: emisor (quien envía el mensaje), receptor (quien recibe el mensaje), código (conjunto de señales o signos que componen el mensaje), mensaje (la información a transmitir) y canal de comunicación (el medio por el cual se transfiere el mensaje).

Dividimos los enfoques en dos bloques principales: clásico y moderno.

El primero fue llamado clásico debido a las técnicas utilizadas. Se llevó a cabo la sustitución de caracteres y la operación de transposición. Los algoritmos de cifrado requerían una clave secreta que no era pública.

El método de sustitución consistía en sustituir un símbolo por otro. Sin embargo, el método de transposición sólo cambió el orden de los símbolos que formaban parte del texto original. Un ejemplo de transposición sería la escítala y de sustitución por el código César. En estos casos, la fuerza del cifrado no depende del algoritmo, sino de la clave.

Dentro de la criptografía moderna distinguimos entre criptografía de clave privada y criptografía de clave pública. Los criptosistemas de clave privada utilizan la misma clave para el cifrado y el descifrado. Este método tiene la ventaja de ser muy eficiente computacionalmente, pero tiene la desventaja de proteger las claves de cada usuario. El sistema se vuelve ineficiente si estamos en una red con un gran número de usuarios. Los criptosistemas de clave pública utilizan dos claves diferentes pero relacionadas, una para el cifrado y la otra para el descifrado. Cada usuario tiene un par de claves: la clave privada se utiliza para el descifrado y no se comparte; Pero la clave pública se utiliza para el cifrado y se comparte con otros usuarios. Esto resuelve el problema del intercambio de claves, aunque los algoritmos requieren más tiempo de procesamiento.

Las matemáticas nos ofrecen las herramientas adecuadas para trabajar con información oculta. Esta relación da lugar a las posibilidades didácticas de la criptografía en el aprendizaje de las matemáticas. Gracias al análisis de las diferentes técnicas y algoritmos de cifrado, podemos presentar contenidos matemáticos básicos como matrices, números primos, interpolación y divisibilidad [106]. En la siguiente sección presentamos la notación, definiciones y contenidos matemáticos necesarios para desarrollar las actividades propuestas en la secuencia didáctica. El contenido incluye escuela secundaria y el primer año de grado de la rama de ingeniería. Básicamente, abordamos:

- Conceptos sobre divisibilidad: números primos y compuestos, descomposición de factores primos [107,108].
- Conceptos sobre matrices: definición, tipo de matrices, funcionamiento con matrices y matriz inversa [109].
- Interpolación polinómica: definición de interpolación y fórmula de Newton [110].
- Conceptos aritméticos modulares básicos: congruencias, el algoritmo euclidiano y el teorema de Bezout [111].

En el siguiente apartado presentamos los contenidos matemáticos relacionados con la criptografía que aparecen en el desarrollo del taller. A continuación, establecemos los objetivos, el diseño y la metodología utilizada para el desarrollo del estudio. En la Sección 4 creamos las actividades y, finalmente, analizamos los resultados y conclusiones.

5.2 Preliminares

Como mencionamos en la introducción, la criptografía es una rama de las matemáticas llamada teoría de la información. Durante su desarrollo, hace uso de conceptos y resultados de otras ramas matemáticas como el álgebra y el cálculo numérico, entre otras.

En esta sección presentamos los conceptos y los resultados de la comprensión necesaria del taller de criptografía introducido en la Sección 4. Comenzamos introduciendo en la Figura 12 el diagrama general de comunicación, independientemente del método de cifrado utilizado para transmitir la información.

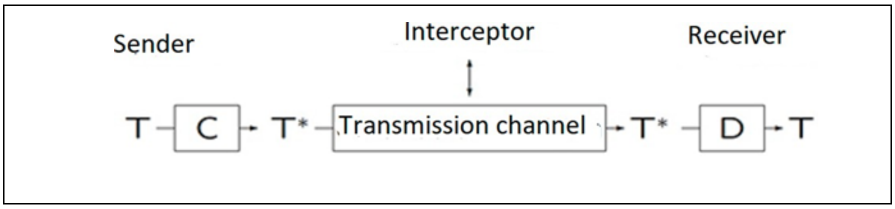


Figura 12. Esquema general del canal de transmisión.

En la figura 12, T denota el texto plano (ya sea lenguaje natural o reducido a una secuencia de dígitos para la transcripción instantánea). T*: criptograma, o texto codificado (ilegible para cualquiera que no conozca D). C: cifrado o función de codificación, conocida por el remitente. D: función de descifrado o decodificación, conocida por el receptor.

Si usamos el sistema de señalización de la bandera del semáforo como código, C y D están en la tabla mostrando cada posición de la bandera con la equivalencia a la letra y el número que representa [112]. Lo mismo es cierto si usamos código Morse o jeroglíficos [113-115].

Si codificamos con un método clásico de criptografía de transposición como la escítala, C y D son los cilindros de los mismos diámetros [116].

Notar que el diagrama de la Figura 12 se adapta a la mayoría de los cifrados de sistemas criptográficos de clave privada o pública. Uno de los conceptos esenciales a recordar son los números enteros primos y enteros coprimos, así como algunos resultados básicos con respecto a estos conceptos como: todo entero positivo mayor o igual que dos es un número primo o es un producto de números primos. Esta descomposición es única, excepto por el orden. El cálculo de números primos cuyo producto es igual a un entero dado n se denomina descomposición del factor primo de n.

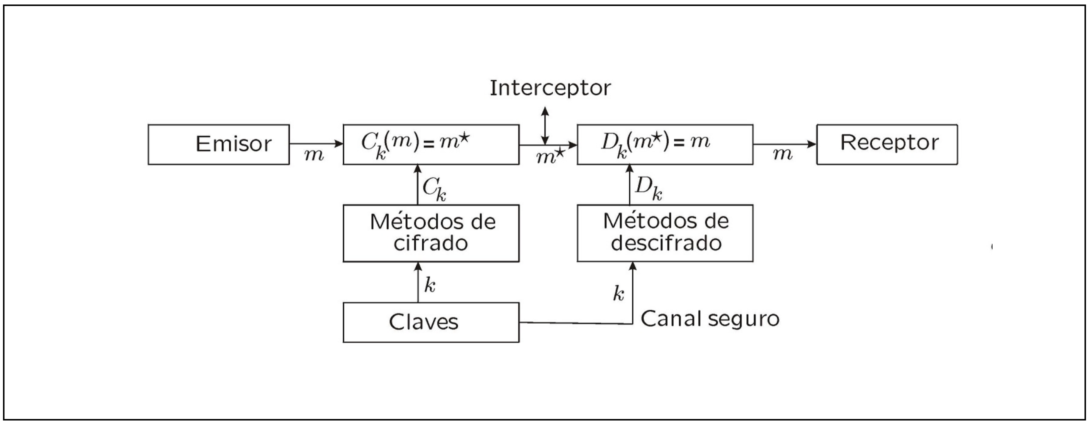


Figura 13. Sistema criptográfico.

En la figura 13, m denota el mensaje que se va a transmitir y m* el mensaje cifrado.

La congruencia es el otro concepto fundamental. Cuando n es un entero mayor que uno, dados a y b, dos enteros, a es congruente con b módulo n y se puede denotar como a ≡ b mod(n) si a – b es un múltiplo de n. Las actividades de la siguiente sección muestran ejemplos de su aplicación en algunos sistemas criptográficos, como una clave pública RSA.

Por otro lado, algunas de las herramientas esenciales en álgebra lineal útiles para nosotros son las matrices. Consideramos que A_{mxn} denota una matriz de m filas y n columnas. Si m = 1 afirmamos que A es una matriz fila y si n = 1 afirmamos que A es una matriz columna. En el desarrollo de la actividad, utilizamos operaciones matriciales clásicas como la suma, el producto y el cálculo de la inversa de una matriz. Cualquier libro de álgebra lineal como [117] se puede utilizar para revisar todas estas operaciones. Además, utilizamos las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales para calcular el polinomio de interpolación. El libro [118] se puede consultar para introducir los polinomios de interpolación y cómo obtenerlos.

Para concluir esta sección, consideramos que un sistema criptográfico o criptosistema consta de cinco componentes: M, M*, K, C y D son el conjunto de todos los mensajes a transmitir; M* es el conjunto de todos los mensajes cifrados; K es el conjunto de claves a utilizar, es decir, los parámetros que controlan los procesos de cifrado y descifrado; C es el conjunto de todos los métodos de cifrado: $C = \{Ck : M \rightarrow \boldsymbol{M*}, k \in K\}$; D es el conjunto de todos los métodos de descifrado: $D = \{Min : \boldsymbol{M*} \rightarrow M, k \in K\}$; Para una clave dada k, la transformación Dk es la inversa de Ck; en otras palabras, $Min(Ck\ (m)) = m,\ \forall\ m \in M.$

5.3 Objetivos, diseño de la investigación y metodología

En el desarrollo de este capítulo se establecieron dos objetivos:

1. Presentar una propuesta para el diseño de talleres de ciencias en un museo, basada en el modelo de aprendizaje matemático de van Hiele y la estrategia STEAM.
2. Utilizar esta propuesta general para diseñar un taller científico para el aprendizaje de matemáticas sobre criptografía.

En primer lugar, desarrollamos una propuesta general aplicable en diferentes museos, tanto para estudiantes como para el público en general, y además con el objetivo de aprender un determinado conjunto de contenidos matemáticos.

Para diseñar el formato del taller, utilizamos el modelo de van Hiele para la parte didáctica. Para lograr esto, recordamos que, aunque el modelo de van Hiele se relacionó inicialmente con preguntas geométricas de nivel básico, su declaración original es general para el razonamiento matemático. Seguimos la misma línea de las obras desarrolladas en 1994, como la de Llorens [33]; es decir: establecer que, en ciertas habilidades de razonamiento sobre un concepto matemático, hay niveles que son detectables y cuyas propiedades coinciden con las postuladas por van Hiele [19].

Siguiendo esta idea y enfatizando las ideas que Prat [39] insistió en su tesis doctoral, una correcta extensión del modelo requiere primero definir los descriptores de los niveles. Por otro lado, si recordamos los ejes en los que se basa el modelo de van Hiele, además de los niveles de pensamiento teníamos la competencia del alumno, que formulamos a través de las habilidades de Hoffer, y las fases de aprendizaje en las que consideramos el uso de juegos y la estrategia STEAM en el diseño de actividades.

Somos conscientes de que un proyecto STEAM involucra diferentes temas, múltiples objetivos y un marco de tiempo costoso, mientras que un taller en un museo puede cubrir algunas actividades en 50–60 min. Pensamos que lo primero que había que definir sería: ¿qué es un taller STEAM para un museo de ciencias?

Como ya hemos comentado, no es recomendable convertir una visita a un museo en una ampliación de aula. Por ello, debemos programar actividades que favorezcan una o varias fases del aprendizaje sin perder los componentes lúdicos y no formales que caracterizan las visitas a estos museos. La interactividad complementa la educación formal, ya que un taller no tiene que centrarse en un tema o problema de manera intensiva o extensa. Es decir, no tiene que abarcar todo [119,120].

Con el fin de identificar las fortalezas entre las fases de aprendizaje de van Hiele, las habilidades de Hoffer y las características del proyecto STEAM, así como las condiciones de la actividad museística, en la Tabla 8, las resumimos.

Taller de Ciencias en el Museo	**Proyecto STEAM [46,65]Fases**	**Aprender matemáticas (según el modelo de van Hiele)**
Varias actividades preestablecidas con un tema que las relaciona y contextualiza	El punto de partida es una situación real, compleja y abierta, con implicaciones sociales y muy cercana a los visitantes, que actúa como hilo conductor de la acción.	Tipo de actividades: información, orientación dirigida, orientación explícita, gratuita e integración.
Los contenidos del taller pueden o no estar relacionados con los que se estudian en la escuela.	Se proponen actividades bien estructuradas, justificando cada acción y la relación entre ellas. Estas actividades se abordan desde las diferentes perspectivas de las asignaturas STEAM, con el fin de favorecer su integración.	Habilidades a desarrollar en las actividades: comunicativa, visual, pictórico-manipulativa, lógica, aplicada y digital.
Al principio no se planifica ninguna interacción relacionada con el contenido del taller con los visitantes antes o después de la visita.	Se plantean preguntas con el fin de desarrollar un proceso de investigación con una parte experimental importante.	
Divertido (motivador), juego y matemáticas, aprender haciendo, interacción activa y manipulación.	Los visitantes participan en el proceso, a partir de la definición misma del problema, en la evaluación y en la producción de un producto final.	
La comunicación entre el instructor y el visitante se vuelve esencial.	Anima a los visitantes a desarrollar la creatividad, el pensamiento crítico, la comunicación científica y la colaboración entre pares.	
Baja versatilidad para	Como transversal: se	

adaptar la diversidad de conocimientos previos y corta duración	discute la perspectiva de género, el desarrollo de los valores de los ODS (objetivo de desarrollo sostenible), la competencia digital y la creación de vocación científica.	
Científicamente riguroso.		

Tabla 8. Taller de fortalezas de la ciencia en museo, proyecto STEAM y fases de aprendizaje de matemáticas.

Por lo tanto, un taller STEAM para el aprendizaje en un museo debe reunir las características de los tres aspectos caracterizados en la Tabla 8.

El taller STEAM adquiere un mayor significado para el aprendizaje como parte de un proyecto. Por lo tanto, se debe diseñar una intervención didáctica para introducir los contenidos del taller antes, durante y después de la visita. Este tipo de taller sería el óptimo para lograr los objetivos de aprendizaje. No obstante, el museo no puede atender exclusivamente a aquellos colectivos que hayan preparado didácticamente la visita. A menudo ocurre que en las visitas escolares a los museos de ciencia y en la mayoría de las visitas familiares, no se realizan trabajos previos en lo que se va a desarrollar en el taller. Por esta razón, el taller debe tener una estructura propia, que permita adaptarlo a los diferentes escenarios de audiencia.

Como propuesta general para el taller en el museo, consideramos las siguientes indicaciones:

1. El punto de partida es una situación real, compleja y abierta, con implicaciones sociales y muy cercana a los visitantes, que actúa como hilo conductor de la acción. Encuesta de conocimientos previos: el lenguaje y las preguntas utilizadas en los talleres se adaptan a los conocimientos previos de los visitantes.
2. Actividades de información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración (STEAM) desarrollando las diferentes habilidades comunicativas, visuales, pictóricas, lógicas, aplicadas y digitales. Presentado de manera motivacional, a través de diferentes juegos o desafíos, pero científicamente riguroso.
3. Prestando atención a la perspectiva de género, se discute el desarrollo de los valores de los ODS (objetivo de desarrollo sostenible), la competencia y la creación de vocación científica.
4. Se obtiene un producto final y reflexión.

Una vez planteada la propuesta general, se procedió a realizar el diseño para el caso particular de la criptografía. Para ello, como hemos mencionado, la primera acción que tomamos fue asegurarnos de que el tema a tratar pudiera desarrollarse de acuerdo con el modelo de van Hiele. En otras palabras, en primer lugar, definimos los descriptores de los tres primeros niveles que abordamos. Véase la siguiente tabla.

Niveles de van Hiele	**Descriptores**
Visualización de nivel 1	Distingue entre codificación y cifrado. Reconoce los diferentes tipos de cifrados y los agentes implicados. Asocia los nombres de los dispositivos de cifrado con sus imágenes. Interpreta oraciones que describen métodos de cifrado clásicos. Dibuja diferentes códigos y dispositivos de cifrado, etiquetando con precisión sus partes. Comprende la forma y el significado de los elementos de un diagrama de flujo.
Análisis de nivel 2	Reconoce diferentes variantes en cada tipo de cifrado. Describe adecuadamente los elementos de cada sistema de cifrado clásico y moderno. Traduce información verbal sobre las propiedades del método de cifrado para dibujar diagramas de flujo. Comprende la clasificación de los tipos de cifrado según sus características. Identifica correctamente el uso de claves públicas y privadas. Reconoce el uso de números primos y criptografía en diferentes áreas de la vida cotidiana. Comprende los pasos de un algoritmo y los relaciona adecuadamente con el diagrama de flujo.
Clasificación de nivel 3	Formula definiciones precisas de los diferentes métodos presentados. Es capaz de construir otros cifrados basados en los modelos presentados. Comprende los pasos sucesivos para cifrar o descifrar un mensaje en criptografía clásica y moderna. Utiliza las instrucciones adecuadas para desarrollar un algoritmo de cifrado o descifrado. Es capaz de resolver problemas de otras áreas de la ciencia y la vida cotidiana mediante la aplicación de la criptografía. Interpreta adecuadamente la representación visual de un algoritmo a través de su diagrama de flujo.

Tabla 9. Descriptores de los niveles I, II y III de van Hiele para criptografía.

Con los niveles de van Hiele descritos y, teniendo en cuenta las fortalezas establecidas en la Tabla 8 entre visitas a museos, proyectos STEAM y fases de aprendizaje, relacionamos las actividades con los tres ejes del modelo de van Hiele. Para ello, dividimos el diseño y el desarrollo del taller de criptografía en tres bloques de actividades, que se detallan en la Tabla 10.

Situación	Actividad	Fase	Conceptos	Habilidades	Sesiones
Pre-visita (aula)	Todo el mundo tiene secretos I	Información y orientación dirigida	Criptología, codificación, cifrado	Comunicativa y visual	1 sesión
Pre-visita (aula)	El reto es descifrarlo I	Información, orientación dirigida y explicitación	Cifrado y descifrado por sustitución y transposición, definición de matriz, estructura aditiva, criterios de divisibilidad.	Comunicativa, visual, pictórico-manipulativa, lógica	1 sesión
Taller en el museo	Todo el mundo tiene secretos II	Información y Orientación dirigida	Criptología, codificación, encriptación	Comunicativa y visual	1 sesión
Taller en el museo	El reto es descifrarlo II	Información, orientación dirigida y explicitación	Cifrado y descifrado por sustitución y transposición, definición de matrices, suma y resta de matrices.	Comunicativa, visual, pictórico-manipulativa, lógica y aplicada	
Taller en el museo	Máquina Enigma	Información, orientación dirigida y explicitación	Cifrado y descifrado automáticos, estructura aditiva	Comunicativa, visual, pictórico-manipuladora, lógica y aplicada	
Post-visita (aula)	El reto es descifrarlo III	Información, orientación dirigida, explicitación y orientación libre	Matriz de fila, matriz de columna, matriz cuadrada, multiplicación de matrices e inversa de una matriz	Comunicativa, visual y aplicada	1 sesión
Post-visita (aula)	Compartiendo secretos	Información, orientación dirigida, explicitación y orientación libre	Interpolación polinómica, sistemas de ecuaciones lineales, método de Cramer, método de Newton para interpolación cuadrática y aritmética modular	Comunicativa, visual y aplicada	1 sesión
Post-visita (aula)	Los números primos y su importancia	Información, orientación dirigida, explicitación y orientación libre	Clave pública y privada, criterios de divisibilidad, números primos, descomposición en factores primos, potencias enteras, congruencias, algoritmo de Euclides y teorema de Bezout	Comunicativa, visual y aplicada	1 sesión

Post-visita (aula)	Todos estamos encriptados	Información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración	ADN, código del ser vivo, base nitrogenada, cromosomas, núcleo celular y genética. Polinomios y binomio de Newton.	Comunicativa, visual, pictórico-manipuladora, lógica y aplicada	1 sesión
Post-visita (aula)	Esteganografía	Información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración	Algoritmia, aplicaciones móviles, fotografía digital y programación scratch	Comunicativa, visual, pictórico-manipuladora, lógica, aplicada y digital	2 sesiones

Tabla 10. Características del taller STEAM.

5.4 Propuesta para un taller de criptografía

Este es el desarrollo de un proyecto completo que comienza en el aula, continúa en el museo y termina de nuevo en el aula. En el caso de un grupo de alumnos que no se hayan preparado para la visita o de un grupo no escolar, el taller del museo se desarrollaría con las siguientes actividades: el reto es descifrarlo I, el reto es descifrarlo II y máquina enigma.

A continuación, se exponen la metodología de las diferentes actividades y algunos ejemplos.

Actividad 1: Todo el mundo tiene secretos I.

Metodología (desarrollo de la actividad): Después de preguntar al grupo sobre la necesidad de mantener oculta alguna información, si conocen algún método de cifrado y el papel de las matemáticas para lograrlo. Se menciona el contenido matemático a desarrollar y se sondean los conocimientos previos. En parejas, se les pide que enumeren situaciones en las que creen que se usa criptografía o se presentan una variedad de situaciones para su discusión en grupos pequeños. Para completar la actividad, cada grupo selecciona y discute dos noticias sobre criptografía, ciberseguridad o bitcoins, entre otras.

Además, para distinguir entre conceptos de codificación y cifrado, es posible jugar un juego de comunicación con lenguaje de signos. Un miembro del grupo saca una tarjeta con el nombre de un concepto criptográfico y se la comunica a sus compañeros de clase en lengua de signos (el grupo usará el alfabeto con las posiciones de los dedos). Se pueden utilizar otros códigos: morse, banderas o braille.

1. Se configuran grupos pequeños y se proporciona el código de signo.
2. Se comparten opiniones sobre la importancia actual de la criptografía.
3. Diferentes noticias son analizadas por los estudiantes.
4. Se hace un resumen o esquema del trabajo realizado.

Actividad 2: El reto es descifrarlo I.

Metodología: En esta actividad, los participantes son capaces de formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar estrategias de solución para cada desafío. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten desafíos de cifrado.
2. Se discuten tipos simples de encriptaciones por sustitución y traducción, como escítala, Polybius y Cesar. Se explica la definición de la matriz, la estructura aditiva y los criterios de divisibilidad.
3. Descifrado de mensajes con escítala y Polybius. Construcción de una rueda de cifrado César.
4. Se comparten opiniones sobre las estrategias utilizadas para resolver los desafíos.
5. Nueva propuesta de reto por parte de los alumnos.
6. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

Ejemplo: recomendamos una actividad con la escítala, donde el receptor está provisto de cilindros de varios diámetros. De esta forma, podrá comprobar que sólo es posible descifrar el mensaje con el cilindro del mismo diámetro que el utilizado por el remitente para cifrar. También sería interesante realizar una actividad con el cifrado César. La Figura 14 muestra a algunos estudiantes de secundaria participando en un taller de criptografía MUDIC llamado "Alan Turing". Están encriptando con la escítala, y en la Figura 15 se muestra la rueda César construida.

Figura 14. Estudiantes encriptando con la escítala.

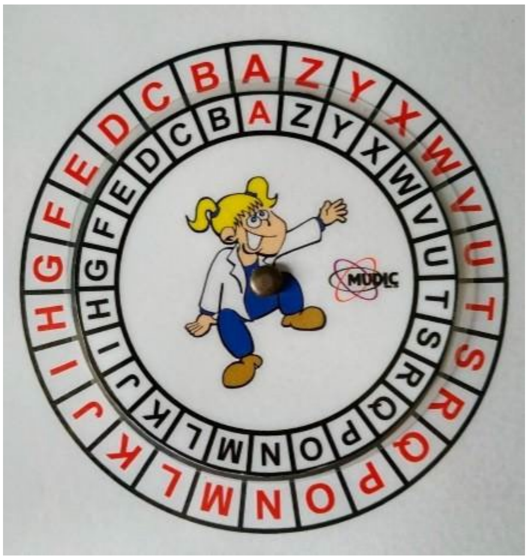


Figura 15. Rueda César diseñada en el MUDIC.

Actividad 3: Todos tienen secretos II.

Metodología: Después de preguntar al grupo sobre la necesidad de mantener oculta alguna información, si conocen algún método de cifrado y el papel de las matemáticas para lograrlo. Se menciona el contenido matemático a desarrollar, y se sondean los conocimientos previos. Todo esto, con el fin de determinar si el grupo ya ha trabajado en la pre-visita. Para distinguir entre conceptos de codificación y cifrado, es posible jugar el juego de la comunicación con banderas. Un miembro del grupo saca una tarjeta con el nombre de un concepto criptográfico y se lo comunica a sus compañeros de clase en el idioma de la bandera (al grupo se le proporcionará el alfabeto con las posiciones de la bandera).

1. Se configuran grupos pequeños y se entrega el código de la bandera.
2. Se comparten opiniones sobre las estrategias utilizadas para resolver los

desafíos.

3. Nueva propuesta de reto por parte de los alumnos.
4. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

Actividad 4: El desafío es descifrarlo II.

Metodología: En esta actividad, los participantes son capaces de formar grupos de trabajo, que permitirán comunicar estrategias de soluciones para cada desafío. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten desafíos de cifrado.
2. Comentario sobre la generalización de los cifrados de sustitución. Definición de matrices, suma y resta de matrices.
3. Descifrado de código de escape educativo para abrir un candado en un cofre sorpresa de cuatro letras.
4. Las estrategias utilizadas para resolver los desafíos son compartidas.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

El desarrollo del juego implica la preparación y apertura de un cofre con varios candados con una llave de cuatro letras (también puede ser numérica).

Las tarjetas de colores se entregan para hacer parejas de grupos. Uno de ellos cifra las llaves de los candados y entrega el cofre, la matriz de cifrado y la clave cifrada de uno de los candados. Todo esto porque la siguiente clave cifrada es la clave descifrada obtenida del primer candado. Esto continúa sucesivamente con el resto de candados.

Para cifrar, se elige una clave de cuatro letras, se transforma en una clave numérica utilizando la Tabla 11 y se convierte en los elementos de la matriz de filas de claves A_{1x4}. Esto se cifra agregando otra matriz dada B_{1x4}, proporcionando la matriz de salida C_{1x4}. Esto se descifra restando la matriz B_{1x4}.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabla 11. Equivalencia de las letras del alfabeto en números.

Ejemplo: considere un cofre y dos candados.

Grupo 1: cifrado.

Se eligen las llaves para los dos candados: A_1 = (F K B R) y A_2 = (A V G L). Se transforman en una clave numérica: $A_1 = (6\ 11\ 2\ 18)$ y $A_2 = (1\ 22\ 7\ 12)$

Tenemos como matriz clave: $A = A_1$

La matriz de cifrado se calcula restando las matrices fila: $B = A2 - A1 = (-5\ 11\ 5\ -6)$

Se calcula la matriz de salida: $C = A + 2B = (6\ 11\ 2\ 18) + (-10\ 22\ 10 - 12) = (-4\ 33\ 12\ 6)$. La clave cifrada C y la matriz de cifrado B se transfieren al otro grupo.

Grupo 2: descifrado.

Datos: $C = (-4\ 33\ 12\ 6)$ y $B = (-5\ 11\ 5 - 6)$

La clave $A_2 = C - B = (-4\ 33\ 12\ 6) - (-5\ 11\ 5\ 6) = (1\ 22\ 7\ 12)$ = (A V G L).

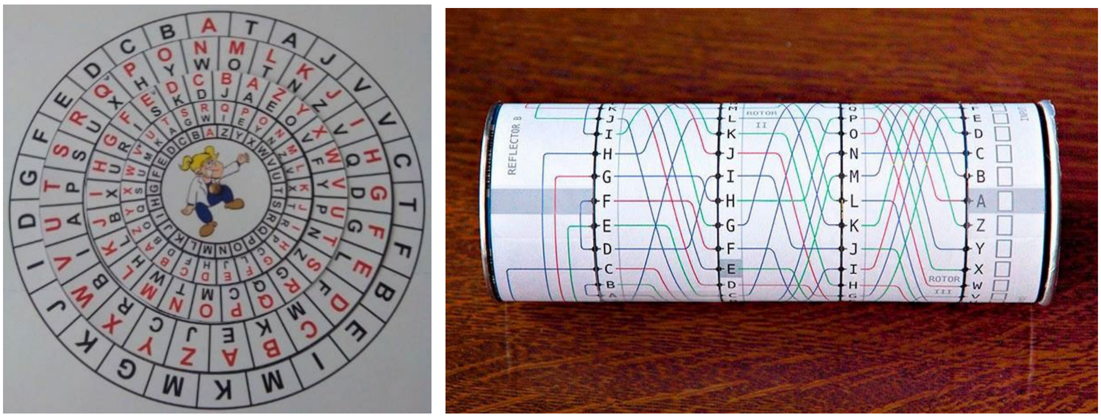
La clave $A_1 = C - 2B = (-4\ 33\ 12\ 6) - (-10\ 22\ 10\ -12) = (6\ 11\ 2\ 18)$ = (F K B R).

Actividad 5: Máquina Enigma.

Metodología: En esta actividad, los participantes son capaces de formar grupos de trabajo que permiten comunicar estrategias de solución para cada desafío. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, las definiciones de disco de entrada y salida, rotores y reflector. Todo ello analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten desafíos de cifrado.
2. Comentario sobre criptografía automática y la máquina enigma.
3. Construcción, cifrado y descifrado de mensajes con una máquina de recreación enigma.
4. Las estrategias utilizadas para resolver los desafíos son compartidas.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

Ejemplo: podemos trabajar con dos simuladores de máquina enigma, dependiendo del nivel de los alumnos. Para los estudiantes de secundaria, usamos la rueda que se muestra en la Figura 16a.



bachill

(a) (b)

Figura 16. Simulador Enigma. (a) Simulador de enigma de rueda de MUDIC. (b) Máquina de papel enigma para tubo.

Para los estudiantes de bachillerato, utilizamos el simulador en la Figura 16b. El funcionamiento de los dos simuladores es prácticamente el mismo y se puede ver en [121].

Actividad 6: El desafío es descifrarlo III.

Metodología: En esta actividad, los participantes pueden formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar estrategias de soluciones para cada desafío. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten desafíos de cifrado.
2. Comentario sobre la generalización de cifrados de sustitución, matriz fila, matriz columna, matriz cuadrada, multiplicación de matrices e inversa de una matriz.
3. Descifrado de código de escape educativo para abrir una cerradura en un cofre sorpresa de tres letras.
4. Las estrategias utilizadas para resolver los desafíos son compartidas.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

las claves de los dos candados y las manos sobre el pecho

El desarrollo del juego implica la preparación y apertura de un cofre con varios candados con una llave de tres letras (también puede ser numérica)., Las tarjetas de colores se entregan para hacer parejas de grupos. Uno de ellos cifra, junto con las claves cifradas y las claves de la matriz de cifrado. Esto continúa sucesivamente con el resto de candados.

Para cifrar, se elige una clave de tres letras para cada candado y dos números naturales de las matrices de cifrado. Las tres letras se transforman en números utilizando la Tabla 11 y serán los elementos de la matriz de filas clave A_{1x3}. Esto se cifra multiplicando otra matriz dada B_{3x3}, dando la matriz de salida C_{1x3}. La matriz se descifra multiplicándola por esta matriz: B^{-1}.

Ejemplo: considere un cofre y dos candados.

Grupo 1: cifrado.

Se eligen las claves para los dos candados: A_1 = (F K B), A_2 = (A V G) y la clave de cifrado B = (12 15).

Se transforman en una clave numérica con la Tabla 3: A_1 = (6 11 2) y A_2 = (1 22 7).

La matriz de cifrado se calcula para b_1 = 12, como b_1 es par:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & b_1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

La matriz de cifrado se calcula para b_2 = 15, como b_2 es impar:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{b_2 - 1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

La matriz de salida se calcula:

$$C_1 = A_1 \cdot B_1 = (6 \quad 11 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 13 \end{pmatrix} = (10 \quad 19 \quad 62)$$

La matriz de salida se calcula:

$$C_2 = A_1 \cdot B_2 = (1 \quad 22 \quad 7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix} = (15 \quad 30 \quad 112)$$

Las claves cifradas C1 y C2, y la matriz de cifrado B se entregan al otro grupo.

Grupo 2: descifrado.

Datos: C1 = (10 19 62), C2 = (15 30 112) y B (12 15).

La matriz de cifrado se calcula para b_1 = 12, como b_1 es par:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & b_1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

La matriz de cifrado se calcula para $b_2 = 15$, como b_2 es impar:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{b_2 - 1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Se calculan las matrices inversas: dependiendo del conocimiento de los estudiantes, es posible resolverlo por fórmula, por el método de Gauss-Jordan o por un sistema de ecuaciones lineales.

$$B_1^{-1} = \frac{(Adj(B_1))^t}{|B_1|} = \begin{pmatrix} 13 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_2^{-1} = \frac{(Adj(B_2))^t}{|B_2|} = \begin{pmatrix} 15 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La primera clave:

$$A_1 = C_1 \cdot B_1^{-1} = (10 \quad 19 \quad 62)\begin{pmatrix} 13 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (6 \quad 11 \quad 2) = (F \quad K \quad B)$$

La segunda clave:

$$A_1 = C_1 \cdot B_1^{-1} = (15 \quad 30 \quad 112)\begin{pmatrix} 15 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 22 \quad 7) = (A \quad V \quad G)$$

Actividad 7: Mis secretos son tuyos.

Metodología: En esta actividad, los participantes pueden formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar estrategias de soluciones para cada desafío. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten desafíos de cifrado.
2. Comentario sobre la división de secretos y el esquema de intercambio de secretos Parakh [122]. Interpolación polinómica, sistemas de ecuaciones lineales, método de Cramer, método de Newton para interpolación cuadrática y aritmética modular.
3. Descifrado de código de escape educativo para abrir un candado en un cofre sorpresa de cuatro letras.

4. Las estrategias utilizadas para resolver los desafíos son compartidas.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

El desarrollo del juego implicaría la preparación y apertura de un cofre con un candado con una llave de tres letras (también puede ser numérico). La idea es que un secreto no está solo en manos de una persona, sino que varias personas están involucradas. Además, el secreto solo se puede recuperar cuando un cierto número de personas se unen. Las tarjetas de color con encriptación se entregan para hacer un grupo de tres pares que resuelvan el desafío.

Para el cifrado, se elige una clave de tres letras para el candado, transformada en números utilizando la Tabla 11. El polinomio de interpolación se calcula con los puntos de las ordenadas 0, 1 y 2, y la abscisa los números de la clave. El polinomio se evalúa a diferentes valores (3, 4, 5...) y se distribuye en las diferentes tarjetas.

Para descifrar la clave, deben encontrar polinomios de interpolación de segundo grado definidos por los cifrados. Luego, deben evaluarlo en los valores 0, 1 y 2, obteniendo la clave.

Ejemplo: considere un cofre y un candado.

Encriptación: se elige una clave para el candado: y luego se transforma en una clave numérica con la Tabla 3: $A1 = (F\ K\ B)$, $\quad A1 = (6\ 11\ 2)$.

El polinomio de interpolación se calcula con los puntos (0,6), (1,11) y (2,2). Se puede realizar con el método de Newton o con la forma parabólica general, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. A continuación, se presenta una resolución con el primer método.

Definimos el polinomio de segundo grado como el paso por los puntos indicados:

$$y = p + m(x - x_1) + n(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{cases} (0,6) \rightarrow 6 = p + m(0-0) + n(0-0)(0-1) \rightarrow \qquad p = 6 \\ (1,11) \rightarrow 11 = p + m(1-0) + n(1-0)(1-1) \quad \rightarrow p + \mathrm{m} = 11 \\ (2,2) \rightarrow 2 = p + m(2-0) + n(2-0)(2-1) \rightarrow \mathrm{p} + 2m + 2\mathrm{n} = 2 \end{cases}$$

El resultado es un sistema de ecuaciones lineales es:

$$p = 6, m = 5\, y\, n = -7$$

La parábola buscada es:

$$y = p + m(x - x_1) + n(x - x_1)(x - x_2) = 6 + 5x - 7x(x - 1) = -7x^2 + 12x + 6$$

Evaluamos el polinomio obtenido en 3, 4, 5... dependiendo de cuántos necesitemos.

$$\begin{cases} x = 3 \to -7 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 6 = -21 \to \quad (3, -21) \\ x = 4 \to -7 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 6 = -58 \to \quad (4, -58) \\ x = 5 \to -7 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 6 = -109 \to (5, -109) \ldots \end{cases}$$

Las parejas reciben cartas con los puntos obtenidos y se reúnen, de tres en tres, para resolver el desafío.

Descifrado:

Datos: tarjetas con los puntos (3, −21), (4, −58) y (5, −109).

El polinomio de interpolación se calcula con los puntos (3, −21), (4, −58) y (5, −109). Se puede realizar con el método de Newton o con la forma parabólica general, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. A continuación, se presenta una resolución del segundo método.

$y = ax^2 + bx + c$ evaluada en los puntos indicados:

$$\begin{cases} (3, -21) \to -21 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad \to 9a + 3b + c = -21 \\ (4, -58) \to -58 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \quad \to 16a + 4b + c = -58 \\ (5, -109) \to -109 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \to 25a + 5b + c = -109 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema usando el método de Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -21 & 3 & 1 \\ -58 & 4 & 1 \\ -109 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{14}{-2} = -7, \text{ b y c} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -21 & 1 \\ 16 & -58 & 1 \\ 25 & -109 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-2} = 12 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 & -21 \\ 16 & 4 & -58 \\ 25 & 5 & -109 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-2} = 6$$

La parábola buscada es:

$y = -7x^2 + 12x + 6$

Evaluamos el polinomio obtenido en 0, 1 y 2, obtenemos la clave (6 11 2) = $(F\ K\ B)$

Actividad 8: Los números primos y su significado en criptografía.

Metodología: En esta actividad, los participantes pueden formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar los resultados de la investigación. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten los objetivos de la actividad.

2. Comentario sobre cifrado RSA, clave pública y privada, criterios de divisibilidad, números primos, descomposición de factores primos, potencias enteras, congruencias, algoritmo de Euclides y teorema de Bezout.
3. Investigación de la necesidad de utilizar números primos muy grandes.
4. Los productos obtenidos en los diferentes estudios se comparten a través de presentaciones, paneles y exposiciones.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

Se les pide a los estudiantes que investiguen el cifrado RSA y el propósito de las claves públicas y privadas. Si queremos enviar un mensaje, este se envía transformadolo primero en un número, que en cualquier caso denotamos por m; este mensaje se cifra como $m*$. Para ello, consideramos dos números primos p y q, calculamos su producto $n = pq$. El número n, que va a ser el módulo de ambas claves, siempre es el producto de dos primos p y q de longitud similar [123,124]. A continuación, consideramos un número entero t tal que el máximo común divisor de t y $\gamma(n) = (p-1)(q-1)$ sea 1, es decir que sean coprimos. Ahora calculamos s, tal que $ts \equiv 1\, mod(\gamma(n))$ es decir, que $ts = k\gamma(n) + 1$ con k un número entero cualesquiera. La parte de clave que se hace pública es el par (n, t). La parte que ha de mantenerse en secreto son: $p, q, \gamma(n), s$. Entonces el mensaje cifrado se obtiene como $= m^t (mod\, n)$. El mensaje se descifra calculando $m = (m^*)^s (mod\, n)$. El teorema de Bezout se utiliza para calcular los inversos modulares t y s.

Tenga en cuenta que, por el momento, no se ha encontrado ninguna fórmula o procedimiento para factorizar los números primos. En general, cuantos más casos (más números primos producidos) cubran las fórmulas, más ineficientes computacionalmente son. Si alguien intenta decodificar el mensaje, tiene que averiguar $s = (p-1)\,(q-1)$ y de lo contrario p y q. Para esto, se debe factorizar n, lo cual es difícil para números primos muy grandes.

Ejemplo:

Primero, los estudiantes realizan un ejemplo de cifrado / descifrado con RSA.

Utilizan números pequeños e ilustrativos en comparación con los manejados por el algoritmo.

Consideramos $n = 5 \cdot 11 = 55$. Por tanto $\gamma(n) = 4 \cdot 10 = 40$. Consideramos t=13. Entonces la clave pública es $(55{,}13)$

La clave privada es 5, 11 y 40

La función de cifrado es: $m^* = m^{13}\ (mod\ 55)$. Donde m es el texto no cifrado.

La función de descifrado es: $m = m^{*^{37}} mod(55)$.

Para cifrar, si el valor del texto no cifrado es 38, calculamos: $m^* = 38^{13}\ (mod\ 55) = 48$.

Para descifrar, si el valor del texto cifrado es 48, calculamos: $48^{37}\ (mod\ 55) = 38$

Podemos realizar una segunda actividad con el último curso de secundaria y el primer curso de grado. En esta actividad, aprenden sobre una aplicación real del sistema criptográfico de clave pública RSA: el esquema de firma distribuida de Tal Rabin [125,126], una de las mujeres más significativas en la criptografía moderna [127-129]. Esta segunda actividad también pretende abordar una realidad que somos conscientes de que necesita ser cambiada: la brecha de género presente en el ámbito STEAM. Para ello, tenemos en cuenta las siguientes causas del problema: estereotipos de género porque el sector científico-tecnológico sigue siendo percibido como eminentemente masculino; entornos profesionales predominantemente masculinos que, según muchos profesionales del sector, no son precisamente inclusivos, donde el sexismo y el acoso continúan persistiendo; Así como la escasez de modelos femeninos, ya que cuando hablamos de ciencia y tecnología, la enorme mayoría de las referencias que escuchan las niñas son masculinas [130].

Por ello, la actividad también pretende poner de relieve el enorme legado de las mujeres en el ámbito de las STEM en general. Este proyecto nos permite mostrar a las mujeres que han contribuido al desarrollo de la criptología a lo largo de la historia. Para lograr esto, creamos grupos. Luego, se les invita a buscar en Internet mujeres que hayan contribuido al desarrollo de la criptología a lo largo de la historia. Se les pueden suministrar algunas direcciones como [131] y pueden desarrollar una clasificación de períodos. Finalmente, se introduce el sistema de firma distribuida de Tal Rabin.

Actividad 9: Todos estamos encriptados.

Metodología: En esta actividad, los participantes pueden formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar los materiales y técnicas de laboratorio. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten los objetivos de la actividad.
2. Comentario sobre ADN, código de seres vivos, base nitrogenada, cromosomas, núcleo celular y genética [132].
3. Extracción de ADN vegetal y análisis de hibridación vegetal.
4. Se comparten las estrategias utilizadas para la extracción de ADN y el razonamiento matemático de Mendel, además de los polinomios y el binomio de Newton.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

Actividad 10: Esteganografía.

Metodología: En esta actividad, los participantes pueden formar grupos de trabajo, lo que permite comunicar estrategias de programación para algoritmos de cifrado y descifrado, y el uso de esteganografía. Además, también es posible compartir los conceptos matemáticos utilizados, analizando y socializando las soluciones encontradas para institucionalizar los conceptos aprendidos.

1. Se crean grupos pequeños, se proporcionan y discuten los objetivos de la actividad.
2. Comentario sobre algorítmica, aplicaciones móviles, fotografía digital y scratch.
3. Programación de algoritmos de cifrado y descifrado para Polibio y César con scratch [133], así como el uso de esteganografía para ocultar mensajes en fotografías.
4. Las estrategias utilizadas para programar algoritmos son compartidas.
5. Se realiza un resumen o esquema del trabajo completado.

.

5.5 Discusión

En este capítulo hemos presentado el diseño de un taller general para el aprendizaje de las matemáticas. Además, esta propuesta se ha utilizado para diseñar un taller científico para un museo de ciencias con el fin de aprender matemáticas a través de la criptografía.

La concepción didáctica del trabajo se basa en el modelo educativo de van Hiele. Hemos elegido un modelo educativo para proporcionar una explicación global del aprendizaje y hemos elegido el modelo de van Hiele específicamente porque en el museo podemos experimentar la importancia del lenguaje, tanto a la hora de comunicar como de enseñar ciencia. Además, a pesar de ser una idea planteada por van Hiele a mediados del siglo pasado, hoy en día es uno de los pilares de la innovación educativa a nivel general: que el alumno aprenda de su propia experiencia.

Para el procedimiento didáctico, se programaron diez actividades que combinan las características de los museos de ciencias, los proyectos STEAM y el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestro mayor reto ha sido generar actividades adaptadas a los requisitos establecidos simultáneamente en sus tres vertientes. Además, el nivel educativo, el contenido matemático y el lenguaje a utilizar deben adaptarse a cada público. Según nuestra experiencia, al igual que en el museo y en la escuela secundaria y la universidad, las actividades presentadas aquí se pueden adaptar no solo para el público en general, sino también para estudiantes de secundaria y estudiantes de ingeniería de primer año. Además, es importante introducir actividades en este tipo de talleres y proyectos que nos acerquen a la educación inclusiva. También es necesario contribuir a reducir la brecha de género en las titulaciones STEM.

Otra dificultad es el diseño de un taller STEAM para el aprendizaje de matemáticas, capaz de operar de forma independiente, y como parte de un proyecto STEAM más amplio.

Por último, es importante destacar que tratar con algunos conceptos criptográficos no es fácil. Las razones de esto son las cuestiones didácticas y epistemológicas planteadas por estas introducciones de conceptos en la educación secundaria. Sin embargo, su introducción en alumnos de bachillerato y primer curso de universidad es mucho más fácil.

Capítulo VI: Estadística y STEAM.

Cotidianamente, y sin pretenderlo, aplicamos la estadística en nuestras vidas, en la compra semanal para que no falten ni sobren alimentos, en la fecha de un viaje para que resulte más económico y con menos tráfico o en estudiar determinada carrera por las salidas profesionales que brinda. Estas decisiones resultan del análisis realizado con base en la experiencia y en la información recabada en situaciones parecidas.

La estadística nos permite reunir datos sobre cualquier tema, organizarlos para entenderlos mejor y, con ello, ser más eficiente en la toma de nuestras decisiones. En nuestros días se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos o físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. Además, está presente en las ciencias, la tecnología, la ingeniería y el diseño ya que todos los estudios superiores del ámbito científico tecnológico incluyen, en los programas de los primeros cursos, materias que introducen conocimientos básicos de estadística, tanto descriptiva como inferencial.

En el presente capítulo ponemos de manifiesto la estrecha relación entre la estadística y la estrategia STEM presentando una experiencia de aprendizaje y resolviendo algunos ejemplos básicos de ANOVA (Análisis de la varianza) de un factor, aplicados en diferentes contextos del mundo real. Esta experiencia de aprendizaje nos sirve de marco para proponer un instrumento de evaluación basado en las habilidades de Hoffer ampliadas para el modelo de aprendizaje de van Hiele, que nos ayudará a valorar propuestas de aprendizaje tanto en ámbitos formales como no formales.

6.1 Preliminares: ANOVA.

El análisis de la varianza, ANOVA [134-136], es propio de las investigaciones cuantitativas donde se forman varios grupos dentro de la muestra según los valores de la variable independiente, y se mide en cada uno de ellos los valores resultantes de la variable dependiente. El análisis consiste en identificar y cuantificar distintos tipos de varianza en esos grupos de valores. Si podemos asegurar las condiciones previas de independencia, normalidad y homogeneidad de varianzas entre los diferentes grupos, podremos utilizar el análisis de varianza, o ANOVA, que es un potente método para decidir si existen diferencias significativas entre las medias de los diferentes grupos. Para situaciones en las que no podamos asegurar las condiciones previas (no-paramétrica) se utilizaría un test de comparación de medianas, menos potente, pero menos exigente en las condiciones previas como el test de Kruskal-Wallis, que no trataremos en este trabajo. Supondremos que el diseño del estudio estadístico nos proporciona independencia y normalidad para las muestras obtenidas en cada ejemplo. Analizaremos la homogeneidad de varianzas mediante el test de Bartlett [137,138] y, en caso de encontrar diferencias significativas entre las citadas medias, trabajaremos con contrastes de hipótesis múltiples de Bonferroni o Tukey [139-141].

6.2 Objetivos, diseño de la investigación y metodología.

Objetivos del trabajo.

En el desarrollo de este capítulo se establecieron dos objetivos:

1. Presentar una situación de aprendizaje, con el conocimiento del método ANOVA y su aplicación para la resolución de problemas, que evidencie que la Estadística se puede integrar, sin esfuerzo, con diferentes materias de forma interdisciplinar (STEAM).
2. Presentar una propuesta de instrumento de evaluación del aprendizaje basado en el modelo de van Hiele y las habilidades de Hoffer ampliadas [21,142].

Diseño y metodología de la investigación.

Una metodología activa [143] en el diseño de las actividades, ofreciendo diferentes temas de estudio para que el alumnado elija el camino más motivador para construir su propio aprendizaje, investigando la aplicación de la Estadística en diferentes ámbitos, se podrán conformar grupos de trabajo de tres o cuatro estudiantes, que posibiliten la elección del tema a tratar y la comunicación de estrategias de solución para los problemas propuestos, así como, compartir conceptos matemáticos requeridos en la propuesta; posteriormente se exponen las soluciones encontradas y se consideran otros caminos donde aplicar los conceptos aprendidos y así para afianzarlos. Esta secuencia se puede adaptar a las etapas de aprendizaje descritas en capítulos anteriores, pre-visita, visita al museo y post-visita [70] que definen una correcta acción de enseñanza que aúne las fortalezas de los entornos formales y no formales para el aprendizaje de las ciencias. Proponemos la siguiente secuencia de actuación didáctica:

1. Definición de los grupos de trabajo, información previa y revisión de la propuesta de actividades.
2. Puesta en común de los temas a tratar y de las estrategias empleadas para solucionar los problemas.
3. Propuestas de nuevas situaciones problemáticas de la vida cotidiana por parte de los estudiantes.
4. Análisis final y evaluación del trabajo realizado.

Propuesta de la situación de aprendizaje.

La propuesta se define en cuatro fases: Se plantean diferentes problemas de la vida real a resolver con ANOVA de un factor. Se resolverán manualmente, con Rstudio y con Python. Para el alumnado al que va dirigido, primeros años de carrera universitaria, consideramos que se puede trabajar hasta el nivel 2 o principio del 3 de van Hiele. Serán 9 problemas propuestos más 1 resuelto. Además, sería interesante que, de forma grupal, se realizara una pequeña investigación sobre el tema que les interese con recogida, análisis de datos comparando medias con ANOVA y socialización de los resultados. Tras estas actuaciones se procederá a realizar la evaluación de aprendizajes mediante una rúbrica basada en las habilidades ampliadas de Hoffer.

Ejemplo 1 resuelto: Biología

La bioestadística es una parte de la estadística que se ayuda en la toma de decisiones en los problemas planteados dentro de la biología, genética, medicina, entre otras ciencias de la vida. Las pruebas de hipótesis se utilizan frecuentemente para inferir si determinados cambios en el habitad influyen en plantas o animales.

Situación problemática:

Una cooperativa agrícola dispone en el mercado de cinco productos para combatir una plaga de araña roja en el tomate, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, los dos primeros compatibles con agricultura ecológica y los tres últimos sin esta catalogación, todos con precios asumibles para su explotación. Para decidir que producto utilizar encargan a un ingeniero agrícola, un estudio comparativo sobre la eficiencia media de estos productos con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

El desarrollo del estudio consiste en el control de seis grupos de plantas, previa aplicación de los diferentes productos en cinco grupos y un grupo de control sin tratamiento (ST), en condiciones de independencia y normalidad. El control se realiza mediante el número de arañas rojas detectadas en cada planta a los cinco días de aplicar el tratamiento, obteniendo los datos de la tabla siguiente:

Tratamientos	Nº de insectos						
P1	2	0	1	0	2	3	1
P2	6	6	5	4	7	6	5
P3	5	3	2	6	4	5	7
P4	4	5	3	4	7	6	5
P5	1	0	0	2	1	2	1
ST	10	8	9	7	9	10	12

Tabla 12. Datos ejemplo 1.

¿Qué tratamiento recomendará el investigador?

En este caso se quiere contrastar que tratamientos son más efectivos. Por tanto, y dado que se dispone de datos para diferentes tratamientos, es factible utilizar un análisis de la varianza de un factor, donde el factor es tipo de tratamiento, que contiene seis clases o grupos o niveles, y la variable numérica a analizar es el número de insectos contabilizados en cada uno de los grupos de plantas estudiados.

Se trata de decidir que tratamiento, de los seis (k = 6), proporciona una mejor protección de las plantas frente a la araña roja.

$$\left.\begin{array}{l} H_0:\ \mu_1 = \ \mu_2 = \ \mu_3 = \ \mu_4 = \ \mu_5 = \ \mu_6 \\ H_1: Al\ menos\ una\ igualdad\ no\ es\ cierta \end{array}\right\}$$

Para resolver el anterior contraste de hipótesis, realizamos el análisis de la varianza, para el que debemos considerar tres condiciones previas. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad, ya que sería muy extenso para hacer a mano, pero realizaremos el test de Bartlett para determinar la homogeneidad de varianzas.

$$\left.\begin{array}{l} H_0\text{: } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 \\ H_1\text{: } Al\ menos\ una\ igualdad\ no\ es\ cierta \end{array}\right\}$$

Calculamos el número de datos (n_i), las medias ($\overline{x}_i$) y las cuasi-varianzas (S_i^2) de cada tratamiento por separado y el número de datos (N) y la media ($\overline{X}$) del total de datos.

En nuestro caso:

$n_1 = n_2 = \cdots = n_6 = 7$

$\overline{x}_1 = 1.2857, \overline{x}_2 = 5.5714, \overline{x}_3 = 4.5714, \overline{x}_4 = 4{,}8571, \overline{x}_5 = 1, \overline{x}_6 = 9.2857$

$S_1^2 = 1.2381, S_2^2 = 0.9524, S_3^2 = 2.9524, S_4^2 = 1{,}8095, S_5^2 = 0.6667, S_6^2 = 2.5714$

N = 42

$\overline{X} = 4.4286$

El estadístico de contraste

$M = \frac{1}{C}[(\mathrm{n} - \mathrm{k}) \cdot \ln(MCD) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) \cdot \ln(S_i^2)] = 4.5005$

sigue una distribución χ_{k-1}^2

donde $C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}] = 1.0648$

y $MCD = \frac{SCD}{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2 = 1.6984$

Podemos aproximar el p-valor mediante tabla, obteniendo $P(\chi_5^2 > 4.005) = 0.4798$ que nos indica que no debemos rechazar la hipótesis nula, H0, y por tanto que disponemos, según los datos de la muestra, de homogeneidad de varianzas para continuar con el análisis.

Para resolver el contraste inicial de igualdad de medias utilizamos un test F mediante la siguiente tabla:

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Medias de Cuadrados	F
Entre Tratamientos	SCE = 327,1429	k - 1 = 5	MCE = 65,4286	38,5234
Dentro de Tratamientos	SCD = 61,1429	N – k = 36	MCD = 1,6984	
Total	SCT = 388,2857	N – 1 = 41	MCT = 9,4704	

Tabla 13. ANOVA de un factor.

Donde $SCE = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{x}_i - \overline{X})^2$ y $MCE = \frac{SCE}{k-1}$

MCD = 1,6984 ya calculado y $SCD = MCD \cdot (N - k)$

Además, el estadístico $F = \frac{MCE}{MCD}$ se distribuye como $F_{k-1,N-k}$

Podemos aproximar el p-valor mediante tabla, obteniendo $P\left(F_{5,36} > 38.5234\right) = 1.767 \cdot 10^{-13}$ que nos indica que podemos rechazar la hipótesis nula, H_0, y por tanto que disponemos, según los datos de la muestra, de diferencias entre las medias de los tratamientos.

Para diferenciar los distintos tratamientos realizamos test para compararlos de dos en dos, un total de H = 15 comparaciones. Podemos realizar el test de comparaciones múltiples de Bonferroni.

Para comparar dos tratamientos utilizaremos el estadístico de contraste $T_{ij} = \frac{\overline{x}_i - \overline{x}_j}{\sqrt{MCD \cdot (\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}}$ que se distribuye como $t_{N-k}\ con\ {}^{\alpha}/_{2H}$ como significación. El p-valor lo podemos aproximar con una tabla, obteniendo $2H \cdot P(t_{N-k} > T)$ tomando 1 como máximo, para comparar con $\alpha = 0.05$.

Comparaciones	Estadístico de contraste	p-valor	Conclusión
P_1 y P_2	T = -6,1523	0,0000065	Existen diferencias
P_1 y P_3	T = -4,7167	0,0005337	Existen diferencias
P_1 y P_4	T = -5,1269	0,0001528	Existen diferencias
P_1 y P_5	T = 0,4102	1	No existen diferencias
P_1 y ST	T = -11,4842	0	Existen diferencias
P_2 y P_3	T = 1,4355	1	No existen diferencias
P_2 y P_4	T = 1,0254	1	No existen diferencias
P_2 y P_5	T = 6,5624	0,0000019	Existen diferencias
P_2 y ST	T = -5,3319	0,000081	Existen diferencias
P_3 y P_4	T = -0,4101	1	No existen diferencias
P_3 y P_5	T = 6,5624	0,00015	Existen diferencias
P_3 y ST	T = -6,7675	0,000001	Existen diferencias
P_4 y P_5	T = 5,5370	0,000043	Existen diferencias
P_4 y ST	T = -6,3573	0,0000035	Existen diferencias
P_5 y ST	T = -11,8944	0	Existen diferencias

Tabla 14. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni resueltas manualmente.

Según los datos de la muestra, los productos P1 y P5 son parecidos y con menor media de insectos, los productos P2, P3 y P4 son parecidos con mayor media que los anteriores y sin tratamiento es diferente a utilizar producto y con la mayor media de insectos.

Obteniendo resultados equivalentes al método con Rstudio y con Python.

Nos basaremos en el siguiente organigrama para resolver el problema mediante Rstudio y Python.

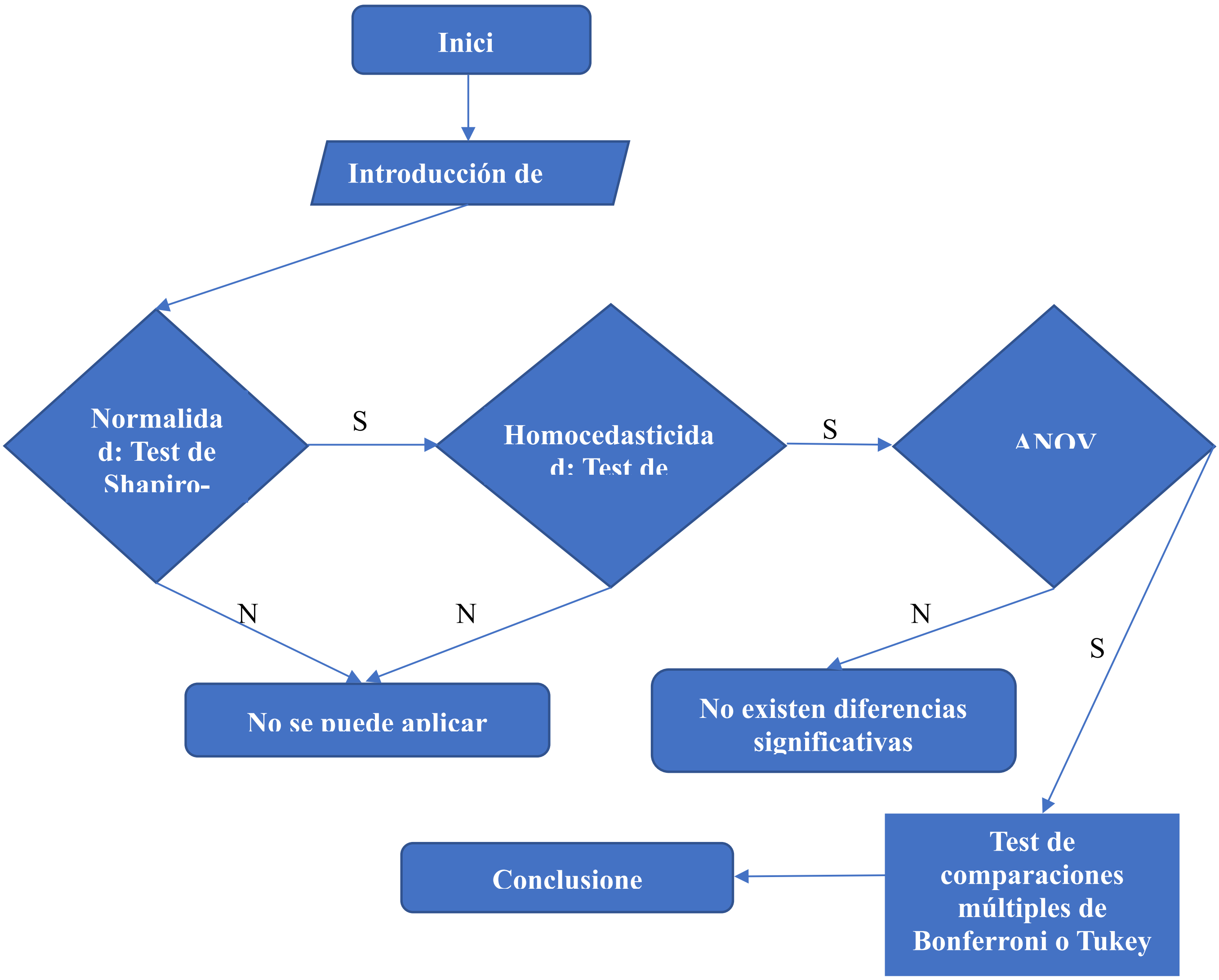


Figura 16. Organigrama para resolución de ANOVA de un factor mediante Rstudio y Python.

A continuación, resolveremos el mismo problema mediante Rstudio.

Utilizando la versión de R: R-4.2.3. de 15-03.2023 y de Rstudio: 2023.03.0+386.

```
# Problema Biología ANOVA
#
# Introducción de datos
P1 <- c(2, 0, 1, 0, 2, 3, 1)
P2 <- c(6, 6, 5, 4, 7, 6, 5)
P3 <- c(5, 3, 2, 6, 4, 5, 7)
P4 <- c(4, 5, 3, 4, 7, 6, 5)
P5 <- c(1, 0, 0, 2, 1, 2, 1)
ST <- c(10, 8, 9, 7, 9, 10, 12)
ninsectos <- c(2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 5, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 4, 5, 3, 4, 7, 6, 5,
1, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 10, 8, 9, 7, 9, 10, 12)
Tratamientos <- as.factor(c(rep(c("P1" , "P2" , "P3" , "P4" , "P5", "ST"), each=7)))
#
# Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk
shapiro.test(ST)
shapiro.test(P1)
shapiro.test(P2)
shapiro.test(P3)
shapiro.test(P4)
shapiro.test(P5)
#
# Contraste de homogeneidad de Bartlett
bartlett.test(ninsectos ~ Tratamientos)
#
# ANOVA
modeloanova <- aov(ninsectos ~ Tratamientos)
summary(modeloanova)
#
# Comparaciones múltiples de Bonferroni
pairwise.t.test(ninsectos, Tratamientos, p.adj = "bonferroni")
#
# Comparaciones múltiples de Tukey
tukey <- TukeyHSD(aov(modeloanova))
tukey
```

Al ejecutarlo se obtiene los resultados del anexo I.

Se verifica normalidad y homocedasticidad, en la tabla ANOVA se obtienen diferencias significativas entre las medias de los diferentes grupos (F = 38.52, p-valor = 1.77e-13 ***) y a continuación exponemos las comparaciones múltiples de Bonferroni.

Comparaciones	p-valor	Conclusión
P_1 y P_2	6.5e-06	Existen diferencias
P_1 y P_3	0.00053	Existen diferencias
P_1 y P_4	0.00015	Existen diferencias
P_1 y P_5	1	No existen diferencias
P_1 y ST	2.0e-12	Existen diferencias
P_2 y P_3	1	No existen diferencias
P_2 y P_4	1	No existen diferencias
P_2 y P_5	0,0000019	Existen diferencias
P_2 y ST	8.1e-05	Existen diferencias
P_3 y P_4	1	No existen diferencias
P_3 y P_5	0.00015	Existen diferencias
P_3 y ST	1.0e-06	Existen diferencias
P_4 y P_5	4.3e-05	Existen diferencias
P_4 y ST	3.5e-06	Existen diferencias
P_5 y ST	7.4e-13	Existen diferencias

Tabla 15. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni con Rstudio.

Obteniendo resultados y conclusiones equivalentes al método manual y con Python.

A continuación, resolveremos el mismo problema mediante Python.

Utilizando Python: v2023.4.1 con Visual Studio Code.

```
# Problema Biología ANOVA
import pandas as pd
import numpy as np
from statsmodels.stats.multicomp import pairwise_tukeyhsd
from scipy.stats import shapiro
from scipy.stats import bartlett
from scipy.stats import f_oneway
#Introducción de datos
ST = [10, 8, 9, 7, 9, 10, 12]
P1 = [2, 0, 1, 0, 2, 3, 1]
P2 = [6, 6, 5, 4, 7, 6, 5]
P3 = [5, 3, 2, 6, 4, 5, 7]
P4 = [4, 5, 3, 4, 7, 6, 5]
P5 = [1, 0, 0, 2, 1, 2, 1]
#
# Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk
shapiro(ST)
shapiro(P1)
shapiro(P2)
shapiro(P3)
shapiro(P4)
shapiro(P5)
#
# Contraste de homogeneidad de Bartlett
bartlett(ST, P1, P2, P3, P4, P5)
#
# ANOVA
f_oneway (ST, P1, P2, P3, P4, P5)
#
# Comparaciones múltiples de Tukey
df = pd.DataFrame({'score': [10, 8, 9, 7, 9, 10, 12, 2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 5,
5, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 4, 5, 3, 4, 7, 6, 5, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 1],
                'group': np.repeat(['ST', 'P1', 'P2', 'P3', 'P4', 'P5'], repeats=7)})
tukey = pairwise_tukeyhsd(endog=df['score'], groups=df['group'], alpha=0.05)
print(tukey)
```

Al ejecutarlo se obtiene los resultados del anexo II.

Se verifica normalidad y homocedasticidad, en la tabla ANOVA se obtienen diferencias significativas entre las medias de los diferentes grupos (F = 38.52336448598133, p-valor = 1.7667933609953312e-13) y a continuación exponemos las comparaciones múltiples de Tukey.

Comparaciones	p-valor	Conclusión
P_1 y P_2	0	Existen diferencias
P_1 y P_3	0.0005	Existen diferencias
P_1 y P_4	0.0001	Existen diferencias
P_1 y P_5	0.9984	No existen diferencias
P_1 y ST	0	Existen diferencias
P_2 y P_3	0.7057	No existen diferencias
P_2 y P_4	0.9063	No existen diferencias
P_2 y P_5	0	Existen diferencias
P_2 y ST	0.0001	Existen diferencias
P_3 y P_4	0.9984	No existen diferencias
P_3 y P_5	0.0001	Existen diferencias
P_3 y ST	0	Existen diferencias
P_4 y P_5	0	Existen diferencias
P_4 y ST	0	Existen diferencias
P_5 y ST	0	Existen diferencias

Tabla 16. Resultados de las comparaciones múltiples de Bonferroni con Python.

Obteniendo resultados y conclusiones equivalentes al método manual y con Rstudio.

La acción educativa prosigue con la presentación de diferentes situaciones de aplicación de los procedimientos desarrollados con anterioridad.

El contraste de hipótesis es una herramienta estadística muy potente y es ampliamente utilizada en muchas ramas de la ciencia. Mostramos aquí algunos de los ejemplos más comunes:

Ejemplos 2 y 3: Medicina. Ensayos clínicos.

La comparación de diferentes tratamientos, fármacos o procedimientos médicos se utilizan a menudo en ensayos clínicos para determinar si produce mejores resultados en los pacientes.

Situación problemática 2:

Supongamos que un médico desea comparar los efectos de tres medicamentos, M_1, M_2 y M_3, sobre la reducción de los niveles de azúcar y compararlos con una dieta y ejercicio diseñado para cada paciente. Para decidir que tratamiento utilizar encargan un estudio comparativo sobre la eficiencia media de éstos con una significación de 0,01.

Recopilación de datos:

Para probar esto, puede medir el nivel de azúcar en sangre de 40 pacientes, diagnosticados con diabetes tipo 2, después de usar los nuevos medicamentos, o la dieta y ejercicio (DE), durante un mes. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Tratamientos	Nivel de azúcar en sangre									
M_1	108	105	100	114	99	105	104	106	107	110
M_2	95	90	103	102	98	95	98	100	96	103
M_3	107	106	101	113	100	106	105	107	112	111
DE	96	91	102	101	90	103	99	97	98	105

Tabla 17. Datos ejemplo 2.

¿Qué tratamiento recomendará el investigador?

Situación problemática 3:

Ciertos estudios afirman que el sonido del canto de las ballenas puede reducir el nivel de estrés de los seres humanos. Para verificar este fenómeno, dos horas antes de una intervención quirúrgica, un grupo de pacientes participaron en un experimento cuyo objetivo era determinar el efecto que tiene la presencia del sonido del canto de las ballenas (CB), de una emisora de radio musical (RM) y la ausencia de sonidos (AS) sobre la capacidad de relajación de los pacientes. Cada paciente participó en una sesión, durante la cual fue medida la temperatura de los dedos de la mano en centésimas de grado. Ya que una temperatura creciente de los dedos indica un aumento en el nivel de relajación, la temperatura fue la variable seleccionada para medir el estrés. Para verificar la hipótesis inicial se encarga un estudio comparativo sobre el incremento de la temperatura de los dedos de la mano, con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Se eligieron al azar 24 pacientes para las sesiones de relajación previas a la intervención quirúrgica. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Métodos	Incremento de la temperatura de los dedos de la mano							
CB	82	59	67	85	72	66	71	90
RM	37	44	55	43	32	33	58	30
AS	10	2	12	21	27	15	19	7

Tabla 18. Datos ejemplo 3.

¿Qué opinará el investigador sobre la recomendación de los estudios previos?

Ejemplo 4: Inversión en publicidad.

Es necesario un detallado análisis sobre las necesidades de los consumidores, sus gustos y sus preferencias para decidir si un nuevo producto, negocio, campaña publicitaria o técnica de marketing es adecuado para alcanzar un aumento de las ventas. También podemos analizar estadísticamente la calidad del servicio, el nivel de satisfacción de los clientes y las propias estrategias y equipos de ventas.

Situación problemática 4:

Supongamos que una empresa cree que gastar más dinero en publicidad digital genera un aumento de las ventas. Para probar esto, la empresa prueba cuatro formatos de publicidad, P_1, P_2, P_3 y P_4, durante un período de un mes y recopila datos para ver cuál es el más efectivo en las ventas. Para decidir que formato de publicidad utilizar, encargan un estudio comparativo sobre la eficiencia media de éstos con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Para probar esto, puede medir el incremento en las ventas (miles de €) de 24 comercios, de características semejantes, después de finalizar la campaña publicitaria. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Campañas	Ventas (miles de €)					
P_1	120	127	109	115	117	132
P_2	117	122	98	117	121	127
P_3	132	151	121	144	148	155
P_4	121	114	103	123	125	128

Tabla 19. Datos ejemplo 4.

¿Qué campaña recomendará el investigador?

Ejemplo 5: Fabricación.

Los procesos, técnicas y métodos de fabricación son revisados mediante pruebas estadísticas para determinar si provocan cambios favorables en las condiciones de producción.

Situación problemática 5:

Supongamos que una determinada fabrica quiere probar si algún método nuevo cambia o no la eficiencia de su producción mensual. Para probar esto, puede comparar la cantidad media de productos defectuosos producidos con el método actual (MA) y después de usar dos nuevos procesos durante un mes (P_1 y P_2) y recopilar datos para ver cuál es el más efectivo. Para decidir que tratamiento utilizar encargan un estudio comparativo sobre la eficiencia media de éstos con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Para probar esto, se puede medir el número de productos defectuosos al final de cada mes, durante un semestre. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Métodos	Producción defectuosa mensual					
MA	2	1	0	5	3	4
P_1	8	9	5	7	6	5
P_2	4	6	8	7	5	9

Tabla 20. Datos ejemplo 5.

¿Qué proceso recomendará el investigador?

Ejemplo 6: Uso en ecologíay.

Una de las cuestiones más importantes que se plantean los ecólogos es el análisis de las diferencias entre poblaciones y cómo afectan los cambios del entorno en las diversas especies autóctonas.

Situación problemática 6:

Supongamos que en un bosque próximo a una central química los árboles no crecen con normalidad. Se piensa que unos nuevos abonos: A_1, A_2, A_3 o A_4 pueden ser la solución. Para ver si esta medida es efectiva, se divide una parcela del bosque en cinco partes, se utilizan los diferentes abonos en cuatro de ellas y para la quinta parte restante no se utiliza ningún abono (NA). Para decidir que tratamiento utilizar encargan un estudio comparativo sobre la eficiencia media de éstos con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Para probar esto, después de 6 meses de tratamiento, se han tomado medidas y se han obtenido los siguientes resultados sobre el crecimiento en centímetros de 30 árboles en total. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Métodos	Crecimiento mensual					
NA	10	8	9	7	13	11
A_1	16	15	19	12	17	18
A_2	17	15	16	12	13	19
A_3	22	28	31	24	23	25
A_4	17	12	15	14	17	18

Tabla 21. Datos ejemplo 6.

¿Qué método recomendará el investigador?

Ejemplo 7: Uso en sociología.

La sociología es uno de los campos donde son más utilizadas las técnicas estadísticas. En política, un sociólogo puede pronosticar en una región concreta, el nivel de abstención en unas elecciones, la satisfacción de la población por una actuación política, la eficacia de planes estructurales o la audiencia de las cadenas de radio, televisión o a través de internet.

Situación problemática 7:

Para la ubicación de una biblioteca en una pequeña ciudad, se decide comparar el número medio de libros prestados por socio en tres bibliotecas de barrios diferentes, en otra ciudad parecida, uno situado en el centro de la ciudad (CC), otro en la zona escolar (ZE) y otro en el extrarradio (E). Para decidir la ubicación se encarga un estudio con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Se seleccionan al azar 21 socios y se obtiene el número anual de libros prestados. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Métodos	Incremento de la temperatura de los dedos de la mano						
CC	10	11	12	9	11	12		
ZE	12	15	11	14	11	16	12	10
E	6	3	5	2	4	3	5	

Tabla 22. Datos ejemplo 7.

¿Qué ubicación recomendará el investigador?

Ejemplo 8: Uso en el campo laboral.

La estadística suele ser empleada en distintas áreas del campo laboral. El estudio de pronósticos a futuro y comparativos dentro del mercado son la base de la planificación estratégica de una empresa. Los mecanismos de control sobre el cumplimiento de objetivos a cargo de los departamentos, las políticas sobre prevención de accidentes laborales, la provisión de mercancías o los estudios de mercado son algunos ejemplos de actuaciones empresariales elaboradas con base en datos estadísticos.

Situación problemática 8:

Una entidad de crédito quiere saber si el porcentaje de créditos fallidos es el mismo en los Créditos de Consumo (A), Créditos Comerciales (B) y Créditos Hipotecarios (C). Para decidir la ubicación se encarga un estudio con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Se selecciona aleatoriamente 8 sucursales y se recopilan los créditos fallidos de cada tipo en un periodo de seis meses. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos obtenidos quedan en la siguiente tabla:

Métodos	Número de créditos fallidos							
A	20	25	19	21	24	29	18	26
B	18	22	16	23	17	25	20	15
C	12	15	9	14	16	7	13	10

Tabla 23. Datos ejemplo 8.

¿Qué resultados podemos deducir del estudio?

Ejemplo 9: Uso en las finanzas personales.

La economía familiar constituye el ejemplo más cercano de la aplicación de la estadística en la vida cotidiana. Analizar la situación en la que se encuentran los ingresos y gastos definen la situación actual de la economía familiar. Estos contrastes son el punto de partida para la planificación de compromisos posteriores que requieren el trazado de ciertas estrategias para ser logrados.

Situación problemática 9:

En plena crisis, Pedro quiere analizar en qué supermercado es conveniente ir a hacer la compra. Para decidir la elección se encarga un estudio con una significación de 0,05.

Recopilación de datos:

Para ello prepara el siguiente experimento: Realiza la misma compra básica en los tres supermercados próximos a su casa (A, B y C) de forma aleatoria durante 24 días y recoge los datos. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad. Los datos del importe (en €) de cada compra se recogen en la siguiente tabla:

Métodos	importe (en €) de cada compra							
A	83	85	80	87	82	88	80	82
B	91	87	85	87	85	82	90	88
C	94	93	87	105	87	98	92	102

Tabla 24. Datos ejemplo 9.

¿Qué debe elegir Pedro?

Ejemplo 10: Usos en los deportesy.

Para que los atletas alcancen su máximo rendimiento, se hace necesario el estudio pormenorizado de aquellos datos que definan su desempeño en diferentes entrenamientos y competiciones, optimizando los recursos y los entrenamientos. De esta forma aumentarán el porcentaje de bateos, las marcas en carreras, los pasas acertados, las canastas, los goles y demás acciones en diferentes deportes.

Situación problemática 10:

Los miembros de un equipo de triatlón se dividen al azar en cuatro grupos que entrenan con métodos diferentes. El primer grupo realiza largos recorridos (A), el segundo grupo realiza series cortas (B) el tercero trabaja en el gimnasio con pesas y se ejercita en el pedaleo de alta frecuencia (C) y el cuarto combina los dos primeros métodos (D).

Recopilación de datos:

Después de seis meses de entrenamiento se realiza un test de rendimiento consistente en nadar un km, correr diez km. Y un circuito en bicicleta de 15 Km. Admitiremos que el estudio se ha realizado en condiciones de independencia y normalidad.

Los datos del tiempo en realizar el test (en minutos) de cada ciclista se recogen en la siguiente tabla:

Métodos	Tiempos del test					
A	55	56	54	55	56	58
B	54	53	55	56	54	57
C	53	52	51	50	51	52
D	50	54	52	51	53	51

Tabla 25. Datos ejemplo 10.

¿Qué método de entrenamiento es el más efectivo?

6.3 Instrumento de evaluación para el aprendizaje del análisis de la varianza de un factor (ANOVA).

Presentamos una tabla con la evolución de las destrezas [9] que los estudiantes deben seguir para avanzar en los niveles de van Hiele, consolidando el aprendizaje de la resolución de problemas mediante el análisis de la varianza de un factor. Proporcionando los ítems de una rúbrica que podemos utilizar como instrumento de evaluación tanto en el entorno formal del aula como en las actividades que se realicen en el museo.

Una rúbrica nos permitirá evaluar los logros del alumnado conforme al alcance de las destrezas descritas en la tabla 2, Ítems para la rúbrica: Los de la tabla 2 para los niveles I, II y III.

Destrezas\ Niveles	Nivel 1 Visualización	Nivel 2 Análisis	Nivel 3 Clasificación	Nivel 4 Deducción formal
VISUAL	Reconoce distintos tipos de gráficas estadísticas y los componentes básicos de un organigrama. Identifica las diferentes tablas estadísticas de distribuciones de probabilidad.	Identifica gráficas y componentes de un organigrama, relacionándolos con la comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas.	Comprende la correspondencia entre gráficas estadísticas y componentes de un organigrama con la comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas.	Demuestra formalmente la relación entre gráficas estadísticas y la estructura del un organigrama con la comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas.
VERBAL	Asocia el nombre de conceptos básicos de estadística con gráficas y datos. Interpreta frases que describen las condiciones previas y los conceptos básicos para la comparación de varias poblaciones. Conceptos básicos: Inferencia, distribución de probabilidad, población, muestra, parámetros estadísticos, media, mediana, varianza, contraste de hipótesis, estadístico de contraste, región crítica, p-valor. Conoce el vocabulario de los elementos de un organigrama y las funciones necesarias de los entornos Excel, Rstudio y Paython.	Describe gráficas y componentes de un organigrama, relacionándolos con la comparación de varias poblaciones y el análisis de la varianza. Define adecuadamente los diferentes contrastes de hipótesis. Explica las diferentes fuentes de variación. Conecta la introducción de datos, las funciones computacionales estadísticas y los resultados. Relaciona estadístico de contraste y región crítica con la conclusión del contraste. Relaciona el p-valor con la conclusión del contraste.	Formula una definición precisa de las condiciones previas y el planteamiento para aplicar ANOVA. Define una estructura tipo para programar la resolución de problemas de comparación de más de dos poblaciones (ANOVA) Expone las diferentes posibilidades de conclusión para problemas de comparación de más de dos poblaciones (ANOVA)	Expone con rigor la demostración del marco general que engloba a los problemas de comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas.

PICTÓRICA Y MANIPULATIVA	Dibuja distintos tipos de gráficas estadísticas y los componentes básicos de un organigrama. Reconoce las diferentes gráficas de las distribuciones de probabilidad: Normal Z, t de Student, Chi cuadrado y F de Snedecor. Reconoce y manipula los elementos de un organigrama.	Traduce información verbal sobre distintos tipos de gráficas estadísticas y de las distribuciones de probabilidad: Normal Z, t de Student, Chi cuadrado y F de Snedecor. Identifica cada componente de un organigrama con su significado computacional y estadístico.	Es capaz de construir otras graficas estadísticas y organigramas que se apliquen a otras situaciones, partiendo de los modelos para la comparación de más de dos poblaciones (ANOVA).	Generaliza el uso de gráficas estadísticas y la estructura de un organigrama que involucran la comparación de más de dos poblaciones (ANOVA).
LÓGICA	Diferencia grupos de población, datos muestrales y poblacionales, así como el factor que caracteriza los diferentes grupos. Identifica frases que describen las condiciones previas, para utilizar ANOVA. Relaciona los conceptos básicos para la comparación de varias poblaciones. Entiende la sucesión lógica de figuras de organigrama y funciones computacionales. .	Comprende e interpreta frases que describen las condiciones previas para utilizar ANOVA, y calcula los conceptos básicos para la comparación de varias poblaciones. Identifica y calcula las diferentes fuentes de variación. Analiza la relación entre medias o medianas para inferenciar si hay diferencias entre ellas, y por tanto, entre las poblaciones. Calcula e interpreta los estadísticos, regiones críticas y p-valores obtenidos para alcanzar conclusiones adecuadas. Relaciona la introducción de datos, las funciones computacionales estadísticas y los resultados.	Comprende los sucesivos pasos de resolución y conclusión de situaciones problemáticas en la que interviene la comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas. De forma escrita y computacinal. Asimila una estructura tipo para estructurar y programar la resolución de problemas de comparación de más de dos poblaciones (ANOVA).	Cree en la necesidad de realizar demostraciones que verifiquen los diferentes pasos y las conclusiones de problemas estadísticos. Es capaz de realizar demostraciones del marco general que engloba a los problemas de comparación de varias poblaciones en condiciones tanto paramétricas como no paramétricas. Comprende la utilidad de la modelización matemática y computacional de problemas estadísticos.

APLICADA (STEAM)	Conoce el uso interdisciplinar de la Estadística y sus componentes básicos. Conoce el uso interdisciplinar de la Computación y sus componentes básicos.	Reconoce el uso de la comparación de más de dos poblaciones (ANOVA), tanto por escrito como computacionalmente, en diferentes ámbitos	Es capaz de resolver problemas de la vida cotidiana y de diferentes ámbitos aplicando la comparación de más de dos poblaciones (ANOVA), tanto por escrito como computacionalmente.	Desarrolla modelos matemáticos que involucran la comparación de más de dos poblaciones (ANOVA), tanto por escrito como computacionalmente. Para representar sistemas abstractos o para describir fenómenos naturales, físicos o sociales.
DIGITAL	Conoce el uso de los entornos Excel, Rstudio y Paython. Conoce los componentes básicos de un organigrama y de la computación.	Relaciona y analiza los componentes estadísticos y computacionales para programar la resolución de problemas de comparación de más de dos poblaciones (ANOVA)	Comprende una estructura tipo para programar la resolución de problemas de comparación de más de dos poblaciones (ANOVA)	Generaliza, complementa y aplica esta estructura de programación a situaciones problemáticas más amplias.

Tabla 26. Habilidades Hoffer ampliadas.

Capítulo VII: Conclusiones y trabajos futuros.

En este último capítulo se resumen las principales conclusiones que se extraen del trabajo realizado con el fin de tener una visión general de todos los resultados obtenidos, así como las vías futuras de investigación.

7.1 Conclusiones.

En el desarrollo de esta investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en entornos formales y no formales se pueden distinguir cuatro fases bien diferenciadas. La primera de creencias del profesorado sobre la estrategia de aprendizaje STEAM y museos de ciencia, la segunda sobre el diseño de un módulo interactivo para un museo de ciencias basado en el modelo de van Hiele para el teorema de Pitágoras, la tercera sobre la propuesta de diseño de un taller basado en estrategia de aprendizaje STEAM para aprender criptografía, y finalmente, la cuarta fase sobre la relación entre la Estadística y STEAM, en un entorno formal y con una propuesta de evaluación mediante las habilidades de Hoffer ampliadas.

De la primera fase podemos extraer las siguientes conclusiones y directrices:

La aplicación de nuevas metodologías activas en el aula no está muy extendida. El profesorado acepta la estrategia STEAM como positiva, sin embargo, no reconocen como relacionada otra asignatura que enriquecería los proyectos desarrollados en el aula, a excepción de Matemáticas. Por lo tanto, sería interesante abordar una formación inicial y continua del profesorado con actividades interdisciplinarias, incluso fuera del ámbito científico-tecnológico.

Además, no se enfrentan a grandes dificultades para poner en práctica esta estrategia. Y está claro que estos problemas se superarían con equipos interdisciplinarios en el aula.

Se presta especial atención a la dificultad de los estudiantes para comprender los textos científico-tecnológicos, por lo que es necesario un apoyo de esta competencia, tanto dentro como fuera del aula, el aprendizaje del lenguaje propio de las ciencias, tal y como expone van Hiele en su modelo, se torna fundamental.

El profesorado de ciencias cree que las visitas a los museos de ciencias son positivas para el aprendizaje de los estudiantes, por lo tanto, contribuye a aumentar su capital científico. Por otro lado, consideran que una mayor conexión con el trabajo en el aula y la red de museos ayudaría a este objetivo.

De la segunda fase podemos extraer las siguientes conclusiones y directrices:

Recientemente se ha incrementado enormemente el número de investigaciones centradas en la enseñanza de distintas ramas de la ciencia en museos. Además, se observa un incremento importante de museos de matemáticas en los últimos años, aunque escasean todavía las investigaciones que evalúan su impacto en el aprendizaje de esta materia. Por este motivo, se hace necesario disponer de herramientas que nos permitan diseñar y evaluar propuestas de enseñanza de contenidos matemáticos en este contexto no formal.

En este trabajo se propone la aplicación del modelo de van Hiele para el diseño de módulos interactivos de matemáticas en museos. Este modelo es considerado de referencia en el ámbito de la educación matemática a todos los niveles educativos y su aplicación proporciona una base teórica que permitirá diseñar de una manera más efectiva estos módulos de matemáticas desde el punto de vista del aprendizaje.

En particular, se ha presentado una caracterización explícita de este modelo teniendo en cuenta cuatro niveles de van Hiele y las habilidades identificadas por Hoffer. Además, se ha aplicado esta caracterización teórica para el diseño de un módulo interactivo del museo de Ciencias MUDIC centrado en la enseñanza del teorema de Pitágoras.

De la tercera fase podemos extraer las siguientes conclusiones y directrices:

La extensión del modelo de razonamiento geométrico de van Hiele a otros campos de la educación matemática implica una adaptación de las habilidades de Hoffer al concepto matemático que se está aprendiendo. Por lo tanto, nos pareció interesante agregar habilidades digitales y manipulativas para el aprendizaje de las matemáticas. Además, el desarrollo de todas estas habilidades se puede utilizar para evaluar el aprendizaje.

Podemos concluir que, como muestran muchos estudios, es una oportunidad de aprendizaje para que los profesores diseñen la visita al museo como parte de una intervención didáctica con sus estudiantes basada en la estrategia STEAM, comenzando y terminando en el aula.

Es interesante complementar los talleres del museo con actividades STEAM antes y después de la visita, proporcionando retroalimentación de las opiniones de los visitantes y profesores para actualizarlas.

Aunque un museo no es una escuela, y puede recibir las sugerencias de los maestros, no es un sustituto de la práctica de laboratorio o las lecciones de matemáticas. Algunos contenidos matemáticos se pueden trabajar mejor en relación con otras disciplinas, mientras que otros son más difíciles de contextualizar. Cuando las matemáticas aparecen como una subsidiaria de otra asignatura es más fácil. Por ejemplo, las matemáticas aplicadas tienen un aspecto más procedimental. Por lo tanto, debemos cuidar todo el proceso de aprendizaje. El papel interdisciplinario de las matemáticas está en la última fase del aprendizaje y no como un paso intermedio e injustificado.

Los museos y las instituciones educativas deben buscar espacios para la socialización y la discusión con profesores de otras áreas e instituciones para favorecer el diseño de otras intervenciones didácticas con estrategia STEAM, involucrando a profesores y gestores de educación museística.

Además, también nos gustaría señalar la importancia de la formación, tanto para el profesorado como para el personal del museo, en cuanto a las estrategias de implementación de este tipo de actividades y la importancia del lenguaje a utilizar. Un concepto matemático logra su significado sólo para las personas que pueden entenderlo y relacionarse con él.

Una participación activa en las actividades propuestas permite el intercambio de diferentes niveles de conocimiento, resulta en una transformación de las habilidades de los estudiantes y mejora sus condiciones motivacionales.

Para concluir, de la cuarta fase podemos extraer las siguientes conclusiones y directrices:

Consideramos que la estadística es una parte de las matemáticas que permite al estudiante descubrir la estrecha relación entre las matemáticas y muchos aspectos del mundo real, en particular, nuestro entorno cotidiano. Por su utilidad para la formación de opiniones y toma de decisiones se introduce en los sistemas educativos desde el inicio del aprendizaje de las matemáticas. La Estadística es, sin duda, imprescindible en la mochila que fundamenta el capital científico de los estudiantes.

Para la educación STEAM, donde se busca la aplicabilidad y la multidisciplinariedad, es necesario utilizar una metodología activa, mediante el planteamiento de problemas, cercanos y fácilmente comprensibles por el estudiante, que permitan, a la hora de buscar su solución, introducir los diferentes conceptos del análisis de la varianza de un factor.

Dadas las múltiples aplicaciones de la estadística en las disciplinas STEAM, es necesario un enfoque aplicado a su enseñanza. Podemos presentar situaciones problemáticas relacionadas con múltiples realidades próximas al estudiante, como en Biología, Medicina, Economía, Sociología, Deporte. En el presente trabajo, proponemos diez problemas que pueden ser útiles para la introducción del análisis de la varianza de un factor y los algoritmos en Rstudio y Paython, resolviendo este tipo de problemas, que incorporan situaciones que constituye un reto para el alumno y permiten cumplir con el objetivo de desarrollar su capacidad de razonamiento.

Consideramos que es importante haber definido un marco teórico que nos permita afrontar el aprendizaje con estrategia STEAM, la actualización de las habilidades que determinan el aprendizaje de las matemáticas y la creación de un instrumento de evaluación para estos procesos basado en dichas destrezas.

Una dificultad que nos podemos encontrar al desarrollar esta propuesta didáctica sería la identificación con una mera colección de problemas sin conexión con la realidad, por lo que sería muy interesante la realización, como se propone, de pequeñas investigaciones, con datos reales, obtenidos por los estudiantes y socializadas en el grupo.

Este trabajo proporciona un marco para crear actividades en el aula con un conjunto de datos atractivo que los estudiantes encuentren interesantes y alcancen otras fructíferas relaciones entre la estadística y la estrategia STEAM, incluso con otras partes de las Matemáticas.

7.2 Trabajos futuros.

Como líneas futuras de investigación y a la vista de los resultados obtenidos, no podemos considerar este trabajo como un proceso completado, por el carácter explícito de las propuestas de diseño del módulo interactivo y el taller para el museo, se pretende que estas puedan servir como referencia para futuros diseños de otros módulos interactivos y talleres en museos relacionados con cualquier contenido matemático. Además, como posible camino futuro de investigación se podría plantear la ampliación de esta propuesta al diseño de módulos enfocados en la formación del profesorado.

La eficacia de esta actividad tendría que evaluarse, mediante estudios de caso, tanto en el museo como en el aula, antes de extender este enfoque a un plan de estudios formal. Sería interesante diseñar una investigación para evaluar la efectividad de la propuesta presentada mediante la implementación del mismo taller en diferentes niveles educativos, así como con el fin de estudiar los resultados e implicaciones.

Para avanzar en el camino iniciado con esta investigación, sería conveniente abordar la búsqueda sistematizada de otras relaciones fructíferas entre matemáticas y estrategia STEAM, profundizando en la relación entre los museos de ciencias y las instituciones educativas.

Referencias

1. Beavis, C. (2007). Escritura, cultura digital y currículo de inglés. L1 Estudios educativos en lengua y literatura, 7(4), 23-44.
2. Chan, T. W. (2010). Cómo pueden cambiar las aulas de Asia oriental en los próximos 20 años. Revista de aprendizaje asistido por computadora, 26(1), 28-52.
3. Gee, J. P. (2010). Learning by design: Los juegos como máquinas de aprendizaje. Multimedia Educativa Interactiva, (8), 15-23.
4. Kong, S. C. (2014). Desarrollo de habilidades de alfabetización informacional y pensamiento crítico a través del aprendizaje de conocimiento de dominio en aulas digitales: una experiencia de practicar la estrategia de aula invertida. Computers & Education, 78, 160-173.
5. Gut, D. M. (2011). Integrar las habilidades del siglo 21 en el plan de estudios. En G. Wan, & D. M. Gut (Eds.), Bringing schools into the 21st Century. Dordrecht: Springer. 137 y 157.
6. Allen, S. (2004). Designs for Learning: Studying Science Museum Exhibits that do More Than Entertain. *Science Education, 88*(1), 17-33
7. Anderson, D., Lucas, K.B., Ginns, I.S., (2003). Theoretical perspectives on learning in an informal setting. *Journal on research in Science Teaching*, 40(2), pp. 177-199.
8. Falk, J.H. & Dierking, L.D., (2013). *The Museum. Experience Revisited*. Walnut. Creek, CA: Left Coast Press.
9. Guisasola, J. Morentín, M. & Zuza, K. (2005). School visits to science museums and learning sciences: a complex relationship. Physics education, 40(6), pp. 544-549.
10. Griffin, J. (1998). Learning science through practical experiences in museums. *Internat. Journal of Sciene Education,* 20(6), pp. 655-663.
11. Hein, G.E., (1998). *Learning in the Museum,* London: Routledge.
12. McManus, P.M. (1992). Topics museums and science education. *Studies in Science Education,* 20, pp. 157-182.
13. Rennie, L.J. and Johnston, D.J. (2004). The nature of learning and its implications for Research on Learning from Museums. *Science Education,* 88, S1, pp. 4-16.

14. Salmi, H. (2003). Science centre as learning laboratories: experiences of Heureka, the Finish Science Centre. *Internat. Journal of Technology Management, 25(5), pp. 460-476.*

15. Tuckey C. (1992). Children's informal learning at an interactive science centre. *International journal of Science Education, 14(3), pp. 273-278.*

16. Popovic, G. & Lederman, J.S. (2015). Implications of informal education experiences for Mathematics teachers' ability to make connections beyond formal classroom. *School Science and Mathematics, 115*(3)*,* 129–140

17. Suter, L.E., (2014) Visiting Science Museums During Middle and High School: A Longitudinal Analysis of Student Performance in Science, *Science Education, 98*(5), 815-839.

18. Van Hiele, P.M. (1955): De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde iii de eerste kíasse van het V.H.M.O., *Paedagogische Stüdien* vol. XXXII (J.B. Wolters: Groningen), pp. 289- 297.

19. Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education,* Academic Press, New York.

20. Gutierrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 20, 27-46.

21. Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* 74(1), 11-18.

22. Lindahl, B. (2007). Un estudio longitudinal de las actitudes de los estudiantes hacia la ciencia y la elección de carrera. Presentado en la Conferencia Anual de NARST, Nueva Orleans. Extraído de http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hkr:diva-6093. 15-18

23. Toma, R. B. y Greca, I. M. (2018). El efecto de la instrucción STEM integrativa en las actitudes de los estudiantes de primaria hacia la ciencia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1383-1395. https://doi.org/10.29333/ejmste/83676.

24. Queiruga-Dios, M.A.; López-Iñiesta, E.; Díez-Ojeda M.; Sáiz-Manzanares, M.C.; Vázquez-Dorrio, B. Implementation of a STEAM project in compulsory secondary education that creates connections with the environment. Journal for the Study of Education and Development, 2021. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1925475.

25. Ton de Jong. (2019) Moving toward engaged learning in STEM domains, there is no simple answer, but a road ahead. Journal of Computer Assisted Learning. 35, pp. 153-167. **https://doi.org/10.111/jcal.12337**
26. Stracke C.M., van Dijk G., Fasen J., Lisdat F., Simoens W. (2020) A Holistic Pedagogical Model for STEM Learning and Education Inside and Outside the Classroom. In: Zaphiris P., Ioannou A. (eds) Learning and Collaboration Technologies. Designing Developing and Deploying Learning Experiences. HCII. Lecture Notes in Computer vol. 12205 Springer, Cham **https://doi.org/10.1007/978-3-030-50513-4_41**
27. Faria, C., Guilherme, E., Gaspar, R., & Boaventura, D. (2015). History of science and Science Museums: an enriching partnership for elementary school science. *Science and Education 24.* 983–1000
28. Koch, F.D.; Dirsch-Weigand, A.; Awolin, M.; Pinkelman, R.J.; Hampe, M.J. (2017) Motivar a los estudiantes universitarios de primer año mediante proyectos de estudio interdisciplinarios. *Eur. J. Eng. Educ.* págs. *42*, 1–15. https://doi.org/10.1080/03043797.2016.1193126.
29. Aravind, V.R. (2015) Juguetes de física baratos para demostraciones y aprendizaje práctico. *Lat. Am. J. Phys. Educ. 9*, 10.
30. Sarasua, J. (2010). Hacia una categorización de los objetivos geométricos: Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de van hiele para la representación externa de figuras planas. PhD Thesis. Universidad del País Vasco.
31. Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España.
32. Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática, 295-398.
33. Llorens, J.L. (1999) Aplicación del modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación local. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, València, Spain, 1994. [Google Scholar]
34. Campillo, P. (1999) La Noción de Continuidad Desde la óptica del Modelo de Van Hiele. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain. [Google Scholar]

35. de la Torre, A.F. (2000) Modelización del Espacio y el Tiempo: Su Estudio vía el Modelo de Van Hiele. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain. [Google Scholar]
36. Esteban, P.V. (2000) Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local vía del Modelo de Van Hiele. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain. [Google Scholar]
37. Jaramillo, C.M. La Noción de Serie Convergente Desde la óptica de los Nivele de Van Hiele. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain, 2000. [Google Scholar]
38. Navarro, M.A. (2002) Un estudio de la Convergencia Encuadrado en el Modelo Educativo de Van Hiele y su Correspondiente Propuesta Metodológica. Ph.D. Thesis, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain. [Google Scholar]
39. Prat, M. (2015) Extensión del Modelo de van Hiele al Concepto de área. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain. [Google Scholar]
40. Dreyfus, T.; Thompson, P.W. (1985) Microworlds and van Hiele levels. In Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands, 22–29 July; Volume 1, pp. 5–11. [Google Scholar]
41. Crowley, M.L. (1987) The van Hiele Model of the Development of Geomemc Thought. In Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics; Lindquist, M.M., Ed.; National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA, USA; pp. 1–16. [Google Scholar]
42. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, USA: ERIC.
43. Crowley, M.L. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the van Hiele Geometry Test. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (3), 238-241.
44. Izzati, F.; Kusmanto, H.; Toheri, T. Pengaruh Penerapan (2016) Teori Van Hiele Berbantuan Software Wingeom Terhadap Kemampuan Penalaran Matematika Siswa pada Materi Geometri. *Inf. Technol. Eng. J. 2*, 19–25. [**Google Scholar**] [**CrossRef**]

45. Theran, E. (2021) Pensamiento Geométrico, Teoría de Van Hiele y Tecnologías Computacionales. *Comput. Electr. Sci. Theory Appl. 2*, 39–50. [Google Scholar] [CrossRef]

46. DuFour, R.; DuFour, R.; Eaker, R.; Many, T. (2006) *Learning by Doing. A Handbook for Professional Learning Communities at WorkTM*; Solution Tree: Bloomington, IN, USA. [Google Scholar]

47. Fernández, R.A. (2018) La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del laboratorio 'Rurashpa Yachakuy. aprende haciendo'. *Mamakuna Rev. Divulg. Exp. Pedag. 8*, 68–75. [Google Scholar]

48. Boy, G.A. From STEM to STEAM: Toward a human-centred education, creativity and learning thinking. Proceedings of the 31st European Conference on cognitive ergonomics (p.3). ACM, 2013. http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?print=yes&R=20130011666

49. Kimmons, R., & Hall, C. (2012). Creativity and STEM: Challenges and Opportunities. Journal of STEM Education: Innovations and Research, 13(5/6), 15-25.

50. Besemer, S. P., & O'Quin, K. (1987). Creative Product Analysis: Testing a Model by Developing a Judging Instrument. Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts, 1(4), 200-207. https://doi.org/10.1037/0278-6133.1.4.200

51. Fortus, D., Dershimer, R. C., Krajcik, J., Marx, R. W., & Mamlok-Naaman, R. (2004). Children's engagement in a LEGO robotics task: a new opportunity for studying science identity. Journal of Science Education and Technology, 13(1), 87-108. https://doi.org/10.1023/B:JOST.0000013255.08266.b0

52. Rhode Island School of Design. (2013). STEM to STEAM: Resources Toolkit. https://stemtosteam.org/toolkit/

53. Prengaman, E. (2019). Lessons in Process: Similarities between Scientific and Artistic Creative Practice. The STEAM Journal, 4(1), 11. https://doi.org/10.5642/steam.20190401.11

54. Couso, D. (2017) ¿Por qué estamos en STEM? Definiendo la alfabetización STEM para todos y con valores. Revista Ciencies, 34, 21-29.

55. Zollman, A. (2012). Aprendizaje para la alfabetización STEM: Alfabetización STEM para el aprendizaje. Ciencias y matemáticas escolares, 112(1), 12-19.

56. Balka, D. (2011). Estándares de práctica matemática y STEM. Stillwater, OK: Asociación de Ciencias Escolares y Matemáticas.
57. Janousek, I (2000). The context museum: Integrating science and culture, *Museum International, 52(4),pp. 21-24.*
58. Falk, J.H. (1997). Testing a museum exhibition design assumption: Effect of explicit labeling of exhibit cluster on visitor concept development. *Science Education*, 81, 679-687.
59. Brajčić, M., Kovačević, S., and Kuščević, D., (2013). Learning at the Museum, *Croatian Journal of Education,* 15; 159-178.
60. Guisasola, J. & Morentín, M. (2007). ¿Qué papel tienen las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de las ciencias? Una revisión de las investigaciones. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), 401–414.
61. Chin, C. (2004). Experiencia en museos: un recurso para la formación de profesores de ciencias. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 2, 63-90.
62. Walhimer, Mark (2016): "Museum 4.0 as the Future of STEAM in Museums", en STEAM Journal: Vol. 2: Iss. 2, artículo 14. DOI: 10.5642/steam.20160202.14
63. Cooper, S. (2011) An Exploration of the Potential for Mathematical Experiences in Informal Learning Environments, Visitor Studies, 14:1, 48-65, DOI: 10.1080/10645578.2011.557628
64. Gyllenhaal, E. D. (2006). Memory of math: Visitors experiences in an exhibition about calculus. Curator: The Museum Journal, 49(3), 345-364. https://doi.org/10.1111/j.2151-6952.2006.tb00228.x
65. Kelton, M. L. (2015). Math on the move: A video-based study of school field trips to a mathematics exhibition [Doctoral thesis, San Diego State University University of California, San Diego].
66. Pattison, S., Rubin, A., & Wright, T. (2016). Mathematics in informal learning environment: A summary of the literature. Institute for Learning Innovation. Math in the Making Project. Available at: http://www.instituteforlearninginnovation.org/uploads/4/9/1/3/49134795/informalmathlitsummary_minm_03-23-16_v3.pdf
67. Anderson, D., Lucas, K.B., Ginns, I.S., (2000). Development of knowledge about electricity and magnetism during a visit to a science museum and related post–visit activities. *Science* Education, 84(5), 658-679.

68. Guisasola, J. & Morentín, M. (2015-a) Ideas del profesorado de primaria y secundaria sobre las visitas escolares a centros de ciencias del País Vasco. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 13(S1), 191-214

69. Guisasola, J. & Morentín, M. (2015-b) The role of science museum field trips in the primary teacher preparation. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 13, 965-990.

70. Warren, S.; Dondlinger, M.J.; Stein, R.; Barab, S. (2009) Educational Game as Supplemental Learning Tool: Benefits, Challenges, and Tensions Arising from Use in an Elementary School Classroom. *J. Interact. Learn. Res. 20*, 487–505. Available online: **https://www.learntechlib.org/primary/p/28349/** (accessed on 15 November 2022).

71. Aguilos, V.; Fuchs, K. (2002) The Perceived Usefulness of Gamified E-Learning: A Study of Undergraduate Students With Implications for Higher Education. *Front. Educ. 7*, 945536. [**Google Scholar**] [**CrossRef**]

72. Campos, H.; Moreira, R. (2016) Games as an educational resource in the teaching and learning of mathematics: An educational experiment in Portuguese middle schools. *Int. J. Sci. Math. Educ. Sci. Technol. 47*, 463–474. [**Google Scholar**] [**CrossRef**]

73. Cheung, S.Y.; Ng, K.Y. (2021) Application of the Educational Game to Enhance Student Learning. *Front. Educ. 6*, 623793. [**Google Scholar**] [**CrossRef**]

74. Edo, M.; Baeza, M.; Deulofeu, J.; Badillo, E. (2008) Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Unión*, *14*, 61–75. [**Google Scholar**]

75. Archer, L., DeWitt, J., Osborne, J., Dillon, J., Willis, B. y Wong, B. (2012). Aspiraciones científicas y habitus familiar: Cómo las familias moldean el compromiso y la identificación de los niños con la ciencia. American Educational Research Journal, 49(5), 881–908.

76. Godec, Spela y King, Heather y Archer, L. (2017). El enfoque de enseñanza de capital científico: involucrar a los estudiantes con la ciencia, promover la justicia social.

77. Harris, Emily y Xanthoudaki, Maria y Winterbottom, Mark. (2018). TINKERING AND SCIENCE CAPITAL IDEAS AND PERSPECTIVES 1 Mark Winterbottom.

78. King, H., Nomikou, E., Archer, L. y Regan, E. (2015). Comprensión de los docentes y operacionalización del 'capital científico'. Revista Internacional de Educación en Ciencias, 37 (18), 2987–3014. https://doi.org/10.1080/09500693.2015.1119331

79. Domènech-Casal, J.; Lope, S. y Mora, L. (2019) "Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos". Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 16(2), 2203. doi: 10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203

80. Park, Hyunju; Byun, Soo-yong; Sim, Jaeho; Han, Hyesook y Baek, Yoon Su. (2016) "Percepciones y prácticas de los docentes sobre la educación STEAM en Corea del Sur". Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12 (7), 1739-1753. doi: 10.12973/eurasia.2016.1531a

81. Wang, Hui-Hui; Moore, Tamara J.; Roehrig, Gillian, H.; y Park, Mi Sun (2011) "STEM Integration: Teacher Perceptions and Practice" Journal of Pre-College Engineering Education Research (J-PEER): Vol. 1: Iss. 2, artículo 2. http://doi.org/10.5703/1288284314636

82. Dawson, E. (2014a). Equity in informal science education: Developing an access and equity framework for science museums and science centers, Studies in Science Education, 50(2), 209–247, doi: 10.1080/03057267.2014.957558.

83. Archer, Louise & Dawson, Emily & DeWitt, Jennifer & Seakins, Amy & Wong, Billy. (2015). "Capital científico": Un argumento conceptual, metodológico y empírico para extender las nociones bourdieusianas del capital más allá de las artes: SCIENCE CAPITAL. Revista de Investigación en Enseñanza de la Ciencia. 52. 10.1002/tea.21227

84. Dawson, E. (2014b). "No diseñado para nosotros": Cómo los museos de ciencia y los centros de ciencia excluye socialmente a los grupos étnicos minoritarios de bajos ingresos. Educación científica, doi: 10.1002/sce.21133.

85. Padwick, A., Dele-Ajayi, O., Davenport, C. et al. Evaluating a complex and sustained STEM engagement programme through the lens of science capital:

insights from Northeast England. IJ STEM Ed 10, 33 (2023). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00421-y

86. Moote, J, Archer, L, DeWitt, J, MacLeod, E. Science capital or STEM capital? Exploring relationships between science capital and technology, engineering, and maths aspirations and attitudes among young people aged 17/18. J Res Sci Teach. 2020; 57: 1228–1249. https://doi.org/10.1002/tea.21628
87. Akiri, E., Tor, H. M., & Dori, Y. J. (2021). Teaching and Assessment Methods: STEM Teachers' Perceptions and Implementation. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17(6), em1969. https://doi.org/10.29333/ejmste/10882
88. Le, L. T. B., Tran, T. T., & Tran, N. H. (2021). Challenges to STEM education in Vietnamese high school contexts. Heliyon, 7(12). https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e08649
89. Barroso, J. y Cabero, J. (2010). La investigación educativa en TIC. Visiones prácticas. Madrid: Síntesis.
90. Escobar-Pérez, Jazmine & Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: Una aproximación a su utilización. Avances en Medición. 6. 27-36.
91. Cronbach, L.J. (1951) Psychometrika 16: 297. https://doi.org/10.1007/BF02310555
92. Argibay, J. (2006). Técnicas psicométricas. Cuestiones de validez y confiabilidad. Subjetividad y procesos cognitivos, 8, 15-33.
93. Fox, D. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: EUNSA.
94. Colas, M. P. y Buendía, L. (1992). Investigación Educativa. Sevilla: Alfar.
95. Hambleton, R. K. (1989). Principios y aplicaciones seleccionadas de la teoría de respuesta al ítem. En Linn, Robert L (Ed), Medición educativa. Nueva York, NY, Inglaterra: Macmillan Publishing Co, Inc American Council on Education. 147-200
96. Martín Izard, J. (2010) Técnicas de encuesta: cuestionario y entrevista [Survey techniques: questionnaire and interview]. In Santiago Nieto Martín (Editor) Principios, métodos y técnicas esenciales para la investigación educativa. (145- 168). Madrid: Dykinson.

97. Pérez, M. A. (2009). *Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes.* Editorial Visión Libros, Madrid.

98. Loomis, E. S., (1968). *The Pythagorean Proposition. Its Demostrations Analyzed and Classified*. National Council of Teachers of Mathematics (Classics in Mathematics Education). Washington.

99. Arrieta, J., Álvarez, J.L., González, A.E., (1997). El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con geoplanos. *Revista Suma, 25*, 71-86.

100. Weiss-Pidstrygach, Y., (2007). Historical mathematical models in teacher education - workshop on the development of questions and critical questioning. *Proceedings of the Seventh European Summer University* ESU 7, 129-140.

101. Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas* 70, 35-51.

102. Gurrola, F. & Jáuregui, R. (2008). Didáctica del teorema de Pitágoras. En R. Cantoral, F. Fasarelli, A. Garciadiego, A; R. Stein, C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics,* The HPM Satellite Meeting of IMCE 11. México: Centro Cultural del México Contemporáneo.

103. González Urbaneja, P.M., (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *Revista SIGMA 32*, 103-130.

104. Vargas, G. & Gamboa, R., (2013) La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de Van Hiele. *Uniciencia*, *27*(1), 95-118.

105. Flores, A. (1993) Pythagoras meets van Hiele. *School Science and Mathematics 93*(3). 152–157.

106. Hoffstein, J. Una introducción a la criptografía. En Una introducción a la criptografía matemática; Springer: Nueva York, NY, USA, 2008. [CrossRef]

107. Barton, D. Cambridge Lower Secondary. Complete Mathematics 8, 2ª ed.; Oxford University Press: Oxford, Reino Unido, 2021.

108. Barton, D. Cambridge Lower Secondary. Complete Mathematics 9, 2ª ed.; Oxford University Press: Oxford, Reino Unido, 2021.

109. Mckelvey, L.; Crozier, M. Cambridge International AS y A Level Mathematics. Más Matemáticas Curso; Cambridge University Press & Assessment: Cambridge, Reino Unido, 2019.

110. Rayner, D.; Bettison, I.; Taylor, M. Complete Mathematic for Cambridge

IGCSE, 5th ed.; Oxford University Press: Oxford, Reino Unido, 2018.
111. Koblitz, N. A Course in Number Theory and Cryptography, 2nd ed.; Springer: Nueva York, NY, EE.UU., 1994.
112. Señalización de la bandera del semáforo Sistema.Disponible en línea: https://www.anbg.gov.au/flags/semaphore.html (consultado el 11 de septiembre de 2022).
113. Carron, L.P. Código Morse: El lenguaje esencial, 2ª ed.; American Radio Relay League: Newington, CT, EE.UU., 1991.
114. N8_ModPublisher. Libro de códigos Morse. Para niños. Lear y Práctica; Publicado de forma independiente: Chicago, IL, USA, 2021.
115. Datos fascinantes sobre Jeroglíficos. Disponible en línea: https://www.natgeokids.com/uk/discover/history/egypt/ jeroglíficos-descubierto/ (consultado el 11 de septiembre de 2022).
116. La Escítala. Disponible en línea: http://www.ugr.es/~{}anillos/textos/pdf/2010/EXPO-1.Criptografia/02a22.htm (consultado el 11 de septiembre de 2022).
117. Strang, G. Introducción al álgebra lineal, 5ª ed.; Wellesley Cambridge Press: Wellesley, MA, EE. UU., 2021.
118. Philips, G.M. interpolación y aproximación por polinomios; Springer: Nueva York, NY, USA, 2011.
119. Wagensberg, J. El museo "total", una herramienta para el cambio social. Hist. Cienc. Saude. Manguinhos. 2005, 12, 309–321. [CrossRef]
120. Drioli, A. Formas estéticas contemporáneas y museología científica (versión original italiana). JCOM J. Sci. Commun. 2006, 5, 1–10. [CrossRef]
121. Enigma/Enigma de papel. Disponible en línea: http://wiki.franklinheath.co.uk/index.php/Enigma/Paper_Enigma (consultado el 17 de septiembre de 2022).
122. Parakh, A.; Subhash, K. Espacio eficiente intercambio de secretos. Inf. Sci. 2011, 181, 335–341. [CrossRef]
123. Mao, W. Criptografía moderna: teoría y práctica; Pearson Education: Bangalore, India, 2003.
124. Trappe, W. Introducción a la Criptografía con Teoría de la Codificación; Pearson Education: Bangalore, India, 2006.
125. Gennaro, R.; Jarecki, S.; Krawczyk, H.; Rabin, T. Robust and E ± cientSharing of RSA Functions. CRYPTO'96 1996 , v, 157-172.

126. Gennaro, R.; Rabin, T.; Krawczyk, H. Firmas innegables basadas en RSA. J. Cryptol. 2000, 13, 397–416. [CrossRef]
127. Centro de Excelencia para Mujeres y Tecnología. Disponible en línea: https://womenandtech.indiana.edu/programs/cybersecurity/ profiles-current-trailblazers/rabin.html (consultado el 20 de septiembre de 2022).
128. Forbes, Tal Rabin. Disponible en línea: https://www.forbes.com/profile/tal-rabin/?sh=52ac941f131b (consultado el 22 de septiembre de 2022).
129. Tal Rabin sobre la historia y el futuro de las mujeres en la ciencia de datos. Disponible en línea: https://blog.seas.upenn.edu/tal-rabin-on-the-history-and-future-of-women-in-data-science/ (consultado el 22 de septiembre de 2022).
130. Swafford, M.; Anderson, R. Abordar la brecha de género: las barreras percibidas de las mujeres para seguir carreras STEM. Carreras técnicas 2020, 4, 61–74. [CrossRef]
131. ¡Celebrando a las pioneras criptológicas durante el Mes Nacional de la Historia de la Mujer y durante todo el año! Disponible en línea: https: //cryptologicfoundation.org/what-we-do/stimulate/women-in-cryptology.html (consultado el 25 de septiembre de 2022).
132. Teicher, A. Mendel's use of mathematical modelling: Ratios, predictions and the appeal to tradition. Hist. Philos. Life Sci. 2014, 36, 187–208. Disponible en línea: http://www.jstor.org/stable/44471280 (consultado el 15 de noviembre de 2022). [CrossRef] [PubMed]
133. Esteve-Romero, A. Arqueología Informática: Implementación de Sistemas Clásicos de Cifrado en Scratch. Doctoral Dissertation, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain, 2019. Available online: https://riunet.upv.es/handle/10251/124727 (accessed on 15 November 2022).
134. Cardinal, R.N., & Aitken, M.R.F. (2005). ANOVA for the Behavioral Sciences Researcher (1st ed.). Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9780203763933
135. Tabachnick, B. y Fidell, L. (2007). Experimental designs using ANOVA. New York: Thompson Brooks/Cole.
136. Ross. (2007). Introducción a la estadística. Reverté.
137. B. Odoi, S. Samita, S. Al-Hassan, S. Twumasi-Ankrah. Efficiency of Bartlett

and Levenes Tests for Testing Homogeneity of Variance Under Varying Number of Replicates and Groups in One – Way ANOVA. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-8, Issue- 6S4, April 2019. DOI: 10.35940/ijitee.F1250.0486S419

138. Wang, Y., Rodríguez de Gil, P., Chen, Y.-H., Kromrey, J. D., Kim, E. S., Pham, T., Nguyen, D., & Romano, J. L. (2017). Comparing the Performance of Approaches for Testing the Homogeneity of Variance Assumption in One-Factor ANOVA Models. Educational and Psychological Measurement, 77(2), 305–329. https://doi.org/10.1177/0013164416645162

139. Sedgwick P. One way analysis of variance: post hoc testing BMJ 2014; 349 :g7067 doi:10.1136/bmj.g7067

140. Ajit C. Tamhane (1977) Multiple comparisons in model i one-way anova with unequal variances, Communications in Statistics - Theory and Methods, 6:1, 15-32, DOI: 10.1080/03610927708827466

141. McHugh, M.L. (2011). Multiple comparison analysis testing in ANOVA. Biochemia Medica, 21 (3), 203-209. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/72939

142. Roldán-Zafra J, Perea C. Math Learning in a Science Museum—Proposal for a Workshop Design Based on STEAM Strategy to Learn Mathematics. The Case of the Cryptography Workshop. *Mathematics*. 2022; 10(22):4335. https://doi.org/10.3390/math10224335

143. Braun, B., Bremser, P., Duval, A. M., Lockwood, E., & White, D. (2017). What does active learning mean for mathematicians.

Anexo I

- **Cuestionario.**

Desde el MUDIC se trabaja para mejorar la colaboración con los centros educativos. Para ello se necesita la colaboración del profesorado, por el papel fundamental que juega en el aprendizaje del alumnado. Con este fin, le pedimos, por favor, que rellene el siguiente cuestionario. Las respuestas son anónimas, y solo se usarán en el ámbito de esta investigación.

Este cuestionario consta de 17 preguntas que puede contestar en aproximadamente 5 minutos.

1. Género*:* Mujer, Varón
2. Tipo de centro en el que trabaja. Público, Privado concertado, Privado, Otro:
3. Niveles educativos que imparte. Secundaria obligatoria, Bachillerato, Otro:
4. Años de experiencia. Menos de 10 años, Entre 10 y 20 años, Más de 20 años.
5. Materia que imparte en la actualidad. Matemáticas Ciencias, Física y química, Tecnología, Otro:
6. Número de veces que ha visitado un museo de ciencias. Ninguna, Entre 1 y 5, Más de 5.
7. Medios tecnológicos que utiliza con frecuencia en clase. Ordenador, Proyector, Pizarra interactiva, Tablet, Otro:
8. Metodologías y estrategias de aprendizaje que utiliza con frecuencia en clase. Trabajo por proyectos, Libro de texto y ejercicios, Flipped classroom, STEAM, Aprendizaje cooperativo, Aprendizaje servicio, Otro:

Por favor, indique su grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

0	1	2	3
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

9. Considero positivo trabajar distintas disciplinas del ámbito científico-tecnológico simultáneamente.

0 1 2 3

Por favor, explique su respuesta:

10. Considero que las siguientes materias están relacionadas con la que yo imparto

10.1 Física y química	0	1	2	3
10.2 Matemáticas	0	1	2	3
10.3 Biología y Geología	0	1	2	3
10.4 Tecnología	0	1	2	3
10.5 Informática	0	1	2	3
10.6 Arte y Diseño (Dibujo)	0	1	2	3
10.7 Música	0	1	2	3
10.8 Lenguas	0	1	2	3
10.9 Educación Física	0	1	2	3

11. Me sentiría cómodo combinando la materia que imparto con las siguientes:

11.1 Física y química	0	1	2	3
11.2 Matemáticas	0	1	2	3
11.3 Biología y Geología	0	1	2	3
11.4 Tecnología	0	1	2	3
11.5 Informática	0	1	2	3
11.6 Arte y Diseño (Dibujo)	0	1	2	3
11.7 Música	0	1	2	3
11.8 Lenguas	0	1	2	3
11.9 Educación Física	0	1	2	3

12. La estrategia de aprendizaje STEAM consiste en aprovechar los puntos en común de las materias: Ciencias, Tecnología, Arte y Matemáticas, para desarrollar un enfoque interdisciplinario del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Considero que esta estrategia puede tener un impacto positivo en:

12.1 El aprendizaje del alumno.	0	1	2	3
12.2 La motivación del alumno.	0	1	2	3
12.3 La creatividad del alumno.	0	1	2	3
12.4 El afianzamiento de conocimientos del alumno.	0	1	2	3
12.5 El estímulo de vocaciones científico-tecnológicas.	0	1	2	3

13. Creo que me voy a encontrar las siguientes dificultades a la hora de aplicar la estrategia STEAM

13.1 Falta de apoyo administrativo y financiero.	0	1	2	3
13.2 Aumento de cargas de trabajo.	0	1	2	3
13.3 Falta de tiempo para preparar recursos STEAM.	0	1	2	3
13.4 Desconocimiento del uso de medios tecnológicos.	0	1	2	3
13.5 Desconocimiento de otras materias STEAM.	0	1	2	3
13.6 Falta de coordinación entre los diferentes departamentos.	0	1	2	3
13.7 Falta de tiempo para cumplir con el currículo.	0	1	2	3

14. Considero que un museo de ciencias es un espacio de aprendizaje para el alumnado. 0 1 2 3

15. Considero que las visitas a museos de ciencias pueden ayudarme a aplicar la estrategia STEAM con mis alumnos. 0 1 2 3

Por favor, explique su respuesta:

16. La estrategia STEAM se adapta mejor a un entorno fuera de la escuela, como el museo de ciencias, que al aula. 0 1 2 3

Por favor, explique su respuesta:

17. Por favor, describa brevemente su impresión sobre la estrategia STEAM.

Gracias por dedicarnos su tiempo.

● Entrevista

Comenzamos la entrevista con preguntas de identificación ya que el cuestionario es anónimo:

1. Género: Mujer, Hombre, Otro

2. Años de experiencia. Menos de 10 años, Entre 10 y 20 años, Más de 20 años.

3. Materias impartidas actualmente. Matemáticas, Ciencias, Física y Química, Tecnología, Otros:

4. Veces que has visitado un museo de ciencias. Ninguno, Entre 1 y 5, Más de 5.

5. Medios tecnológicos de uso frecuente en clase. Computadora, Proyector, Pizarra interactiva, Tableta, Otro:

6. Metodologías y estrategias de aprendizaje de uso frecuente en clase. Trabajo por proyectos, Libro de texto y ejercicios, Aula invertida, STEAM, Aprendizaje cooperativo, Aprendizaje servicio, Otros:

Aquí vienen tres preguntas abiertas sobre la estrategia STEAM y la idea de aprender en museos en base a su experiencia docente.

1. La estrategia de aprendizaje STEAM consiste en aprovechar los puntos de conexión entre la Ciencia, la Tecnología, el Arte y las Matemáticas para desarrollar una perspectiva interdisciplinar del proceso de enseñanza-aprendizaje. ¿Crees que es positivo enseñar tu disciplina relacionándola con otras disciplinas del ámbito científico-tecnológico?

2. El aprendizaje de las ciencias en los museos y centros de ciencia se organiza esencialmente en torno a exposiciones, talleres y módulos sobre principios científicos. Piense en las diferentes herramientas que utilizan los museos para fomentar el aprendizaje de las ciencias. ¿Qué actividades considera más adecuadas para el aprendizaje de la materia que imparte en un museo de ciencias? ¿Por qué?

3. ¿Crees que utilizar la estrategia de aprendizaje STEAM en los museos puede ser útil para hacer reflexionar a los profesores visitantes y facilitar la traducción hacia un cambio de metodología? Como estamos en un ambiente informal, ¿son los museos un lugar que se puede adaptar mejor para contextualizar la materia que enseñas? O, de lo contrario, ¿es tan adaptable como la escuela? Explica tu respuesta.

Tanto en el cuestionario como en la entrevista se consideraron los siguientes aspectos:

Declaración ética: Informe COIR (Anexo IV).

Declaración de consentimiento informado: Se obtuvo el consentimiento informado de todos los sujetos involucrados en el estudio.

Declaración de disponibilidad de datos: Los datos y materiales están disponibles previa solicitud a los autores.

Agradecimientos: Los autores desean agradecer a todos los profesores y estudiantes que han estado involucrados en este trabajo.

Anexo II

- **Resultado de la ejecución con Rstudio.**

```
> # Problema artículo ANOVA
> #
> # Introducción de datos
> P1 <- c(2, 0, 1, 0, 2, 3, 1)
> P2 <- c(6, 6, 5, 4, 7, 6, 5)
> P3 <- c(5, 3, 2, 6, 4, 5, 7)
> P4 <- c(4, 5, 3, 4, 7, 6, 5)
> P5 <- c(1, 0, 0, 2, 1, 2, 1)
> ST <- c(10, 8, 9, 7, 9, 10, 12)
> ninsectos <- c(2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 5, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 4, 5, 3, 4, 7, 6, 5, 1, 0, 0, 2, 1, 2,
1, 10, 8, 9, 7, 9, 10, 12)
> Tratamientos <- as.factor(c(rep(c("P1" , "P2" , "P3" , "P4" , "P5", "ST"), each=7)))
> #
> # Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk
> shapiro.test(ST)

	Shapiro-Wilk normality test

data:  ST
W = 0.96707, p-value = 0.8766

> shapiro.test(P1)

	Shapiro-Wilk normality test

data:  P1
W = 0.92158, p-value = 0.4818

> shapiro.test(P2)

	Shapiro-Wilk normality test

data:  P2
W = 0.93662, p-value = 0.6085

> shapiro.test(P3)

	Shapiro-Wilk normality test

data:  P3
W = 0.97962, p-value = 0.9577

> shapiro.test(P4)

	Shapiro-Wilk normality test

data:  P4
W = 0.96664, p-value = 0.8733
```

```
> shapiro.test(P5)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  P5
W = 0.85771, p-value = 0.1444

> #
> # Contraste de homogeneidad de Bartlett
> bartlett.test(ninsectos ~ Tratamientos)

        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  ninsectos by Tratamientos
Bartlett's K-squared = 4.5005, df = 5, p-value = 0.4798

> #
> # ANOVA
> modeloanova <- aov(ninsectos ~ Tratamientos)
> summary(modeloanova)
             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
Tratamientos  5  327.1   65.43   38.52 1.77e-13 ***
Residuals    36   61.1    1.70
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> #
> # Comparaciones múltiples de Bonferroni
> pairwise.t.test(ninsectos, Tratamientos, p.adj = "bonferroni")

        Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  ninsectos and Tratamientos

   P1      P2      P3      P4      P5
P2 6.5e-06 -       -       -       -
P3 0.00053 1.00000 -       -       -
P4 0.00015 1.00000 1.00000 -       -
P5 1.00000 1.9e-06 0.00015 4.3e-05 -
ST 2.0e-12 8.1e-05 1.0e-06 3.5e-06 7.4e-13

P value adjustment method: bonferroni
> #
> # Comparaciones multiples de Tukey
> tukey <- TukeyHSD(aov(modeloanova))
> tukey
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = modeloanova)

$Tratamientos
           diff        lwr       upr     p adj
P2-P1  4.2857143  2.189921  6.381507 0.0000062
P3-P1  3.2857143  1.189921  5.381507 0.0004772
```

```
P4-P1  3.5714286  1.475636  5.667222 0.0001399
P5-P1 -0.2857143 -2.381507  1.810079 0.9983827
ST-P1  8.0000000  5.904207 10.095793 0.0000000
P3-P2 -1.0000000 -3.095793  1.095793 0.7056727
P4-P2 -0.7142857 -2.810079  1.381507 0.9062935
P5-P2 -4.5714286 -6.667222 -2.475636 0.0000018
ST-P2  3.7142857  1.618493  5.810079 0.0000752
P4-P3  0.2857143 -1.810079  2.381507 0.9983827
P5-P3 -3.5714286 -5.667222 -1.475636 0.0001399
ST-P3  4.7142857  2.618493  6.810079 0.0000010
P5-P4 -3.8571429 -5.952936 -1.761350 0.0000404
ST-P4  4.4285714  2.332778  6.524364 0.0000033
ST-P5  8.2857143  6.189921 10.381507 0.0000000
```

Anexo III

- **Resultado de la ejecución con Python.**

```
>>> # Problema artículo ANOVA
>>> import pandas as pd
>>> import numpy as np
>>> from statsmodels.stats.multicomp import pairwise_tukeyhsd
>>> from scipy.stats import shapiro
>>> from scipy.stats import bartlett
>>> from scipy.stats import f_oneway
>>> #Introducción de datos
>>> ST = [10, 8, 9, 7, 9, 10, 12]
>>> P1 = [2, 0, 1, 0, 2, 3, 1]
>>> P2 = [6, 6, 5, 4, 7, 6, 5]
>>> P3 = [5, 3, 2, 6, 4, 5, 7]
>>> P4 = [4, 5, 3, 4, 7, 6, 5]
>>> P5 = [1, 0, 0, 2, 1, 2, 1]
>>> #
>>> # Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk
>>> shapiro(ST)
ShapiroResult(statistic=0.9670664072036743, pvalue=0.8765543103218079)
>>> shapiro(P1)
ShapiroResult(statistic=0.9215784668922424, pvalue=0.48175546526908875)
>>> shapiro(P2)
ShapiroResult(statistic=0.936622142791748, pvalue=0.6085090637207031)
>>> shapiro(P3)
ShapiroResult(statistic=0.979618489742279, pvalue=0.9576653242111206)
>>> shapiro(P4)
ShapiroResult(statistic=0.9666421413421631, pvalue=0.8732700943946838)
>>> shapiro(P5)
ShapiroResult(statistic=0.8577129244804382, pvalue=0.14439702033996582)
>>> #
>>> # Contraste de homogeneidad de Bartlett
>>> bartlett(ST, P1, P2, P3, P4, P5)
BartlettResult(statistic=4.500549003209732, pvalue=0.47980998672471187)
>>> #
>>> # ANOVA
>>> f_oneway (ST, P1, P2, P3, P4, P5)
F_onewayResult(statistic=38.52336448598133, pvalue=1.7667933609953312e-13)
>>> #
>>> # Comparaciones múltiples de Tukey
>>> df = pd.DataFrame({'score': [10, 8, 9, 7, 9, 10, 12, 2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 5,
5, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 4, 5, 3, 4, 7, 6, 5, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 1],
...                 'group': np.repeat(['ST', 'P1', 'P2', 'P3', 'P4', 'P5'], repeats=7)})
>>> tukey = pairwise_tukeyhsd(endog=df['score'], groups=df['group'], alpha=0.05)
>>> print(tukey)
Multiple Comparison of Means - Tukey HSD, FWER=0.05
====================================================
```

group1	group2	meandiff	p-adj	lower	upper	reject
P1	P2	4.2857	0.0	2.1899	6.3815	True
P1	P3	3.2857	0.0005	1.1899	5.3815	True
P1	P4	3.5714	0.0001	1.4756	5.6672	True
P1	P5	-0.2857	0.9984	-2.3815	1.8101	False
P1	ST	8.0	0.0	5.9042	10.0958	True
P2	P3	-1.0	0.7057	-3.0958	1.0958	False
P2	P4	-0.7143	0.9063	-2.8101	1.3815	False
P2	P5	-4.5714	0.0	-6.6672	-2.4756	True
P2	ST	3.7143	0.0001	1.6185	5.8101	True
P3	P4	0.2857	0.9984	-1.8101	2.3815	False
P3	P5	-3.5714	0.0001	-5.6672	-1.4756	True
P3	ST	4.7143	0.0	2.6185	6.8101	True
P4	P5	-3.8571	0.0	-5.9529	-1.7613	True
P4	ST	4.4286	0.0	2.3328	6.5244	True
P5	ST	8.2857	0.0	6.1899	10.3815	True

Anexo IV

INFORME DE EVALUACIÓN DE INVESTIGACIÓN RESPONSABLE

Elche, a 10/07/2023

Director/a	María del Carmen Perea Marco
Codirectores/as	Pedro Campillo Herrero
Estudiante	Juan Roldán Zafra
Programa de doctorado	Estadística, Optimización y Matemática Aplicada
Título de la tesis doctoral	Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de Van Hiele.
Tipo de actividad	Adherido a un proyecto autorizado
Evaluación de riesgos laborales	**No solicitado/No procede**
Evaluación ética	**No solicitado/No procede**
Código provisional	**230616114515**
Código de autorización COIR	**ADH.EOM.MDCPM.JRZ.23**
Caducidad	**8 años***

***Importante: La caducidad de las autorizaciones de tesis, basadas en la adhesión a un proyecto de investigación, están condicionadas a la vigencia de la autorización de dicho proyecto en este sentido: todas las actividades de la tesis que tengan implicaciones ético-legales deberán realizarse mientras dicho proyecto esté vigente. Dicho de otro modo, sólo podrán realizarse actividades de carácter intelectual una vez el proyecto al que se adhiere haya caducado.**

Se considera que la presente actividad no supone riesgos laborales adicionales a los ya evaluados en el proyecto de investigación al que se adhiere. No obstante, es responsabilidad del tutor/a informar y/o formar al estudiante de los posibles riesgos laborales de la presente actividad.

La necesidad de evaluación ética del trabajo titulado: **Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de Van Hiele.** ha sido realizada en base a la información aportada en el formulario online: "Solicitud Código de Investigación Responsable (COIR)", habiéndose determinado que no requiere ninguna evaluación adicional. Es importante destacar que si la información aportada en dicho formulario no es correcta este informe no tiene validez.

Por todo lo anterior, **se autoriza** la realización de la presente actividad.

Atentamente,

A Pastor

Alberto Pastor Campos
Jefe de la Oficina de Investigación Responsable
Vicerrectorado de Investigación y Transferencia

Información adicional:

- En caso de que la presente actividad se desarrolle total o parcialmente en otras instituciones es responsabilidad del investigador principal solicitar cuantas autorizaciones sean pertinentes, de manera que se garantice, al menos, que los responsables de las mismas están informados.
- Le recordamos que durante la realización de este trabajo debe cumplir con las exigencias en materia de prevención de riesgos laborales. En concreto: las recogidas en el plan de prevención de la UMH y en las planificaciones preventivas de las unidades en las que se integra la investigación. Igualmente, debe promover la realización de reconocimientos médicos periódicos entre su personal; cumplir con los procedimientos sobre coordinación de actividades empresariales en el caso de que trabaje en el centro de trabajo de otra empresa o que personal de otra empresa se desplace a las instalaciones de la UMH; y atender a las obligaciones formativas del personal en materia de prevención de riesgos laborales. Le indicamos que tiene a su disposición al Servicio de Prevención de la UMH para asesorarle en esta materia.

La información descriptiva básica del presente trabajo será incorporada al repositorio público de tesis autorizadas por la Oficina de Investigación Responsable de la Universidad Miguel Hernández. También se puede acceder a través de https://oir.umh.es/solicitud-de-evaluacion/proyectos-de-investigacion/