MASTERPROF UMH
UNIVERSITAS Miguel Hernández
MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO
ESO Y BACHILLERATO, FP Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Geometría plana a través de libros de espejos basada en los Niveles de Van Hiele

Estudiante: Clara Galindo García

Especialidad: Matemáticas

Tutores: María del Carmen Perea Marco
Juan Roldán Zafra

Curso académico: 2023-24

Índice

1. Resumen

El estudio se centra en la enseñanza de la geometría en el curso de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), utilizando los marcos teóricos de los niveles de Van Hiele y las habilidades extendidas de Hoffer a través de un libro de espejos. Estos marcos son fundamentales para el desarrollo del pensamiento geométrico y las competencias matemáticas en los estudiantes, proporcionando una base teórica sólida para diseñar y evaluar actividades de aprendizaje.

El objetivo principal es evaluar y mejorar la enseñanza de la geometría en 2º de ESO mediante el diseño de actividades específicas que se analizan con los niveles de Van Hiele y las habilidades extendidas de Hoffer. Se busca facilitar el avance de los estudiantes en su comprensión geométrica y desarrollo de competencias relacionadas de una forma más divertida.

El estudio emplea un enfoque cualitativo, desarrollando y aplicando una serie de actividades de geometría en un aula de 2º de ESO. Por medio de estas actividades se analiza el progreso de los estudiantes según los niveles de Van Hiele (visualización, análisis, ordenación) y las habilidades extendidas de Hoffer (visual, pictórica, lógica, aplicada, verbal y digital).

Este tipo de actividades diseñadas ayudan a los estudiantes a progresar desde los niveles básicos de Van Hiele (visualización y análisis) hacia niveles más avanzados (deducción y rigor), permitiéndoles comprender y aplicar conceptos geométricos de manera más efectiva.

El estudio concluye que la integración de los niveles de Van Hiele y las habilidades extendidas de Hoffer en el diseño de actividades de geometría puede mejorar significativamente la comprensión geométrica de los estudiantes. Se recomienda la incorporación de estos marcos teóricos en el currículo de matemáticas y en la formación de profesores para optimizar el aprendizaje geométrico y desarrollar habilidades críticas en los estudiantes.

Palabras clave: Matemáticas, Educación Secundaria, Habilidades de Hoffer, Niveles de Aprendizaje, Simetría y Figuras Geométricas.

Abstract

The study focuses on the teaching of geometry in the 2nd year of Compulsory Secondary Education (ESO), using the theoretical frameworks of Van Hiele's levels and Hoffer's extended skills through a mirror book. These frameworks are fundamental for the development of geometric thinking and mathematical skills in students, providing a solid theoretical basis for designing and evaluating learning activities.

The main objective is to evaluate and improve the teaching of geometry in 2nd ESO by designing specific activities that are analysed with Van Hiele's levels and Hoffer's extended skills. The aim is to facilitate students' progress in their geometric understanding and development of related skills in a more fun way.

The study employs a qualitative approach, developing and applying a series of geometry activities in a 2nd ESO classroom. Through these activities, students' progress is analysed according to Van Hiele's levels (visualisation, analysis, ordering) and Hoffer's extended skills (visual, pictorial, logical, applied, verbal and digital).

These types of designed activities help students progress from Van Hiele's basic levels (visualisation and analysis) to more advanced levels (deduction and rigour), enabling them to understand and apply geometric concepts in a more visual way.

The study concludes that the integration of Van Hiele's levels and Hoffer's skills into the design of geometry activities can significantly improve students' geometric understanding. It is recommended that these theoretical frameworks be incorporated into mathematics curricula and teacher training to optimise geometric learning and develop critical skills in students.

Key Words: Mathematics, Secondary Education, Hoffer Skills, Levels of Learning, Symmetry and Geometric Figures.

2. Introducción

La asignatura de matemáticas en la Educación Secundaria suele presentar más dificultades que el resto de asignaturas para la mayoria del alumnado. Muchos profesores de matemáticas se plantean nuevas metodologías de aprendizaje para fomentar el razonamiento y reducir esta problemática. Esto no es un problema puntual de nuestros días, ya en 1957 la preocupación llevó a dos profesores de matemáticas holandeses, a crear un modelo que estudiaría a fondo esta situación y trataría de buscar una solución (Van Hiele, 1955) (Van Hiele, 1986). Estos dos profesores eran Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele y en la idea principal de su modelo se expone:

- Hay diferentes niveles de razonamiento en los estudiantes, en referencia a la temática.
- Cada nivel supone una forma de entender, una forma particular de pensar, de modo que un estudiante sólo puede entender y razonar con los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
- Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adaptarse al nivel de razonamiento del estudiante.
- El proceso de enseñanza debe estar orientado a facilitar el progreso a un siguiente nivel de razonamiento, para lograrlo de una forma más rápida y efectiva.

Esta teoría constituye una herramienta útil para analizar el proceso de aprendizaje de la geometría; particularmente permite explicar por qué los estudiantes tienen dificultades para desarrollar procesos cognitivos de alto nivel, como aquellos que se llevan a cabo al elaborar demostraciones.

A lo largo de este documento, vamos a describir y analizar por medio del modelo de Van Hiele algunas actividades realizadas en el curso de 2º de la ESO utilizando libros de espejos. Al aplicar el modelo de Van Hiele para analizar estas actividades, los profesores pueden evaluar en qué nivel se encuentran los estudiantes en su comprensión geométrica, identificar posibles obstáculos en el aprendizaje y diseñar estrategias de enseñanza adecuadas para promover un mayor desarrollo conceptual.

Numerosos trabajos de investigación se han basado en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1955) para explicar el aprendizaje de distintos conceptos geométricos, como los llevados a cabo por Gutiérrez y Jaime (Gutiérrez & Jaime, 1998) (Gutiérrez & Jaime, 1991), Jaime (Jaime & Gutiérrez, 1990) y Roldan Zafra (Roldán-Zafra et al., 2022) (Roldán-Zafra & Perea, 2022) entre otros muchos.

3. Niveles de Van Hiele

Los niveles de Van Hiele son cinco, se suelen nombrar con números del 1 a 5, siendo esta notación la más utilizada; aunque también existe la notación del 0 al 4.

Vamos a describir cada uno de los niveles con sus principales características.

- **Nivel 1** : Visualización o Reconocimiento

  1. Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
  2. Se describen por su apariencia física mediante descripciones visuales y buscando semejanzas a elementos ya conocidos de su entorno (parece una , es como una , etc). No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
  3. No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo

- **Nivel 2** : Análisis

  1. Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación.
  2. De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones.
  3. Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades
  4. Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

- **Nivel 3** : Ordenación o clasificación

  1. Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren.

2. Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras , estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
3. Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

- **Nivel 4** : Deducción Formal

1. En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
2. Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
3. Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado.

- **Nivel 5** : Rigor

1. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
2. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Desde la prespectiva de aprendizaje de los estudiantes se piensa que el nivel 5 es inalcanzable para los estudiantes en la Educación Secundaria, puesto que implica un alto grado de abstracción y habilidades de razonamiento deductivo que generalmente se desarrollan en niveles educativos más avanzados, como la educación superior.

En este trabajo nos centraremos en elaborar estrategias de enseñanza centradas en los niveles más adecuados para los estudiantes de este nivel educativo. Esto implica el diseño de actividades que fomenten la exploración y la experimentación, el uso de representaciones visuales y manipulativas por medio del uso de libros de espejos, y la integración de conceptos geométricos en contextos prácticos y relevantes para los estudiantes.

3.1. Características de los Niveles de Van Hiele

- **Relación entre el lenguaje y los niveles**

  A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico. Dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse.

- **Paso gradual y continuo de un nivel al siguiente**

  El paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un periodo de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro.

- **Jerarquización**

  Cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior. Tiene una estructura recursiva. No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel anterior.

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Tabla 1: Elementos según los niveles.

En la Tabla 1 se proporciona una visión general de cómo los elementos explícitos e implícitos evolucionan a medida que los estudiantes progresan a través de los niveles del modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986). Los elementos explícitos son habilidades y conocimientos que se enseñan directamente a los estudiantes, mientras que los implícitos son habilidades y conocimientos que los estudiantes adquieren de manera más subyacente a medida que interactúan con los conceptos geométricos en un nivel dado. La recursividad en la tabla refleja cómo los elementos implícitos de un nivel pueden convertirse en elementos explícitos en el siguiente nivel a medida que los estudiantes profundizan su comprensión geométrica.

3.2. Habilidades de Hoffer

A partir de la propuesta de Van Hiele (Van Hiele, 1986), muchos investigadores se han preocupado por elaborar instrumentos que evalúen los niveles de razonamiento de los alumnos.

El modelo que vamos a seguir en nuestro trabajo para evaluar la aplicación del modelo de van Hiele es el de Alan Hoffer (1981) . Este autor definió una perspectiva interesante de dicho modelo en su artículo: Geometry is more than Proof (Hoffer, 1981). Si bien Hoffer considera que las demostraciones son un componente importante, opina que la enseñanza de la geometría debe fomentar el desarrollo de otras habilidades que pueden ser más prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica. Entre ellas destaca cinco, a saber:

- **Habilidad visual**. Hace referencia a la capacidad de obtener información a partir de lo que el estudiante observa, ya sean objetos reales o representaciones de éstos.
- **Habilidad verbal**. Hace referencia a la capacidad para emplear apropiadamente el lenguaje de la geometría.
- **Habilidad pictórica**. Hace referencia a la capacidad para interpretar las ideas y representarlas a través de dibujos o esquemas.
- **Habilidad lógica**. Hace referencia a la capacidad para armar argumentos que siguen las reglas de la lógica formal y para reconocer cuándo un argumento es válido o no lo es.
- **Habilidad aplicada**. Hace referencia a la capacidad de describir y explicar fenómenos de la vida real por medio de modelos.

Integró dichas habilidades como una segunda dimensión a los niveles de van Hiele. Propuso que la instrucción debería apoyar el avance del estudiante a través de los niveles de van Hiele en cada una de las dimensiones de las habilidades geométricas.

Además, como propuso Roldán en su trabajo (Roldán Zafra, 2023), el uso de la tecnología y los entornos virtuales de aprendizaje se han convertido en nuestros días en otra habilidad a alcanzar por el alumnado (Theran, 2021), por lo que vamos a consider que esta última habilidad, que llamaremos digital, y la añadiremos a las anteriores para realizar el estudio.

Definimos la **Habilidad digital** como aquella que hace referencia a la capacidad para utilizar herramientas y recursos tecnológicos de manera efectiva en la resolución de problemas matemáticos, la representación de datos, y la comunicación de ideas, facilitando así el aprendizaje y la comprensión de conceptos matemáticos.

A lo largo de este trabajo las nombraremos como Habilidades extendidas de Hoffer.

4. Elementos del currículo de Matemáticas

Tal y como se establece en la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE) (Boletín Oficial del Estado, 2020) de 29 de diciembre por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo de Educación, llamamos currículo al conjunto de objetivos, competencias, contenidos enunciados en forma de saberes básicos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación.

El área de las matemáticas contribuye a la educación obligatoria mediante la adquisición y el desarrollo de **competencias específicas**, recogidas en el currículo de matemáticas que establece el Decreto 107/2022, de 5 de agosto, del Consell, por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria (Consell, 2022). Estas se refieren al conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para comprender y usar las formas de razonamiento, desarrollos, representación y expresiones propias de matemáticas en una variedad de situaciones en las que ejercen o pueden ejercer un papel.

Estas competencias son las siguientes: Competencia de resolución de problemas(CE1), Razonamiento y conexiones(CE2), Modelización(CE3), Pensamiento computacional(CE4), Representaciones(CE5), Comunicación(CE6), Relevancia social, cultural y científica(CE7), Gestión de las emociones y de las actitudes (CE8).

4.1. Conexiones entre las Competencias específicas y las Habilidades extendidas de Hoffer

Resulta de gran interés buscar una relación de las habilidades extendidas de Hoffer con las competencias específicas del área de matemáticas, en concreto centrándonos en el bloque de geometría. Entre otras facilidades:

- Permite un enfoque integral del desarrollo del estudiante, abordando tanto habilidades matemáticas como cognitivas y emocionales.
- Facilita la personalización del aprendizaje al adaptar las estrategias de enseñanza a las necesidades individuales de los estudiantes.
- Proporciona claridad en la planificación curricular al definir objetivos de aprendizaje y habilidades esperadas.
- Fomenta el desarrollo de habilidades transversales relevantes para la vida cotidiana.

Veamos el motivo de estas conexiones que se exponen en la Tabla 2:

La CE1, Resolución de problemas, es el punto de unión de la mayoría las Habilidades de Hoffer. Depende directamente de las bases del razonamiento matemático riguroso, ya que sin este no es posible llegar a conclusiones válidas y fiables, tal y como contempla la **habilidad lógica**. Cuando las situaciones problemáticas a abordar necesitan de la movilización de procesos de abstracción de una situación real, se está conectando con la **habilidad aplicada**. Además, los procesos de resolución de problemas y situaciones problemáticas deben ser representados mediante el simbolismo matemático, lo que conecta esta competencia con la **habilidad pictórica**. La manera de comunicar al resto de compañeras y compañeros cada uno de los avances que vamos realizando en la resolución de un problema, los pasos que se han seguido y aquellos que se descartan por el camino, forma parte del proceso de aprendizaje, conectando con la **habilidad verbal.** Además, el uso de herramientas digitales y software específico para la resolución de problemas fortalece esta competencia, lo que subraya la importancia de la **habilidad digital** en la representación y análisis de datos matemáticos.

La CE2 Razonamiento y conexiones, tiene una fuerte relación **habilidad lógica** pues trata de establecer conexiones entre diferentes procesos de razonamiento forma parte del proceso de matematización de la realidad. La formulación de conjeturas, entendidas como hipótesis, abre el camino de la **habilidad aplicada**, ya que estas forman parte del proceso de simplificación y estructuración de la realidad que permite crear modelos. También requiere manejar con precisión el simbolismo matemático, **habilidad visual**.

La CE3, competencia específica en modelización consiste en aplicar las matemáticas para reforzar y justificar argumentos en todo tipo de contextos reales y en todos los ámbitos de la realidad social y natural: científico, tecnológico y digital, económico, sociológico, artístico y cultural. Por lo tanto, se relaciona directamente con la **habilidad visual, pictórica y aplicada**.

La CE4, el pensamiento computacional, es un paso más dentro del formalismo y rigor propios del razonamiento matemático en cualquiera de sus aspectos, **habilidad lógica**. Razonar y expresar el motivo por el que seguimos unos modelos, **habilidad aplicada**, y no otros nos ayuda a profundizar en los aspectos matemáticos utilizados y a valorar la contribución de las matemáticas a nuestras necesidades y a su evolución, lo que pone de manifiesto su relación con la **habilidad verbal**. Además, el uso de tecnologías digitales y programación para resolver problemas complejos subraya la importancia de la **habilidad digital** en el desarrollo del pensamiento computacional.

La CE5, representaciones y el simbolismo matemático, son el vehículo para intercambiar argumentos sobre diferentes situaciones en contextos cambiantes dándoles un significado matemático, lo que la conecta con la **habilidad verbal y pictórica**. Además, la producción de mensajes escritos de una cierta complejidad precisa de una adecuada interpretación, ya que con ellos se pretende dar respuesta a determinadas situaciones problemáticas del quehacer diario, y de ahí su directa conexión con la **habilidad aplicada**. El uso de herramientas digitales para crear y compartir representaciones matemáticas complejas también destaca la **habilidad digital** en la comunicación y visualización matemática.

La CE 6, competencia en comunicación matemática, forma conforman un lenguaje específico que se relaciona con distintas lenguas, por lo que la CE6 se relaciona con la **habilidad verbal**. Comunicar ideas usando las matemáticas es, además, una habilidad necesaria reforzar y justificar argumentos en todo tipo de contextos reales y en todos los ámbitos de la realidad social y natural por lo que presenta una estrecha relación con la **habilidad aplicada.**

La CE7, que se relaciona con el papel que las matemáticas juegan en la realidad y en la propia experiencia del alumnado, está directamente vinculada con la **habilidad visual, pictórica y aplicada**. Además, la integración de tecnologías digitales para explorar y representar cómo las matemáticas se aplican en diferentes contextos de la vida real enfatiza la **habilidad digital**.

Por último, la CE 8, competencia en gestión de las emociones y actitudes forma parte, de manera específica, de la **habilidad verbal** a la hora de expresar los sentimientos y transmitir las necesidades. Además, la autorregulación y la gestión emocional son indispensables para ejercer la **habilidad aplicada** ya que implica la capacidad de mantener una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, superar obstáculos y gestionar las emociones asociadas con los desafíos matemáticos, lo que requiere habilidades aplicadas para desarrollar la perseverancia y la autoconfianza en el proceso de aprendizaje matemático.

Las competencias específicas actúan como un vínculo entre el Perfil de salida del estudiante y los saberes básicos de las disciplinas, así como los criterios de evaluación.

4.2. Conexiones entre las Competencias Clave y las Habilidades extendidas de Hoffer

Con lo que establece el artículo 2 del Real decreto 217/202, las competencias clave son los desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS / HABILIDADES EXTENDIDAS DE HOFFER	**CE1:** Resolución de problemas	**CE2:** Razonamiento y conexiones	**CE3:** Modelización	**CE4:** Pensamiento computacional	**CE5:** Representación	**CE6:** Comunicación	**CE7:** Relevancia social, cultural y científica	**CE8:** Gestión de las emociones.
VISUAL		X	X	X	X		X	
VERBAL		X				X		X
PICTÓRICA	X		X		X		X	
LÓGICA	X	X		X				
APLICADA	X	X	X	X	X	X	X	X
DIGITAL	X			X	X		X	

Tabla 2: Relación entre las Competencias Específicas y las Habilidades Extendidas de Hoffer

globales y locales (Diari Oficial de la Generalitat Valenciana, 2022).

Las Competencias Clave que establece la LOMLOE son: Competencia en comunicación lingüística (CCL), Competencia plurilingüe (CP), Competencia matemática y competencia en ciencia,tecnología e ingeniería (STEM), Competencia digital (CD), Competencia personal,social y de aprender a aprender (CPSAA), Competencia ciudadana (CC) ,Competencia emprendedora (CE), Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC).

Según el Annex III, por el que se establece el currículo de las materias comunes y de opción de educación secundaria obligatoria, existe una relación directa entre las Competencias Clave y las Competencias Específicas, como se puede ver en la Tabla 3.

Siguiendo las Relaciones establecidas en la Tabla 3 y aplicando la Propiedad Transitiva de Matemáticas que establece:

Sea una relación R definida en un conjunto A. Se dice que es transitiva si para todos los elementos a, b y c en A, si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c. Formalmente, la propiedad transitiva se expresa como:

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

De esta Propiedad podemos afirmar que como las Competencias Específicas están relacionadas con las Habilidades Extendidas de Hoffer (véase Tabla 2) y las Competencias Específicas están relacionadas con las Competencias Clave (véase Tabla 3), entonces las Competencias Clave están relacionadas con las Habilidades Extendidas de Hoffer (véase Tabla 4).

	CCL	CP	CMCT	CD	CPSAA	CC	CE	CCEC
CE 1			X	X	X	X	X	
CE 2			X	X				X
CE 3			X			X	X	
CE 4			X				X	
CE 5	X		X	X	X			
CE 6	X	X	X				X	
CE 7			X		X	X		X
CE 8			X		X		X	

Tabla 3: Relación entre las Competencias Clave y Las Competencias Específicas

COMPETENCIAS CLAVE / HABILIDADES EXTENDIDAS DE HOFFER	CCL	CP	CMCT	CD	CPSAA	CC	CE	CCEC
VISUAL			X	X	X	X	X	X
VERBAL	X	X	X	X	X			
PICTÓRICA	X	X	X	X	X	X	X	X
LÓGICA		X	X	X	X	X	X	
APLICADA	X	X	X	X	X	X	X	X
DIGITAL			X	X			X	X

Tabla 4: Relación entre las Competencias Clave y Habilidades extendidas de Hoffer

4.3. Saberes básicos

Los saberes básicos están recogidas en el currículo de matemáticas que establece el Decreto 107/2022, de 5 de agosto, del Consell, por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria.

Se define a los saberes básicos como el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de un área y cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas.

En esta etapa, podemos diferenciar y categorizar los saberes atendiendo a ocho sentidos matemáticos: Sentido numérico y cálculo, Sentido algebraico, Sentido de la medida y de la estimación, Sentido espacial y geometría, Relaciones y funciones, Incertidumbre y probabilidad, Análisis de datos y estadística y Pensamiento computacional.

En cada uno de ellos, a su vez, se señalan los contenidos o grupos de contenidos cuyo aprendizaje, articulación y movilización son necesarios para la adquisición y el desarrollo de las ocho competencias específicas de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria.

En este trabajo vamos a centrarnos en los saberes básicos del bloque de geometría ya que todo gira en torno a actividades de este bloque tal y como podemos observar en la Tabla 5.

Figuras geométricas planas y tridimensionales	**Reconocimiento de las relaciones geométricas**	**Movimientos y transformaciones**	**Geometría en contexto real**
Descripción y clasificación en función de sus propiedades o características	Criterios de semejanza.Teorema de Tales. Razón de semejanza.	Transformaciones elementales: rotaciones, traslaciones, simetrías…	Contribución de la humanidad al desarrollo de la geometría y a sus aplicaciones, incorporando la perspectiva de género.
Ángulos exteriores e interiores de un polígono. Ángulo inscrito y ángulo central de una circunferencia	Teorema de Pitágoras; aplicación a la clasificación de triángulos.	Los ejes de simetría de un cuerpo geométrico.	Técnicas cooperativas para estimular el trabajo en equipo

Tabla 5: Saberes básicos del Bloque de Geometría

A lo largo de este trabajo, gracias a la utilidad de los libros de espejos trataremos de abordar los saberes básicos de dicho bloque a través una batería de actividades graduadas y las analizaremos siguiendo los Niveles de Van Hiele.

5. Propuesta de actividades mediante libros de espejos.

5.1. Contexto

El modelo de centro educativo hipotético en el que basamos nuestra propuesta de intervención no debe ser demasiado específico o particular. Hemos diseñado la propuesta para que sea adaptable a diversos contextos y pueda ser utilizada por un gran número de docentes o centros educativos, ya que los recursos necesarios para llevarlos a cabo no requieren de mucho presupuesto económico.

El único recurso tecnólogico necesario sería un proyector (incluyendo un ordenador para su proyección).

5.2. Finalidad

De manera general y como vimos anteriormente, el principal objetivo a conseguir con el presente trabajo es el de mejorar el aprendizaje de la Geometría, ya que en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos. Surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla.

En nuestro proyecto, hemos implementado el uso de libros de espejos para abordar la geometría de manera más visual y atractiva. Con estos libros podemos estudiar toda la geometría plana de la ESO, ayudando a los estudiantes a visualizar y comprender conceptos geométricos de manera interactiva. Al reflejar imágenes y formas, los libros de espejos facilitan la exploración de simetrías, ángulos y otras propiedades geométricas, haciendo que el aprendizaje sea más dinámico y accesible para los alumnos.

Seguiremos el Modelo de Van Hiele, ya que resulta de gran importancia conocer el nivel de razonamiento que presentan nuestros estudiantes y a través de este análisis será más fácil buscar estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. También indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro.

El modelo aspira a poder trabajar todo el bloque de Geometría atendiendo al currículum de Matemáticas de la Comunidad Valenciana, descrito en la Sección 4.

5.3. Metodología

Al preparar las actividades para medir el nivel de razonamiento de los estudiantes, se han seguido las siguientes pautas (Godino & Ruiz, 2022):

- Se deben seleccionar actividades cuyas respuestas sean lo suficientemente largas para visualizar las ideas y razonamientos.
- Para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si han respondido bien o mal, sino cómo responden y por qué lo hacen así.
- Hacer una selección equilibrada para cubrir todas las necesidades del alumnado del aula.
- No se debe asignar niveles a las preguntas, una actividad puede ser resuelta de forma correcta por estudiantes de distintos niveles, pero sus razonamientos serán distintos.

La metodología a utilizar para la puesta en práctica del modelo será una metodología activa, en el que se haga partícipe al alumno de su proceso de aprendizaje.

A la hora de llevar estas actividades a la clase, atendemos a determinados principios de la metodología de aprendizaje basado en resolución de problemas. El docente desempeñará el papel de guía y facilitador, proporcionando explicaciones de los conceptos necesarios antes de cada actividad y presentando el problema. Será esencial captar el interés y la motivación de los estudiantes mediante la contextualización de cada una de las actividades que se proponen. Las agrupaciones serán flexibles, y se realizarán de forma individual o grupal (en grupos de 2 a 4 alumnos, siguiendo los principios de un aprendizaje por grupos heterogéneos de selección controlada por el docente), según se diseñen las actividades siempre atendiendo a la diversidad.

5.4. Recursos

Los recursos necesarios para llevar a cabo la propuesta serán los siguientes:

- Recursos por parte del centro: El centro proporcionará un libro de espejos a cada alumno, que es un objeto que consta de dos espejos con las mismas dimensiones unidos por uno de sus bordes, ambos móviles, de manera que las superficies reflectantes quedan hacia el interior. Veáse en la Figura 1.

  Además proporcionará las fotocopias necesarias para la realización de las actividades.

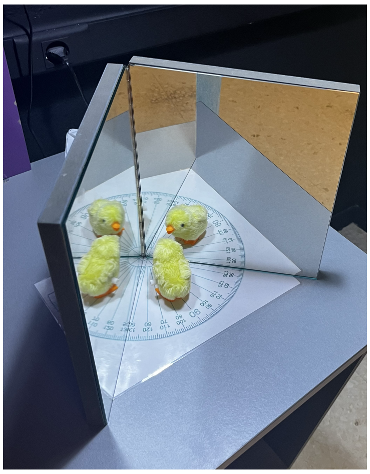

Figura 1: Libro de Espejos. MUDIC Jesús Carnicer.

- Recursos por parte de los alumnos: cuaderno, material de clase y de medida (reglas) y transportador de ángulos.

5.5. Actividades

A continuación, se ofrece una propuesta de actividades fundamentada en el modelo previamente descrito. Esta propuesta se llevará a cabo en un número específico de sesiones. Las actividades están diseñadas para ser implementadas después de haber abordado los temas correspondientes en el currículo. Su objetivo principal es proporcionar una oportunidad de repaso y refuerzo de los conocimientos básicos del bloque de Geometría, asegurando que los estudiantes consoliden y apliquen lo aprendido de manera efectiva. Estas actividades no solo revisarán los saberes básicos, sino que también fortalecerán las habilidades de los alumnos, preparándolos mejor para avanzar en su aprendizaje de la geometría.

Actividad 1:

Sobre una hoja de papel traza un punto y segmento de recta que no pase por él. Sitúa el eje del libro de los espejos sobre el punto y coloca los espejos de manera que corten a la recta. Véase Figura 2

Pregunta 1: Completa la Tabla 6 y después responde las preguntas razonadamente explicando como has encontrado la solución:

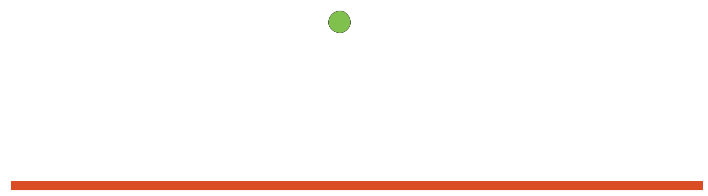

Figura 2: Plantilla para la Actividad 1

Ayuda: Para completar la tabla correctamente debes colocar los espejos con el vértice sobre el círculo y la base cortando la línea roja de la plantilla (véase 2), abre los espejos y ciérralos hasta que veas cada uno de los polígonos regulares que se describen en la Tabla 6. Además, utiliza un transportador de ángulos para poder completar correctamente las 3 últimas columnas de esta Tabla .

POLÍGONO REGULAR	NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO INTERIOR	ÁNGULO QUE FORMAN LOS ESPEJOS	ÁNGULO EXTERIOR
TRIÁNGULO				
CUADRADO				
PENTÁGONO				
HEXÁGONO				

Tabla 6: Elementos de los polígonos regulares

a) ¿Puedes relacionar las figuras que van apareciendo con el ángulo que forman las hojas del libro en cada caso?

b) ¿El ángulo que forman los espejos está relacionado con ángulo interior o el ángulo exterior?

c) ¿Existe alguna relación entre los ángulos interiores y exteriores? Puedes ayudarte de un dibujo.

d) ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un polígono regular? ¿Ocurre lo mismo con los ángulos interiores? ¿Por qué?

e) Si vamos cerrando poco a poco el libro de espejos, ¿observaremos polígonos con mayor o menor número de lados?

f) Si el número de lados de un polígono regular crece infinitamente, ¿qué ocurriría?

Pregunta 2: Completa la Tabla 7 y después responde las preguntas razonadamente explicando como has encontrado la solución:

Ayuda: En la tercera columna que te pide el mínimo número de triángulos en los que se puede dividir un polígono, bastaría con seleccionar un vértice y trazar sus diagonales. De esta forma nos quedaría el polígono dividido en triángulos.

POLÍGONO REGULAR	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE TRIÁNGULOS EN LOS QUE SE PUEDE DESCOMPONER	SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES
TRIÁNGULO			
CUADRADO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			

Tabla 7: Elementos de los polígonos regulares

a) Describe el número de diagonales que has trazado para polígono regular.

b) A partir de los datos recogidos en la tabla, extrae una generalización que relacione el número de lados con el número de triángulos en lo que se puede descomponer cada polígono.

c) ¿Es cierto que para cualquier polígono regular sus ángulos interiores siempre suman $(n-2) \times 180$? Justifica tu respuesta..

Actividad 2:

Vamos a trabajar las diferencias entre los siguientes cuadriláteros: rombo, cuadrado, rectángulo, trapecio y trapezoide. Clasifica cada una de ellos y completa la tabla con sus propiedades, después responde las preguntas razonadamente explicando como has encontrado la solución.

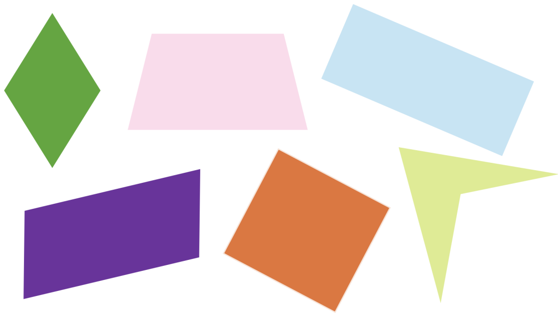

Figura 3: Cuadriláteros

a) Identifica cada imagen de la Figura 3 con su cuadrilatero correspondiente ¿Qué característica comparten todos los cuadriláteros?

   Ayuda: Para responder razonadamente a la siguiente pregunta debes tener en cuenta el número de lados, ángulos, vértices y diagonales de cada uno de ellos.

b) Los cuadrilateros se clasifican en paralelogramos o no parelelogramos. Los primeros se definen como aquellos que tienen sus lados paralelos dos a dos, mientras que los no paralelogramos o bien solo tienen dos lados paralelos o no tienen ninguno. Completa la Tabla 8 atendiendo a estas definiciones.

PARALELOGRAMOS	NO PARALELOGRAMOS

Tabla 8: Clasificación Paralelogramos y No Paralelogramos

c) Completa la Tabla 9 sobre las propiedades de cada uno de los paralelogramos. Utiliza el libro de espejos para obtener el número de ejes de simetría de cada paralelogramo.

ÁNGULOS	TODOS IGUALES	IGUALES DOS A DOS		TODOS IGUALES	IGUALES DOS A DOS		TODOS IGUALES	IGUALES DOS A DOS		TODOS IGUALES	IGUALES DOS A DOS	
DIAGONALES	IGUALES	DISTINTAS		IGUALES	DISTINTAS		IGUALES	DISTINTAS		IGUALES	DISTINTAS	
	PERPENDICULARES	SECANTES		PERPENDICULARES	SECANTES		PERPENDICULARES	SECANTES		PERPENDICULARES	SECANTES	
NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA	4	2	NO TIENE	4	2	NO TIENE	4	2	NO TIENE	4	2	NO TIENE

Tabla 9: Clasificación de los Paralelogramos.

6. Caracterización de los Niveles de Van Hiele para las actividades propuestas.

En esta sección trataremos de analizar e intrepretar como respondería cada estudiante dependiendo del nivel que se encuentre.

Actividad 1: Polígonos regulares y sus principales elementos a través del libro de espejos

Pregunta 1:

Resulta interesante analizar el último apartado, que plantea lo siguiente: Si el número de lados de un polígono regular crece infinitamente, ¿qué ocurriría?

Un estudiante que se encuentre en el nivel 1 de su aprendizaje en geometría tendría dificultades para responder de manera precisa a esta pregunta, ya que aún no ha desarrollado la capacidad de examinar los componentes específicos de cada figura geométrica, como los ángulos que contiene, los lados que la conforman, así como otras características como los ángulos centrales o exteriores. En este nivel, los estudiantes están en las primeras etapas de su aprendizaje, centrados en reconocer y distinguir formas básicas, pero aún no han alcanzado un nivel de comprensión que les permita analizar en profundidad las propiedades más detalladas de los polígonos.

Un estudiante del nivel 2 será capaz de completar la tabla sin problema y se limitará a responder las preguntas sin mucho detalle. Aunque no profundizan en el análisis detallado de las propiedades de las figuras geométricas, para responder el apartado e) dibujará dos polígonos regulares de 7 y 8 lados inscritos en una circunferencia. De estos dibujos planteará lo siguiente: al aumentar el número de lados de los polígonos, se parecerá a un círculo.

Un estudiante del Nivel 3, completará la tabla de la misma forma que un estudiante del nivel 2 pero a la hora de responder las preguntas en lugar de simplemente reconocer y clasificar las figuras, empiezan a identificar las características comunes que comparten diferentes tipos de figuras geométricas. Así como en utilizar argumentos racionales para justificar sus conclusiones, por ejemplo en el apartado e) dibujará más ejemplos y planteará la siguiente conjetura: al aumentar infinitamente el número de lados de los polígonos, el área de estos tiende a ser igual al área del círculo.

Un estudiante del nivel 4 iría más allá y se centraría en la siguiente pregunta: ¿podríamos decir que "el área de los polígonos regulares inscriptos en una circunferencia tiende al área del círculo, al aumentar indefinidamente el número de sus lados? Analizaría las propiedades de los polígonos y se plantearía afirmar si el círculo es un polígono de infinitos lados.

Pregunta 2:

¿Es verdad que los ángulos de cualquier polígono regular suman $(n-2)\times 180$? Justifica tu respuesta.

Un estudiante que esté en el nivel 1 no sabría responder correctamente a esta pregunta, puesto que no es capaz de analizar los elementos de cada polígono así como los ángulos, lados, diagonales...

Un estudiante del nivel 2 comenzaría su razonamiento dibujando al menos dos polígonos de lados distintos.

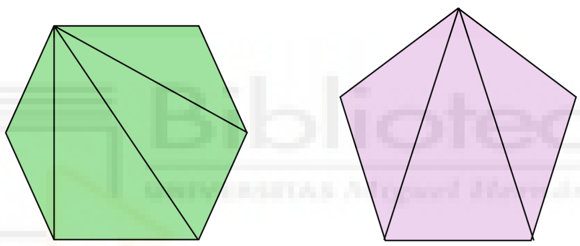

Figura 4: Triangulación de polígonos.

En la Figura 4 podemos observar que

$$4 \text{ triángulos} \times 180^\circ = 720$$

$$3 \text{ triángulos} \times 180^\circ = 540$$

siendo 180° la suma total de los ángulos de cada triángulo.

Este estudiante únicamente verifica que el resultado es cierto tras probarlo en muy pocos ejemplos, generalizando a cualquier tipo de polígonos.

Un estudiante del Nivel 3, probará dividir cada polígono en triángulos trazando diagonales y proporcionará más ejemplos que el estudiante del Nivel 2. Además, concluirá afirmando que para cualquier polígono al dividirlo en el número mínimo de triángulos, se obtendrán tantos triángulo como número de lados menos 2 tenga. Sin embargo, este estudiante sigue basándose en ejemplos concretos para demostrar un resultado pero es capaz de comprender que con ejemplos no es suficiente para afirmar este razonamiento.

Un estudiante del Nivel 4, utilizaría la regla de triangulación para demostrar este resultado y también tendría en cuenta algunas condiciones como los polígonos cóncavos.

Antes de enunciar el Teorema que justifica este resultado veamos unas definiciones previas para entender mejor este resultado:

La clave para demostrar la existencia de la triangulación es probar la existencia de una diagonal.

Definición 6.1 *Una diagonal es todo segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono o de un poliedro.*

Definición 6.2 *Una triangulación es una división del área en un conjunto de triángulos que cumplen las siguientes condiciones:*

- *La unión de todos los triángulos es igual al polígono original.*
- *Los vértices de los triángulos son vértices del polígono original.*
- *Cualquier pareja de triángulos es disjunta o comparte únicamente un vértice o un lado.*

Ahora ya podemos describir algunas de sus propiedades:

Teorema 6.3 *Todo polígono simple P, sin autointersecciones, de n lados admite una triangulacion y toda triangulación de dicho polígono contiene n-2 triángulos y n-3 diagonales.*

Demostración.

En primer lugar veamos que para cualquier polígono simple P de n lados, siempre podemos encontrar una triangulación. Esto se puede demostrar por inducción sobre el número de lados n del polígono.

Para $n = 3$, el polígono ya es un triángulo, por lo que es trivial.

Supongamos que es cierto para todos los polígonos con menos de n lados, siendo $n > 3$. Ahora, queremos demostrar que también es cierto para cualquier polígono de n lados.

Debemos probar la existencia de una diagonal:

Sea un polígono P de n lados. Seleccionamos un vértice v. Tomaremos los dos vértices vecinos de v, que denotaremos como u y w.

1. Si el segmento uw cae completamente dentro del polígono P, hemos encontrado una diagonal.

2. Si el segmento uw no cae completamente dentro del polígono P, significa que existe algún vértice en el interior del triángulo uvw o sobre la diagonal uw. De entre estos vértices, seleccionamos el más alejado de la diagonal uw, denotado como v'. El segmento vv' no puede ser cruzado por ningún lado de P, porque eso implicaría que el lado tendría un extremo en el interior del triángulo uvw más alejado de uw que v', lo que contradiría la definición de v'. Por lo tanto, vv' es una diagonal de P.

La diagonal encontrada divide el polígono P en dos subpolígonos, cada uno con un número de vértices estrictamente menor que n. Por la hipótesis de inducción, cada uno de estos subpolígonos puede ser triangulado. Estas dos triangulaciones, junto con la diagonal encontrada, inducen una triangulación en P. Con esto, hemos demostrado que para cualquier polígono simple P de n lados, existe una triangulación.

En la segunda parte de la demostración tenemos que demostrar que cada polígono se divide en $n-2$ triángulos y $n-3$ diagonales.

Si n=3, el polígono es un triángulo, por lo que ya está triangulado. Esta es la única triangulación posible y contiene $n-2 = 3-2 = 1$ triangulo y $n-3 = 3-3 = 0$ diagonales.

Supongamos que el teorema es cierto para todos los polígonos simples de m lados, donde $m < n$. Veamos que también es cierto para un polígono simple de n lados.

Dada cualquier triangulación de P, seleccionamos una diagonal cualquiera. Esta diagonal divide el polígono en dos subpolígonos, P_1 y P_2, cada uno con un número de vértices m_1 y m_2 estrictamente menor en cada caso que n. Cada vértice de P está en exactamente uno de los dos subpolígonos, excepto los vértices en los extremos de la diagonal, que están en ambos subpolígonos. Por tanto, $m_1 + m_2 = n - 2$.

Por la hipótesis de inducción, todas las triangulaciones de los subpolígonos P_1 y P_2 tienen $m_1 - 2$ y $m_2 - 2$ triángulos, respectivamente. De igual forma, tienen $m_1 - 3$ y $m_2 - 3$ diagonales, respectivamente Por lo tanto, la triangulación arbitraria de P tiene $m_1 - 2 + m_2 - 2 = m_1 + m_2 - 2 - 2 = n - 2$ triángulos. Y $(m_1 - 3) + (m_2 - 3) + 1 = m_1 + m_2 - 2 - 3 = n - 3$ diagonales ■

Actividad 2: Reconocimiento de cuadriláteros

Un alumno del nivel 1 que haya observado y manipulado una variedad considerable de figuras geométricas podrá identificar cada uno de ellos, pero sin establecer conexiones. Podría ser que si nunca ha visto un cuadrado con un giro pudiera confundirlo con un rombo.

Un alumno del nivel 2, identificaría cada nombre con su figura correspondiente y además por medio del libro de espejos podrá reconocer algunos de sus elementos con ángulos, ejes de simetría, diagonales... Sin embargo, un estudiante de este nivel no sabrá relacionar entre las distintas propiedades y su clasificación.

Un estudiante del nivel 3, argumentará de la siguiente forma, proporcionará las siguientes definiciones y propiedades sin demostrarlas.

Definición 6.4 *Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados y dos diagonales. Se caracterizan por tener cuatro vértices y cuatro ángulos, y la suma de sus ángulos internos siempre es de 360°.*

Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados, sus longitudes y sus ángulos interiores en paralelogramos y no parelolagramos.

Utilizará las siguientes propiedades para diferenciar esta clasificación:

Definición 6.5 *Un paralelogramo es un cuadrilátero convexo cuyos pares de lados opuestos son paralelos.*

Teorema 6.6 *En todo paralelogramo se cumple lo siguiente:*

- *Los lados opuestos y los ángulos opuestos son iguales,*
- *Los ángulos adyacentes son suplementarios,*
- *cada diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes,*
- *Las dos diagonales del paralelogramo lo dividen en dos parejas de triángulos congruentes,*
- *Las diagonales se intersecan en su punto medio.*

Además será capaz de establecer relaciones entre los paralelogramos. Debido a sus características comunes, se puede decir que el cuadrado es un rombo y un rectángulo y que los tres son romboides.

Veamos la Figura 5 para una mejor comprensión:

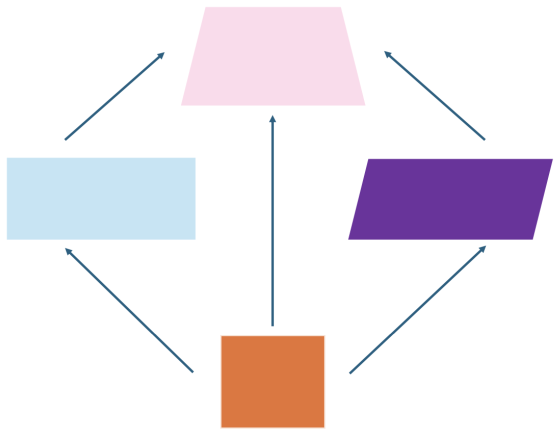

Figura 5: Esquema Paralelogramos

Un estudiante del nivel 4, está en la base de deducción por lo que además de comprender las relaciones y los teoremas, entiende sus demostraciones y las analiza.

Vemos la demostración del Teorema que siguió el estudiante del Nivel 3 para la identificación de los paralelogramos,

Demostración. Supongamos que tenemos un paralelogramo $ABCD$, véase Figura 6 donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivamente.

Como BC es paralelo a AD entonces $\angle DCA$ y $\angle CAB$ son iguales. De igual forma ocurre con ACB y CAD. Entonces por el Criterio de Ángulo, Lado, Ángulo (ALA), que nos dice que dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes, podemos afirmar que $\triangle ABC = \triangle ACD$. Por lo que que podemos concluir que $AB = CD$ y $AD = CB$.

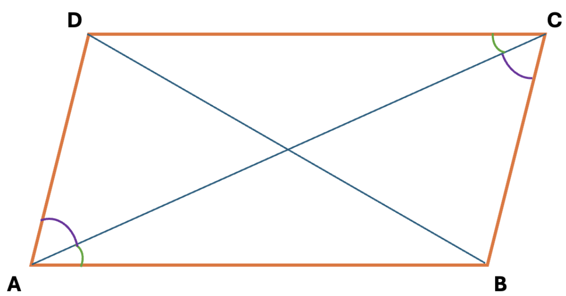

Figura 6: Paralelogramo ABCD

Por otra parte, como AB es paralelo a DC y $\alpha = \beta$ podemos observar que:

$$\angle A = \angle CAD + \angle CAB = \angle DCA + \angle ACB = \angle C$$

Así hemos demostrado que los lados y ángulos opuesto son iguales. $\blacksquare$

Además deducirá algunas propiedades más para una clasificación más precisa.

7. Aplicación en la vida real

La Alhambra es una majestuosa fortaleza y palacio situado en Granada, España, construido durante el siglo XIII para alojar al emir y la corte del reino Nazarí. Es un destacado ejemplo de la arquitectura islámica y morisca. Funcionó como una fortaleza militar y residencia real, albergando una ciudadela completa dentro de sus muros. Conocida por su exquisita decoración y sus impresionantes patios y jardines, la Alhambra es un destino turístico de renombre mundial. En 1984, fue declarada Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO, y actualmente atrae a millones de visitantes cada año.

Figura 7: Imagen de la Alhambra desde el exterior

La Alhambra es admirada por amantes de la historia, la arquitectura, el arte, la artesanía y curiosamente por matemáticos.

Cuando hablamos de este complejo monumental, entre otras muchas cosas, cabe destacar la extraordinaria belleza de sus mosaicos.

Pero, ¿cuál es la definición en matemáticas de estos azulejos que recubren buena parte de sus paredes y suelos?

Artísticamente se conoce como mosaico a una obra elaborada con piezas de piedra, cerámica u otros materiales, de diversos colores, llamadas teselas, unidas para formar composiciones decorativas. Sin embargo, en matemáticas, los mosaicos son el recubrimiento del plano mediante figuras de tal forma que cumplen dos condiciones: no hay huecos entre ellas y no exista solapamiento.

Podemos encontrar diversos tipos de mosaicos: regulares, semirregulares, simples, complejos... Los más sencillos están formados por polígonos regulares del mismo tipo (por ejemplo, solo cuadrados, solo triángulos equiláteros o solo hexágonos). Pero también se pueden formar mosaicos combinando varios tipos de polígonos.

En cuanto a la manera de combinarlos, existen cuatro estrategias para rellenar un plano con losetas (o 'teselar un plano'), es decir, cuatro tipos de movimientos, basados en simetrías, desplazamientos y/o rotaciones (Mora, 2007):

- Traslación: añadir la nueva figura por desplazamiento de la anterior, sin ningún giro respecto a esta.
- Rotación: añadir la nueva figura con algún giro sobre un punto fijo.
- Reflexión o simetría: añadir la nueva figura de modo especular respecto a la anterior, con un eje de simetría.
- Simetría con deslizamiento: añadir la nueva figura a través una reflexión seguida de una traslación en la dirección del eje de reflexión..

Estas 4 estrategias se denominan movimientos en el plano y son isometrías, es decir, conservan las distancias. Estas transformaciones se combinan entre sí dando lugar a los denominados grupos de simetrías. En el año 1891, Fedorov, un gran matemático ruso, demostró que no hay más que 17 estructuras básicas para las numerosas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos.

Los creadores de los mosaicos de la Alhambra no podían conocer el teorema de clasificación de Fedorov y por lo tanto no conocían cuántos grupos de simetría podían usarse para teselar el plano.

Por eso resulta impactante comprobar que, en la Alhambra están representados los 17 tipos, es decir, los árabes encontraron el mismo resultado de forma empírica. La forma de obtenerlos fue transformando un polígono regular en otras figuras de igual superficie que produjeron formas desconocidas hasta esa época en el arte.

Además, los conocimientos geométricos y artísticos de los artesanos islámicos hicieron posible la obtención de los llamados "polígonos nazaríes". Los más conocidos son: el hueso, el pétalo, el avión, el huso y la pajarita.

En la Figura 8 podemos observar algunas de los mosaicos creados a partir de los polígonos nazaríes. Para conocer más características sobre ellos plantearemos la siguiente actividad.

Actividad 1: Observa todas las isometrías o movimientos en el plano que siguen cada uno los mosaicos de la Figura 8 y responde a las siguientes preguntas razonadamente.

Materiales necesarios para la actividad: Las 3 imágenes de la Figura 8, libro de espejos, regla, transportador de ángulos y lapiz.

(a) Avión (b) Pajarita (c) Hueso

Figura 8: Mosaicos Nazaríes

1. Busca vectores de traslación en cada una de los mosaicos y señala las direcciones.
2. En caso que el mosaico presente rotaciones, marca los centros, es decir, puntos sobre los que podemos rotar el mosaico para que permanezca invariable y escribe el ángulo de rotación. Ayuda: puedes utilizar el transportador de ángulos.
3. Dibuja las simetrías que presentan cada uno de los mosaicos. Para buscar las simetrías, ayúdate del libro de espejos y para marcarlas utiliza una regla.
4. Observa y describe el polígono regular mínimo que lo genera, describiendo todos sus elementos (lados, ángulos interiores, exteriores, diagonales...)

8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo estudio, se diseñaron y aplicaron una serie de actividades específicas de geometría, las cuales fueron analizadas para evaluar su efectividad en el progreso del pensamiento geométrico de los estudiantes.

Debido al carácter manipulativo que tienen todas las actividades propuestas, pueden hacer que el aprendizaje de la geometría sea más accesible y atractivo para todo el alumnado, ya que al proporcionar múltiples formas de interactuar con los conceptos, estas actividades pueden ayudar a llegar a todos los estudiantes y promover un aprendizaje inclusivo.

Además a través del uso de libros de espejos, los estudiantes pueden explorar activamente las propiedades y relaciones entre formas, lo que les ayuda a interiorizar los conceptos de manera más efectiva.

En conclusión, la integración de los niveles de Van Hiele y las habilidades de Hoffer en la enseñanza de la geometría a través de materiales manipulativos puede mejorar significativamente la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes. Este enfoque no solo optimiza el desarrollo de competencias matemáticas, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar futuros desafíos educativos con una base sólida en pensamiento crítico y habilidades geométricas.

Para futuros trabajos y posibles puestas en práctica, sería beneficioso desarrollar programas de formación específica para los docentes en los marcos teóricos de Van Hiele y Hoffer, asegurando una aplicación más coherente y efectiva en el aula. También, se deberían realizar cursos de formación sobre el uso de libros de espejos, ya que se trata de un objeto accesible económicamente para todos los centros y presenta una gran utilidad para estudiar la geometria de la ESO. Además, se sugiere investigar la integración de tecnologías educativas que puedan complementar y enriquecer las actividades de geometría, así como explorar métodos de evaluación más variados y dinámicos para medir el progreso de los estudiantes.

Además, debería hacerse un mayor esfuerzo que permita incluir más proyectos educativos sobre las matemáticas, así como, fomentar las relaciones entre la educación formal en las aulas y la no formal en museos, obras de arte, exposiciones... para que nuestros alumnos perciban mejor la enorme belleza que posee y la gran importancia que desempeña esta materia en nuestro día a día.

Referencias

Boletín Oficial del Estado. (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. https://www.boe.es/buscar/pdf/2020/BOE-A-2020-16673-consolidado.pdf

Consell. (2022). *Decreto 107/2022 por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria*. https://dogv.gva.es/datos/2022/08/11/pdf/2022_7573.pdf

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. (2022). *Decreto 217/2022, de 10 de marzo, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil en la Comunitat Valenciana*. https://www.dogv.gva.es/datos/2022/03/25/pdf/2022_3007.pdf

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2022). *Geometría y su didáctica para maestros*. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo Los Giros. *Educación Matemática*, *3*, 49-65.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*, 27-46.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, *74*(1), 11-18.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele* (S. Llinares & M. V. Sánchez, Eds.).

Mora, J. A. (2007). *Mosaicos* [Fecha de acceso: 25 de Mayo, 2024]. http://jmora7.com/Mosaicos/index.html

Roldán Zafra, J. N. (2023). *Matemáticas en un museo de ciencias basadas en el modelo de Van Hiele y la estrategia STEAM* [Tesis doctoral, Universidad Miguel Hernández].

Roldán-Zafra, J., & Perea, C. (2022). Math Learning in a Science Museum—Proposal for a Workshop Design Based on STEAM Strategy to Learn Mathematics. The Case of the Cryptography Workshop. *Mathematics*, *10*(22). https://doi.org/https://doi.org/10.3390/math10224335

Roldán-Zafra, J., Perea, C., Polo-Blanco, I., & Campillo, P. (2022). Design of an Interactive Module Based on the Van Hiele Model: Case Study of the Pythagorean Theorem. *International Electronic Journal Of Mathematics Education*, *17*(1). https://doi.org/https://doi.org/10.29333/iejme/11556

Theran, E. (2021). Pensamiento Geométrico, Teoría de Van Hiele y Tecnologías Computacionales. *Comput. Electr. Sci. Theory Appl.*, *2*, 39-50.

Van Hiele, P. M. (1955). De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde iii de eerste kíasse van het V.H.M.O. *Paedagogische Stüdien*, *32*, 289-297.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* Academic Press.