

Universidad Miguel Hernández de Elche



PROGRAMA DE DOCTORADO EN ESTADÍSTICA,
OPTIMIZACIÓN Y MATEMÁTICA APLICADA (EOMA)

REPARTO DE INGRESOS EN PLATAFORMAS DE
VÍDEO EN INTERNET

Tesis Doctoral

Autor: Francisco López Navarrete

Septiembre 2023

Director: Prof. Dr. Joaquín Sánchez Soriano

La presente tesis doctoral se presenta en formato convencional y como indicio de calidad se presentan los siguientes resultados:

1. Francisco López-Navarrete, Joaquín Sánchez-Soriano, Óscar M. Bonastre. Allocating revenues in a smart TV ecosystem. *International Transactions in Operational Research* vol. 26:1611-1632, 2019.
<https://doi.org/10.1111/itor.12636>.
2. Francisco López-Navarrete, Joaquín Sánchez-Soriano, Óscar M. Bonastre, Dynamic Generation of Revenue through the insertion of advertisements into video contents, 2022 IEEE 19th Annual Consumer Communications & Networking Conference (CCNC), Las Vegas, NV, USA, 2022, pp. 481-482.
<https://doi.org/10.1109/CCNC49033.2022.9700677>.
3. Francisco López-Navarrete, Joaquín Sánchez-Soriano, Óscar M. Bonastre, Dynamic generation and attribution of revenues in a video platform. *arXiv:2304.12268 [cs.GT]*, 2023.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.12268>



Dr. Joaquín Sánchez Soriano, director de esta tesis doctoral, declaro que el presente trabajo, titulado,

Reparto de ingresos en plataformas de vídeo en Internet

presentado por Don Francisco López Navarrete para obtener el título de doctor, fue llevado a cabo bajo mi supervisión en el Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada (EOMA) de la Universidad Miguel Hernández de Elche.

En Elche, septiembre de 2023

El director,

Dr. Joaquín Sánchez Soriano



UNIVERSITAS
Miguel Hernández

Dr. Domingo Morales González, coordinador del Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada (EOMA) de la Universidad Miguel Hernández de Elche, declaro que el presente trabajo, titulado

Reparto de ingresos en plataformas de vídeo en Internet

presentado por Don Francisco López Navarrete para obtener el título de doctor, fue llevado a cabo en el Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada (EOMA) de la Universidad Miguel Hernández de Elche.

En Elche, septiembre de 2023

El coordinador del programa de doctorado,

Dr. Domingo Morales González

Dedicatoria

Dedico esta tesis doctoral a mi padre.

Agradecimientos

Desde el inicio de la tesis, sabes que los agradecimientos forman parte de los últimos capítulos que vas a escribir, y no te das cuenta de la cantidad de gente que ha hecho posible que llegues al puerto final. En primer lugar, quiero agradecer a Joaquín Sánchez Soriano el esfuerzo que ha tenido en este camino y la confianza que siempre ha tenido en mí. Sin duda, sin su aportación en todo momento, no habría podido llegar a escribir estas líneas finales.

Joaquín, como profesor de una asignatura optativa de la ingeniería en mi etapa universitaria, fue un referente para mí. Por ello, no tuve duda en solicitarle que pudiera ser quien dirigiese mi Proyecto Final de Carrera (PFC).

Cuando al finalizar el PFC me propuso embarcarme en el reto ilusionante de realizar mi tesis doctoral junto a él, no pude dudar en aceptar el reto.

Como persona, en estos más de 10 años ha sido también un referente del que no he dejado de aprender en muchos aspectos, compartir, y al que sé que nunca dejaré de admirar y querer.

Siguiendo el orden académico, quiero agradecer la mano tendida del profesor catedrático de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), Juan Tejada Cazorla. Hasta el desgraciado accidente que tuve en 2019, él puso a mi disposición el sueño de tener un despacho en una estancia inolvidable en la UCM, donde de él y otros compañeros, aprendí cada día que pude estar allí.

También quiero agradecer a dos profesores del curso de Marketing Digital que me inspiraron para enfocar el capítulo introductorio de la tesis. Ellos son: Alex Rayón, Vicerrector de Relaciones Institucionales de la Universidad de Deusto, y Aritz González, director del equipo Bisons ECLUB. Ellos son dos bilbaínos que me marcaron profundamente en sus clases, y espero mantener contacto profesional y personal con ellos en los años venideros.

Para concluir este capítulo, después de agradecer a dos personas por su

ayuda en la parte matemática y a otras dos personas por ayudarme a visualizar claramente la realidad que tienen los principios del sistema presentado en el negocio actual de Internet TV, quiero pasar a recordar y agradecer también la intensidad del amor y confianza diaria que me ha hecho llegar hasta el final de este camino.

Por tanto, esta última sección del capítulo estará referida al amor. En ella quiero empezar agradeciendo la compañía y apoyo de mi familia, amigos, y colegas. Ellos siempre confiaron en mí para concluir este hito académico personal, porque, pese a las diversas dificultades, confían en mi capacidad de sacrificio cuando de verdad me propongo algo. El sacrificio ha sido mucho, pero sin duda ha merecido la pena.

De una forma muy especial, quiero agradecer esta tesis doctoral a mi madre. Teresa Navarrete Riquelme, ha sido la persona que me ha dado la vida en, al menos, tres ocasiones.

Gracias a ella no sólo respiro como el resto, si no que, gracias a su esfuerzo, he superado una infancia diferente y, gracias a su orgullo y empuje, he podido desarrollar todas mis etapas académicas. En mi trayectoria académica, me ha acompañado desde la infancia al broche que ahora entrego.

También, de forma emotiva, aunque no formó parte de este camino, quiero acordarme de alguien que siempre será mi compañero de universidad, mi compañero José Antonio González.

Cerrando este apartado, quisiera agradecer y dedicar a la persona más especial de mi día a día y de mi vida. La conocí como doctorando, y mucho de lo que hoy quiero cerrar, lo cierro gracias a su amor. Lo cierro gracias a que nunca dudó de mi capacidad y, además, me hizo rearmarme en los momentos más duros. Te amo Andrea.

Por último, quiero agradecerle y dedicarle esta tesis doctoral al, o la, que en esta última etapa ha sido el gran motor en mis esfuerzos. Él o ella, aunque todavía no hayamos visto tu cara, en esta familia ya se te ama y te esperaremos. Este esfuerzo es para que tu padre sea doctor.

Para nosotros, estés o no, ya eres. Ya eres porque es totalmente real que soñamos con cuidarte si lees estas palabras. Querido hijo o hija, también te consideramos real, tal y como nos inspira el versículo 13:8 de la Primera Carta a los corintios, recuerda siempre que: “el amor, nunca deja de ser”.

Financiación

Esta tesis doctoral ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y fondos FEDER a través de los proyectos MTM2011-23205 y MTM2014-54199P, y por Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN), la Agencia Estatal de Investigación (AEI//10.13039/501100011033) y fondos FEDER "Una forma de hacer Europa" a través del proyecto PGC2018-097965-B-I00.



Glosario

A continuación se presenta una lista de la notación de los principales conceptos utilizados en la tesis doctoral con la finalidad de facilitar al lector su lectura.

- IPTV es el acrónimo del Internet Protocol TV (televisión por protocolo de Internet).
- VoD es el acrónimo de la correspondiente expresión inglesa de vídeo bajo demanda.
- Smart TV (o TV inteligente) engloba diferentes formas de consumir televisión, entre otras, TV por Internet, TV en línea, IPTV y Web TV.
- $|S|$ denota el cardinal del conjunto S .
- N denota el conjunto de jugadores.
- $\chi(K, F)$ es una función dicotómica que toma el valor 1 si $K \subset F$ y 0 en otro caso.
- $P^\sigma(i)$ denota el conjunto de jugadores que preceden al jugador i en el orden dado por la permutación σ de un conjunto de jugadores.
- (N, v) o (N, V) denotan juegos de utilidad transferible, donde N es el conjunto de jugadores y v o V su función característica. Normalmente, v se reservará para juegos estáticos y V para juegos dinámicos.
- $C(N, v)$ (resp. $C(N, V)$) denota el núcleo del juego (N, v) (resp. (N, V)).
- $Sh(N, v)$ (resp. $Sh(N, V)$) denota el valor de Shapley del juego (N, v) (resp. (N, V)).
- $M_i(N, v)$ denota la contribución marginal del jugador i a N , y $m_i(N, v)$ denota el derecho mínimo del jugador i en el juego (N, v) .

-
- $\tau(N, v)$ denota el valor de Tijs del juego (N, v) .
 - $m_i^\sigma(N, v)$ denota la contribución marginal del jugador i a $P^\sigma(i)$.
 - C denota el conjunto de canales en el sistema.
 - W o 0 denota al propietario del sistema. El propietario del sistema puede constar de tres agentes: w_p la plataforma en sí, w_r el servicio de recomendación, y w_s el servicio de búsqueda.
 - La condición de equivalencia establece que el ingreso obtenido por la visualización de un contenido es igual en pay-per-view o por inserción de anuncios.
 - U denota el conjunto de usuarios en el sistema.
 - s denota una sesión iniciada en el sistema por un usuario.
 - $S(t)$ denota el conjunto de sesiones iniciadas y finalizadas desde el inicio hasta el instante t .
 - $S(t_1, t_2)$ denota el conjunto de sesiones finalizadas por los usuarios en el intervalo de tiempo $]t_1, t_2]$, tal que $t_1 < t_2$.
 - $a(s)$ es el elemento en $W \cup C$ en el que la sesión s es iniciada en el sistema.
 - $v(s)$ es el conjunto de vídeos (contenidos) que se vieron en la sesión s .
 - $r(i, s)$ denota el ingreso obtenido por el visionado del vídeo o servicio de la plataforma i en la sesión s .
 - $R(s)$ denota el ingreso total obtenido en la sesión s .
 - $R(t_1, t_2)$ denota el ingreso total obtenido con todas las sesiones finalizadas en el intervalo de tiempo $]t_1, t_2]$.
 - $e_0(s)$ denota el inicio de la sesión s en el sistema.
 - $e_j(s)$ denota el evento j -ésimo en la sesión s y $r(e_k(s))$ denota el ingreso obtenido en dicho evento.
 - $P(e_k(s)) = P_k(s)$ denota el jugador al que pertenece el evento k -ésimo de la sesión s .

-
- $E^k(s)$ denota el conjunto de todos los eventos de la sesión s hasta su k -ésimo evento incluido, y $E_i^k(s)$ denota el conjunto de todos los eventos en s que pertenecen al jugador i .
 - $\tilde{E}^k(s)$ denota al conjunto de los eventos inicio de sesión y k -ésimo evento de la sesión s .
 - $P(E^k(s))$ es el conjunto de todos los jugadores distintos en $E^k(s)$ y su cardinal se denota por $n_k^p(s)$.
 - $P(\tilde{E}^k(s))$ es el conjunto de todos los jugadores distintos en $\tilde{E}^k(s)$ y su cardinal se denota por $\tilde{n}_k^p(s)$.
 - $R(s|F)$ es el ingreso obtenido en la sesión s considerando sólo las sucesiones de eventos completas con los jugadores en F .
 - DD_{12}^N (resp. DC_{12}^N) denota el conjunto de juegos cooperativos dinámicos de evento discreto (resp. continuo) con N jugadores y que se definen a partir de la función de ingreso $R(\cdot|\cdot)$ y DD_{12} (resp. DC_{12}) denota la familia de todos estos juegos. En general, la función característica de los juegos en esta familia se denotará por V .
 - $\tilde{R}(s|F)$ es el ingreso obtenido en todos los eventos que corresponden a los jugadores en F .
 - DD_{13}^N (resp. DC_{13}^N) denota el conjunto de juegos cooperativos dinámicos de evento discreto (resp. continuo) con N jugadores y que se definen a partir de la función de ingreso $\tilde{R}(\cdot|\cdot)$ y DD_{13} (resp. DC_{13}) denota la familia de todos estos juegos. En general, la función característica de los juegos en esta familia se denotará por \tilde{V} .
 - $t_0(s)$ denota el instante de tiempo en el que se inicia la sesión s , y $t_f(s)$ el instante de tiempo en que finaliza.
 - $r(s, t)$ es la función de generación de ingresos en la sesión s por instante de tiempo t , esta función trabaja de forma similar a una función de densidad.
 - $S^*(t_1, t_2)$ denota el conjunto de sesiones activas en el intervalo de tiempo $]t_1, t_2]$.
 - $R^*(t_1, t_2)$ denota los ingresos generados en el el intervalo de tiempo $]t_1, t_2]$.

-
- $v(s, t)$ denota el conjunto de jugadores (canales, plataforma o servicios) que han sido visitados en la sesión s hasta el instante t .

Índice

Dedicatoria	ix
Agradecimientos	xi
Financiación	xiii
Glosario	xv
Resumen	1
1 Introducción	7
1.1 Motivación y descripción del problema	8
1.2 Objetivos	10
1.3 Materiales y métodos	10
1.4 Estructura de la tesis y principales resultados	11
2 Conceptos básicos de teoría de juegos	15
2.1 Introducción	15
2.2 Juegos cooperativos	16
2.3 Soluciones para juegos cooperativos	17
2.4 Juegos cooperativos dinámicos	18
2.5 Soluciones para juegos cooperativos dinámicos	20
3 Reparto de ingresos en el ecosistema de las Smart TV	23
3.1 Introducción	23
3.2 Ecosistema Smart TV: principales agentes y modelo estático .	27
3.3 El modelo matemático: los juegos cooperativos STV	31
3.4 Asignaciones estables de los ingresos: el núcleo de los STV- juegos	34
3.5 Selección de repartos estables de los ingresos: valores para los STV-juegos	40
3.6 Análisis computacional y dinámico	45

3.7	Conclusiones	48
4	Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos discretos	51
4.1	Introducción	52
4.2	Descripción del sistema	55
4.3	Modelo matemático	57
4.4	Juegos dinámicos. Suposiciones	59
4.5	Juegos dinámicos de evento discreto	61
4.6	Propiedades de equidad	64
4.7	Reglas de asignación de ingresos	66
4.7.1	El valor de Shapley	67
4.7.2	Otro valor no atenuado en el tiempo	72
4.7.3	Una familia de reglas atenuadas en el tiempo	74
4.8	Algoritmo para la computación de las reglas de asignación	76
4.9	Ejemplos ilustrativos	79
4.10	Conclusiones	83
5	Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos continuos	85
5.1	Introducción	85
5.2	Modelo dinámico continuo de generación de ingresos	86
5.3	Juegos dinámicos de eventos continuos	87
5.4	Reglas para la asignación de ingresos	92
5.4.1	El valor de Shapley	92
5.4.2	Otro valor no atenuado en el tiempo	95
5.4.3	Valores atenuados en el tiempo	98
5.5	Discusión y conclusiones	101
6	Conclusiones y futuras líneas de investigación	105
6.1	Conclusiones	105
6.1.1	Consecución de los objetivos	105
6.1.2	Aportaciones a la literatura de los problemas de reparto	106
6.2	Futuras líneas de investigación	107
	Referencias	109

Resumen

El auge de las plataformas y uso del visionado de contenidos como medio de entretenimiento en los últimos 10 años, ha conseguido que actualmente la mayor parte del tráfico de la red esté relacionado con el visionado de contenidos audiovisuales, generando una gran cantidad de ingresos que ha atraído la atención de numerosas empresas; incluidas las propias empresas proveedoras de los servicios de datos en Internet.

Por tanto, se puede considerar que cada contenido en sí mismo sea un vehículo demandado por el usuario final de los servicios de contenidos audiovisuales en Internet, y el cuál generará ingresos por la visualización de publicidad o por suscripción a los diferentes canales y plataformas.

En esta tesis doctoral se realiza un análisis matemático, desde la perspectiva de la teoría de juegos, del problema de reparto de los ingresos generados en plataformas de contenidos audiovisuales en Internet entre las plataformas y los creadores de contenidos. Para ello se introducen sistemas económicos simplificados que definen las relaciones entre los diferentes agentes involucrados (plataforma, creadores de contenidos, empresas de publicidad y usuarios del sistema), y una serie de hipótesis que condicionan el modo de entender la relevancia de cada elemento en el mercado basado en el negocio de la que se podría denominar la Internet TV.

En concreto, se analizan dos modelos matemáticos distintos. En el primero, se considera un modelo estático, en el sentido de que no se tiene en cuenta la navegación del usuario en el sistema y, en el segundo, se considera un modelo dinámico en el que sí se tiene en cuenta toda la navegación del usuario dentro del sistema. A continuación, se da mayor detalle de ambos.

En el primer modelo matemático que se introduce en esta tesis (capítulo 3), se considera, en primer lugar, que no es relevante la navegación del usuario dentro del sistema de contenidos de vídeo, y, en segundo lugar, que el ingreso que genera un contenido audiovisual es el mismo tanto si se consume con publicidad, lo que implica que es gratuito para el usuario, como si se consume bajo pay-per-view, a esto se le denomina *principio de equivalencia*. El sistema que se está considerando puede verse como un ecosistema de Smart TV.

En este modelo se considera que los agentes relevantes para la generación de ingresos son la plataforma, el contenido que atrae al usuario al sistema y el contenido que se consume por el usuario. El sistema queda descrito por el proveedor del servicio, los canales de los creadores de contenido, un vector de ingresos asociado a los contenidos y una matriz que representa las proporciones de usuarios que ven los contenidos cuando son atraídos por unos u otros contenidos, y el número de usuarios que entraron al sistema de smart TV. Una vez establecido el modelo matemático que describe el sistema, se asocia un juego cooperativo al mismo, que se denomina juego STV.

Se demuestra que los juegos STV son convexos, por lo que es posible encontrar repartos que sean estables, es decir, que pertenezcan al núcleo del juego. Además, se demuestra que estos juegos tienen una estructura especial, lo que permite que se caractericen todos los elementos de su núcleo. Asimismo, se introduce el concepto de núcleo simétrico para estos juegos, que es un subconjunto del núcleo del juego STV, que da repartos que tratan de la misma forma a todos los agentes del sistema que juegan el mismo rol.

Puesto que el núcleo de los juegos STV es grande, es necesario seleccionar algunos de los repartos posibles que contiene, en particular, se analizan dos de ellos particularmente relevantes en la literatura de los juegos cooperativos, el valor de Shapley y el valor de Tijs, que ambos pertenecen al núcleo para estos juegos. Para ambos se obtienen expresiones sencillas en función de los elementos que definen el problema. Esto permite que su implementación sea sencilla en un entorno real, y el análisis de su complejidad invita a que ambos puedan ser utilizados como mecanismos de reparto razonables, dadas, además, sus buenas propiedades tanto matemáticas como de justicia y equidad. Junto al análisis computacional se estudia su adaptación en un entorno dinámico, lo que hace interesante que estas soluciones puedan utilizarse en entornos realistas como mecanismos de reparto o compensación a los creadores de contenidos.

En el segundo modelo matemático que se introduce en esta tesis (capítulos 4 y 5), se considera que la navegación del usuario es relevante en la generación de ingresos, sin embargo, no se considera el principio de equivalencia del modelo anterior, la razón es que al considerar toda la navegación del usuario se puede analizar en más detalle cómo se han ido generando los ingresos. Este modelo se adapta bien a plataformas de vídeo bajo demanda en Internet como puede ser la conocida plataforma YouTube. En este modelo se consideran relevantes en la generación de ingresos la plataforma y todos los servicios y contenidos utilizados por los usuarios. El sistema queda descrito por la plataforma y los servicios que presta, los canales de contenidos, la ventana de tiempo considerada, las sesiones de los usuarios en esa ventana y los ingresos obtenidos en cada paso (evento) de la navegación de los usuarios.

Como se puede observar, se tiene en cuenta más información que en el primer modelo, pero esta información no es inaccesible para la plataforma, puesto que lo único que se necesita es la trazabilidad de los eventos de una sesión y esto la plataforma lo puede conocer.

Para definir los juegos asociados a la situación descrita en el párrafo anterior, se hacen tres suposiciones sobre la relevancia que tienen los contenidos y servicios visitados por un usuario en su sesión antes de que se genere un ingreso. Las tres suposiciones son las siguientes:

1. Sin plataforma no se pueden generar ingresos.
2. Si un determinado evento de una sesión se elimina, entonces la sesión termina y ya no se generan más ingresos.
3. Si un determinado evento de una sesión se elimina, entonces la sesión continúa pero sin ese evento.

La primera suposición es obvia, pero la segunda y tercera dan lugar a dos juegos cooperativos dinámicos diferentes. Ambos son estudiados en esta tesis doctoral, tanto en el caso de que se considere un modelo de evento discreto (capítulo 4) como de evento continuo (capítulo 5). Mientras que en el primer caso no se tiene en cuenta la duración de cada evento, en el segundo sí.

Se demuestra que tanto en el caso de evento discreto como de evento continuo, los juegos cooperativos dinámicos asociados son convexos en el tiempo, lo que permite encontrar repartos que sean coalicionalmente estables. Además, se demuestra que todos estos juegos son separables en el tiempo, lo que facilita su análisis a la hora de definir mecanismos de reparto y de implementarlos en sistemas reales. Asimismo, se adaptan al problema en estudio una serie de propiedades que se consideran razonables para los mecanismos de reparto para el tipo de situaciones que se abordan, como pueden ser la eficiencia, la simetría, la propiedad de jugador nulo, la monotonía, la estabilidad, la separabilidad temporal y la separabilidad en sesiones.

El primer mecanismo de reparto estudiado es el valor de Shapley. En el caso de los juegos cooperativos dinámicos de evento discreto, se determinan expresiones matemáticas sencillas del valor de Shapley para ambos juegos y se analizan qué propiedades de las antes mencionadas satisfacen. En el análisis del valor de Shapley de estos dos juegos se observan las siguientes tres cuestiones:

1. Bajo la suposición 2 el valor de Shapley sólo tiene en cuenta la presencia de la plataforma, la presencia o ausencia de los contenidos de los canales antes de la generación del ingreso, pero no el número de veces que estos puedan aparecer, y, obviamente, el evento en el que se genera el ingreso.

2. Bajo la suposición 3 el valor de Shapley sólo tiene en cuenta la presencia de la plataforma y el evento en el que se genera el ingreso.
3. En ninguno de los casos se tiene en cuenta cuánto tiempo antes sucedieron los eventos previos a la generación de los ingresos en una sesión. Obviamente, bajo la suposición 3 esto no es relevante, pero bajo la suposición 2 sí que lo puede ser.

Basado en el valor de Shapley para el juego cooperativo dinámico de evento discreto bajo la suposición 2, se introduce un nuevo mecanismo de reparto que sí que tiene en cuenta no sólo si los contenidos de un canal están presentes o ausentes antes de la generación del ingreso, sino que también cuántas veces aparece éste. Este nuevo mecanismo se denomina valor de evento-Shapley y para él se obtiene también una expresión matemática sencilla. Sin embargo, no se resuelve la cuestión de cuánto antes de la generación del ingreso aparecen los eventos. Por ello se introducen los denominados valores atenuados en el tiempo. Estas reglas se definen basándose en la definición del valor de evento-Shapley pero ponderando cómo de lejos se encuentran del evento que genera el ingreso. En particular, se introduce una familia de reglas atenuadas en el tiempo de la cual forma parte el valor de Shapley del juego cooperativo dinámico de evento discreto bajo la suposición 3.

Para el caso de los valores los juegos cooperativos dinámicos de evento discreto, se describe un algoritmo que permite calcular todos ellos de forma sencilla y se presenta una experiencia computacional para ilustrar cómo funcionan todos estos mecanismos de reparto.

De forma similar a como se ha hecho el análisis de los mecanismos de reparto en los juegos cooperativos dinámicos de evento discreto, se realiza el análisis para los de evento continuo. En este caso se añade el factor de cuánto tiempo dura cada evento a lo largo de la navegación de un usuario, lo que enriquece un poco más el análisis de este tipo de problemas. En primer lugar, se estudia el valor de Shapley de los dos juegos cooperativos dinámicos de evento continuo, determinando sendas expresiones matemáticas sencillas para ellos. Asimismo, se demuestra que estos dos valores de Shapley son esencialmente iguales a sus homólogos en el caso de evento discreto. Por tanto, el valor de Shapley como mecanismo de reparto de los ingresos sólo tiene en cuenta a la plataforma, si un canal aparece o no antes de la generación del ingreso en la sesión del usuario y el contenido que genera el ingreso, independientemente si se tiene en cuenta o no los tiempos de cada evento.

No obstante lo anterior, a partir del valor de Shapley para los juegos cooperativos dinámicos de evento continuo bajo la suposición 2, se puede definir otro mecanismo de reparto que sí tiene en cuenta el tiempo de visualización

de cada contenido y el tiempo de uso de cada servicio. A este valor se le denomina el valor de t-Shapley y es diferente a su homólogo en el caso de evento discreto, el valor de evento-Shapley. En este caso, la relevancia de un canal en la generación de un ingreso posterior no sólo tiene en cuenta su número de apariciones, sino también el tiempo o duración de las mismas. A pesar de esto, este valor no tiene en cuenta cuánto tiempo ha transcurrido entre la aparición de un determinado evento en la sesión del usuario y la generación del ingreso. Por ello, se introducen, como en el caso de evento discreto, valores atenuados en el tiempo que tienen en cuenta ambas cuestiones: (1) el tiempo o duración de los eventos previos y (2) el tiempo que ha transcurrido entre los eventos previos y el evento que genera el ingreso. Con esto finaliza la investigación llevada a cabo sobre el reparto de ingresos en sistemas de contenidos audiovisuales en Internet.

En resumen, a lo largo de la tesis se han evaluado diferentes análisis complementarios a realizar. En todos ellos se define un sistema simplificado que contiene los agentes mínimos considerados como necesarios para analizar un modelo basado en el mercado de consumo de contenidos audiovisuales en Internet.

Tras realizar los diferentes análisis de reparto con el sistema simplificado, se puede garantizar que los repartos serían estables al no haber necesidad de inyectar ingresos adicionales para mejorar lo obtenido por alguno de los agentes involucrados en el sistema. Con esto finaliza la investigación llevada a cabo sobre el reparto de ingresos en sistemas de contenidos audiovisuales en Internet.

Capítulo 1

Introducción

La teoría de juegos es una disciplina matemática que tiene una gran aplicación a múltiples campos de conocimiento como la economía, la política o la filosofía, entre muchas otras. Su objetivo es estudiar situaciones en las que hay dos o más agentes involucrados y existe un conflicto de interés, es decir, los agentes compiten o tienen intereses contrapuestos aunque puedan colaborar entre ellos.

Uno de los problemas que se puede abordar desde la perspectiva de la teoría de juegos es el de reparto de costes o beneficios entre los agentes que participan de un proyecto común que genera los mismos. En particular, estos problemas se pueden analizar con la denominada teoría de juegos cooperativos, en la que a una situación como la descrita se le asocia un “juego” que describe el impacto de las distintas coaliciones de los agentes, llamados jugadores, en la generación de coste o beneficio. Una vez que se tiene el juego se definen soluciones para el mismo que determinan los posibles repartos de los costes o beneficios entre los jugadores que participan en el juego. Como puede haber muchas formas diferentes de definir las soluciones, estas se analizan desde el punto de vista de las propiedades que satisfacen, propiedades relacionadas con diversos aspectos que se consideran razonables, como pueden ser la equidad, la monotonía o la eficiencia, entre otras.

Las aplicaciones que se pueden encontrar de la teoría de juegos a problemas de reparto son numerosas y a una gran variedad de problemas de muy diferente índole. En particular, en la literatura se pueden encontrar diversas publicaciones de aplicaciones de la teoría de juegos a problemas relacionados con las telecomunicaciones que se mencionarán en los capítulos siguientes. Esta tesis doctoral es una contribución más a esa literatura que aborda un problema de gran interés económico como es el de los contenidos audiovisuales en Internet.

En las secciones siguientes se dará la motivación y descripción del pro-

blema que se aborda en esta tesis doctoral, los objetivos que se persiguen en la investigación desarrollada, la metodología empleada y la estructura de la tesis y los principales resultados que se han obtenido de la investigación llevada a cabo.

1.1 Motivación y descripción del problema

Esta época se considera la era de los contenidos según diversos expertos del Marketing Digital, tal como pronosticó un informe como el de Cisco Visual Networking Index (VNI) de febrero de 2021, el cual, sin entrar a evaluar sus posibles conflictos de interés por su particular posición de proveedor de servicios, manifiesta que “el tráfico de vídeo representará el 82% del tráfico total de Internet para 2022”.

Cuando desde los diferentes dispositivos se ha podido acceder a Internet, y disfrutar de su conectividad, de cara al consumo de contenidos, los diferentes dispositivos, a nivel de uso, se han diferenciado únicamente por el tamaño de su pantalla. Sin duda, este fenómeno de convergencia ha motivado gran parte del crecimiento exponencial expuesto, ya que ha hecho que el consumo de contenidos audiovisuales y el entretenimiento sea arbitrario con qué medio, dónde, y cuándo uno se conecte.

Además de esto, los diferentes contenidos y su consumo por parte del usuario han sufrido una nueva convergencia. Un mismo contenido puede ser multiplataforma, y únicamente cambiar el formato para adaptarse mejor al consumo de cualquier plataforma, e intentando optimizar el retorno obtenido por publicidad y suscripciones.

Estas diferentes plataformas o servidores pueden ser: una televisión tradicional, Twitch, e-Sports, YouTube, Tik Tok, u otras plataformas audiovisuales a las que se han incorporado importantes operadores de Internet mundiales como AT&T (DIRECTV), Movistar (Movistar Plus+), Vodafone (Vodafone TV), Deutsche Telekom (Magenta TV), u Orange (Orange TV), elaborando sus propios contenidos y distribuyéndolos a través de su particular plataforma, o haciendo llegar éstos, otros contenidos de distintos creadores u otras plataformas a través de la suscripción a sus servicios de infraestructura. Todas ellas tendrán en cuenta el carácter social que permite buscar, recomendar e intercomunicar los diferentes contenidos y usuarios. En definitiva, la finalidad última de todas ellas es competir por captar la atención de los usuarios. De hecho, se está viendo que cualquier plataforma audiovisual puede trabajar conjuntamente con otras, para conseguir atraer a cierto target de clientes, cantidad de usuarios, o a diferentes proveedores de contenidos.

Dada la importancia e interés económico de los contenidos audiovisuales

en Internet es uno de los temas que más estudio ha suscitado en los últimos veinte años, tanto vinculados a la parte técnica como a la parte que estudia el negocio que rodea a este sistema. En esta tesis doctoral se pretende definir adecuadamente, y de forma simplificada, un modelo matemático que describa el negocio audiovisual en Internet así como a los agentes que intervienen en dicho sistema. A partir de este modelo, se busca diseñar diversos mecanismos de reparto de ingresos que darían soluciones estables desde el punto de vista del área de la matemática de la teoría de juegos. Dicha estabilidad garantizaría incentivos suficientes para que todas las partes interesadas colaboraran. Dichos modelos matemáticos serán enfocados desde tres puntos de vista principales:

1. Análisis cooperativo: en este análisis se busca hallar soluciones o repartos de ingresos estables, es decir, que satisfagan, al menos, los mínimos aceptables de todos los agentes que hacen posible el sistema económico.
2. Análisis reparto navegación usuario: en este análisis se busca modelizar y analizar los ingresos desde que un usuario empieza su experiencia de visionado en el servidor hasta que deja el servidor. Queda modelado por transiciones entre contenidos y visionados efectivos de contenidos.
3. Análisis continuo navegación usuario: en esta tercera parte se considera la experiencia de usuario analizado de modo continuo y no evaluando sólo las transiciones.

Las relaciones de los agentes necesarios para generar ingresos y, por tanto, que deberían recibir ingresos, quedarán argumentadas para saber el rol que juegan en el sistema y poder aplicar apropiadamente la teoría de juegos para generar los repartos estables. En particular, en el desarrollo de esta tesis doctoral, lo que consideramos necesario es que existen unos proveedores de contenidos, y económicamente estos contenidos no son más que el vehículo en el que llevar la publicidad al usuario final, el fin último por el que los usuarios se quieren suscribir a una plataforma o canal, o la combinación de ambas. El uso de estas diferentes modalidades sería indistinto para el cálculo del reparto de ingresos en la sesión de un usuario.

En nuestro trabajo de investigación para la tesis doctoral, los roles que ejerce el sitio web o la plataforma, en cada sesión que tenga el usuario, serán: el de recomendador de unos u otros contenidos, o el de buscador de éste y el cuál no genera ingresos específicos. Además, también se evaluará y se reconocerá el valor que tiene un contenido intermedio en el visionado final de otro.

De esta manera, el contenido o canal generará diferentes ingresos, aunque éstos no sean generados propiamente en él. A los diferentes roles se le reconocerá ingreso por: el efecto dinamizador de la plataforma como recomendador, por ser indexado por el buscador, por haber sido visionado a lo largo de la sesión, o por ser contenido por el que ha trascendido a lo largo de la sesión del usuario. De este modo, se busca abordar el reparto de los ingresos generados por anunciantes entre las distintas plataformas donde los usuarios con un target determinado están conectados, y los diferentes proveedores del contenido visualizado durante la sesión del usuario.

1.2 Objetivos

Los objetivos propuestos en esta tesis doctoral están relacionados con los diferentes aspectos del problema descrito en la sección 1.1, en particular, son los siguientes:

- Definir apropiadamente modelos matemáticos que describan adecuadamente el negocio de vídeo en Internet (Plataformas de vídeo, Internet TV e IPTV) con los agentes mínimos que se consideren necesarios para su análisis.
- Analizar las diferentes restricciones que tenga este sistema y, de forma argumentada, evaluar las condiciones para que sea realizable en el mercado del consumo de contenidos audiovisuales a analizar.
- Argumentar la viabilidad o no de que un usuario final no tenga necesidad de inyectar dinero al sistema de forma directa para ver cualquier contenido bajo los supuestos utilizados en los modelos matemáticos definidos.
- Introducir y analizar diferentes soluciones de reparto de los ingresos generados por las empresas anunciadas o por el usuario final desde que entra al servidor hasta que sale del mismo, basándose en la experiencia de navegación del usuario.

1.3 Materiales y métodos

Los materiales utilizados en el desarrollo de la investigación que se recopila en esta memoria son los habituales en matemáticas y, en particular, en la teoría de juegos, a saber, las computadoras, el software especializado, los conjuntos de datos públicos y, por supuesto, la literatura relacionada.

La investigación se planteó bajo una metodología clásica en el campo de las matemáticas, que evolucionó a lo largo del período de investigación desde la recopilación de información en el campo de estudio hasta la propuesta de modelos matemáticos y sus soluciones para resolver los problemas estudiados, concluyendo con un análisis cualitativo y cuantitativo de sus características, en comparación con los métodos y resultados existentes. Esquemáticamente, la metodología siguió los siguientes pasos:

- Lecturas de la literatura relacionada (documentos, artículos, capítulos de libros, libros, etc.).
- Formulación de problemas y modelos con sus hipótesis correspondientes.
- Demostración matemática de los resultados y su posible aplicación a problemas reales.
- Publicación y difusión de los resultados.
- Contacto con otros investigadores para intercambiar ideas.

1.4 Estructura de la tesis y principales resultados

La presente tesis doctoral está estructurada en seis capítulos. El primero de ellos está dedicado a dar una breve introducción del tema objeto de la investigación de esta tesis, su motivación e interés, los objetivos que se han planteado, la metodología empleada en el desarrollo de la investigación y la estructura de la tesis que en esta misma sección se relata.

En el **capítulo 2** se presentan los conceptos básicos de la teoría de juegos que son necesarios para el resto de capítulos que constituyen la contribución original de esta tesis. En particular, se da la definición de juego cooperativo (estático) y algunos de los principales conceptos de solución para ellos; y también la definición de juego cooperativo dinámico que se utilizará en esta tesis junto con algunas soluciones para los mismos.

En el **capítulo 3** de esta tesis se lleva a cabo un estudio de cómo repartir los ingresos que se obtienen en un ecosistema de las Smart TV. Para ello, en primer lugar, se realiza un análisis de los principales agentes que intervienen en el ecosistema y su papel en la generación de los ingresos. A partir de este análisis se introduce un modelo estático que describe los principales elementos de un sistema de Smart TV y se da una interpretación del modelo y sus

implicaciones prácticas. Asociado a este modelo de sistema de Smart TV, se define un modelo matemático basado en la teoría de juegos para abordar el problema del reparto de los ingresos generados por el sistema entre las partes involucradas. De este modo, se definen los juegos STV y se demuestran algunas propiedades interesantes que tiene el mismo. En concreto, se demuestra que los juegos STV son convexos y que tienen una estructura semejante a los TFTS-juegos (van den Nouweland et al. 1996) pero que no son lo mismo, ni casos particulares el uno del otro.

Puesto que los juegos STV son convexos, se sabe que es posible encontrar repartos o asignaciones estables. Se caracteriza cuál es la estructura de todos los repartos estables, por lo que el núcleo de estos juegos queda perfectamente determinado a partir de los elementos que definen el juego. El núcleo, que es el conjunto de resultados estables, es muy grande y por ello se refina considerando sólo una parte de él. En concreto, se introduce el núcleo simétrico del juego que considera simétricamente a todas las partes involucradas en el sistema de acuerdo a su papel en la generación de los ingresos. El núcleo simétrico es caracterizado por la envoltura convexa de tres puntos.

Aunque el núcleo simétrico es más pequeño que el núcleo, todavía contiene muchos repartos, por tanto, es necesario seleccionar algunos de ellos de acuerdo con algún tipo de criterio. La opción elegida es la definir valores. Para estos juegos se determina la expresión para el valor de Shapley (Shapley 1953) y el valor de Tijs (Tijs 1981) del juego. El valor de Shapley pertenece al núcleo del juego puesto que el juego es convexo, pero también se demuestra que el valor de Tijs pertenece al núcleo del juego, por lo que también es un reparto estable. Sin embargo, ninguno de ellos pertenece al núcleo simétrico. El capítulo 3 lo finalizamos con el análisis computacional y dinámico del juego que permite enlazar con los dos capítulos siguientes de esta tesis.

En el **capítulo 4** se introduce un modelo dinámico para describir un sistema de una plataforma de vídeo. En concreto, se utiliza un modelo dinámico de evento discreto para describir la generación de ingresos durante la navegación de los usuarios en la plataforma. De este modo, se tiene la trazabilidad de los distintos servicios y contenidos que cada usuario ha utilizado o visionado. Asociado al modelo dinámico de evento discreto de generación de ingresos, se definen dos juegos dinámicos diferentes basados en distintas suposiciones sobre el impacto de la navegación del usuario en la generación de ingresos. Se demuestra que ambos juegos son convexos y separables en el tiempo. A continuación se introducen una serie de propiedades que serían deseables que un mecanismo de reparto de los ingresos satisficiera. Estas son las propiedades de eficiencia, simetría, jugador nulo, monotonía, estabilidad, separabilidad temporal y separabilidad en sesiones. El primer mecanismo

de reparto estudiado es el valor de Shapley, para el que se encuentran expresiones sencillas de calcular para ambos juegos dinámicos, además, ambos satisfacen las propiedades antes mencionadas.

De las expresiones del valor de Shapley para ambos juegos dinámicos se observa que, en principio, no existe atenuación en el tiempo a la hora de evaluar el impacto de la navegación de un usuario en la generación de ingresos y se observa también que todavía se puede utilizar algo más de información en la definición del mecanismo de reparto. De este modo, se introduce un nuevo mecanismo, basado en la estructura del valor de Shapley, y que incluye información sobre cuántas veces aparece un canal de vídeo antes de generarse el ingreso. Este nuevo mecanismo hereda las propiedades que satisface el valor de Shapley excepto la de simetría, pero satisface otra propiedad que es la de no manipulabilidad.

A continuación se da un paso más, y se define una familia de mecanismos de reparto que también tenga en cuenta el momento de la navegación en la que se visita cada canal o se utiliza algún servicio de la plataforma. Finalmente, se describe un algoritmo para la computación de los distintos mecanismos de reparto que se introducen en este capítulo y se lleva a cabo una experiencia computacional para ilustrar la aplicación de esos mecanismos.

El **capítulo 5** sigue un esquema paralelo al capítulo 4, pero considerando un modelo dinámico continuo para describir la generación de ingresos en la navegación de los usuarios en la plataforma de vídeos en Internet. Se definen también dos juegos cooperativos dinámicos continuos para los que se definen también sus respectivos valores de Shapley. Para estos valores también se determinan expresiones sencillas de calcular. Como en el capítulo anterior, se introducen otros valores basados en la estructura del valor de Shapley, tanto no atenuados en el tiempo como atenuados en el tiempo.

En el **capítulo 6**, último de esta tesis doctoral, se presentan las principales conclusiones que se pueden obtener de la investigación desarrollada y las futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Conceptos básicos de teoría de juegos

En este capítulo se realiza una breve revisión de los conceptos y resultados básicos de la teoría de juegos que se utilizarán en el resto de capítulos de esta tesis doctoral.

2.1 Introducción

La teoría de juegos estudia modelos matemáticos que describen situaciones de conflicto y cooperación entre dos o más individuos, llamados jugadores, que se consideran racionales e inteligentes. *Grosso modo*, la teoría de juegos se puede dividir en dos grandes líneas, la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos. Este capítulo se centra en algunos conceptos básicos de los juegos cooperativos tanto estáticos como dinámicos que son relevantes para el desarrollo de esta tesis doctoral, y que permiten dar una forma autocontenida a este documento. En particular, se darán las definiciones de juegos cooperativos de utilidad transferible tanto en una situación estática como dinámica, y las soluciones más conocidas para estos juegos, el núcleo (Gillies 1953) y el valor de Shapley (Shapley 1953) también en sus versiones estática y dinámica.

2.2 Juegos cooperativos

Se comienza esta sección dando una definición formal de lo que se entiende por un juego cooperativo de utilidad transferible.

Definición 2.1. Un *juego de utilidad transferible* (abreviado como TU-juego) es un par (N, v) , donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica definida de 2^N en \mathbb{R} con $v(\emptyset) = 0$.

Para cada subconjunto S de N , $v(S)$ es la ganancia que los jugadores en S pueden conseguir por sí mismos. A la coalición N se le suele denominar la gran coalición. Frecuentemente, un TU-juego (N, v) se identifica con su función característica v cuando no existe confusión, y se denota por G^N el conjunto de todos los TU-juegos con conjunto de jugadores N .

Definición 2.2. Dado un juego $(N, v) \in G^N$ se dice *convexo* si satisface la siguiente condición:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \quad \forall S, T \subset N \setminus \{i\}, S \subset T. \quad (2.1)$$

Existen diferentes clases de juegos cooperativos con características especiales, tres de las cuales son los juegos Big Boss (Muto et al. 1988), los k -juegos (van den Nouweland et al. 1996) y los juegos de unanimidad. A continuación, se dan sus definiciones formales.

Definición 2.3. Un juego cooperativo $(N, v) \in G^N$ se dice que es un *juego Big Boss* si satisface las tres condiciones siguientes:

1. Existe un $i_0 \in N$ tal que $v(S) = 0, \forall S \subset N \setminus \{i_0\}$ y $v(\{i_0\}) = 0$.
2. $v(S) \leq v(T), \forall S \subset T \subset N$.
3. $v(N) - v(N \setminus T) \geq \sum_{i \in T} (v(N) - v(N \setminus \{i\})), \forall T \subset N \setminus \{i_0\}$.

Definición 2.4. Un juego cooperativo $(N, v) \in G^N$ se dice que es un *k -juego* si su función característica puede ser escrita como sigue:

$$v(S) = \sum_{T \subset S: |T|=k} v(T), \quad \forall S \subset N. \quad (2.2)$$

La motivación, interpretación e interés de estas dos clases de juegos pueden encontrarse en Muto et al. (1988) y van den Nouweland et al. (1996), respectivamente.

Definición 2.5. Un *juego de unanimidad* (N, u_T) , $T \subset N$, se define como

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subset S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, en los juegos de unanimidad el valor de una coalición es distinto de cero si todos los miembros de una determinada coalición pertenecen a esa coalición, en caso contrario la coalición obtiene cero. Además, un hecho interesante es que los juegos de unanimidad forman una base del espacio vectorial de los juegos G^N .

2.3 Soluciones para juegos cooperativos

Uno de los problemas más importantes que es necesario resolver cuando se tiene un juego cooperativo, es la de encontrar soluciones que digan cómo ha de repartirse el valor de la gran coalición entre los distintos jugadores que participan en el juego. A continuación se define qué es lo que se entiende por un reparto, asignación o distribución para el juego.

Definición 2.6. Dado un TU-juego (N, v) , un *reparto* entre los jugadores es un vector $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{i \in N} z_i \leq v(N)$. Un reparto z que satisface $\sum_{i \in N} z_i = v(N)$ se dice *eficiente*.

Definición 2.7. Una *solución* para G^N es una aplicación $\Theta : G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\Theta(N, v)$ es, en general, un conjunto de posibles repartos. Si una solución Θ es univaluada, es decir, un único reparto, entonces se denomina un *valor*.

Una solución bien conocida para los TU-juegos es el núcleo (Gillies 1953), que contiene a todos los repartos que son eficientes y coalicionalmente estables, es decir, que lo que recibe cada subconjunto de jugadores agregadamente es al menos lo que pueden conseguir por sí mismos.

Definición 2.8. El *núcleo* de un juego $(N, v) \in G^N$ se define como:

$$C(N, v) = \{z \in \mathbb{R}^N : z(S) \geq v(S), \forall S \subset N, z(N) = v(N)\} \quad (2.4)$$

donde, para cada $S \subseteq N$, $z(S)$ denota la suma $\sum_{i \in S} z_i$.

Dos valores relevantes para los TU-juegos son el valor de Shapley (Shapley 1953) y el valor de Tijs (Tijs 1981).

Definición 2.9. El *valor de Shapley* de un juego $(N, v) \in G^N$ se define como sigue:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \forall i \in N. \quad (2.5)$$

El valor de Shapley satisface múltiples propiedades que lo hacen una solución interesante en diferentes contextos, siendo, quizás, la solución para los juegos cooperativos más estudiada. Para una revisión de sus propiedades y sus múltiples aplicaciones véanse, por ejemplo, Roth (1988) y Algaba et al. (2019c).

Antes de definir el valor de Tijs es necesario definir los conceptos de pago utópico y derecho mínimo. Dado un juego $(N, v) \in G^N$, el *pago utópico* del jugador i es su contribución marginal a la gran coalición, es decir, $M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\})$; y el *derecho mínimo* del jugador i se define de la siguiente forma:

$$m_i(N, v) = \max_{S \subset N \setminus \{i\}} \left\{ v(S \cup \{i\}) - \sum_{j \in S} M_j(N, v) \right\}. \quad (2.6)$$

Definición 2.10. El *valor de Tijs* de un TU-juego $(N, v) \in G^N$ se define como el compromiso eficiente entre los pagos utópicos de los jugadores y sus derechos mínimos, es decir,

$$\tau_i(N, v) = \alpha M_i(N, v) + (1 - \alpha) m_i(N, v), \quad (2.7)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}_+$ es tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = v(N)$.

Otros repartos interesantes son los llamados vectores marginales.

Definición 2.11. Dado un TU-juego $(N, v) \in G^N$, y dada una permutación σ de los jugadores en N , el *vector marginal* $m^\sigma(N, v)$ se define como:

$$m_i^\sigma(N, v) = v(P^\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P^\sigma(i)), \quad (2.8)$$

donde $P^\sigma(i) = \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$.

El valor de Shapley también puede definirse como el promedio de todos los vectores marginales del juego.

2.4 Juegos cooperativos dinámicos

En las secciones anteriores se han introducido los conceptos básicos de la teoría de juegos que hacían referencia a situaciones estáticas. En esta sección se introducirán los conceptos básicos de la teoría de juegos pero en situaciones dinámicas.

Definición 2.12. Un *juego cooperativo dinámico* es un par (N, V) , donde N es un conjunto finito de jugadores y V es una función, llamada la función característica del juego, definida de $2^N \times T \times T$ en \mathbb{R} , tal que 2^N es el conjunto de todas las posibles coaliciones en N y $T = [0, +\infty[$ es la línea de tiempo. Además, V satisface las siguientes propiedades:

1. $V(\emptyset, t_1, t_2) = 0, \forall t_1 \leq t_2$.
2. $V(F, t_1, t_2) = 0, \forall F \subset N$ y $\forall t_1 \geq t_2 \geq 0$.
3. $V(F, t, t) = 0, \forall F \subset N$ y $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

La primera propiedad significa que el conjunto vacío no genera ningún ingreso. La segunda propiedad dice que el desplazamiento hacia atrás no genera ningún ingreso. Por último, la tercera propiedad establece que los ingresos no pueden generarse sin tiempo. Estas tres propiedades son absolutamente razonables en entornos realistas.

La función característica V evoluciona a lo largo de la línea de tiempo, eso significa que $V(F, t_1, t_2)$ representa lo que la coalición $F \subset N$ puede obtener en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$. Por tanto, se están considerando intervalos de tiempo abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha. Esto es razonable, porque no tiene sentido considerar una sesión que acaba de terminar cuando comienza la ventana temporal, teniendo en cuenta que el valor de un solo punto temporal es cero.

Cuando no hay confusión posible, se denota $V(F, 0, t)$ simplemente por $V(F, t)$. La función característica V representa los ingresos que los jugadores de una coalición pueden obtener por sí mismos en una ventana temporal.

Una propiedad interesante para los juegos cooperativos dinámicos es la convexidad, porque implica que la cooperación es ciertamente beneficiosa para todos los agentes.

Definición 2.13. Un juego cooperativo dinámico (N, V) es *convexo en el tiempo*, si el juego cooperativo $(N, V(\cdot, t))$ es convexo para cada $t \in T$, es decir, $\forall i \in N$ y $\forall F \subset G \subset N \setminus \{i\}$, se tiene lo siguiente:

$$V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t) \leq V(G \cup \{i\}, t) - V(G, t). \quad (2.9)$$

Otra propiedad interesante relacionada con la dimensión temporal del juego es la separabilidad temporal. Esta propiedad dice que el valor de un juego dinámico puede obtenerse descomponiendo ventanas temporales en intervalos de tiempo más pequeños.

Definición 2.14. Un juego cooperativo dinámico (N, V) es *separable en el tiempo*, si $\forall t_1, t_3 \in T$ y $\forall F \subset G \subset N$, se cumple lo siguiente:

$$V(F, t_1, t_3) = V(F, t_1, t_2) + V(F, t_2, t_3), \forall t_2 \in]t_1, t_3]. \quad (2.10)$$

2.5 Soluciones para juegos cooperativos dinámicos

Dado un juego cooperativo dinámico, el objetivo principal es determinar cómo repartir los ingresos generados entre las partes interesadas. Por lo tanto, se necesita establecer qué se entiende por asignación o reparto en este entorno dinámico.

Definición 2.15. Dado un juego cooperativo dinámico (N, V) y una ventana temporal $]t_1, t_2]$, un *reparto* es un vector $x^{]t_1, t_2]} \in \mathbb{R}^N$, tal que $x^{]t_1, t_2]}(N) = \sum_{i \in N} x_i^{]t_1, t_2]} = V(N, t_1, t_2)$. Se denota el conjunto de todos los repartos en una ventana temporal $]t_1, t_2]$ por $A^{(N, V)(\cdot, t_1, t_2)}$

Se escribirá simplemente x^t en el caso de un reparto asociado con la ventana temporal $]0, t]$.

Definición 2.16. Un *valor de ventana temporal* es una función Φ que asigna a cada juego cooperativo dinámico (N, V) una colección de repartos $\Phi(N, V) = \{x^{]t_1, t_2]}\}_{]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[}$, un reparto para cada ventana temporal. Y un *valor en el tiempo* es una función $\hat{\Phi}$ que asigna a cada juego (N, V) una colección de repartos $\hat{\Phi}(N, V) = \{x^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, un reparto en cada instante de tiempo.

Un valor de ventana temporal (respectivamente en el tiempo) es realmente una regla de reparto del ingreso que determina cuánto del ingreso generado tiene que ser dado a cada jugador en cada ventana de tiempo (resp. hasta un determinado instante). Por lo tanto, desde ahora se utilizará indistintamente valor o regla de reparto para referirse a este concepto. Quizás, el valor más relevante en teoría de juegos es el valor de Shapley (Shapley 1953; Roth 1988; Algaba et al. 2019c; Filar 2000). Para juegos cooperativos dinámicos se puede definir el valor de Shapley de ventana temporal y en el tiempo como se muestra a continuación.

Definición 2.17. El *valor de Shapley de ventana temporal*, Sh , asigna a cada juego (N, V) una colección de repartos $Sh(N, V) = \{Sh^{]t_1, t_2]}(N, V)\}_{]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[}$, es decir, el valor de Shapley para cada juego asociado a una ventana de tiempo. En fórmula, para cada $i \in N$, viene dado por

$$Sh_i^{]t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{F \subset N \setminus \{i\}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} (V(F \cup \{i\}, t_1, t_2) - V(F, t_1, t_2)) \quad (2.11)$$

Y el *valor de Shapley en el tiempo*, \widehat{Sh} asigna a cada juego (N, V) una colección de repartos $\widehat{Sh}(N, V) = \{Sh^t(N, V)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, es decir, el valor de Shapley para cada juego asociado a un instante de tiempo. En fórmula, para cada $i \in N$, viene dado por

$$Sh_i^t(N, V) = \sum_{F \subset N \setminus \{i\}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} (V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t)) \quad (2.12)$$

Si en la definición 2.16 en vez de considerar solamente un reparto por cada ventana de tiempo (resp. en el tiempo), se considerara un conjunto de repartos, entonces se obtendría una solución de ventana temporal (resp. una solución en el tiempo). Una de las soluciones más relevantes en teoría de juegos cooperativos es el núcleo (Gillies 1953; Filar 2000; Kranich et al. 2005), porque proporciona el conjunto de todos los repartos coalicionalmente estables.

Definición 2.18. El *núcleo de ventana temporal* y el *núcleo en el tiempo* están definidos de la siguiente forma:

$$C(N, V(\cdot, t_1, t_2)) = \{x^{[t_1, t_2]} \in A^{(N, V(\cdot, t_1, t_2))} | x^{[t_1, t_2]}(F) \geq V(F, t_1, t_2), \forall F \subsetneq N \text{ y } x^{[t_1, t_2]}(N) \geq V(N, t_1, t_2)\} \quad (2.13)$$

$$C(N, V(\cdot, t)) = \{x^t \in A^{(N, V(\cdot, t))} | x^t(F) \geq V(F, t), \forall F \subsetneq N \text{ y } x^t(N) \geq V(N, t)\} \quad (2.14)$$

Finalmente, dados dos conjuntos $K, F \subset N$, se define una función χ similarmente a la delta de Kronecker, pero para la relación de inclusión entre dos conjuntos, cuya expresión matemática es como sigue:

$$\chi(K, F) = \begin{cases} 1, & \text{si } K \subset F, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Capítulo 3

Reparto de ingresos en el ecosistema de las Smart TV

En este capítulo se aborda el problema de la asignación o reparto de los ingresos generados por las cuotas de suscripción, la publicidad y el pago por visión en un ecosistema de Smart TV entre el proveedor del servicio de televisión por Internet y los productores de contenidos.

El objetivo final es obtener un mecanismo adecuado de reparto de los ingresos con el que todas las partes interesadas estén de acuerdo. Para ello, se definen juegos cooperativos que reflejan los ingresos generados por el sistema Smart TV. Se caracteriza el núcleo de estos juegos y se obtienen fórmulas sencillas para sus valores de Shapley y Tijs, que se demuestra que pertenecen al núcleo. Este capítulo está basado en el trabajo *López-Navarrete, Sánchez-Soriano, Bonastre (2019) Allocating revenues in a smart TV ecosystem. International Transactions in Operational Research vol. 26:1611-1632.*

3.1 Introducción

La aparición de Internet, junto con el espectacular desarrollo de tecnologías relacionadas con las comunicaciones inalámbricas y la integración de ambas como partes de un concepto unificado de comunicación, han cambiado muchas cosas en nuestras vidas. Cómo nos relacionamos con los demás con el espectacular florecimiento de las redes sociales, cómo consumimos bienes y servicios que han provocado cambios en muchos mercados con la transformación de los modelos de negocio orientándolos hacia el acceso en línea, o cómo los anunciantes presentan y ofrecen la publicidad con la posibilidad de

personalizarla, son algunos ejemplos de estos cambios. Un mercado que ha cambiado, o está cambiando mucho, es el de los contenidos multimedia en los diferentes formatos de música, texto o vídeo. Los nuevos hábitos de consumo de estos contenidos hacen necesario explorar otros mecanismos o diseños de mercado para ofrecérselos al consumidor de forma que siga siendo rentable para los generadores de contenidos multimedia.

Hoy en día existen muchos modelos de negocio basados en las tecnologías de Internet. Detrás de la mayoría de ellos encontramos que la publicidad y los anuncios son la principal finalidad de sus diferentes formatos. Por ejemplo, a grandes rasgos, el marketing en buscadores se dirige a empresas que quieren que sus sitios web se muestren en la parte superior de la página de resultados de búsqueda de una determinada palabra clave, independientemente de su relevancia real en Internet, porque ellos esperan recibir más clics en sus sitios web y aumentar así la probabilidad de obtener más beneficios. Otros ejemplos son las plataformas web para compartir vídeos en las que la gente comparten sus vídeos y en ellos se insertan anuncios en distintos formatos. En este caso concreto, no sólo las plataformas web obtienen beneficios de la publicidad, sino que los particulares también pueden obtener algún beneficio. Un último ejemplo es la televisión en Internet, en la que se puede distinguir entre diferentes formatos, como el vídeo a la carta, el pago por visión, la emisión (es el formato tradicional de la televisión), la retransmisión en directo, la televisión por protocolo de Internet (IPTV) (Montpetit y Sassatelli 2018). Dependiendo del formato, los ingresos de las cadenas de televisión proceden de la publicidad o de las cuotas de suscripción/pago por visión o de ambos.

Por las razones expuestas entre otras, existe un gran interés por muchos tipos de problemas que surgen en las redes, en particular en las comunicaciones inalámbricas y/o su integración con Internet, en el ámbito de la Investigación Operativa (véanse, por ejemplo, Risso et al. 2018; Ribeiro et al. 2018; Morais and Mateus 2019; Ye et al. 2019; Pagès-Bernaus 2019, para referencias recientes sobre la temática). Asimismo, la teoría de juegos ha demostrado ser una herramienta interesante con la que analizar diferentes problemas, como los de asignación/reparto (véanse, entre otros, Petrosjan and Zaccour 2003; Nagarajan and Sošić 2008; Moretti and Patrone 2008; Ackermann et al. 2014; Guajardo and Rönnqvist 2016; Gutiérrez et al. 2018) o cooperación (véanse, por ejemplo, Ahmadi-Javid and Hoseinpour 2018; Quintero-Araujo et al. 2019; Basso et al. 2019), desde muchas áreas de conocimiento distintas, en particular en problemas de redes de comunicaciones (algunos ejemplos son Acemoglu and Ozdaglar 2011; Gozalvez et al. 2012; Zhu and Başar 2013; Bahbouni and Moussa 2017; van Hove 2017; Goyal and Kaushal 2017; Taleizadeh et al. 2017; Wang et al. 2017; Cola-

janni et al. 2018; Geng and Mallik 2019; Zeng et al. 2018). Además, la teoría de juegos también se ha utilizado para analizar problemas de ingeniería en el sentido más amplio (Sánchez-Soriano 2013). Siguiendo con los ejemplos expuestos en el párrafo anterior, el diseño del mercado para adjudicar las mejores posiciones en las listas de resultados de búsqueda de una palabra clave en el negocio de los anuncios patrocinados se basa en subastas y se pueden encontrar numerosos trabajos en la literatura de teoría de juegos sobre este tema (véanse, entre otros, Aggarwal et al. 2006; Alonso et al. 2015; Aparicio et al. 2012; Edelman et al. 2007; Feng et al. 2007; Lim and Tang 2006; Varian 2007). Sin embargo, en el caso de las plataformas web de compartición de vídeos o de la televisión por Internet se pueden encontrar una serie de trabajos en la literatura en los que se utiliza la teoría de juegos para analizar diversos problemas relacionados con la tecnología, pero muy pocos que utilicen la teoría de juegos para analizar el diseño de mercado o los aspectos económicos de los distintos modelos de negocio relacionados con ellos (véanse, por ejemplo, Bonastre et al. 2011a; Khan et al. 2011; Kodialam et al. 2010; Wang et al. 2012). No obstante, se preveía que el vídeo representaría hasta el 91% de todo el tráfico de consumo mundial en 2013 (White Paper: Índice de redes visuales de Cisco: Previsión y metodología 2008-2013) por lo que parece de interés analizar este mercado. Asimismo, el servicio IPTV con su evolución hacia la televisión social es reconocido como uno de los negocios más prometedores, desafiantes y rentables del futuro (véanse, entre otros, Kodialam et al. 2010; Bonastre et al. 2012; Bouwman et al. 2008; Montpetit et al. 2009; Montpetit and Medard 2012).

A grandes rasgos, bajo el término Smart TV System se engloban TV por Internet, TV en línea, TV por protocolo de Internet (IPTV) y Web TV, que permiten la difusión de programas de televisión y otros contenidos de vídeo a través de Internet mediante tecnología de transmisión de vídeo, programas de televisión y otros contenidos de vídeo a través de Internet. Estos contenidos son creados por una amplia variedad de empresas y particulares. Las partes interesadas en un sistema de televisión inteligente son los proveedores de servicios de televisión por Internet, los creadores de contenidos, los anunciantes y los usuarios finales. Cada una de estas partes interesadas se relaciona entre sí según el esquema representado en la figura 3.1 que se encuentra en la siguiente sección. Los ingresos del sistema de televisión inteligente proceden principalmente de las cuotas de suscripción, la publicidad y el pago por visión. En este artículo nos centraremos en dos de ellos: los proveedores de servicios de televisión por Internet y los creadores de contenidos de vídeo. En concreto, se considera una situación en la que sólo hay un proveedor de servicios de televisión por Internet y múltiples creadores de contenidos de vídeo, donde cada vídeo pertenece o es propiedad de un creador de contenido.

En principio, este planteamiento es lo suficientemente amplio como para ser válido para cualquiera de las posibles formas de proporcionar contenidos de vídeo (o contenidos en general), como la televisión por Internet, la televisión en línea, la televisión por protocolo de Internet (IPTV) o la Web TV.

Wang et al. (2012) estudian la fijación de precios y el reparto de ingresos entre un proveedor de acceso a Internet y proveedores de IPTV que se consideran así mismos monopolistas independientes. Para ello, utilizan un juego no cooperativo de precios en tres etapas basado en la teoría de los mercados bilaterales. Kamiyama et al. (2010) estudian el problema de la asignación de beneficios entre proveedores de servicios de Internet cuando colaboran para prestar servicios de vídeo a la carta (VoD). Abordan el problema desde la perspectiva de los juegos cooperativos y proponen el valor de Shapley como regla de asignación. El enfoque en esta tesis doctoral es completamente diferente bien en el problema analizado, bien en el enfoque desde la perspectiva de la teoría de juegos utilizado o bien en ambas cosas. En este capítulo, se utiliza un enfoque cooperativo en el que se determina el ingreso que un proveedor del servicio de Internet y muchos creadores de contenido pueden obtener por medio de la cooperación, y después se analiza cómo distribuir ese ingreso entre todas las partes. De este modo, se aborda el problema de cómo compensar a los creadores de vídeos para que les resulte rentable transferir (temporal o permanentemente) sus derechos sobre los vídeos al proveedor de servicios de televisión por Internet. Otro aspecto innovador del planteamiento es que se supone que un vídeo siempre aporta el mismo beneficio tanto si se ve con o sin anuncios insertados en un pago por visión. Se llamará a este principio la *Condición de Equivalencia*.

El principal objetivo de este capítulo es proponer un mecanismo adecuado de distribución de los ingresos de tal modo que todas las partes interesadas estén de acuerdo con él. Con este propósito, se define un juego cooperativo TU asociado a cada situación Smart TV. Este juego surge de considerar situaciones en las que hay un *gran jefe* (“big boss” en inglés) y la estructura del juego es un k -juego, por lo que se obtiene una especie de gran jefe k -juego (Muto et al. 1988; van den Nouweland et al. 1996) que se denominará *juego Smart-TV*, que, hasta donde se conoce, es nuevo en la literatura.

En primer lugar, se demostrará que los juegos Smart TV no son juegos del gran jefe, sino juegos convexos y, por lo tanto, tienen núcleos no vacíos y repartos de los ingresos totales coalicionalmente estables. A continuación, se analiza la estructura del núcleo de estos juegos y se caracteriza completamente el núcleo de los juegos de Smart TV (STV en breve) mediante distribuciones particulares de los beneficios que no implican transferencias de utilidad entre los agentes. Dado que el núcleo de estos juegos es muy grande, se introduce un nuevo concepto de solución para ellos: el *núcleo*

simétrico. La propiedad de simetría que se considera en esta definición está relacionada con la forma en que se obtiene la distribución de los ingresos entre los agentes implicados en el sistema Smart TV. El núcleo simétrico de un juego STV cooperativo es siempre la envoltura convexa de tres puntos, independientemente del número de productores de contenidos. Por lo tanto, el núcleo simétrico es mucho más pequeño que el núcleo del juego, pero sigue incluyendo un número infinito de puntos.

También se estudian valores bien conocidos para los juegos cooperativos, como el valor de Shapley (Shapley 1953) y el valor Tijs (Tijs 1981). A veces estos valores son difíciles de calcular, pero se demuestra que para los juegos STV cooperativos tienen expresiones matemáticas sencillas. Además, estas fórmulas pueden interpretarse en términos de participación en los ingresos y se demuestra que el valor Shapley y el valor Tijs pertenecen al núcleo del juego pero no al núcleo simétrico. Asimismo, se introducen otros valores inspirados en la estructura del problema que parecen razonables para este tipo de juegos cooperativos que también tienen una buena estructura y pertenecen al núcleo simétrico. Finalmente, se realiza un análisis computacional y dinámico de dichos valores.

3.2 Ecosistema Smart TV: principales agentes y modelo estático

A grandes rasgos, bajo el paraguas del término ecosistema Smart TV se consideran incluidos Internet TV, Online TV, IPTV y Web TV, que permiten la difusión de programas de televisión y otros contenidos de vídeo a través de Internet mediante la tecnología de streaming de vídeo. Estos contenidos son creados por una amplia variedad de empresas y particulares. En una Smart TV los usuarios finales eligen el vídeo que quieren ver de un repositorio de vídeos o de un directorio de canales y pueden ver el vídeo directamente en un reproductor multimedia o descargándolo en su ordenador. Los ingresos de los proveedores de servicios de televisión proceden de la publicidad y el pago por visión y pueden obtener más ingresos cuantos más contenidos de vídeo oferten, puesto que mayor será el número de usuarios finales que atraigan y, por consiguiente, mayores los ingresos por publicidad y pago por visión que pueden obtener. Sin embargo, cuando los proveedores de servicios de televisión o vídeo por Internet quieren mostrar determinados contenidos en sus plataformas, tienen que pagar a los productores de vídeo por sus derechos de propiedad intelectual. Por ello, parece de interés estudiar cómo repartir los beneficios generados entre los proveedores de servicios de televisión por

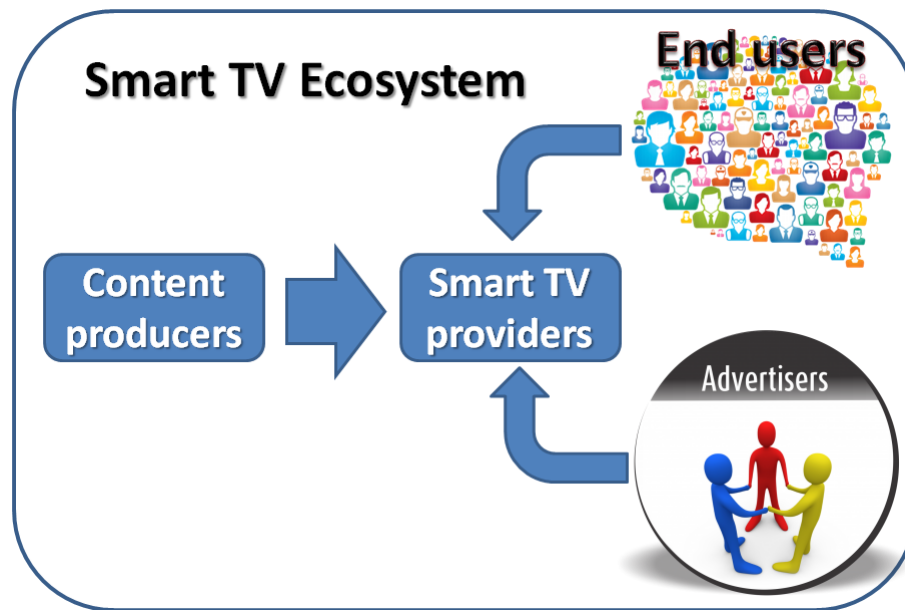


Figure 3.1: Esquema de un ecosistema de Smart TV incluyendo los principales tipos de agentes involucrados.

Internet y los productores de contenidos.

En un sistema Smart TV se pueden distinguir cuatro tipos de agentes: (1) los proveedores de servicios de televisión por Internet; (2) los productores de vídeo; (3) los anunciantes¹; y (4) los usuarios finales². Cada uno de estos tipos de agentes se relaciona con los demás según el esquema representado en la figura 3.1. Por lo tanto, a la vista de la figura 3.1 se podría decir que los proveedores de servicios de televisión por Internet desempeñan un papel central en el sistema, ya que son el nexo de unión entre los productores de contenidos, los usuarios finales y los anunciantes.

En este capítulo se considera un sencillo sistema de Smart TV en el que hay un único proveedor de TV por Internet y un conjunto de agentes (los productores de vídeos). Se ha asumido que cada agente tiene exactamente un canal de vídeo con uno o más vídeos. Si un usuario final del sistema STV visiona un vídeo se obtendrá un cierto ingreso bien por los anuncios insertados en él, o por el pago por visión. Asimismo, se considera que un usuario final

¹Los anunciantes no juegan ningún rol activo en el modelo presentado en esta tesis, sólo se asume que ellos insertan anuncios en los contenidos de vídeo y pagar por ello más o menos dependiendo del interés de los usuarios en los contenidos de vídeo.

²Ninguno de los usuarios finales desempeñará un papel activo en el modelo, sólo se consideran para cuantificar el interés de un contenido de vídeo midiendo cuántos usuarios finales ingresan en el sistema y cuántos contenidos de vídeo ven.

que entra en el servicio de TV por Internet puede navegar de un vídeo a otro, el cual es recomendado o sugerido por el sistema. Sin embargo, sólo se estará interesado en los canales de vídeo inicial y final visitados, es decir, en el canal de vídeo que atrajo al usuario final y el canal de vídeo en el cual un vídeo es finalmente visto por el usuario final. Además, se considera la posibilidad donde un usuario final no vea ningún vídeo después de visitar muchos canales de vídeo en el sistema, bien porque no le guste ninguno de ellos o por otras razones. Por lo tanto, en principio, se asume que cada usuario final ve a lo sumo un vídeo cada vez que entra en el sistema. En el caso de que un usuario final vea más de un vídeo en la misma sesión, se contabilizará tantas veces como vídeos haya visto. En este caso, es claro cuántos vídeos en un canal de vídeo particular han sido vistos, pero la cuestión es qué canal de vídeo debe ser considerado el que atrajo para cada uno de los vídeos vistos en esa sesión. Una respuesta inmediata a esta cuestión es el canal de vídeo que atrajo al usuario final al sistema. Una respuesta alternativa es el canal de vídeo en el cual el usuario final vio el vídeo previo. En cualquier caso, el modelo matemático sería el mismo.

Los elementos y la notación del sistema Smart TV considerado son los siguientes. El 0 representará al proveedor del servicio de TV por Internet y el conjunto de canales de vídeo que pueden ser vistos en el sistema de Smart TV viene dado por $C = \{1, 2, \dots, c\}$. Para cada canal de vídeo se consideran dos elementos:

1. D_i , $i \in C$, es el ingreso obtenido cuando un usuario final ve un vídeo dentro del canal i . Se asume que un contenido siempre produce el mismo ingreso, o bien por el pago por visión, o bien por los anuncios insertados en él. Por tanto, en cierta manera, se establece un principio de equivalencia, o *condición de equivalencia* entre el pago por visión y los ingresos por publicidad para cada vídeo. En consecuencia, se considera que un vídeo es un conductor de ganancias y su valor es el mismo independientemente del modo de visualización, en este sentido el valor del vídeo es completamente determinado por su capacidad de generar ingresos mediante los anuncios insertados. De este modo, el camino para obtener el valor de un vídeo viene exógenamente determinado por su valor en términos del interés publicitario y la vigencia de un vídeo puede considerarse infinita³.

³Por ejemplo, YouTube contiene muchos vídeos y cada minuto el número de vídeos en la plataforma aumenta. Por lo tanto, considerar que la vigencia de un vídeo es infinita no es una suposición demasiado restrictiva porque el vídeo puede permanecer indefinidamente en el sistema. Obviamente, su interés social para generar visionados decrecerá con el paso del tiempo.

2. n_i , $i \in C$, es el número de usuarios finales que son atraídos al servicio de Smart TV por el canal de vídeo i .

Por otro lado, el interés se centrará en el canal de vídeo que atrae al usuario final y el canal de vídeo en el que el usuario final ve finalmente un vídeo. Esto se describe mediante una matriz P como sigue:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{c1} & \cdots & p_{cc} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde $p_{ij} \geq 0$ es la proporción de usuarios finales que entran en el servicio de Smart TV atraídos por el canal de vídeo i que finalmente ve un vídeo del canal j . Cuando $p_{ij} = 0$, o bien nadie que entre a través del canal de vídeo i ve un vídeo dentro del canal j o no hay ninguna ruta que conecte el canal de vídeo i al canal j mediante sugerencias ofrecidas por el servicio Smart TV. Se asume también que $\sum_{j \in C} p_{ij} \leq 1$, por tanto, se está teniendo en cuenta que un usuario final puede abandonar el servicio de Smart TV sin ver ningún vídeo.

En consecuencia, un *Sistema Smart TV (STV) con un único proveedor del servicio* está completamente descrito por un proveedor del servicio de TV por Internet (0), un conjunto de canales de vídeo (C), una matriz (P), un vector de ingresos ($D = (D_1, D_2, \dots, D_c)$) y un vector $n = (n_1, n_2, \dots, n_c)$, es decir, un *STV* está descrito por una 5-tupla $(0, C, P, D, n)$.

¿Qué interpretación tiene este modelo? Este modelo puede considerarse como la situación a posteriori, es decir, una vez que se sabe qué y cómo ha sido el uso del sistema por parte de los usuarios. Si este análisis se realiza en abstracto, no hay problemas de discrepancia porque nadie sabe de antemano qué va a suceder. Una vez aceptado este diseño por todas las partes interesadas, puede aplicarse sucesivamente a cada ventana de tiempo de uso del sistema, durante horas, días, semanas ... ¿Qué sucede con los costes de infraestructura? El vector de ingresos se puede determinar descontando uniformemente los costes de infraestructura, es decir, los ingresos D_i del canal de vídeo i se obtendría como la diferencia entre los ingresos brutos producidos por ese canal de vídeo menos la parte proporcional del coste de infraestructura. Por lo tanto, con este enfoque, el mecanismo de asignación de ingresos se aplicará una vez que se conoce toda la información, pero el diseño se realiza a priori, es decir, antes de que la información esté disponible. En este sentido, la matriz P no es estocástica, pero puede ser diferente en cada ventana de tiempo. No parece difícil implementar toda esta información como se hace, por ejemplo, en YouTube. Un aspecto a tener en cuenta es que puede haber

dos tipos de visualización: pago por visión y vídeo con anuncios insertados, pero por el principio de equivalencia de ingresos mencionado anteriormente, esto no sería relevante. Obviamente, los productores de contenido deben confiar en el operador del sistema. Como conclusión técnica, no sería necesario desarrollar una gran infraestructura adicional para implementar este modelo.

Una vez que se tiene el modelo de información que será utilizado, el siguiente paso es diseñar un mecanismo de reparto o asignación de ingresos. Una alternativa para llevar a cabo esto es utilizar la teoría de juegos y, en particular, los juegos cooperativos, ya que permiten modelar y analizar cómo la colaboración influye en los ingresos y, en consecuencia, repartir de manera más justa los ingresos totales obtenidos de la colaboración entre las partes interesadas.

3.3 El modelo matemático: los juegos cooperativos STV

Como se explicó anteriormente, parece interesante estudiar cómo asignar los ingresos generados por un sistema de televisión inteligente entre el proveedor de servicios de televisión por Internet y los productores de contenido. Un posible enfoque consiste en utilizar la teoría de juegos cooperativos para encontrar respuestas a esa pregunta. Con esto en mente, se define un TU-juego cooperativo asociado con cada sistema Smart TV.

Definición 3.1. Dado un sistema Smart TV, $STV = (0, C, P, D, n)$, se define el TU-juego cooperativo asociado, $(C \cup \{0\}, v^{STV})$, de la siguiente forma:

1. $C \cup \{0\}$ es el conjunto de jugadores.
2. La función característica v^{STV} se define como

$$v^{STV}(\emptyset) = 0; v^{STV}(S) = 0, \forall S \subset C; v^{STV}(\{0\}) = 0;$$

$$v^{STV}(S \cup \{0\}) = \sum_{j \in S} \left\{ D_j \sum_{i \in S} n_i p_{ij} \right\}, \forall S \subset C.$$

Este juego, $(C \cup \{0\}, v^{STV})$, se llamará el *STV-juego cooperativo* o simplemente el *STV-juego* asociado con el sistema Smart TV $STV = (0, C, P, D, n)$.

Antes de dar una explicación intuitiva de la función característica de un STV-juego, se analizará su estructura. Después de observar la estructura de la función característica de un STV-juego cooperativo, podría pensarse que el juego podría ser un juego del gran jefe, porque es obvio que un STV-juego

cooperativo satisface las condiciones 1 y 2 en la definición de los juegos del gran jefe. Sin embargo, los STV-juegos cooperativos no son juegos del gran jefe en general como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Considérese el siguiente sistema Smart TV:

$$STV = \left(0, C = \{1, 2, 3\}, P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, D = (3, 4, 5), n = (16, 18, 25) \right)$$

El STV-juego, $(C \cup \{0\}, v^{STV})$, asociado con STV tiene la siguiente función característica:

$$\begin{aligned} v^{STV}(\{0, 1\}) &= 24, v^{STV}(\{0, 2\}) = 24, v^{STV}(\{0, 3\}) = 50, \\ v^{STV}(\{0, 1, 2\}) &= 64, v^{STV}(\{0, 1, 3\}) = 109, v^{STV}(\{0, 2, 3\}) = 109, \\ v^{STV}(\{0, 1, 2, 3\}) &= 184. \end{aligned}$$

Si se considera la coalición $S = \{2, 3\}$, se tiene lo siguiente:

$$v^{STV}(\{0, 1, 2, 3\}) - v^{STV}(\{0, 1\}) = 160$$

$$v^{STV}(\{0, 1, 2, 3\}) - v^{STV}(\{0, 1, 2\}) = 120, v^{STV}(\{0, 1, 2, 3\}) - v^{STV}(\{0, 1, 3\}) = 75.$$

Por lo tanto, $160 < 120 + 75$ y el STV-juego no satisface la tercera condición de la definición de los juegos del gran jefe. \square

De este modo, ya se sabe que los STV-juegos cooperativos no son juegos del gran jefe en general, pero pueden ser definidos de forma similar a los TFTS-juegos introducidos en Nouweland et al. (1996). Los TFTS-juegos surgen de la suma de dos juegos, un 1-juego y un 2-juego, es decir, $v^{TFTS}(S) = \sum_{i \in S} v^{TFTS}(\{i\}) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j > i} v^{TFTS}(\{i, j\})$, $\forall S \subset N$. Dado un sistema $STV = (0, C, P, D, n)$, se definen los dos juegos siguientes sobre el conjunto de canales de vídeo C :

$$w^1(S) = \sum_{i \in S} D_i n_i p_{ii}, \forall S \subset C; w^2(S) = \sum_{j \in S} \sum_{i \in S \setminus \{j\}} D_j n_i p_{ij}, \forall S \subset C. \quad (3.2)$$

Es sencillo comprobar que (C, w^1) es un 1-juego. Para la coalición $\{k, l\}$, $w^2(\{k, l\}) = D_l n_k p_{kl} + D_k n_l p_{lk}$ (que es igual para $w^2(\{l, k\})$). Por lo tanto, para una coalición S , se tiene que

$$w^2(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j > i} w^2(\{i, j\}). \quad (3.3)$$

Ahora es sencillo comprobar que (C, w^2) es un 2-juego.

En primer lugar, obsérvese que en los juegos w^1 y w^2 se considera que el proveedor del servicio de Internet TV (0) está siempre involucrado en todas las coaliciones de canales de vídeo. De este modo, (C, w^1) mide el ingreso cuando los canales de vídeo colaboran con el proveedor del servicio de Internet TV pero no interactúan entre ellos; y (C, w^2) mide las sinergias positivas entre los diferentes canales de vídeo cuando ellos colaboran con el proveedor del servicio de Internet TV. Ahora un STV-juego cooperativo $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ puede escribirse como sigue:

$$v^{STV}(S \cup \{0\}) = w^1(S) + w^2(S), \forall S \subset C; v^{STV}(S) = 0, \text{ en otro caso. (3.4)}$$

Sin embargo, los STV-juegos cooperativos no son un caso particular de los TFTS-juegos, puesto que los STV-juegos son, de hecho, la suma de dos juegos definidos sobre el conjunto de jugadores $C \cup \{0\}$, uno un 2-juego y el otro un 3-juego, ambos con un jugador gran jefe, el jugador 0.

De la descomposición del STV-juego, se observa que el valor de la función característica consta de dos partes. La primera parte se refiere al beneficio generado por cada canal de vídeo por sí mismo cuando se coloca en el sistema (el 2 juego) y la segunda parte corresponde al beneficio generado por las sinergias cruzadas entre los canales de vídeo, es decir, el hecho de que si hay más vídeos más usuarios finales son atraídos al sistema, que finalmente pueden ver un vídeo que no era el que inicialmente estaban buscando. Por lo tanto, estar en una plataforma como la descrita es beneficioso para todas las partes, para el proveedor de servicios porque puede generar más volumen de negocio y para los creadores de contenido porque sus vídeos pueden ser vistos por un mayor número de usuarios finales. Un ejemplo de esto es YouTube, en el que un creador de vídeos puede subir sus vídeos y estos ser vistos no sólo por aquellos que conocen su existencia, sino también por otros usuarios que entraron en la web buscando otros vídeos, pero que por las sugerencias del sistema (o incluso de otros usuarios, llamados prescriptores) llegaron al suyo. Pero la siguiente pregunta para ser respondida es la siguiente: ¿Qué tan rentables son las sinergias cruzadas? Para responder a esta pregunta, primero se establece que los STV-juegos cooperativos son convexos.

Proposición 3.1. Sea $STV = (0, C, P, D, n)$ un sistema Smart TV y sea $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado con él. El juego $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ es convexo.

Demostración:

Para demostrar que los STV-juegos cooperativos son convexos, se observa la estructura de sus funciones características:

$$v^{STV} = \begin{cases} w^1(S \setminus 0) + w^2(S \setminus 0), & 0 \in S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Cuando $0 \notin S$, el juego es trivialmente convexo. Cuando $0 \in S$, se tiene la suma de los 1- y 2-juegos, y cada k -juego no negativo es convexo (van den Nouweland et al. 1996), y, además, es conocido que la suma de juegos convexos es otro juego convexo. Por tanto, los STV-juegos cooperativos son convexos. ■

El hecho de que el juego sea convexo significa que el aumento de las ganancias aumenta con un efecto de bola de nieve, es decir, cuantos más vídeos mayor será el aumento de las ganancias. Por lo tanto, los ecosistemas de Smart TV son muy interesantes y rentables desde un punto de vista económico. En consecuencia, es interesante diseñar mecanismos de reparto de los ingresos que favorezcan la colaboración y la participación de todas las partes interesadas. Del mismo modo, como los STV-juegos cooperativos son convexos, entonces tienen un núcleo no vacío y el valor de Shapley de un STV-juego pertenecerá al núcleo del juego (Shapley 1971). Por lo tanto, en este modelo, es posible encontrar distribuciones coalicionalmente estables de los ingresos generados por el sistema Smart TV entre el proveedor de servicios de Internet TV y los creadores de contenido.

3.4 Asignaciones estables de los ingresos: el núcleo de los STV-juegos

Como se indicó anteriormente, los STV-juegos cooperativos tienen un núcleo no vacío. Esto es relevante porque se sabe que es posible encontrar distribuciones de los ingresos totales coalicionalmente estables y, por lo tanto, se puede pensar que todos los interesados involucrados en el problema participen en él porque es rentable para todos ellos. Yendo un paso más allá, también es interesante caracterizar todos los elementos del núcleo de un STV-juego cooperativo y, por lo tanto, asignaciones estables de ingresos. Para empezar, dado un sistema $STV = (0, C, P, D, n)$ se define la llamada *matriz de ingresos*:

$$R = \begin{bmatrix} D_1 n_1 p_{11} & \cdots & D_c n_1 p_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 n_c p_{c1} & \cdots & D_c n_c p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{c1} & \cdots & R_{cc} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Esta matriz representa el ingreso obtenido de cada par de canales de vídeo: el *canal de vídeo de entrada* y el *canal de vídeo del visionado*⁴. Obviamente el canal de vídeo de entrada y el canal de vídeo del visionado podrían ser el mismo. Ahora se puede considerar que cada ingreso R_{ij} se distribuye completamente entre los jugadores que generan ese ingreso, es decir, entre el proveedor del servicio de Internet TV, el canal de vídeo de entrada y el canal de vídeo del visionado. Así para cada R_{ij} se definen las proporciones del ingreso 0_{ij} , e_{ij} y v_{ij} , tal que $0_{ij} + e_{ij} + v_{ij} = 1$ y $0_{ij}, e_{ij}, v_{ij} \geq 0$. La interpretación de estas proporciones es obvia. El siguiente teorema establece que el núcleo del juego consiste de todas las asignaciones obtenidas a partir de estas proporciones.

Teorema 3.1. Sea $STV = (0, C, P, D, n)$ un sistema Smart TV y sea $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado. Un reparto $(x_0; x_1, \dots, x_c) \in C(C \cup \{0\}, v^{STV})$ si y sólo si puede ser escrito como sigue:

$$x_0 = \sum_{i,j \in C} 0_{ij} R_{ij}; \quad x_i = \sum_{j \in C} (e_{ij} R_{ij} + v_{ji} R_{ji}), \quad \forall i \in C, \quad (3.7)$$

donde $0_{ij}, e_{ij}, v_{ij} \geq 0$ y $0_{ij} + e_{ij} + v_{ij} = 1$ para todo $i, j \in C$.

Demostración:

(\Leftarrow) Sea 0_{ij} , e_{ij} y v_{ij} para todo $i, j \in C$ como en el enunciado. Para demostrar el resultado, se toma una coalición no trivial $S \subset C$. A continuación se considera la coalición $S \cup \{0\}$ (para las coaliciones $S \subset C$ la demostración es trivial), entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_0 + \sum_{i \in S} x_i &= \sum_{i,j \in C} 0_{ij} R_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in C} (e_{ij} R_{ij} + v_{ji} R_{ji}) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i,j \in S} \{0_{ij} R_{ij} + e_{ij} R_{ij} + v_{ij} R_{ij}\} + \sum_{i \in S, j \notin S} 0_{ij} R_{ij} + \sum_{i \notin S, j \in S} 0_{ij} R_{ij} \\ &\quad + \sum_{i \notin S, j \notin S} 0_{ij} R_{ij} + \sum_{i \in S, j \notin S} e_{ij} R_{ij} + \sum_{i \notin S, j \in S} v_{ji} R_{ji} \\ &\stackrel{(2)}{=} v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S, j \notin S} 0_{ij} R_{ij} + \sum_{i \notin S, j \in S} 0_{ij} R_{ij} + \sum_{i \notin S, j \notin S} 0_{ij} R_{ij} \\ &\quad + \sum_{i \in S, j \notin S} e_{ij} R_{ij} + \sum_{i \notin S, j \in S} v_{ji} R_{ji} \geq v^{STV}(S \cup \{0\}). \end{aligned}$$

⁴Cuando se dice “canal de vídeo del visionado”, se refiere a que un vídeo de un canal fue visto.

En (1) se agrupan todos los términos correspondientes a los pares $i, j \in S$. (2) sigue de la definición de 0_{ij} , e_{ij} y v_{ij} . Por tanto, $(x_0; x_1, \dots, x_c)$ pertenece al núcleo del correspondiente STV-juego cooperativo.

(\Rightarrow) Para probar esto, se necesita demostrar que un sistema de ecuaciones lineales con $3 \times c + c + 1$ ecuaciones y $3 \times c$ variables es consistente, lo que puede ser una tarea difícil. Sin embargo, desde que el núcleo del juego cooperativo es un poliedro convexo acotado, si se demuestra que cada punto extremo del núcleo puede ser escrito como en el enunciado, entonces del hecho de que el núcleo es la envoltura convexa de sus puntos extremos, cada elemento del núcleo puede ser escrito como en el enunciado.

Puesto que los STV-juegos cooperativos son convexos, los puntos extremos de sus núcleos se corresponden con todos los vectores marginales del juego (Shapley 1971). Dado un vector marginal $m^\sigma(C \cup \{0\}, v^{STV})$, se tiene lo siguiente:

Jugador 0:

$$\begin{aligned}
m_0^\sigma &= v^{STV}(\{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)\} \cup \{0\}) - v^{STV}(\{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)\}) \\
&= w^1(\{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)\}) + w^2(\{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)\}) \\
&= \sum_{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)} R_{ii} + \sum_{i, j \in C : i < j ; \sigma(i) < 0, \sigma(j) < \sigma(0)} (R_{ij} + R_{ji}) \\
&= \sum_{i \in C : \sigma(i) < \sigma(0)} (0_{ii} + e_{ii} + v_{ii}) R_{ii} \\
&+ \sum_{i, j \in C : i < j ; \sigma(i) < 0, \sigma(j) < \sigma(0)} ((0_{ij} + e_{ij} + v_{ij}) R_{ij} + (0_{ji} + e_{ji} + v_{ji}) R_{ji}),
\end{aligned}$$

donde $0_{ij} = 1$ y $e_{ij} = v_{ij} = 0$ para todo $i, j \in C$ tal que $\sigma(i) < \sigma(0)$ y $\sigma(j) < \sigma(0)$.

Jugador i : Se distinguen dos casos:

Caso 1: Si $\sigma(i) < \sigma(0)$, entonces $m_i^\sigma = 0$. Por tanto, para el jugador i , se toma $e_{ij} = v_{ji} = 0$, for all $j \in C$.

Caso 2: Si $\sigma(i) > \sigma(0)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
m_i^\sigma &= v^{STV}(\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\} \cup \{0\} \cup \{i\}) - v^{STV}(\{\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\} \cup \{0\}\}) \\
&= w^1(\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\} \cup \{i\}) + w^2(\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\} \cup \{i\}) \\
&- (w^1(\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\}) + w^2(\{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)\})) \\
&= R_{ii} + \sum_{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)} (R_{ij} + R_{ji}) \\
&= (0_{ii} + e_{ii} + v_{ii}) R_{ii} + \sum_{j \in C : \sigma(j) < \sigma(i)} ((0_{ij} + e_{ij} + v_{ij}) R_{ij} + (0_{ji} + e_{ji} + v_{ji}) R_{ji}),
\end{aligned}$$

donde $0_{ij} = 0_{ji} = e_{ji} = v_{ij} = 0, e_{ij} = v_{ji} = 1$, para todo $j \in C$ tal que $\sigma(j) < \sigma(i)$; y $e_{ii} = v_{ii} = \frac{1}{2}$.

En consecuencia, cada punto extremo del núcleo puede escribirse como en el enunciado utilizando las siguientes proporciones:

$$0_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma(i) < \sigma(0) \text{ y } \sigma(j) < \sigma(0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma(0) < \sigma(i) \text{ y } \sigma(j) < \sigma(i) \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sigma(0) < \sigma(i) \text{ e } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma(0) < \sigma(j) \text{ y } \sigma(i) < \sigma(j) \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sigma(0) < \sigma(j) \text{ e } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (3.10)$$

■

De la caracterización de los elementos del núcleo de los STV-juegos cooperativos, se sabe que existen muchos repartos coalicionalmente estables. Para aplicar una distribución de los ingresos, se debe elegir una sólo, de ahí que haya que recurrir a otros refinamientos. Por ejemplo, si se considera que todos los canales de vídeo con el mismo papel deben recibir el mismo trato, entonces parece razonable que la distribución final sea simétrica. Otra posibilidad es considerar, cuando no se dispone de otra información, que todos los canales de vídeo implicados tienen la misma capacidad de negociación, entonces es razonable pensar que el reparto final será también simétrico. Por lo tanto, en estos casos las distribuciones simétricas serán más razonables que otras distribuciones. Además, si se acepta que el procedimiento anterior es intuitivo y razonable, entonces funcionará bien lo siguiente:

$$0_{ij} = p, e_{ij} = e, v_{ij} = d, \forall i, j \in C, \quad (3.11)$$

para algunas constantes p, e y d . Esto significa que el proveedor, los canales de vídeo de entrada y los canales de vídeo vistos siempre obtienen la misma parte de los ingresos obtenidos, aunque estas proporciones podrían ser diferentes entre sí. Por lo tanto, hay infinitas formas de asignar los ingresos generados de una manera simétrica y coalicionalmente estable. Téngase en cuenta que para las celdas diagonales el canal de vídeo obtiene una parte de los ingresos de dos maneras diferentes, una como canal de vídeo de entrada y otra como canal de vídeo visto. Sin embargo, este hecho parece razonable. Siguiendo esta idea, se puede definir un subconjunto del núcleo del juego que se denominará el núcleo simétrico.

Definición 3.2. Sea $STV = (0, C, P, D, n)$ un sistema Smart TV y $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado. El *núcleo simétrico* del juego $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ se define como

$$SC(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \{ (x_0; x_1, \dots, x_c) \in C(C \cup \{0\}, v^{STV}) : \exists p, e, d \in \mathbb{R}_+, p + e + d = 1 \text{ tal que} \\ x_0 = \sum_{i,j \in C} pR_{ij}; x_i = \sum_{j \in C} (eR_{ij} + dR_{ji}), \forall i \in C \}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el núcleo y el núcleo simétrico de un STV-juego cooperativo y se muestra cómo de grandes pueden ser.

Ejemplo 3.2. Sea el siguiente sistema Smart TV:

$$STV = \left(0, C = \{1, 2\}, P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, D = (5, 3), n = (60, 40) \right)$$

El STV-juego cooperativo, $(C \cup \{0\}, v^{STV})$, asociado con STV tiene la siguiente función característica:

$$v^{STV}(\{0, 1\}) = 90, v^{STV}(\{0, 2\}) = 48, v^{STV}(\{0, 1, 2\}) = 310.$$

En la figura 3.2 se representan el núcleo y el núcleo simétrico del juego. El color gris claro corresponde al núcleo del juego y el color gris oscuro al núcleo simétrico del juego. \square

El núcleo simétrico de un STV-juego cooperativo es siempre la envoltura convexa de tres puntos, independientemente del número de canales de vídeo. Estos tres puntos se corresponden con los siguientes repartos de los ingresos: todo para el proveedor del servicio de Internet, todo para los canales de vídeo de entrada al sistema (suma por filas) y todo para los canales de vídeo vistos (suma por columnas). Consecuentemente, el núcleo simétrico es mucho más pequeño que el núcleo del juego, pero todavía incluye un número infinito de posibles repartos. En el siguiente teorema se establece este resultado.

Teorema 3.2. Sea $STV = (0, C, P, D, n)$ un sistema Smart TV y $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado. El *núcleo simétrico* del juego $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ es la envoltura convexa de los tres puntos siguientes:

$$x^0 = \left(\sum_{i,j \in C} R_{ij}; 0, \dots, 0 \right); \quad (3.12)$$

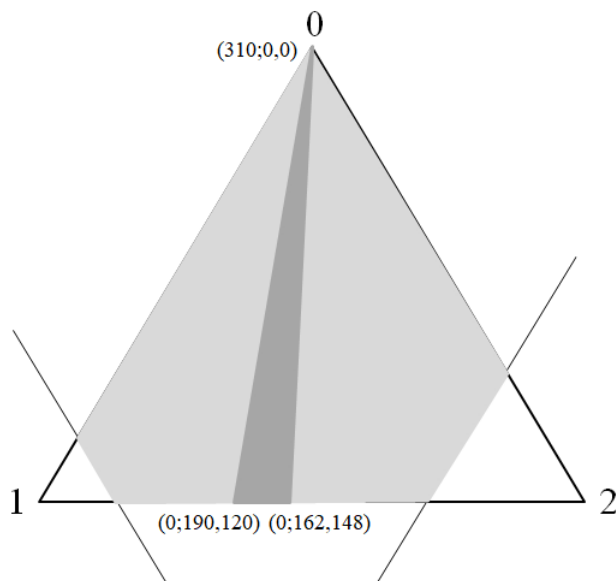


Figure 3.2: El núcleo y el núcleo simétrico del juego del ejemplo 3.2.

$$x^e = \left(0; \sum_{j \in C} R_{1j}, \dots, \sum_{j \in C} R_{cj} \right); \quad (3.13)$$

$$x^v = \left(0; \sum_{j \in C} R_{j1}, \dots, \sum_{j \in C} R_{jc} \right), \quad (3.14)$$

donde x^0 , x^e y x^v son los repartos más ventajosos para el proveedor del servicio, los canales de vídeo de entrada y los canales de vídeo vistos, respectivamente.

Demostración:

La demostración es inmediata. Se sigue de la propia definición de núcleo simétrico. ■

Los resultados anteriores permiten conocer cuál es la estructura de los repartos estables de los ingresos y, por tanto, muestran que tipo de diseño de mecanismos de reparto de ingresos debería ser implementado para incentivar la participación de todas las partes interesadas.

3.5 Selección de repartos estables de los ingresos: valores para los STV-juegos

El núcleo y el núcleo simétrico representan dos buenas referencias para buscar repartos de los ingresos totales con buenas propiedades. En esta sección se estudian valores bien conocidos para los juegos cooperativos como pueden ser el valor de Shapley y el valor de Tijs, y se introducen varios valores nuevos específicos para los STV-juegos cooperativos. En general, los valores son difíciles de calcular, pero se demuestra que para los STV-juegos cooperativos tienen fórmulas sencillas y eficientes. Además, estas fórmulas pueden interpretarse en términos de participación en los ingresos como sucedía en la sección anterior.

Para empezar con el estudio de los valores de los STV-juegos, se determina una expresión sencilla para el conocido valor de Shapley. Para este fin se utilizarán las dos propiedades siguientes:

- El valor de Shapley es aditivo (Shapley 1953), y
- el conjunto G^N es un espacio vectorial lineal para el cual los juegos de unanimidad forman una base.

Dado $STV = (0, C, P, D, n)$ y $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado, su función característica puede escribirse en términos de los juegos de unanimidad de la siguiente forma:

$$v^{STV} = \sum_{i \in C} w^1(\{i\})u_{\{0,i\}} + \sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\})u_{\{0,i,j\}}. \quad (3.15)$$

Ahora, puesto que el valor de Shapley es aditivo, se tiene que

$$\begin{aligned} Sh(C \cup \{0\}, v^{STV}) &= \sum_{i \in C} w^1(\{i\})Sh(C \cup \{0\}, u_{\{0,i\}}) \\ &+ \sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\})Sh(C \cup \{0\}, u_{\{0,i,j\}}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otra parte, es bien conocido que

$$Sh_i(N, u_T) = \begin{cases} \frac{1}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall i \in N; \quad (3.17)$$

por tanto, se tiene que el valor de Shapley para los STV-juegos cooperativos viene dado por

$$Sh_0(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in C} w^1(\{i\}) + \frac{1}{3} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\}); \quad (3.18)$$

$$Sh_i(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \frac{1}{2}w^1(\{i\}) + \frac{1}{3} \sum_{j \in C: j \neq i} w^2(\{i, j\}), \forall i \in C. \quad (3.19)$$

Puesto que el juego es convexo, se sabe que el valor de Shapley pertenece al núcleo del juego y se puede observar que tiene la misma estructura que los repartos en el teorema 3.1. Sin embargo, el valor de Shapley no pertenece al núcleo simétrico del juego por la proporción recibida por el proveedor del servicio en Internet, puesto que los canales de vídeo de entrada y los canales de vídeo vistos no son siempre los mismos. Aparte de este hecho, en el caso que nos ocupa, el valor de Shapley es un reparto de los ingresos estable, y tiene muchas otras propiedades relacionadas con la equidad, (véase, por ejemplo, Winter 2002 y Algaba et al. 2019d) que lo hacen atractivo para su utilización como mecanismo de reparto de ingresos en muchos contextos diferentes. Quizás, el mayor inconveniente del valor de Shapley es su cálculo, pero como se ha visto con anterioridad, en este modelo su expresión matemática es sencilla y su cálculo, asimismo, también.

El valor de Tijs es muy interesante porque es muy intuitivo. De hecho, se basa en la idea de un compromiso entre la expectativas máximas y mínimas de los jugadores en la situación correspondiente. A continuación se determina una fórmula sencilla para el valor de Tijs, la cual es también fácil de calcular. Dado un sistema Smart TV $STV = (0, C, P, D, n)$ y $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado, primero se calcula la contribución marginal de cada jugador a la gran coalición:

$$M_0(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \sum_{i \in C} w^1(\{i\}) + \sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\}); \quad (3.20)$$

$$M_i(C \cup \{0\}, v^{STV}) = w^1(\{i\}) + \sum_{j \in C: j \neq i} w^2(\{i, j\}), \forall i \in C. \quad (3.21)$$

A partir de estas contribuciones marginales, se calculan los derechos mínimos para cada uno de los jugadores, pero puesto que el juego es convexo, se sabe que $m_0(C \cup \{0\}, v^{STV}) = m_i(C \cup \{0\}, v^{STV}) = 0, \forall i \in C$ (Driessen and Tijs 1985). Por lo tanto, el valor de Tijs vendrá dado por:

$$\tau_0(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \alpha M_0(C \cup \{0\}, v^{STV}); \quad (3.22)$$

$$\tau_i(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \alpha M_i(C \cup \{0\}, v^{STV}), \forall i \in C, \quad (3.23)$$

donde α es elegido para que el valor sea eficiente. Después de algunos cálculos sencillos se obtiene que

$$\alpha = \frac{v^{STV}(C \cup \{0\})}{3v^{STV}(C \cup \{0\}) - \sum_{i \in C} w^1(\{i\})}. \quad (3.24)$$

A la vista de la expresión del valor de Tijs, y en particular a la de α , no se puede concluir directamente que el valor de Tijs pertenezca ni al núcleo ni al núcleo simétrico del juego, porque no se ajusta a ninguna de las condiciones establecidas en el teorema 3.1 ni a la definición 3.2, pero el valor de Tijs sí que pertenece al núcleo tal y como se establece en el teorema 3.3. En los dos casos extremos, el valor de Tijs coincide con el valor de Shapley. Esto dos casos son cuando $\sum_{i \in C} w^1(\{i\}) = 0$ y cuando $\sum_{i \in C} w^1(\{i\}) = v^{STV}(C \cup \{0\})$ para los cuales $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ respectivamente. En general, se tiene que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, por tanto, es, de algún modo, una especie de compesación entre las situaciones de los dos casos extremos. Los valores de Shapley y Tijs no coinciden, en general, para los STV-juegos cooperativos, pero sí que coinciden para los TFTS-juegos. Además, el parámetro α puede verse como una medida de la relevancia de las sinergias positivas entre los canales de vídeo, en este sentido, un valor α cercano a $\frac{1}{2}$ significará que las sinergias positivas entre los canales de vídeo son débiles, mientras que un valor de α próximo a $\frac{1}{3}$ significará que las sinergias positivas entre los canales son muy fuertes.

Teorema 3.3. Sea $STV = (0, C, P, D, n)$ un sistema Smart TV y $(C \cup \{0\}, v^{STV})$ el STV-juego cooperativo asociado. El valor de Tijs pertenece siempre al núcleo del juego.

Demostración:

Considérese $\sum_{i \in N} w^1(\{i\}) \neq 0$ y $\sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\}) \neq 0$, en otro caso el resultado se obtiene de forma inmediata. A continuación se toma la coalición no trivial $S \subset C$ y se considera la coalición $S \cup \{0\}$ (para coaliciones $S \subset C$ la demostración es trivial), entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(S \cup \{0\}) &= 2\alpha \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) + 3\alpha \sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j > i} w^2(\{i, j\}) \\ &+ \alpha \sum_{i \in \bar{S}} w^1(\{i\}) + 2\alpha \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) + \alpha \sum_{i \in \bar{S}} \sum_{j \in \bar{S}: j > i} w^2(\{i, j\}) \\ &= \alpha \left(3v^{STV}(S \cup \{0\}) - \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) + v^{STV}(\bar{S} \cup \{0\}) + 2 \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right). \end{aligned}$$

Se tiene que demostrar que $x(S \cup \{0\}) \geq v^{STV}(S \cup \{0\})$ o equivalentemente, teniendo en cuenta las expresiones para α y $x(S \cup \{0\})$ y después de algunos cálculos,

$$- \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) + v^{STV}(\bar{S} \cup \{0\}) + 2 \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \geq$$

$$\frac{v^{STV}(S \cup \{0\}) \times \sum_{i \in N} w^1(\{i\})}{v^{STV}(S \cup \{0\}) + v^{STV}(\bar{S} \cup \{0\}) + \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\})}.$$

Supóngase que $\sum_{i \in S} w^1(\{i\}) > v^{STV}(\bar{S} \cup \{0\}) + 2 \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\})$, en otro caso, el resultado se cumple. Por lo tanto, se tiene que

$$\sum_{i \in S} w^1(\{i\}) = v^{STV}(\bar{S} \cup \{0\}) + 2 \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) + \bar{k}, \quad \bar{k} > 0.$$

Esto implica que se tiene que demostrar que

$$\bar{k} \leq \frac{v^{STV}(S \cup \{0\}) \times \sum_{i \in N} w^1(\{i\})}{v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) - \bar{k}},$$

donde $\bar{k} \in (0, \sum_{i \in S} w^1(\{i\})]$. A continuación, se considera la siguiente función

$$f(k) = \frac{v^{STV}(S \cup \{0\}) \times \sum_{i \in N} w^1(\{i\})}{v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) - k} - k,$$

que es continua en su dominio. No es difícil demostrar que $f(0) > 0$ y $f(\sum_{i \in N} w^1(\{i\})) > 0$. Esta función tiene dos puntos críticos dados por

$$k_1^* = \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right) + \sqrt{v^{STV}(S \cup \{0\}) \sum_{i \in N} w^1(\{i\})}; \quad (3.25)$$

$$k_2^* = \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right) - \sqrt{v^{STV}(S \cup \{0\}) \sum_{i \in N} w^1(\{i\})}. \quad (3.26)$$

Es fácil comprobar que k_1^* es un máximo relativo y k_2^* es un mínimo relativo. Asimismo, $\sum_{i \in S} w^1(\{i\}) < k_1^*$. Ahora se tiene que

$$f(k_2^*) = 2 \times \sqrt{v^{STV}(S \cup \{0\}) \sum_{i \in N} w^1(\{i\})} - \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right). \quad (3.27)$$

Se distinguen dos casos:

1. $v^{STV}(S \cup \{0\}) \leq \sum_{i \in N} w^1(\{i\})$. En este caso, es sencillo comprobar que $f(k_2^*) > 0$ y, consecuentemente, $f(\bar{k}) > f(k_2^*) > 0$ y el resultado se obtiene.

2. $v^{STV}(S \cup \{0\}) > \sum_{i \in N} w^1(\{i\})$. Para este caso, siempre se tiene que $f'(0) < 0$. Además, si $f(k_2^*) < 0$, entonces se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} & 2 \times \sqrt{v^{STV}(S \cup \{0\}) \sum_{i \in N} w^1(\{i\})} \\ & < \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) + \sum_{i \in S} w^1(\{i\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right) \\ & \stackrel{(1)}{<} \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) + v^{STV}(S \cup \{0\}) - 2 \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$v^{STV}(S \cup \{0\}) \sum_{i \in N} w^1(\{i\}) < \left(v^{STV}(S \cup \{0\}) - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} w^2(\{i, j\}) \right)^2$$

donde (1) se satisface porque, en otro caso, $f(k_2^*) > 0$. Por lo tanto, $f'(\sum_{i \in S} w^1(\{i\})) < 0$. Finalmente, como consecuencia de que $f(0)$ y $f(\sum_{i \in N} w^1(\{i\}))$ son mayores que 0, y $f'(0)$ y $f'(\sum_{i \in S} w^1(\{i\}))$ son menores que 0, se concluye que $f(\bar{k}) > 0$. Por tanto, el resultado queda demostrado ■

El teorema 3.3 implica que existen proporciones para cada ingreso tal que el valor de Tijs puede escribirse como en el teorema 3.1. Al igual que sucede con el valor de Shapley, el valor de Tijs también tiene muchas buenas propiedades relacionadas con la equidad que lo hacen interesante para ser aplicado en muchos contextos diferentes.

Para concluir esta sección, se definen nuevos valores basados en la idea de la división simétrica entre los jugadores involucrados en la generación de cada ingreso. Todos estos valores pertenecen al núcleo simétrico y, por tanto, al núcleo del correspondiente STV-juego cooperativo. El primero de estos valores se obtiene considerando las proporciones de reparto $p = e = d = \frac{1}{3}$:

$$\gamma_0(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \frac{1}{3} \sum_{i \in C} w^1(\{i\}) + \frac{1}{3} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C: j > i} w^2(\{i, j\}); \quad (3.28)$$

$$\gamma_i(C \cup \{0\}, v^{STV}) = \frac{2}{3}w^1(\{i\}) + \frac{1}{3} \sum_{j \in C: j \neq i} w^2(\{i, j\}), \forall i \in C. \quad (3.29)$$

Si se hubiera definido el juego dividiendo cada canal de vídeo en dos jugadores, uno con el rol de canal de entrada, y otro con el de canal visto, el juego cooperativo sería un 3-juego con un gran jefe (el proveedor del servicio de Internet TV), y cada pago final para cada jugador sería la suma de los pagos asignados a sus dos jugadores rol. En ese caso, el valor γ coincide con el valor de Shapley del nuevo juego. Además, el valor γ está en el centro del núcleo simétrico.

Otros dos valores se pueden definir tomando las siguientes proporciones $p = \frac{1}{2}$, $e = d = \frac{1}{4}$ y $p = e = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$. El primer caso se corresponde con dar más importancia al proveedor del servicio de Internet TV, y el segundo caso se corresponde con dar mayor relevancia al canal de vídeo visto. Muchos otros valores pueden definirse, pero estos son suficientes para ilustrar esta forma de obtener repartos del ingreso total entre el proveedor del servicio de Internet TV y los creadores de contenidos (los canales de vídeo).

¿Qué valor elegir? La respuesta no es fácil y dependerá del tipo de propiedades o características de un mecanismo de reparto de ingresos que sean más relevantes para las partes interesadas. En cualquier caso, el valor de Shapley, el valor de Tijs y las demás soluciones introducidas en esta sección son razonables, tanto por la facilidad de cálculo como por las propiedades para ser aplicadas como mecanismo de reparto de ingresos en un ecosistema de Smart TV.

3.6 Análisis computacional y dinámico

Es bien conocido que una de las mayores dificultades de las soluciones para juegos cooperativos es su complejidad computacional, generalmente de tipo exponencial, es decir, $O(a^{|N|})$, $a > 1$, donde $|N|$ es el número de jugadores involucrados en el juego cooperativo. Sin embargo, como ha sido visto en las secciones anteriores, la estructura del problema permite obtener repartos de los ingresos de forma sencilla, en particular, se han determinado expresiones sencillas para el valor de Shapley y el valor de Tijs, las cuales permiten su cálculo de un modo eficiente. Un análisis más detallado de las fórmulas obtenidas para los valores de Shapley y Tijs permiten concluir que, dada una tripleta (P, D, n) , sus complejidades computacionales son de tipo polinomial, en particular $O(|N|^2)$, donde $|N|$ es el número de canales de vídeo en el sistema. Esta conclusión también puede ser extendida a los otros valores introducidos en la sección previa, y en general a cualquier valor obtenido dando pesos o proporciones. Por lo tanto, se ha conseguido una gran mejora

dede un punto de vista computacional, haciendo que estas soluciones sean adecuadas, no sólo desde la perspectiva de la equidad y su buen comportamiento con respecto a un gran número de propiedades, sino que también desde el punto de vista de su computación en un tiempo razonable.

No obstante lo anterior, si se profundiza en la estructura del valor de Shapley para este tipo de problemas, se puede conseguir una mayor mejora en su forma de computación. Si se considera que cada usuario k que entra en el sistema es codificado como $n(k) = (i(k), j(k))$, donde $i(k)$ es el vídeo de entrada y $j(k)$ es el vídeo visto, tomando $j(k) = null$ si ningún vídeo es visto y $D(null) = 0$, entonces el valor de Shapley puede ser computado por medio del Algoritmo 1.

ALGORITMO 1 (Algoritmo para computar el valor de Shapley en un problema estático)

```

for  $k = 1$  to  $k = K$  do
  if  $j(k) = i(k)$ 
     $Sh(0) := Sh(0) + \frac{1}{2}D(j(k))$ 
     $Sh(i(k)) := Sh(i(k)) + \frac{1}{2}D(j(k))$ 
  else
     $Sh(0) := Sh(0) + \frac{1}{3}D(j(k))$ 
     $Sh(i(k)) := Sh(i(k)) + \frac{1}{3}D(j(k))$ 
     $Sh(j(k)) := Sh(j(k)) + \frac{1}{3}D(j(k))$ 
  end if
end for

```

El algoritmo 1 tiene una complejidad computacional de $O(K)$, donde K es el número de usuarios en el sistema. Este algoritmo muestra que el valor de Shapley puede ser computado en tiempo real y, por lo tanto, puede ser adaptado a la dinámica temporal de uso de un sistema Smart TV. Sin embargo, no se puede diseñar un algoritmo similar para computar el valor de Tijs porque el parámetro α depende de la utilización final del sistema.

Un análisis más en detalle del algoritmo 1, permite extender fácilmente el análisis realizado del problema estático a la situación dinámica de la siguiente manera. Considérense los instantes de tiempo t en los cuales la condiciones del problema cambian durante un cierto periodo de tiempo T , es decir, cuando cualquiera de los elementos que definen el problema $STV = (0, C, P, D, n)$ son modificados. Si se observa detenidamente el algoritmo 1, solamente los cambios en C y D son relevantes cuando se están llevando a cabo los cálculos. Considérese que el conjunto de contenidos de vídeo es constante durante el periodo T . Entonces el nuevo problema será descrito por $STV(T) = \{(0, C, P(t), D(t), n(t))\}_{t \leq T}$, donde $P(t)$, $D(t)$ y $n(t)$ son la

matriz y vectores correspondientes al instante de tiempo t . Es razonable asumir que, en una situación real, el número de cambios durante un periodo T será finito, de este modo, el problema previo puede ser reescrito como sigue

$$STV(T) = \{(0, C, P(t), D(t), n(t))\}_{t_1 < t_2 < \dots < t_q < T} \quad (3.30)$$

y la función característica asociada del juego cooperativo dinámico puede ser escrita como

$$v_T^{STV}(t, S) = \sum_{t_h \leq t} v^{STV(t_k)}(S), \quad (3.31)$$

donde $STV(t_k) = (0, C, P(t_k), D(t_k), n(t_k))$. Ahora, puesto que el valor de Shapley es aditivo, se tiene que el valor de Shapley del juego cooperativo dinámico asociado con el problema dinámico $STV(T) = \{(0, C, P(t), D(t), n(t))\}_{t_1 < \dots < t_q < T}$, viene dado por

$$Sh(v_T^{STV}) = \sum_{t_h \leq T} Sh(v^{STV(t_k)}). \quad (3.32)$$

Con el fin de computar el valor de Shapley en un problema dinámico se puede utilizar el algoritmo 2. Este algoritmo tiene una complejidad computacional de $O(TK)$, donde $K = \max_{t \leq T} \{K(t)\}$. Pero, en cualquier caso, muestra que el valor de Shapley de un juego dinámico puede ser computado en tiempo real. Si se miran los algoritmos 1 y 2, todas las conclusiones obtenidas para el valor de Shapley pueden extenderse a todos los mecanismos de reparto con proporciones (o pesos) constantes para las partes interesadas. Además, si se considera el así llamado *núcleo clásico* en juegos dinámicos (Kranich et al. 2005), los resultados obtenidos en las secciones previas para el caso estático pueden ser extendidos a la situación dinámica considerando que la suma de juegos convexos es de nuevo un juego convexo (Shapley 1971) y la estructura del núcleo de los STV-juegos cooperativos. Por lo tanto, el enfoque dado en este capítulo para repartir los ingresos basado en juegos cooperativos es adecuado para la situación dinámica real que describe un sistema Smart TV.

ALGORITMO 2 (Algoritmo para computar el valor de Shapley en un problema dinámico)

```

for  $t = 1$  to  $t = T$  do
  for  $k = 1$  to  $k = K(t)$  do
    if  $j(k) = i(k)$ 
       $Sh(0) := Sh(0) + \frac{1}{2}D(j(k), t)$ 
       $Sh(i(k)) := Sh(i(k)) + \frac{1}{2}D(j(k), t)$ 
    else
       $Sh(0) := Sh(0) + \frac{1}{3}D(j(k), t)$ 

```

$$Sh(i(k)) := Sh(i(k)) + \frac{1}{3}D(j(k), t)$$

$$Sh(j(k)) := Sh(j(k)) + \frac{1}{3}D(j(k), t)$$

end if
end for K
end for T

3.7 Conclusiones

La contribución de este capítulo a la literatura es doble. Por una parte, se han proporcionado algunas ideas económicas sobre los ecosistemas Smart TV. Para modelizar un sistema Smart TV, se ha considerado una condición de equivalencia entre los ingresos en el pago por visión y los ingresos por inserción de anuncios de publicidad para cada contenido. De este modo, se ha homogeneizado cómo determinar el valor de contenidos heterogéneos. De hecho, el valor de un contenido se determina por su interés publicitario, de tal modo que el valor es exógenamente determinado por el conjunto de empresas de publicidad que están interesadas en insertar sus anuncios en el contenido. Por lo tanto, un contenido se considera un vehículo de beneficio más que un contenido particular en sí mismo. Por otra parte, del análisis del sistema anterior, se ha introducido una nueva clase de juegos cooperativos, los cuales son una combinación de los juegos del gran jefe (Muto et al. 1988) y los k -juegos (van den Nouweland 1996). Estos juegos tienen el núcleo no vacío, y el valor de Shapley y el valor de Tijs tienen expresiones sencillas para su cálculo. Asimismo, se ha introducido un nuevo concepto de solución, el núcleo simétrico, para este tipo de situaciones en los que se pueden distinguir diferentes roles para los jugadores.

En concreto, se considera un sistema de Smart TV y se modela como un juego cooperativo con el fin de analizar cómo se podría incentivar a todas las partes interesadas para que participen en él. Este juego tiene un núcleo no vacío, lo que significa que se pueden encontrar asignaciones coalicionalmente estables de los ingresos totales entre las partes implicadas en un sistema Smart TV. Por lo tanto, la colaboración entre las partes interesadas es rentable para todas ellas. A continuación, se estudia la distribución de los ingresos entre el proveedor de servicios de televisión por Internet y los creadores de contenidos (los canales de vídeo), distinguiendo dos papeles para los contenidos: un primer papel como atractor de usuarios finales hacia el sistema Smart TV y un segundo papel como contenido visualizado. Para ello, se introduce el concepto de núcleo simétrico en este entorno; se estudian dos valores bien conocidos en la literatura de la teoría de juegos cooperativos, el valor de Shapley y el valor Tijs; y se proponen nuevos valores para repartir

los ingresos totales entre ellos. Pero también se mostró algo relevante para nuestro análisis: las soluciones propuestas pueden calcularse en un tiempo razonable. Por lo tanto, se proporcionan algunas ideas sobre cómo compensar a los creadores de contenidos de vídeo en un entorno realista.

En conclusión, se han analizado sistemas sencillos de Smart TV desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos y se han proporcionado algunas soluciones “justas” para distribuir los ingresos totales obtenidos por el sistema entre las principales partes implicadas: el proveedor de servicios de televisión por Internet y los creadores de contenidos de vídeo (canales de vídeo). Así, se intenta dar una respuesta al problema de cómo compensar a los creadores de contenidos de vídeo para que les resulte rentable transferir (temporal o permanentemente) sus derechos sobre los contenidos al proveedor de servicios de televisión por Internet.

Capítulo 4

Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos discretos

El consumo de vídeos en línea en Internet crece cada año, lo que lo convierte en un mercado que genera cada vez más un mayor volumen de ingresos. Este capítulo se ocupa de un problema de gran interés en este contexto: la asignación de los ingresos generados en un sitio web de video entre el sitio web y los creadores de vídeos. Para esto, se considera un modelo dinámico de la generación de ingresos. Como en el capítulo anterior, se considera que los ingresos pueden provenir de dos fuentes: a través del sistema de pago por visión y a través de la inserción de anuncios en los vídeos. Luego, para estudiar cómo dividir los ingresos de una manera razonable y justa entre las dos partes, se considera un juego cooperativo dinámico que refleja la importancia de cada parte en la generación de ingresos. A partir de este juego, se determina cómo es su valor de Shapley y se introducen otras reglas de asignación derivadas de él. Se proporciona una estructura del algoritmo para calcular el valor de Shapley y sus reglas derivadas. Además, se muestra que la complejidad computacional de los algoritmos es polinomial. Finalmente, se proporcionan algunos ejemplos ilustrativos y simulaciones para ilustrar cómo funcionan las reglas de asignación propuestas. Este capítulo está basado en los trabajos López-Navarrete, Sánchez-Soriano, Bonastre (2022) *Dynamic Generation of Revenue through the insertion of advertisements into video contents. IEEE 19th Annual Consumer Communications & Networking Conference (CCNC), Las Vegas, NV, USA, pp. 481-482* y López-Navarrete, Sánchez-Soriano,

Bonastre (2023) Dynamic generation and attribution of revenues in a video platform. arXiv:2304.12268 [cs.GT].

4.1 Introducción

El gran avance de las tecnologías de la comunicación ha permitido la creación de nuevos paradigmas de mercados que hasta hace apenas unas décadas eran inimaginables. La creciente y rápida difusión del uso de las tecnologías de Internet junto con las comunicaciones inalámbricas han abierto la puerta a nuevos modelos de negocio basados en la posibilidad de obtener lo que se desea en cualquier momento y desde cualquier lugar. Algunos ejemplos de éxito son Amazon, eBay, Alibaba o YouTube que facturan importantes cantidades de dinero. Algunos de estos modelos de negocio se basan en crear un *marketplace* que facilite la interacción entre dos o más partes y que esta interacción genere un beneficio. Estos mercados pueden estudiarse como mercados bilaterales (véase *The Economics of Two-Sided Markets* 2004; Rochet y Tirole 2006; Roson 2005).

La fijación de precios, la asignación de ingresos, la asignación de recursos o la publicidad en Internet son problemas habituales en la gestión de las nuevas tecnologías. Estos problemas son tan relevantes que no sólo se pueden encontrar en un gran número de publicaciones en la literatura relacionada sino también en numerosas patentes relacionadas con ellos. En particular, es importante analizar los mercados de vídeo debido tanto al cambio en la forma de consumir contenido de vídeo como a la creciente demanda de vídeos bajo demanda (Gimpel 2013). Por lo tanto, este capítulo se centrará en los mercados bilaterales de vídeo bajo demanda. En estos mercados se tienen básicamente cuatro tipos de agentes. Por un lado, se tienen creadores de vídeos que quieren monetizar sus contenidos, usuarios que quieren ver vídeos y anunciantes que quieren que los usuarios vean sus anuncios. De alguna manera, los creadores de vídeos son vendedores y los usuarios y anunciantes son compradores. Por otro lado, el mercado donde estos agentes se ponen en contacto entre sí para que se produzcan transacciones es el sitio web de vídeos, en el que los creadores suben sus contenidos, los usuarios ven vídeos y los anunciantes insertan sus anuncios. En este sentido, el sitio web de vídeos es el intermediario entre todas las partes. En la figura 4.1, se muestra un esquema de la estructura básica de estos mercados bilaterales.

Para este tipo de mercado hay muchos problemas diferentes para analizar, pero sólo se enfoca el análisis en cómo los ingresos que este mercado puede generar pueden distribuirse de manera justa entre los vendedores (los creadores de vídeos) y el intermediario (la web de vídeos). Los otros dos vértices del

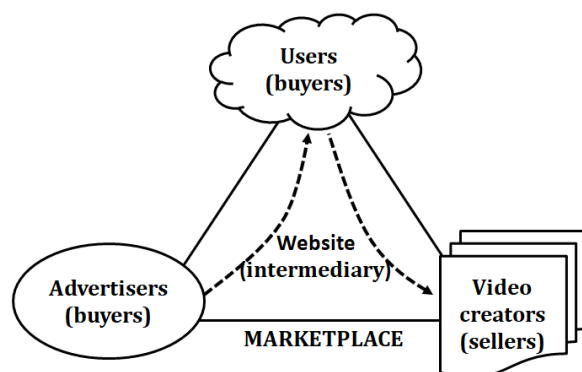


Figure 4.1: Marketplace de un mercado de vídeo bajo demanda.

triángulo serían los compradores: usuarios y anunciantes, pero no participan en la distribución de los ingresos. ¿Por qué entonces no se considera a los compradores? Por un lado, los usuarios pagan a la plataforma a través de suscripciones, pago por visión o visualizando los anuncios insertados. Por otro lado, los anunciantes pagan a la plataforma en función de los anuncios vistos y del lugar donde se insertaron. Por lo tanto, la plataforma recibe todos los pagos y tiene que compensar a los creadores de contenido. Por esta razón, sólo se considera el problema de distribución entre la plataforma y los creadores.

Los problemas de publicidad, asignación de ingresos o atribución de ingresos en los negocios de Internet han despertado un gran interés tanto desde el punto de vista económico como de investigación. Por este motivo se pueden encontrar numerosos artículos en la literatura así como patentes. Por ejemplo, Roels y Fridgeirsdottir (2009) estudian cómo maximizar los ingresos publicitarios mediante la publicación de anuncios gráficos en un sitio web. En Yuan et al. (2012) se proporciona una revisión exhaustiva sobre la publicidad en Internet. El diseño de algoritmos eficientes para decidir la asignación de anuncios de vídeo se estudia en Sumita et al. (2017). Kim (2006) analiza un modelo de maximización de ingresos que determina el precio óptimo de pago por visión (PPV) para cada clase, dados los servicios de vídeo bajo demanda (VoD) multiclase con calidades diferenciadas. En varias patentes se proponen métodos de distribución de ingresos, asignación de derechos de monetización, asignación de ingresos relacionados con diferentes negocios de publicidad y provisión de contenido digital en Internet (Heller et al. 2008; Fries 2011; Redlich 2012; Galai et al. 2019). Por lo tanto, el problema de la asignación de los ingresos generados por los contenidos de video en las plataformas o sitios web de Internet es un tema relevante a analizar.

La teoría de juegos se ha aplicado en multitud de campos, en particular a muchos problemas de ingeniería (Sánchez-Soriano 2013). Los juegos cooperativos se han aplicado a problemas de asignación de recursos, asignación de ingresos o asignación de costos/beneficios. Algunos ejemplos son los siguientes. Control de la contaminación (Giménez et al. 2016; Luqman et al. 2018; Gutiérrez et al. 2018; Duro et al. 2020), problemas de tecnología en la nube (Chen et al. 2017; Kim 2018; Le et al. 2019), transporte (Sánchez-Soriano et al. 2002; Guajardo and Rönnqvist 2016; Algaba et al. 2019a; Chen et al. 2020), o problemas de tecnología de comunicación inalámbrica (Niyato and Hossain 2006; Gozávez et al. 2012; Lucas et al. al. 2012; Zhang et al. 2019; Tran et al. 2020) entre muchos otros, por lo que el uso de la teoría de juegos es una buena opción para analizar el problema de la atribución de ingresos en un sistema de vídeo en una plataforma web.

En este capítulo, se estudia cómo asignar los ingresos generados en una plataforma web de vídeos. Para ello, se considera la generación dinámica de ingresos en el tiempo y analizamos la influencia en la generación de ingresos de cada movimiento de un usuario en su navegación por el sitio web. En este sentido, se aborda el problema desde la perspectiva de los métodos de atribución. Dado que se considera un sistema dinámico y problemas de atribución, se combinarán conceptos de juegos cooperativos dinámicos (Filar y Petrosjan 2000; Kranich et al. 2005) y métodos de atribución.

En el contexto de contenidos de vídeo en una plataforma web en Internet, un método de atribución trata de determinar cómo se asigna el crédito por ingresos a los puntos de contacto en las rutas de navegación en el sistema. Diferentes reglas de atribución, incluida una basada en el valor de Shapley (Shapley 1953),¹ son consideradas por Google en el caso de problemas de embudos multicanal (Google 2021a; Google 2021b). Sin embargo, se pueden encontrar en la literatura otros problemas de atribución en diferentes campos (véase, por ejemplo, Algaba et al. 2019b; Sánchez-Soriano 2020). Como se mencionó anteriormente, en este capítulo se combinan juegos dinámicos y métodos de atribución para determinar cómo asignar los ingresos generados en una plataforma web de vídeo entre las diferentes partes involucradas. En particular, hasta donde se sabe, las contribuciones de este capítulo a la literatura son las siguientes:

1. Se modela como juegos dinámicos la generación de ingresos en un sistema de vídeo bajo demanda (VoD) en Internet.

¹Para obtener detalles sobre la relevancia del valor de Shapley en los juegos cooperativos y sus aplicaciones en muchos campos diferentes, consúltese, por ejemplo, Roth (1988) y Algaba et al. (2019c).

2. Se determina el valor Shapley de esos juegos. Esto se puede utilizar para asignar los ingresos generados entre las diferentes partes involucradas: la plataforma y los creadores de contenido de vídeo. Por lo tanto, se proporciona una forma de determinar cómo se asigna el crédito por ingresos a los puntos de contacto en las rutas de navegación de los usuarios en el sistema web de vídeo.
3. Con base en el valor de Shapley, se presentan otras reglas de asignación de ingresos. En particular, una nueva regla no atenuada en el tiempo y una familia de reglas atenuadas en el tiempo. Estas reglas también brindan diferentes formas de determinar cómo se asigna el crédito por ingresos a los puntos de contacto en las rutas de navegación de los usuarios en el sistema web de vídeo.
4. Se proporciona un algoritmo polinomial para calcular las reglas de asignación.

Para ilustrar cómo funcionan las reglas de asignación de ingresos presentadas en este capítulo, se lleva a cabo una experiencia computacional mediante simulación.

4.2 Descripción del sistema

En este capítulo, se considera un sitio web de vídeos en el que los creadores de contenido pueden subir sus vídeos. Cuando los usuarios ingresan al sitio web de vídeos, pueden generar ingresos de dos maneras. Por un lado, los usuarios pueden pagar por ver los vídeos sin tener que mirar anuncios y, por otro lado, los usuarios pueden ver los vídeos gratis si aceptan la publicidad insertada en ellos. En el primer caso es evidente cómo se generan los ingresos: el usuario paga un determinado precio por ver el vídeo, pero en el segundo caso hay que tener en cuenta que los anunciantes no pagarán lo mismo si el anuncio se ve 5 segundos o 30 segundos. Por ejemplo, en YouTube los ingresos generados por la publicidad dependen de varios factores (<https://www.youtube.com/intl/en-GB/yt/advertise/pricing/>). Por lo tanto, el mismo vídeo puede generar ingresos diferentes de un momento a otro en el tiempo.

Los usuarios ingresarán (o iniciarán sesión) en el sitio web de vídeos en un cierto orden e instante de tiempo, y permanecerán en el sistema por un tiempo. Así, la dinámica del sistema se puede describir en dos dimensiones, por un lado, el orden en el que los usuarios ingresan (o inician sesión) y, por otro lado, la hora exacta en que los usuarios inician la sesión (véase la figura

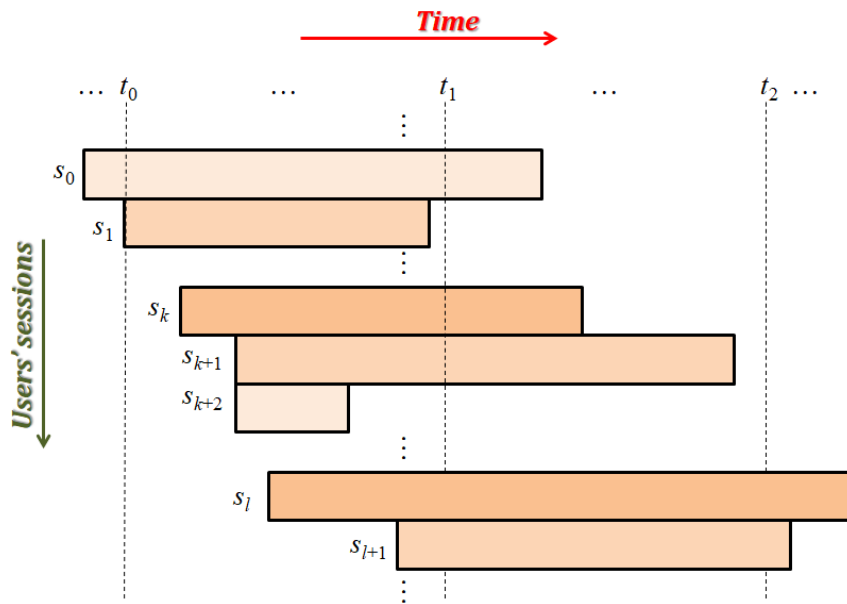


Figure 4.2: Orden de las sesiones de usuario y horas de inicio.

4.2). Ambas dimensiones están relacionadas en el sentido de que las sesiones k y $k + 1$ han comenzado en momentos de tiempo tales que $t_k \leq t_{k+1}$. Sin embargo, a efectos prácticos es interesante mantener ambas dimensiones para cada sesión iniciada por los usuarios de la web de vídeos.

Cuando un usuario ingresa al sitio web de vídeos, navegará de un vídeo a otro, verá o no algunos vídeos y dejará el sistema después de un tiempo. Durante toda su sesión se generarán ingresos por medio de pago por visión y/o publicidad (véase la figura 4.3).

Si se analiza el proceso de generación de ingresos se puede considerar que hay tres tipos de elementos involucrados. Por un lado, la web donde se suben los vídeos, por otro, los vídeos que se visualizan y, por último, el elemento que atrae al usuario, que puede ser un vídeo en concreto o la propia web. Estos tres elementos son fundamentales para que se puedan generar ingresos, ya que si falta uno de ellos no es posible. Si no hay sitio web, no hay vídeos, si no hay vídeos, no hay pago por visión ni anunciantes que paguen para insertar sus anuncios, y si no hay nada que atraiga a los usuarios al sistema, no hay usuarios, y sin usuarios no hay pago por visión ni anunciantes interesados en insertar sus anuncios en los vídeos.

Además de lo anterior, el sitio web de vídeos puede ofrecer un servicio de recomendación y un servicio de búsqueda, los vídeos subidos generalmente se

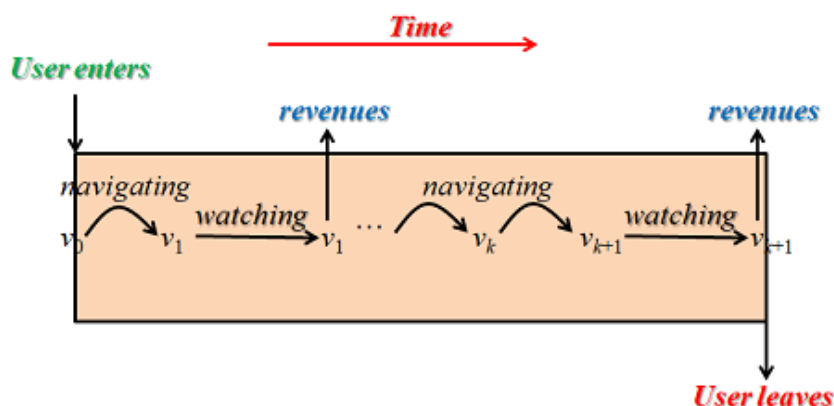


Figure 4.3: Navegación de un usuario durante una sesión.

agrupan por canales y los usuarios pueden suscribirse a esos canales. Todo esto último también puede ser interesante de tener en cuenta al considerar cómo se generan los ingresos del sistema.

4.3 Modelo matemático

En este capítulo, se considera un modelo matemático para describir la generación de ingresos en un sistema de vídeo bajo demanda (VoD) en Internet. Este será un modelo discreto en el que no se tiene en cuenta exactamente cómo se generan los ingresos a lo largo del tiempo. Por lo tanto, el modelo es dinámico de eventos discretos.

Se denotará por W el sitio web de vídeos, por U el universo de todos los usuarios posibles y por C el conjunto de todos los canales posibles en el sitio web de vídeos W en cualquier momento. Obsérvese que tanto el universo de usuarios como el universo de canales son abiertos, en el sentido de que no están limitados a un conjunto de usuarios específicos ni a unos canales de vídeo en particular ni a que cada canal de vídeo tenga un número fijo de vídeos. Por lo tanto, esto refleja de alguna manera que los usuarios, los canales y los vídeos en el sitio web pueden cambiar dinámicamente a lo largo del tiempo.

Por $S(t)$ se denotará el conjunto de todas las sesiones iniciadas y finalizadas por los usuarios en U desde el inicio hasta el instante de tiempo t , por $S(t_1, t_2)$ se denotará el conjunto de todas las sesiones finalizadas por los usuarios en U entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 , es decir, en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, tal que $t_1 < t_2$. Nótese que $S(t) = S(0, t)$ y

$S(t_1, t_2) = S(t_2) - S(t_1)$. Dada una sesión s , se considera la siguiente información:

- $a(s)$ es el elemento en $W \cup C$ que atrajo al usuario que inició la sesión s .
- $v(s)$ es el conjunto de vídeos en W que el usuario vio durante la sesión s , por supuesto, cada vídeo pertenecerá a un canal en C , pero diferentes vídeos pueden pertenecer al mismo canal.
- $r(i, s)$ es el ingreso obtenido a partir del vídeo $i \in v(s)$.
- Se puede considerar que el sitio web de vídeos consta de tres agentes: w_p es la plataforma en sí, w_r es el servicio de recomendación y w_s es el servicio de búsqueda. Los dos últimos agentes también podrían generar ingresos durante una sesión porque algunos anuncios podrían insertarse o aparecer durante el proceso de recomendación o búsqueda, de lo contrario, sus ingresos asociados serían simplemente cero. Así, $r(w_r, s)$ es el ingreso obtenido cuando el usuario está mirando sugerencias de vídeos, y $r(w_s, s)$ es el ingreso obtenido cuando el usuario está buscando.
- $R(s)$ representa el ingreso total obtenido en la sesión s y viene dado por

$$R(s) = r(w_r, s) + r(w_s, s) + \sum_{i \in v(s)} r(i, s). \quad (4.1)$$

De acuerdo con la notación anterior, los ingresos totales obtenidos por el sitio web de vídeos durante el período de tiempo $]t_1, t_2]$ se determinarán de la siguiente forma:

$$R(t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s). \quad (4.2)$$

Por lo tanto, se ha descrito la generación de ingresos en términos de las diferentes sesiones iniciadas por los usuarios, y para cada sesión se han considerado los ingresos generados por cada vídeo visto, el servicio de recomendación y el servicio de búsqueda. Asimismo, la expresión 4.2 significa que se considera que una sesión no se monetiza hasta que finaliza.

4.4 Juegos dinámicos. Suposiciones

Una forma de distribuir los ingresos entre las partes interesadas es utilizar la teoría de juegos cooperativos. Para ello, primero se tiene que identificar quiénes son los jugadores, y segundo, se tiene que definir la función característica. En este caso, parece razonable que los jugadores sean, una vez más, el sitio web de vídeos y los canales de vídeos, es decir, $N = W \cup C$. Además, también se dividirá la web de vídeos en tres agentes: la propia plataforma, el servicio de búsqueda y el servicio de recomendación, es decir, $W = \{w_p, w_s, w_r\}$. El siguiente paso es definir la función característica que mide, en este caso, los ingresos generados por una coalición de jugadores. Para hacer esto, se tienen que considerar algunos supuestos razonables. El primer supuesto es el siguiente:

Suposición 4.1. Si la plataforma no pertenece a una coalición, entonces los ingresos generados por esa coalición son cero.

La suposición 4.1 parece muy razonable, porque si no hay plataforma, entonces no se pueden generar ingresos en el sitio web de vídeos. Además, cuando un usuario comienza una sesión en el sistema, esta sesión consistirá de una cadena de eventos en el tiempo como se muestra en la figura 4.3. La forma en que se considera la relevancia de cada evento de la cadena será muy importante para determinar la función característica. Por ello es necesario realizar algún tipo de suposición sobre la relevancia de los eventos en la cadena de navegación de un usuario, es decir, una sesión. Dependiendo de esta suposición sobre la relevancia de los eventos de una sesión, se obtendrá un juego u otro. En principio, tenemos dos alternativas.

Suposición 4.2. Si se elimina un evento de una sesión, entonces después de ese evento no se generan ingresos.

Suposición 4.3. Si se elimina un evento de una sesión, sólo se eliminan los ingresos asociados con ese evento.

La suposición 4.2 implica que si se elimina un evento, la sesión termina inmediatamente y no se pueden generar ingresos adicionales después de ese momento. Sin embargo, la suposición 4.3 significa que si se elimina un evento de una sesión, la sesión continúa pero simplemente omitiendo ese evento en la generación de ingresos. Por lo tanto, ambos supuestos suponen de alguna manera los dos extremos. Por un lado, la suposición 4.2 es el caso en el que

cada evento de una sesión tiene la máxima importancia en la generación de ingresos. Y, por otro lado, la suposición 4.3 es el caso en el que no se otorga relevancia en la generación de ingresos adicionales a cada evento particular en una sesión.

Una vez que se ha determinado quiénes son los jugadores en el modelo, y se han establecido algunos supuestos razonables sobre la generación de ingresos, se puede definir la función característica teniendo en cuenta el modelo matemático de generación de ingresos que se utilizará: discreto o continuo. El segundo de ellos se tratará en el capítulo siguiente.

Para simplificar la notación, en adelante se considerará que una sesión s consiste en una secuencia finita de $n_s + 1$ eventos,

$$\{e_0(s), e_1(s), \dots, e_{n_s}(s)\}, \quad (4.3)$$

y P es una aplicación del conjunto de todos los eventos posibles a $N = W \cup C$, es decir, P aplica cada evento al jugador que pertenece. Para simplificar la notación, se escribirá $P(e_k(s)) = P_k(s)$. Además, se supone que $P(e_0(s)) = P_0(s) = w_p$ y $P(e_k(s)) = P_k(s) \in \{w_s, w_r\} \cup C$, para todo $k \in \{1, \dots, n_s\}$. Esto significa que se considera que una sesión siempre comienza en la plataforma, y luego se visitan diferentes vídeos que pertenecen a canales posiblemente distintos, así como el servicio de búsqueda y el servicio de recomendación, hasta que la sesión termine después de un número finito de eventos. Además, la identificación de vídeos con el canal de vídeo al que pertenecen parece razonable para definir el juego correspondiente, ya que los jugadores son los canales de vídeo. Además, se denota por

$$E^k(s) = \{e_0(s), e_1(s), \dots, e_k(s)\} \quad (4.4)$$

y

$$\tilde{E}^k(s) = \{e_0(s), e_k(s)\} \quad (4.5)$$

el conjunto de los primeros $k + 1$ eventos de la sesión s y el conjunto del primer y el $(k + 1)$ -ésimo eventos en la sesión s , respectivamente. Finalmente, el conjunto de los canales al que pertenece cada uno de los $k + 1$ eventos en s se denota por

$$P(E^k(s)) = \{P_0(s), P_1(s), \dots, P_k(s)\} \subset N, \quad (4.6)$$

y $n_k^p(s) = |P(E^k(s))|$ es el número de jugadores listados dentro de los eventos del conjunto $E^k(s)$; y el conjunto de los canales al que pertenece el primer y $(k + 1)$ -ésimo eventos de s se denotará por

$$P(\tilde{E}^k(s)) = \{P_0(s), P_k(s)\} \subset N, \quad (4.7)$$

y por $\tilde{n}_k^p(s) = |P(\tilde{E}^k(s))|$ su cardinal. Obsérvese que $\tilde{n}_k^p(s)$ es siempre 2 excepto cuando $k = 0$ que es 1.

4.5 Juegos dinámicos de evento discreto

En primer lugar, el conjunto de jugadores es $N = W \cup C$, y bajo la suposición 4.1 y la suposición 4.2, la función característica, V , vendrá dada para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ por

$$V(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s|F) \quad (4.8)$$

donde

$$R(s|F) = \sum_{k \leq \max\{h \in \mathbb{Z} | P(E^h(s)) \subset F\}} r(e_k(s)). \quad (4.9)$$

La familia de todos estos juegos dinámicos con conjunto de jugadores N se denotará por DD_{12}^N , y la familia de todos estos juegos será simplemente denotada por DD_{12} .

Sin embargo, bajo la suposición 4.1 y la suposición 4.3, la función característica, \tilde{V} , vendrá dada, para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$, por

$$\tilde{V}(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \tilde{R}(s|F) \quad (4.10)$$

donde

$$\tilde{R}(s|F) = \sum_{k: P(\tilde{E}^k(s)) \subset F} r(e_k(s)). \quad (4.11)$$

La familia de todos estos juegos dinámicos con conjunto de jugadores N se denota por DD_{13}^N , y la familia de todos estos juegos será simplemente denotada por DD_{13} .

A continuación, se estudian las propiedades de estos juegos relacionadas con ambas dimensiones, la coalicional y la temporal. Primero, se muestra que estos juegos son convexos.

Proposición 4.1. Los juegos en DD_{12} , y DD_{13} son convexos en el tiempo.

Demostración:

En primer lugar, obsérvese que si el número de sumandos de una suma es vacío, entonces la suma es 0. A partir de ahora, por simplicidad, se denota $\max\{h | P(E^h(s)) \subset F\}$, por $h^{\max}(F)$.

Sea $(N, V) \in DD_{12}$, y $F \subset G \subset N \setminus \{i\}$. Por (4.8) y (4.9), se tiene que

$$V(F \cup \{i\}, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k \leq h^{max}(F \cup \{i\})} r(e_k(s)), \quad (4.12)$$

$$V(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k \leq h^{max}(F)} r(e_k(s)). \quad (4.13)$$

Se sabe que si $\{e_0(s), \dots, e_h(s)\} \subset F$, entonces $\{e_0(s), \dots, e_h(s)\} \subset F \cup \{i\}$. Por lo tanto, para cada sesión s , la diferencia entre dos cadenas maximales de eventos contenidas en $F \cup \{i\}$ y F , respectivamente, es $\{e_{k_i^0}(s), \dots, e_h(s)\}$, donde $e_{k_i^0}(s)$ es el primer evento en la cadena maximal contenida en $F \cup \{i\}$ tal que $e_{k_i^0}(s) = i$. Por lo tanto, se tiene que,

$$V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k_i^0 \leq k \leq h^{max}(F \cup \{i\})} r(e_k(s)). \quad (4.14)$$

Del mismo modo, se tiene que,

$$V(G \cup \{i\}, t) - V(G, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k_i^0 \leq k \leq h^{max}(G \cup \{i\})} r(e_k(s)). \quad (4.15)$$

Ahora, puesto que $F \cup \{i\} \subset G \cup \{i\}$, para cada sesión s , la cadena maximal de eventos asociada con $F \cup \{i\}$ está contenida en la correspondiente asociada con $G \cup \{i\}$, en consecuencia, es evidente que,

$$V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t) \leq V(G \cup \{i\}, t) - V(G, t). \quad (4.16)$$

Ahora, sea $(N, \tilde{V}) \in DD_{13}$, y $F \subset G \subset N \setminus \{i\}$. Por (4.10) y (4.11), se cumple que,

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k: \{e_0(s), e_k(s)\} \subset F \cup \{i\}} r(e_k(s)), \quad (4.17)$$

$$\tilde{V}(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k: \{e_0(s), e_k(s)\} \subset F} r(e_k(s)). \quad (4.18)$$

Por lo tanto, si $w_p \in F$, entonces

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k: \{e_0(s), e_k(s)\} \subset \{w_p, i\}} r(e_k(s)), \quad (4.19)$$

en otro caso, se tendría que $\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = 0$.

De forma similar, si $w_p \in G$, entonces

$$\tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t) = \sum_{s \in S(t)} \sum_{k: \{e_0(s), e_k(s)\} \subset \{w_p, i\}} r(e_k(s)), \quad (4.20)$$

en otro caso, se cumpliría que $\tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t) = 0$.

Por lo tanto, se tiene que,

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = \tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t). \quad (4.21)$$

■

Este resultado es importante porque significa que la cooperación es rentable para todos los agentes involucrados. Además, el conocido valor de Shapley pertenece al núcleo del juego (Shapley 1971), lo que implica que el valor de Shapley es coalicionalmente estable y, en consecuencia, un buen candidato para ser utilizado en la asignación de ingresos.

La siguiente proposición muestra las propiedades de estos juegos relacionadas con el componente de tiempo de su definición.

Proposición 4.2. Los juegos en DD_{12} , y DD_{13} son separables en el tiempo.

Demostración:

Sean $(N, V) \in DD_{12}$, $F \subset N$, y $t_1 < t_2 \leq t_3$. Por (4.8) y (4.9), se tiene que,

$$V(F, t_1, t_3) = \sum_{s \in S(t_1, t_3)} \sum_{k \leq h^{max}(F)} r(e_k(s)). \quad (4.22)$$

Por definición de S , se verifica que $S(t_1, t_3) = S(t_1, t_2) \cup S(t_2, t_3)$, y $S(t_1, t_2) \cap S(t_2, t_3) = \emptyset$. Por lo tanto, se tiene que,

$$V(F, t_1, t_3) = \sum_{s \in S(t_1, t_2) \cup S(t_2, t_3)} \sum_{k \leq h^{max}(F)} r(e_k(s)) = \quad (4.23)$$

$$\sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k \leq h^{max}(F)} r(e_k(s)) + \sum_{s \in S(t_2, t_3)} \sum_{k \leq h^{max}(F)} r(e_k(s)) = \quad (4.24)$$

$$V(F, t_1, t_2) + V(F, t_2, t_3). \quad (4.25)$$

Para DD_{13} , la demostración es, *mutatis mutandis*, completamente análoga a la demostración para DD_{12} . ■

4.6 Propiedades de equidad

Para estudiar qué tipo de reglas (mecanismos) de asignación son más adecuadas, se deben dar una colección de propiedades que sean significativas para el problema en cuestión. Significativo puede referirse a la equidad, la maniobrabilidad técnica, la estabilidad u otros criterios. En nuestro caso, se está interesado en los tres criterios mencionados: equidad, simplicidad técnica y estabilidad. Se requiere justicia porque es deseable que todos los agentes involucrados sean tratados de manera justa. Maniobrabilidad técnica para que la regla sea fácil de calcular, es decir, que sea efectivamente implementable. La estabilidad como criterio de consistencia, en el sentido de que no se generan quejas y, por lo tanto, el sistema puede funcionar a largo plazo.

Las propiedades se dan para los valores de ventana temporal, pero pueden *mutatis mutandis* adaptarse a los valores en el tiempo.

- Eficiencia (EFF). Un valor de ventana temporal Φ es eficiente si para todo juego (N, V) , y para toda ventana de tiempo $]t_1, t_2]$,

$$\sum_{i \in N} x_i^{]t_1, t_2]} = V(N, t_1, t_2). \quad (4.26)$$

- Simetría (SYM). Un valor de ventana temporal Φ es simétrico si dado un juego dinámico cooperativo (N, V) , tal que hay un par $i, j \in N$ de modo que para toda ventana de tiempo $]t_1, t_2]$,

$$V(F \cup \{i\}, t_1, t_2) = V(F \cup \{j\}, t_1, t_2), \forall F \subset N \setminus \{i, j\}, \quad (4.27)$$

entonces, se tiene que,

$$x_i^{]t_1, t_2]} = x_j^{]t_1, t_2]}, \forall]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[. \quad (4.28)$$

- Jugador nulo (NP). Un valor de ventana temporal Φ satisface la propiedad del jugador nulo, si dado un juego dinámico (N, V) , tal que hay un $i \in N$ de modo que para toda ventana de tiempo $]t_1, t_2]$,

$$V(F \cup \{i\}, t_1, t_2) = V(F, t_1, t_2), \forall F \subset N \setminus \{i\}, \quad (4.29)$$

entonces, se tiene que,

$$x_i^{]t_1, t_2]} = 0, \forall]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[. \quad (4.30)$$

- Monotonía (MON). Un valor de ventana temporal Φ es monótono si dados dos juegos (N, V) y (N, V') tal que $\forall]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[$,

$$V(F, t_1, t_2) = V'(F, t_1, t_2), \forall F \subsetneq N, \quad (4.31)$$

y

$$V(N, t_1, t_2) \geq V'(N, t_1, t_2), \forall]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[, \quad (4.32)$$

entonces, se tiene que,

$$x_i^{]t_1, t_2]} \geq x_i^{]t_1, t_2]}, \forall i \in N \text{ and } \forall]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[. \quad (4.33)$$

- Estabilidad (STA). Un valor de ventana temporal Φ es estable si para todo juego (N, V) , y para toda ventana de tiempo $]t_1, t_2]$,

$$x^{]t_1, t_2]} \in C(N, V(\cdot, t_1, t_2)). \quad (4.34)$$

- Separabilidad temporal (TS). Un valor de ventana temporal Φ satisface la propiedad de separabilidad temporal, si para todo juego (N, V) , $\forall]t_1, t_3] \subset]0, +\infty[$, se tiene que,

$$x^{]t_1, t_3]} = x^{]t_1, t_2]} + x^{]t_2, t_3]}, \forall t_2 \in]t_1, t_3]. \quad (4.35)$$

- Separabilidad en sesiones (SS). Un valor de ventana temporal Φ satisface la propiedad de separabilidad en sesiones, si para todo juego (N, V) , se tiene que,

$$\Phi(N, V) = \sum_{s \in S(0, +\infty)} \Phi(N, V^s), \quad (4.36)$$

donde $V^s(F, t_1, t_2) = \chi(\{s\}, S(t_1, t_2)) R(s|F)$.

Todas estas propiedades son relevantes en el contexto del problema de asignar los ingresos generados en una plataforma de vídeo en Internet a las partes interesadas. Las primeras cuatro propiedades están relacionadas con la equidad. Primero, parece sensato que todos los ingresos generados por el sistema se distribuyan entre todos los que contribuyeron de alguna manera a generarlo. Este principio se refleja en las propiedades de *eficiencia* y *jugador nulo*. En segundo lugar, si dos partes interesadas contribuyen lo mismo a la generación de ingresos en el sistema, por una cuestión de justicia y tratamiento no discriminatorio en la distribución, parece apropiado que ambos reciban lo mismo. Esta idea de justicia se refleja en la propiedad de *simetría*. Tercero, si la cooperación de todas las partes interesadas genera

más ingresos, parece razonable que ninguna parte interesada reciba menos que antes cuando se distribuyen los nuevos ingresos totales más grandes. Este criterio de no empeorar si los ingresos crecen es capturado por la propiedad de *monotonía*. Cuarto, la asignación de ingresos debe realizarse de tal manera que ninguna parte interesada o grupo de partes interesadas pueda quejarse en cualquier momento de la cantidad de ingresos que se les ha asignado, de lo contrario podrían abandonar la plataforma. Esto podría conducir a una reducción o a cambios frecuentes en el contenido ofrecido en la plataforma, lo que podría provocar una pérdida de usuarios. Este principio de evitar las quejas de las partes interesadas y, por lo tanto, de garantizar de alguna manera la continuidad del contenido en la plataforma se refleja en la propiedad de *estabilidad*. Todas estas propiedades pueden considerarse básicas para cualquier problema de asignación de ingresos, en particular, para aquellos en el contexto de plataformas de vídeo en Internet, como las descritas en este capítulo. Sin embargo, las otras dos propiedades están estrechamente relacionadas con la estructura de los sistemas estudiados en esta tesis. Primero, parece razonable pensar en este contexto que la asignación final de los ingresos es independiente de la ventana de tiempo utilizada para su distribución y, por lo tanto, que la asignación final puede ser la suma de asignaciones parciales de ingresos y, al mismo tiempo, que las asignaciones futuras de ingresos no dependen de la historia hasta cierto punto. Este principio también permite dividir el problema en ventanas de tiempo independientes. Todas estas ideas de independencia de la asignación final de los momentos específicos en los que se realizan las distribuciones se reflejan en la propiedad de *separabilidad temporal*. En segundo lugar, en el contexto de plataformas de vídeo en Internet como las descritas en esta tesis, parece sensato pensar que los ingresos generados en una sesión se consideren independientes de los generados en cualquier otra sesión y, por lo tanto, que los beneficiarios de una sesión son sólo aquellas partes interesadas que han contribuido a generar los ingresos de esa sesión. Esto permite desglosar el problema de asignación en muchos problemas de asignación independientes asociados cada uno de ellos con una sesión diferente. Estas ideas se reflejan en la propiedad de *separabilidad en sesiones*. Además, estas dos últimas propiedades permiten una maniobrabilidad técnica más fácil para determinar la asignación de ingresos entre las partes interesadas.

4.7 Reglas de asignación de ingresos

Hay muchas formas de definir una regla de asignación y se pueden encontrar reglas diferentes en la literatura. Por lo tanto, el uso de una regla de asig-

nación u otra puede basarse, por ejemplo, en la idea de la equidad que tiene el gerente a cargo de hacer la distribución de ingresos.

Como se mencionó con anterioridad, se pueden encontrar muchas reglas de asignación en la literatura, pero una de las reglas más destacadas cuando se ha definido un juego asociado con el problema de asignación es el valor de Shapley. Además, en este contexto de plataformas de vídeo en Internet, el valor de Shapley tiene sentido debido a la estructura de uso dinámico particular de estas plataformas. Las rutas de navegación de los usuarios en una plataforma de vídeo en Internet consisten en una sucesión de eventos a lo largo del tiempo, donde cada uno de los eventos puede generar un cierto ingreso. Vale la pena preguntar qué parte de los ingresos generados en cada evento es atribuible a los eventos que ocurrieron con anterioridad, evaluando si esos ingresos habrían ocurrido si uno o más de los eventos anteriores no hubieran ocurrido simplemente porque los vídeos asociados con los eventos o sus canales no hubieran estado en la plataforma. Tanto la estructura secuencial de los eventos (asociado con los jugadores) como la pregunta “qué pasaría si” están relacionadas con las ideas que hay detrás del valor de Shapley (Shapley 1953; Algaba et al. 2019d). Por lo tanto, parece apropiado usar el valor de Shapley como una regla de distribución de los ingresos generados en una plataforma de vídeo en Internet.

En las siguientes subsecciones, se estudia cómo es el valor de Shapley de los juegos dinámicos descritos en este capítulo y se introducen nuevos valores que se definen modificando un poco algunas características relevantes en la estructura del valor de Shapley para los problemas en cuestión.

4.7.1 El valor de Shapley

En esta subsección se analiza cómo es el valor de Shapley de los juegos introducidos en este capítulo. Por lo tanto, se estudia el valor de Shapley para cada uno de los dos juegos dinámicos de eventos discretos introducidos en la subsección 4.5.

Se comienza con el juego V que se define bajo las suposiciones 4.1 y 4.2. Primero, obsérvese que

$$V = \sum_{s \in S(0, +\infty)} V^s \quad (4.37)$$

En efecto, tómesese $F \subset N$ y $]t_1, t_2] \subset]0, +\infty[$, entonces

$$V(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} V^s(F, t_1, t_2) \quad (4.38)$$

$$= \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \chi(\{s\}, S(t_1, t_2)) R(s|F) \quad (4.39)$$

$$= \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s|F), \quad (4.40)$$

donde (4.40) se sigue de las definiciones de $S(t_1, t_2)$, y $\chi(\{s\}, S(t_1, t_2))$ (véase la ecuación (2.15)).

Ahora, desde que el valor de Shapley es aditivo (Shapley 1953), es separable en sesiones,

$$Sh(N, V) = \sum_{s \in S(0, +\infty)} Sh(N, V^s). \quad (4.41)$$

A la vista de la ecuación (4.41), se puede enfocar el análisis en los juegos (N, V^s) .

Teorema 4.1. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DD_{12}^N$, y una sesión $s \in S(0, +\infty)$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, V^s) viene dado por

$$Sh_i^{]t_1, t_2]}(N, V^s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s \notin S(t_1, t_2) \\ \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(E^k(s)))}{n_k^p(s)} r(e_k(s)), & \text{if } s \in S(t_1, t_2) \end{cases} \quad (4.42)$$

Demostración:

Sean $(N, V) \in DD_{12}^N$, una sesión $s \in S(0, +\infty)$, y una ventana de tiempo $]t_1, t_2]$. Por la definición 2.17, el valor de Shapley de ventana temporal de (N, V^s) viene expresado por

$$Sh_i^{]t_1, t_2]}(N, V^s) = \sum_{F \subset N \setminus \{i\}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} (V^s(F \cup \{i\}, t_1, t_2) - V^s(F, t_1, t_2)). \quad (4.43)$$

Primero, obsérvese que si $s \notin S(t_1, t_2)$, entonces por definición de V^s (véase (4.36)) es fácil demostrar que $Sh_i^{]t_1, t_2]}(N, V^s) = 0, \forall i \in N$.

Considérese ahora que $s \in S(t_1, t_2)$ y que s tiene exactamente $n_s + 1$ eventos, $e_0(s), e_1(s), \dots, e_{n_s}(s)$. Para demostrar el resultado, se considera la siguiente expresión alternativa del valor de Shapley (Shapley 1953) adaptada

a los juegos dinámicos en este capítulo:

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V^s) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi} (V^s(P(\pi, i) \cup \{i\}, t_1, t_2) - V^s(P(\pi, i), t_1, t_2)), \quad (4.44)$$

donde Π es el conjunto de todas las permutaciones de los jugadores en N , y $P(\pi, i)$ es el conjunto de todos los jugadores que preceden a i en la permutación π .

Ahora, se miran los eventos de la sesión s , dados por $e_0(s), e_1(s), \dots, e_{n_s}(s)$, y se analiza cuando en una permutación π un jugador i contribuirá marginalmente con los ingresos asociados con un evento $e_k(s)$. La respuesta es que tal jugador i contribuirá si se dan las dos condiciones siguientes:

1. Hay un evento antes de k que pertenece al jugador i , es decir, existe $k' < k$ tal que $P(e_{k'}(s)) = i$.
2. La permutación π es tal que el jugador i aparece en ella después de todos los otros jugadores que tienen asociados todos los eventos antes del evento k en la permutación π .

Estas dos condiciones pueden satisfacerse sólo por aquellos jugadores que tienen algún evento de la sesión s asociadas con ellos antes de que ocurra el evento k . Ahora la pregunta es en cuántas permutaciones las dos condiciones previas serán cumplidas por cierto jugador. La respuesta es en exactamente $\frac{1}{n_k^p(s)}$ de todas las permutaciones, donde $E^k(s) = \{e_0(s), e_1(s), \dots, e_k(s)\}$. De este modo, cada ingreso $r(e_k(s))$ es distribuido igualitariamente entre los jugadores en $P(E^k(s))$. Por lo tanto, cuando $s \in S(t_1, t_2)$, se tiene que

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V^s) = \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(E^k(s)))}{n_k^p(s)} r(e_k(s)), \forall i \in N. \quad (4.45)$$

■

Corolario 4.1. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DD_{12}^N$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, V) viene dado por

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(E^k(s)))}{n_k^p(s)} r(e_k(s)). \quad (4.46)$$

Demostración:

Esta demostración se obtiene directamente a partir del teorema 4.1, las expresiones (4.8) y (4.9), y la propiedad de aditividad que satisface el valor de Shapley (Shapley 1953). ■

Primero, téngase en cuenta que el sitio web de vídeos W está representado por tres jugadores, $\{w_p, w_s, w_r\}$, por lo que los ingresos obtenidos por W serán la suma de sus tres representantes. En este sentido, W sabe cuánto obtiene de cada parte del sistema. En segundo lugar, se puede observar que la influencia de un jugador en la generación de ingresos en un evento en particular no se atenúa con el tiempo, es decir, es la misma que un evento sea al comienzo de la sesión o justo antes de otro evento cuando se calcula la parte de ingresos generados por el último que se asigna al primero.

Continuando con el juego \tilde{V} , el cual se define bajo las suposiciones 4.1 y 4.3. Obsérvese que todo lo expuesto para el juego V también es válido para el juego \tilde{V} , simplemente cambiando V^s por \tilde{V}^s , y $R(s|F)$ por $\tilde{R}(s|F)$. Por lo tanto, se puede enfocar el análisis una vez más sobre los juegos de sesión (N, \tilde{V}^s) .

Teorema 4.2. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DD_{13}^N$, y una sesión $s \in S(0, +\infty)$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, \tilde{V}^s) viene dado por

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}^s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s \notin S(t_1, t_2) \\ \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(\tilde{E}^k(s)))}{2} r(e_k(s)), & \text{if } s \in S(t_1, t_2) \end{cases}. \quad (4.47)$$

Demostración:

Sean $(N, V) \in DD_{13}^N$, una sesión $s \in S(0, +\infty)$, y una ventana de tiempo $]t_1, t_2]$. Por la definición 2.17, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, \tilde{V}^s) está definido por la siguiente expresión

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}^s) = \sum_{F \subset N \setminus \{i\}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} \left(\tilde{V}^s(F \cup \{i\}, t_1, t_2) - \tilde{V}^s(F, t_1, t_2) \right). \quad (4.48)$$

Primero obsérvese que si $s \notin S(t_1, t_2)$, entonces por la definición de \tilde{V}^s (véase (4.36)) es sencillo demostrar que $Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}^s) = 0, \forall i \in N$.

Si se considera ahora que $s \in S(t_1, t_2)$ y que s tiene exactamente $n_s + 1$ eventos, $e_0(s), e_1(s), \dots, e_{n_s}(s)$. Por la definición de \tilde{V}^s , y las ecuaciones (4.10)

y (4.11), se tiene que

$$\begin{aligned}
Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}^s) &= \\
&\sum_{F \subset N \setminus \{i\}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} \left(\sum_{k: P(\tilde{E}^k(s)) \subset F \cup \{i\}} r(e_k(s)) - \sum_{k: P(\tilde{E}^k(s)) \subset F} r(e_k(s)) \right) = \\
&\sum_{\substack{F \subset N \setminus \{i\} \\ w_p \in F}} \frac{|F|! |N \setminus (F \cup \{i\})|!}{|N|!} \sum_{k: P(\tilde{E}^k(s)) \subset \{w_p, i\}} r(e_k(s)) = \\
&\frac{1}{2} \sum_{k: P(e_k(s))=i} r(e_k(s)) = \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(\tilde{E}^k(s)))}{2} r(e_k(s)), \tag{4.49}
\end{aligned}$$

donde $\tilde{E}^k(s) = \{e_0(s), e_k(s)\}$. ■

Corolario 4.2. Dado un juego dinámico $(N, \tilde{V}) \in DD_{13}^N$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, \tilde{V}) viene dado por

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\chi(\{i\}, P(\tilde{E}^k(s)))}{2} r(e_k(s)). \tag{4.50}$$

Demostración:

Esta demostración se sigue directamente del teorema 4.2, las expresiones (4.10) y (4.11), y de la propiedad de aditividad del valor Shapley (Shapley 1953). ■

Primero, téngase en cuenta que el sitio web de contenidos de vídeo W está nuevamente representado por tres jugadores, $\{w_p, w_s, w_r\}$, por lo tanto, se tiene lo mismo que en el juego anterior. En segundo lugar, en este caso sólo se tiene en cuenta la plataforma, w_p y el evento correspondiente al asignar los ingresos, es decir, ninguna otra información relacionada con el momento en que ocurrió un evento se considera en la definición de los juegos \tilde{V} .

Algunos comentarios finales sobre el valor de Shapley para estos juegos son los siguientes. Primero, los valores de Shapley en el tiempo para los juegos V y \tilde{V} se pueden derivar fácilmente considerando la ventana de tiempo $]0, +\infty[$. Los juegos V y \tilde{V} son convexos en el tiempo, por lo tanto, sus valores de Shapley en el tiempo pertenecen a sus respectivos núcleos en el tiempo. Esto significa que el valor de Shapley en el tiempo satisface la propiedad de estabilidad. Además, el valor de Shapley de ventana temporal satisface todas las propiedades enumeradas en la sección 4.6.

Teorema 4.3. El valor de Shapley de ventana temporal satisface las propiedades de eficiencia, simetría, jugador nulo, monotonía, estabilidad, separabilidad temporal y separabilidad en sesiones en la clase de los juegos dinámicos DD_{12} .

Demostración:

- El valor de Shapley de ventana temporal satisface las propiedades de eficiencia, simetría y jugador nulo porque el valor de Shapley satisface esas tres propiedades (Shapley 1953).
- Puesto que el valor de Shapley satisface la propiedad de monotonía fuerte (Young 1985), entonces el valor de Shapley de ventana temporal satisface la propiedad de monotonía.
- El valor de Shapley de ventana temporal satisface las propiedades de separabilidad temporal y separabilidad en sesiones porque el valor de Shapley satisface la propiedad de aditividad (Shapley 1953).
- La propiedad de estabilidad la satisface porque los juegos en DD_{12} son convexos y el valor de Shapley pertenece al núcleo en juegos convexos (Shapley 1971).

■

Finalmente, para el juego \tilde{V} , no se pueden decir muchas más cosas pero, como se verá en las siguientes subsecciones, para el juego V se pueden tener en cuenta otros elementos al definir las reglas de asignación. Estas serán variaciones en la estructura del valor de Shapley de esta subsección, es decir, se definen en función de la estructura del valor de Shapley pero considerando más información.

4.7.2 Otro valor no atenuado en el tiempo

En primer lugar, se comienza con reglas de reparto en las que la asignación de ingresos a los jugadores no depende del momento en que aparecen en una sesión, es decir, no están atenuados en el tiempo. Se observa que este enfoque sólo se puede adoptar en los juegos dinámicos V , puesto que en los juegos \tilde{V} se considera escasa información en su definición como para definir nuevas reglas de asignación basadas en la estructura del valor de Shapley.

Obsérvese que la información no utilizada en la definición del valor de Shapley es la cantidad de veces que se ven los eventos que pertenecen a un

mismo jugador. Si se tiene en cuenta esa información, se puede definir una nueva regla de reparto basada en la estructura del valor de Shapley de la siguiente manera. Primero, para los juegos de sesión (N, V^s) , la nueva regla de ventana de tiempo se define, para cada $i \in W \cup C$, por

$$ES_i^{]t_1, t_2]}(N, V^s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s \notin S(]t_1, t_2]) \\ \sum_{k=1}^{n_s} \frac{|E_i^k(s)|}{k+1} r(e_k(s)), & \text{if } s \in S(]t_1, t_2]) \end{cases} \quad (4.51)$$

donde $E_i^k(s) \subset E^k(s)$ es el conjunto de todos los eventos en $E^k(s)$ que pertenecen a i .

Sumando (4.51) para cada sesión en la ventana temporal $]t_1, t_2]$, se define el valor de evento-Shapley de ventana temporal tal y como se establece en la siguiente definición.

Definición 4.1. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DD_{12}^N$, su *valor de evento-Shapley de ventana temporal* viene dado, para cada jugador $i \in W \cup C$, por

$$ES_i^{]t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{|E_i^k(s)|}{k+1} r(e_k(s)), \quad (4.52)$$

donde $E_i^k(s) \subset E^k(s)$ es el conjunto de los eventos en $E^k(s)$ que pertenecen al canal i .

Nótese que la principal diferencia de esta nueva regla con respecto al valor de Shapley de ventana temporal es que el primero tiene en cuenta el número de veces que aparece un jugador en cada sesión y el segundo simplemente si aparece o no. El valor de evento-Shapley de ventana temporal hereda todas las propiedades del valor de Shapley de ventana de temporal excepto la propiedad de simetría. Del mismo modo, se puede definir el *valor de evento-Shapley en el tiempo* simplemente considerando la ventana de tiempo $]0, +\infty[$.

Con respecto a las propiedades, el valor de Shapley de ventana temporal satisface todas las propiedades enumeradas en la sección 4.6, mientras que la regla introducida en esta subsección no satisface la propiedad de simetría, por lo que la definición de esta regla no parece mejorar el valor de Shapley de ventana temporal. Sin embargo, hay una propiedad que no satisface el valor de Shapley de ventana temporal, pero la regla introducida en esta subsección sí satisface: la propiedad de la no manipulabilidad en el contexto de los juegos dinámicos de eventos discretos. Esta propiedad dice que si un canal toma la decisión de dividirse en varios canales o varios canales toman la decisión de

unirse en sólo uno, el resultado agregado para ellos sería el mismo. Antes de introducir formalmente la propiedad, se necesita la siguiente notación, dado un juego $(N, V) \in DD_{12}$, se denota por $v(i)$ el conjunto de todos los vídeos del canal i .

- No manipulabilidad (NM). Un valor de ventana temporal Φ satisface la propiedad de no manipulabilidad, si dados dos juegos $(N, V), (N', V') \in DD_{12}$, tal que $N' \subset N$ y existe un canal de vídeo $i \in N'$ tal que $v'(i) = v(i) \cup v(N \setminus N')$, y para todo $j \in N' \setminus i$, $v'(j) = v(j)$, entonces

$$\phi_i(N', V') = \phi_i(N, V) + \sum_{j \in N \setminus N'} \phi_j(N, V). \quad (4.53)$$

Obsérvese que, en la definición de la propiedad de la no manipulabilidad, se supone que las sesiones y los ingresos generados por cada evento son los mismos en ambos juegos. La única diferencia entre los juegos (N, V) y (N', V') es los propietarios de los eventos (vídeos). Además, esta propiedad sólo se da para el contexto de juegos dinámicos de eventos discretos, es decir, no es una propiedad general para los juegos dinámicos dados en la subsección 2.5.

Un comentario final es que, en el contexto de los juegos dinámicos DD_{13} , el valor de Shapley de ventana temporal también satisface la propiedad de no manipulabilidad, puesto que sólo se tienen en cuenta la plataforma y el contenido visto.

4.7.3 Una familia de reglas atenuadas en el tiempo

En las subsecciones anteriores se han introducido reglas de asignación en las que, al distribuir los ingresos generados por un evento entre todos los jugadores, sólo se tuvo en cuenta si los jugadores estaban antes o después del evento para considerar si participaron en la generación de esos ingresos y, por lo tanto, debían participar en su reparto. Sin embargo, la distancia de los jugadores al evento en cuestión no fue relevante al determinar la asignación de los ingresos, es decir, el evento más alejado se consideraba tan relevante como el inmediatamente anterior al contenido visto. Sin embargo, parece razonable pensar que si un jugador está muy lejos del evento del cual se distribuyen los ingresos, su influencia será cada vez más débil, es decir, cuanto más lejano, menor influencia. Por lo tanto, al distribuir los ingresos generados en un evento en particular, parece razonable que esto se tenga en cuenta. Si se acepta este argumento, entonces se tiene que decidir cómo se debilita la influencia de un jugador a medida que se aleja del evento del que se comparten

los ingresos. Para este propósito, primero se presentan las que se van a denominar funciones de atenuación.

Definición 4.2. Una *función de atenuación discreta* α es una aplicación del conjunto de enteros no negativos, \mathbb{Z}_+ , al intervalo $[0, 1]$, tal que

1. $\alpha(0) = 1$, y
2. $\alpha(k) \leq \alpha(k-1), \forall k \geq 1$.

La función alfa describe cómo la influencia de los jugadores se atenúa con la distancia al evento en cuestión. Primero, para los juegos (N, V^s) , la nueva regla de ventana temporal con función de atenuación α se da para cada $i \in W \cup C$ por

$$ES_i^{\alpha,]t_1, t_2]}(N, V^s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s \notin S(]t_1, t_2]) \\ \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\sum_{e_l(s) \in E_i^k(s)} \delta_k^\alpha(k-l)\alpha(k-l)}{\sum_{j=0}^k \delta_k^\alpha(k-j)\alpha(k-j)} r(e_k(s)), & \text{if } s \in S(]t_1, t_2]) \end{cases} \quad (4.54)$$

donde $\delta_k^\alpha(k) = \frac{1}{\alpha(k)}$, y 1 en otro caso; y $E_i^k(s) \subset E^k(s)$ es el conjunto de todos los eventos en $E^k(s)$ que pertenecen a i .

Si se observa con detenimiento la expresión (4.54), se observa que el sumando correspondiente al jugador w_p siempre es 1, tanto en el denominador como cuando aparece en el numerador. Con esto se asume que la distancia entre cualquier evento y la plataforma siempre es cero, lo que parece razonable ya que el evento puede ocurrir porque la plataforma está funcionando en ese momento. Esto se consigue mediante la función δ_k^α puesto que para el resto de jugadores es obvio que no tiene ningún efecto porque vale 1.

Ahora, si se suma la ecuación (4.54) para cada una de las sesiones en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$, se define el valor de evento-Shapley de ventana temporal con función de atenuación α o simplemente el valor α -Shapley de ventana temporal.

Definición 4.3. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DD_{12}^N$ y una función de atenuación α , se define el *valor α -Shapley de ventana temporal* del juego, para cada jugador $i \in W \cup C$, como

$$ES_i^{\alpha,]t_1, t_2]}(N, V^s) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\sum_{e_l(s) \in E_i^k(s)} \delta_k^\alpha(k-l)\alpha(k-l)}{\sum_{j=0}^k \delta_k^\alpha(k-j)\alpha(k-j)} r(e_k(s)), \quad (4.55)$$

donde $\delta_k^\alpha(k) = \frac{1}{\alpha(k)}$, y 1 en otro caso; y $E_i^k(s) \subset E^k(s)$ es el conjunto de todos los eventos en $E^k(s)$ que pertenecen a i .

Obviamente, se pueden definir muchas funciones de atenuación diferentes, un ejemplo sencillo podría ser $\alpha(k) = \frac{1}{k+1}$, $k \geq 1$, pero ahora se pone el foco en un tipo especial: la *familia de funciones de atenuación exponencial*. Un miembro general de esta familia se define de la siguiente manera:

$$\beta(k) = \theta^k, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.56)$$

donde $\theta \in [0, 1]$.

Si se asume que $0^0 = 1$, entonces cuando $\theta = 0$, se obtiene el valor de Shapley de ventana temporal dado por (4.50), es decir, que se estaría en la situación descrita por los juegos en DD_{13} ; y cuando $\theta = 1$, se obtiene el valor de evento-Shapley de ventana temporal dado por (4.51). Por lo tanto, se tienen dos polos o extremos, desde que todos los jugadores son irrelevantes en la generación de ingresos excepto la plataforma y el jugador que posee el correspondiente vídeo visto ($\theta = 0$), hasta que todos los jugadores son igualmente relevantes en la generación de ingresos en el evento en cuestión ($\theta = 1$). En este sentido, el parámetro θ da una medida de la relevancia que tiene la proximidad de un evento al momento en el que se genera el ingreso. Esto resulta interesante porque permite tener en la misma familia ambos extremos. Sin embargo, el valor de Shapley de ventana temporal dado por la expresión (4.46) no se puede obtener con ningún valor de $\theta \in [0, 1]$. De hecho, no se puede obtener a partir de ninguna función de atenuación α . Por lo tanto, por una parte, se tiene el valor de Shapley de ventana temporal dado por la expresión (4.46), y, por otra parte, la familia de valores β -Shapley de ventana temporal con funciones de atenuación exponenciales.

Finalmente, todas las reglas con atenuación en el tiempo introducidas en esta subsección satisfacen las mismas propiedades que el valor de evento-Shapley de ventana temporal. Por lo tanto, también son buenas candidatas a ser utilizadas como mecanismos de reparto de los ingresos generados en una plataforma de vídeos en Internet.

4.8 Algoritmo para la computación de las reglas de asignación

Es conocido que una de las mayores desventajas de las soluciones para los juegos cooperativos es su complejidad computacional, generalmente del tipo exponencial, es decir, $O(a^{|N|})$, $a > 1$, donde $|N|$ es el número de jugadores involucrados en el juego cooperativo. Sin embargo, como se ha visto anteriormente, la estructura del problema permite obtener asignaciones de los ingresos de una manera intuitiva y simple, en particular, se han obtenido

4.8. Algoritmo para la computación de las reglas de asignación 77

expresiones simples para el valor de Shapley y reglas de asignación similares a la de Shapley, que permiten sus cálculos de manera eficiente. Un análisis más detallado de las fórmulas obtenidas para el valor de Shapley y las reglas de asignación de tipo Shapley permite concluir que, dada $S(t_1, t_2)$, sus complejidades computacionales son de tipo polinómico, en particular, como máximo $O(SK^2)$, donde S es el número de sesiones en $S(t_1, t_2)$ y K es el número máximo de eventos de una sesión en $S(t_1, t_2)$. Por lo tanto, se obtiene una gran mejora desde el punto de vista computacional, haciendo que estas soluciones sean adecuadas, no solo desde la perspectiva de la equidad y su buen comportamiento con respecto a una gran cantidad de propiedades, sino también desde el punto de vista de su computación en un tiempo razonable.

A continuación se muestra cómo funcionaría un posible algoritmo y su complejidad computacional, en el caso de aplicar una regla de asignación atenuada con el tiempo. Para el resto de los valores y reglas introducidas en este capítulo de la tesis doctoral, el algoritmo sería esencialmente el mismo, cambiando sólo el primer paso, que se corresponde con la construcción de una matriz para la que cada una de sus columnas está asociada a un evento y en ella se refleja la relevancia de cada evento anterior a él, a esta matriz se le llamará *matriz de relevancia*.

Cuando se inicia una sesión s , se genera una matriz que expresa la relevancia de un evento en los ingresos generados en eventos sucesivos. Por ejemplo, para una función de atenuación discreta α y el evento k -ésimo de la sesión, se agregaría la siguiente columna a la matriz de relevancia:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \alpha(k-1) \\ \alpha(k-2) \\ \vdots \\ \alpha(0) \end{array} \quad (4.57)$$

Al mismo tiempo se va generando un *vector columna de ingresos* para los eventos que van ocurriendo en la sesión, donde la k -ésima celda se corresponde con el ingreso generado durante el evento k -ésimo de la sesión. Por lo tanto, con cada evento se añade una columna a la matriz de relevancia y una fila al vector columna de ingresos.

Cuando termina la sesión, las celdas no asignadas de la matriz de relevancia se completan con ceros. Por lo tanto, al final de la sesión tenemos la siguiente matriz de relevancia y vector de ingresos:

$$\Lambda^s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha(0) & \alpha(1) & \cdots & \alpha(n_s - 2) & \alpha(n_s - 1) \\ 0 & \alpha(0) & \cdots & \alpha(n_s - 3) & \alpha(n_s - 2) \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha(n_s - 4) & \alpha(n_s - 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha(0) \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\Gamma^s = \begin{pmatrix} r(e_1(s)) \\ \vdots \\ r(e_{n_s}(s)) \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Por lo tanto, la matriz de relevancia tiene $n_s + 1$ filas y n_s columnas, y el vector de ingresos tiene n_s filas y sólo una columna.

Este procedimiento toma una serie de operaciones elementales proporcionales al producto $n_s(n_s + 1)$, donde n_s es el número de eventos de la sesión.

El segundo paso consiste en dividir cada una de las celdas de la matriz de relevancia por la suma de los valores en las celdas de la columna a la que pertenece. Esto da una matriz de pesos. Por ejemplo, la celda (i, j) de la matriz de pesos vendría dada por

$$\omega_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}^s}{\sum_{h=1}^{n_s+1} \Lambda_{hj}^s}, \quad (4.60)$$

donde Λ_{hj}^s es el valor de la celda (h, j) .

Este procedimiento toma nuevamente una serie de operaciones elementales que son proporcionales a $n_s(n_s + 1)$.

El tercer paso consiste simplemente en multiplicar la matriz de pesos por el vector de ingresos. Esto también requiere una serie de operaciones elementales proporcionales a $n_s(n_s + 1)$. El paso final es asignar las celdas de la última matriz a cada jugador, donde posiblemente más de una celda pueda corresponder al mismo jugador. Esto requiere una serie de operaciones elementales que son proporcionales a $n_s + 1$.

Ahora es fácil concluir que este algoritmo tiene una complejidad computacional $O(n_s^2)$. Por lo tanto, cuando se considera una ventana de tiempo $[t_1, t_2]$, la complejidad computacional será como máximo $O(SK^2)$, donde S es el número de sesiones en $S(t_1, t_2)$ y K es el número máximo de eventos de una sesión en $S(t_1, t_2)$, como se señaló anteriormente.

Este algoritmo muestra que los valores y las reglas de asignación introducidas en este capítulo se pueden calcular en tiempo real y, por lo tanto, se

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
s_1	w_p	w_s	1	w_r	2	w_r	1	w_r	3	w_r	2
s_2	w_p	3	w_r	1	1	w_r	2	w_r	2	w_s	–
s_3	w_p	w_s	2	2	w_r	3	w_r	1	1	–	–

Table 4.1: Eventos y jugadores asociados con cada sesión.

pueden adaptar a la dinámica del tiempo de uso del sitio web de vídeos. Por lo tanto, el enfoque dado a la asignación de ingresos basado en juegos cooperativos es adecuado para la situación dinámica real que describe la operación de un sitio web de vídeos.

4.9 Ejemplos ilustrativos

Aunque, a partir de la estructura de los valores y de las reglas de asignación introducidas en este capítulo, se puede deducir quién sale mejor parado con qué reglas, en esta sección se proporcionan algunos ejemplos académicos para ilustrar las diferencias que existen entre los diferentes valores y reglas introducidas.

Considérese una ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ durante la cual las tres sesiones dadas en la tabla 4.1 finalizan, y para simplificar, se asume que los eventos asociados con el jugador 1 siempre generan un ingreso de 3 unidades monetarias (u.m.), los eventos asociados con el jugador 2 un ingreso de 6 u.m., los eventos asociados con el jugador 3 de 9 u.m., los eventos asociados con el jugador w_r de 1 u.m., y el resto de los eventos nada en absoluto.

Se comienza por mostrar el cálculo del valor de Shapley de ventana temporal del juego dinámico V . Para ello se ilustra cómo se realizaría el cálculo para la sesión s_3 , para las otras dos sesiones se haría exactamente igual. La asignación del ingreso para la sesión s_3 viene dada por

$r(e_k(s_3))$	0	0	6	6	1	9	1	3	3	Total
w_p	0	0	2	2	0.25	1.8	0.2	0.5	0.5	7.25
w_s	0	0	2	2	0.25	1.8	0.2	0.5	0.5	7.25
w_r	0	0	0	0	0.25	1.8	0.2	0.5	0.5	3.25
1	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	1
2	0	0	2	2	0.25	1.8	0.2	0.5	0.5	7.25
3	0	0	0	0	0	1.8	0.2	0.5	0.5	3

El valor de Shapley de ventana temporal y el ingreso generado por cada jugador en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ son las siguientes:

4. Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos discretos

80

Jugadores	w_p	w_s	w_r	1	2	3
$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V)$	22.55	13.37	13.05	11.47	14.72	14.85
Ingresos	0	0	9	18	36	27

Ahora se consideran los siguientes miembros de la familia de reglas con funciones de atenuación exponencial: $\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, las cuales se corresponden con el valor de Shapley de ventana temporal del juego \tilde{V} , los valores $\frac{a}{b}$ -Shapley de ventana temporal, y el valor de evento-Shapley de ventana temporal, respectivamente. Esta elección permite mostrar convenientemente todos los tipos de reglas introducidas en este capítulo. A continuación se muestra la asignación de ingresos aplicando la reglas mencionadas y el ingreso directo generado durante la ventana de tiempo en cuestión.

Jugadores	w_p	w_s	w_r	1	2	3
$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V)$	22.55	13.37	13.05	11.47	14.72	14.85
$\theta = 0$	45.00	0.00	4.50	9.00	18.00	13.50
$\theta = 1/4$	39.42	1.26	9.86	9.42	17.13	12.91
$\theta = 1/2$	32.75	3.05	14.33	10.60	16.76	12.49
$\theta = 3/4$	25.38	6.06	17.43	12.27	16.74	12.12
$\theta = 1$	18.87	10.87	18.11	13.64	16.53	12.00
Ingresos	0.00	0.00	9.00	18.00	36.00	27.00

Se puede observar que los ingresos asignados al jugador 1 aumentan y los ingresos asignados a los jugadores 2 y 3 disminuyen de $\theta = 0$ a $\theta = 1$. Esto sucede porque el jugador 1 está más veces ubicado antes en los eventos de las sesiones que los otros dos y esto le favorece cuando la influencia no se atenúa con la distancia en el tiempo. Lo mismo ocurre con w_s y w_r . Los ingresos asignados al jugador w_p disminuyen de $\theta = 0$ a $\theta = 1$ porque su distancia al evento siempre es cero, por lo que si hay otros que aumentan su influencia a ella le perjudica. También se observa que el valor de Shapley de ventana temporal del juego V tiene un comportamiento bastante diferente al de las otras reglas de asignación.

A continuación, se analiza por simulación el comportamiento de las reglas de asignación para sesiones con 5, 10, 15 y 20 eventos. Para esto, se consideran las ventanas de tiempo con 100 sesiones, todas ellas con el mismo número de eventos. Y se replica esto 10 veces. En total se consideran 10 ventanas de tiempo con 100 sesiones cada una, para sesiones de 5, 10, 15 y 20 eventos, respectivamente.

El comportamiento de los usuarios en el sitio web de vídeos se describe con el siguiente vector I que indica dónde comienzan los usuarios sus sesiones,

$$I = \begin{pmatrix} Pr(w_s) \\ Pr(w_r) \\ Pr(1) \\ Pr(2) \\ Pr(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.13 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.12 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

y la siguiente matriz de transición M que muestra cómo los usuarios cambian de un canal a otro, recuérdese que los eventos son identificados con los jugadores (canales y plataforma):

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & w_s & w_r & 1 & 2 & 3 \\ \hline w_s & 0.10 & 0.40 & 0.20 & 0.20 & 0.10 \\ w_r & 0.00 & 0.00 & 0.40 & 0.40 & 0.20 \\ 1 & 0.10 & 0.50 & 0.40 & 0.00 & 0.00 \\ 2 & 0.10 & 0.50 & 0.00 & 0.40 & 0.00 \\ 3 & 0.10 & 0.70 & 0.00 & 0.00 & 0.20 \end{array} \quad (4.62)$$

El vector I dado por (4.61) y la matriz de transición M dada por (4.62) muestran que los canales 1 y 2 deben tener aproximadamente el doble de vídeos que el canal 3, y se considera que el interés de los vídeos para los usuarios es el mismo, es decir, no hay vídeos de un canal que sean más atractivos que los vídeos de otro canal.

Finalmente, los ingresos directos generados por cada evento dependiendo de a quién pertenece son los mismos que en el primer ejemplo, es decir, los eventos asociados con el jugador 1 generan un ingreso de 3 u.m., los eventos asociados con el jugador 2 de 6 u.m., los eventos asociados con el jugador 3 de 9 u.m., los eventos asociados con el jugador w_r de 1 u.m. y el resto de los eventos nada.

A continuación, se lleva a cabo la simulación para el valor de Shapley de ventana temporal del juego V y, como antes, para los siguientes miembros de la familia de reglas atenuadas en el tiempo con función exponencial: $\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, las cuales, recordemos, se corresponden con el valor de Shapley de ventana temporal del juego \tilde{V} , los valores $\frac{a}{b}$ -Shapley de ventana temporal, y el valor de evento-Shapley de ventana temporal, respectivamente. Los resultados de la simulación se presentan en términos de la proporción del ingreso total que cada jugador obtiene.

En la figura 4.4 se muestra la proporción de los ingresos que cada jugador obtiene para las sesiones de tamaños 5 a 20 eventos. Se observa que para los canales es más beneficioso tener más vídeos que menos vídeos pero que

4. Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos discretos

82

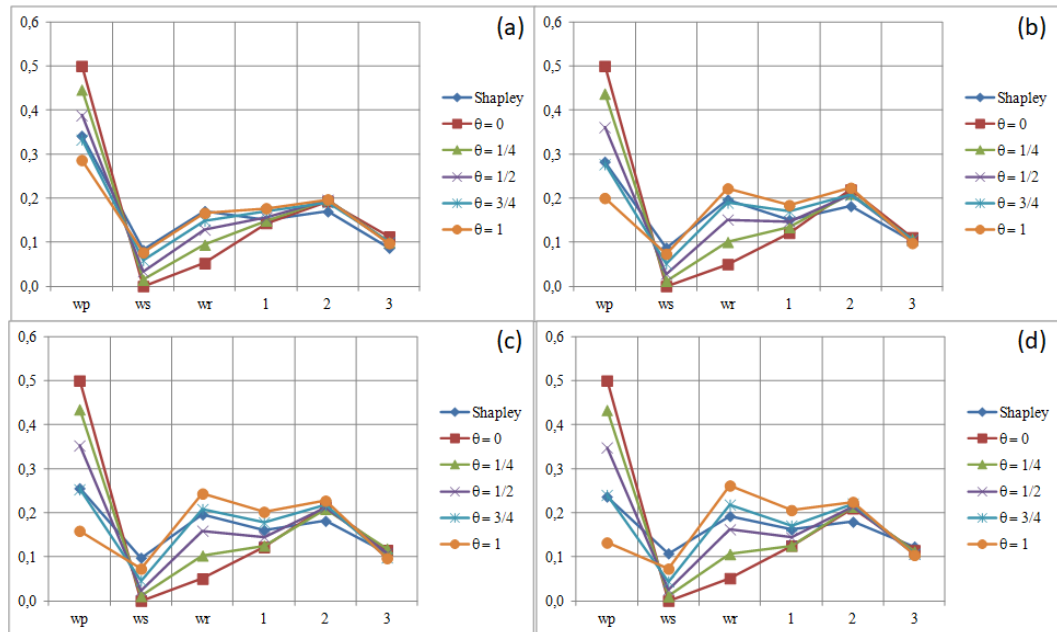


Figure 4.4: Asignaciones promedio para las sesiones con (a) 5, (b) 10, (c) 15, y (d) 20 eventos.

generan más ingresos. Por ejemplo, si se comparan los canales 1 y 3, sabemos que el canal 1 debe tener el doble de vídeos que el canal 3, pero los vídeos del canal 3 generan el triple de ingresos que los vídeos del canal 1, sin embargo, el canal 1 siempre obtiene en promedio una asignación mayor de ingresos que el canal 3 en todos los escenarios. Asimismo, se observa que la distribución de las asignaciones promedio es similar en todos los escenarios.

Por otra parte, la proporción promedio de los ingresos asignados a la plataforma (w_p, w_r, w_s) decrece con el número de eventos de las sesiones cuando las reglas introducidas en este capítulo son implementadas (véase la figura 4.5). Además, se puede observar que el valor 0-Shapley de ventana temporal y el valor $\frac{1}{4}$ -Shapley de ventana temporal parecen los más beneficiosos para la plataforma, en general. Asimismo, las reglas más sensibles a la longitud de las sesiones son el valor de Shapley de ventana temporal y los valores de Shapley con funciones de atenuación exponenciales con parámetros $\theta > \frac{1}{2}$ (véase la figura 4.4).

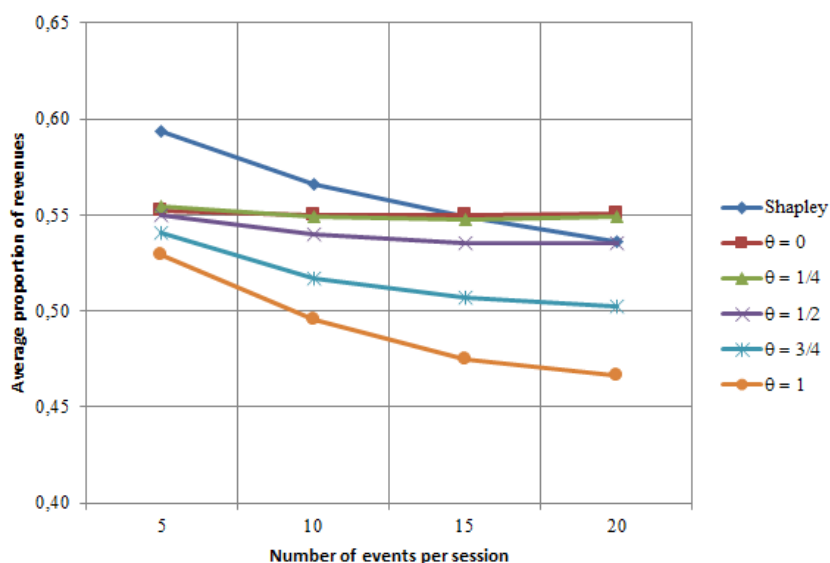


Figure 4.5: Proporción promedio de ingresos asignada a la plataforma.

4.10 Conclusiones

En este capítulo se ha analizado un sistema de sitios web de vídeo como un mercado con múltiples partes. En particular, se ha estudiado cómo distribuir los ingresos generados en el sistema entre todas las partes interesadas que contribuyen a él, específicamente a la plataforma y a los creadores de contenido. Para este propósito, se ha introducido un modelo dinámico de generación de ingresos y asociados con él, se han definido dos juegos dinámicos diferentes de acuerdo con varios supuestos. Para estos juegos se han determinado sus valores de Shapley. Basado en la estructura del valor de Shapley, se han introducido nuevas reglas de asignación. En particular, otra regla no atenuada en el tiempo y una familia de reglas atenuadas en el tiempo. Todas las reglas introducidas en este capítulo, incluido el valor de Shapley, satisfacen un conjunto de propiedades de equidad que las hace razonablemente adecuadas para aplicarse en el problema de asignación de ingresos.

Por otro lado, otro aspecto novedoso de este capítulo de la tesis doctoral; además del modelo dinámico de generación de ingresos ya mencionado en un sistema de contenidos de vídeo en Internet, los juegos dinámicos asociados y las reglas de asignación introducidas; es el hecho de combinar las ideas de los juegos cooperativos dinámicos y los problemas de atribución para abordar el problema de la distribución de ingresos en un sistema de vídeos en Internet, considerando la influencia de cada uno de los eventos en la ruta de navegación

de los usuarios en el sistema y no sólo el evento concreto que genera ingresos.

Además, se ha implementado un algoritmo de tiempo polinómico para calcular todas las reglas de asignación introducidas en el capítulo, que muestra que los resultados son completamente aplicables a un sistema real. Además, se presenta cierta experiencia computacional de simulación para ilustrar el desempeño de las reglas de asignación introducidas.

Finalmente, nos gustaría llamar la atención sobre las reglas que incorporan atenuación con el tiempo, porque en esta tesis doctoral se ha considerado la atenuación teniendo en cuenta cuantos eventos han transcurrido hasta un instante determinado, pero no cuánto tiempo. En este punto, parece interesante considerar otros modelos que tienen en cuenta cuánto dura cada uno de los eventos porque en muchos casos podría no ser lo mismo que un evento dure 5 minutos o 15 minutos. Por lo tanto, sería interesante para una mayor investigación estudiar modelos dinámicos que tengan en cuenta la duración de cada evento o incluso modelos dinámicos continuos. Este enfoque es el que se presenta en el capítulo siguiente de esta tesis doctoral.

Capítulo 5

Asignación de ingresos en una plataforma de vídeo. Caso dinámico de eventos continuos

En este capítulo se lleva a cabo una extensión de los resultados obtenidos en el capítulo anterior cuando se tienen en cuenta no sólo si un vídeo es visionado o no por un usuario sino que también se hace uso del tiempo que dicho usuario está visionando el vídeo. De este modo, se analiza un nuevo modelo de generación dinámica de ingresos para eventos continuos para abordar el problema de asignación de dichos ingresos entre las partes involucradas en el sistema.

5.1 Introducción

Este capítulo es una continuación del análisis llevado a cabo en el anterior. La única diferencia reside en la consideración que se le da al tiempo de uso o visionado en la generación de contenidos. En el capítulo anterior se consideró que la generación de ingresos se producía en cada evento de una sesión de un usuario navegando por la plataforma web de contenidos de vídeo. El paso natural siguiente es considerar el tiempo como un elemento relevante en la generación de ingresos, porque parece que no es lo mismo visionar un anuncio 3 minutos que 5 minutos, puesto que un mayor tiempo de visionado puede hacer que el anuncio tenga más impacto en el usuario que lo ve. En este sentido, en un modelo continuo se modela de forma más precisa cómo se genera el ingreso. En las secciones siguientes se trata de modelar a través

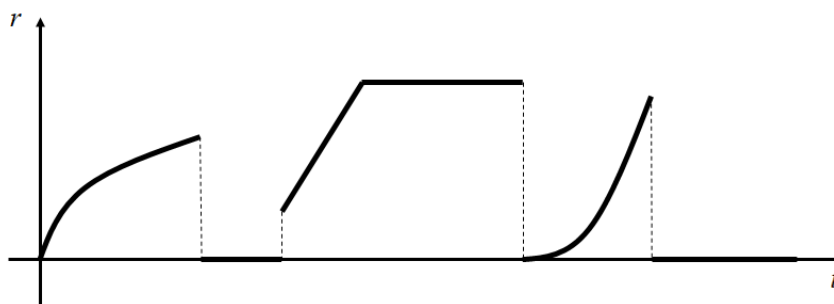


Figure 5.1: Ejemplo de una función de generación de ingresos continua a trozos.

de juegos cooperativos la dinámica continua en la generación de ingresos en una plataforma web de vídeos y cómo definir mecanismos para asignar los ingresos a las partes involucradas de la forma más ecuánime posible.

Las secciones siguientes siguen un desarrollo paralelo al llevado a cabo en el caso de evento discreto del capítulo anterior.

5.2 Modelo dinámico continuo de generación de ingresos

Dada una sesión s , se denota por $t_0(s)$ el instante tiempo en el que comienza la sesión por el usuario, y por $t_f(s)$ el instante en el que finaliza la sesión. La función de densidad del ingreso¹ asociada con la sesión s se denotará por $r(s, t)$, tal que $r(s, t) \geq 0$ para todo instante de tiempo t . Esta función de densidad del ingreso describe cómo se genera el ingreso durante una sesión s . De este modo, se muestra cómo se produce la generación del ingreso en la sesión a lo largo del tiempo. Por supuesto, $r(s, t) = 0$ cuando $t \notin [t_0(s), t_f(s)]$. Se asume, asimismo, que las funciones de densidad de ingresos son acotadas y continuas a trozos, es decir, estas funciones son continuas excepto en un número finito de puntos y sin ramas parabólicas (véase la figura 5.1).

Ahora, el ingreso generado por una sesión particular s viene dado por

$$R(s) = \int_0^{+\infty} r(s, t) dt = \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} r(s, t) dt. \quad (5.1)$$

¹Aquí se toma prestado el nombre de función de densidad del Cálculo de Probabilidades, porque de alguna manera se quiere indicar que los ingresos se generan cuando el usuario está un tiempo visualizando el contenido con los anuncios insertados o pagando y que en cada instante puede ser diferente, siendo relevante el tiempo continuado de visionado.

Y el ingreso obtenido por todas las sesiones que finalizaron en el intervalo de tiempo $]t_1, t_2]$, $S(t_1, t_2)$, vendrá dado por

$$R(t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} r(s, t) dt. \quad (5.2)$$

En este modelo, el ingreso total generado en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ es también sencillo de describir, porque se sabe cómo el ingreso es generado en cada instante de tiempo. Este ingreso viene dado por

$$R^*(t_1, t_2) = \sum_{s \in S^*(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} r(s, t) dt, \quad (5.3)$$

donde $S^*(t_1, t_2)$ es el conjunto de sesiones activas en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$.

Obsérvese que la principal diferencia que hay entre el modelo discreto de generación de ingresos estudiado en el capítulo anterior y el modelo continuo de generación de ingresos descrito en esta sección es, simplemente, cómo se acumulan los ingresos. En el primer caso, se consideran los ingresos generados por cada vídeo o servicio del sistema, mientras que en el segundo caso se considera una función de la generación temporal de los ingresos. Por supuesto, el ingreso total generado en una ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ es el mismo. Sin embargo, el segundo modelo proporciona más información, porque muestra cómo se generan los ingresos en cada momento de la sesión (o sesiones, si se considera la suma de todas las funciones en cada instante). No obstante, desde un punto de vista agregado, ambos proporcionan la misma información. Sin embargo, en el modelo continuo se tiene la posibilidad de determinar la cantidad de ingreso generada en cada ventana de tiempo (véase la expresión (5.3)) y no sólo la agregada hasta ese momento por cada sesión.

5.3 Juegos dinámicos de eventos continuos

Como en el caso discreto, se pueden definir dos juegos diferentes basados en las suposiciones (véase la sección 4.4). De este modo, cuando se consideran las suposiciones 4.1 y 4.2, la función característica, V , vendrá dada para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ por

$$V(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s|F) \quad (5.4)$$

donde

$$R(s|F) = \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F)r(s, t)dt. \quad (5.5)$$

donde $v(s, t) = \{P(e_i(s))|e_i(s) \text{ ha sido visitado hasta el instante } t\}$ y

$$\chi(K, F) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \subset F, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Obsérvese que w_p siempre pertenece a $v(s, t)$ por la propia definición del funcionamiento de la plataforma de vídeos.

La familia de todos estos juegos dinámicos con conjunto de jugadores N se denota por DC_{12}^N , y la familia de todos estos juegos se denota simplemente por DC_{12} .

Sin embargo, bajo las suposiciones 4.1 y 4.3, la función característica, \tilde{V} , vendrá dada, para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $[t_1, t_2]$, por la expresión

$$\tilde{V}(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \tilde{R}(s|F) \quad (5.7)$$

donde

$$\tilde{R}(s|F) = \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\{w_p\}, F)\chi(act(s, t), F)r(s, t)dt. \quad (5.8)$$

donde $act(s, t) = \{P(e_i(s))|e_i(s) \text{ es visitado en el instante } t\}$.

La familia de todos estos juegos dinámicos con conjunto de jugadores N se denota por DC_{13}^N , y la familia de todos estos juegos es denotada simplemente por DC_{13} .

Como en el caso discreto, se tienen los siguientes resultados para las dimensiones coalicional y temporal de estas funciones características.

Proposición 5.1. Los juegos en DC_{12} , y DC_{13} son convexos en el tiempo.

Demostración:

En primer lugar, obsérvese que si el número de sumandos de una suma es vacío, entonces la suma es 0 y si los extremos de una integral coinciden también su valor se considera igual a 0.

Sea $(N, V) \in DC_{12}$, y $F \subset G \subset N \setminus \{i\}$. Por (5.4) y (5.5), se tiene que

$$V(F \cup \{i\}, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F \cup \{i\}) r(s, t) dt, \quad (5.9)$$

$$V(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.10)$$

En primer lugar, obsérvese que si $\chi(v(s, t'), F) = 0$ para algún t' , entonces $\chi(v(s, t), F) = 0$ para todo $t \geq t'$, puesto que $v(s, t') \subset v(s, t)$. Además, desde que $F \subset F \cup \{i\}$, se tiene que $\chi(v(s, t), F) \leq \chi(v(s, t), F \cup \{i\})$ para todo t . Sea $t_i^0(s)$ el primer instante de tiempo en el que aparece el jugador i en la sesión s y sea $t_i^f(s, F)$ el primer instante de tiempo para el que $\chi(v(s, t_i^f(s, F)), F \cup \{i\}) = 0$. A continuación se define $t_i^1(s, F) = \max\{t_i^f(s, F), t_i^0(s)\}$. Por lo tanto, se tiene que

$$V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{\max\{t_0(s), t_i^0(s)\}}^{\min\{t_f(s), t_i^1(s, F)\}} \chi(v(s, t), F \cup \{i\}) r(s, t) dt. \quad (5.11)$$

Del mismo modo, se tiene que,

$$V(G \cup \{i\}, t) - V(G, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{\max\{t_0(s), t_i^0(s)\}}^{\min\{t_f(s), t_i^1(s, G)\}} \chi(v(s, t), G \cup \{i\}) r(s, t) dt. \quad (5.12)$$

Ahora, puesto que $F \cup \{i\} \subset G \cup \{i\}$, para cada sesión s , se tiene que $t_i^1(s, F) \leq t_i^1(s, G)$ y $\chi(v(s, t), F \cup \{i\}) \leq \chi(v(s, t), G \cup \{i\})$, en consecuencia, se sigue que

$$\int_{\max\{t_0(s), t_i^0(s)\}}^{\min\{t_f(s), t_i^1(s, F)\}} \chi(v(s, t), F \cup \{i\}) r(s, t) dt \leq \int_{\max\{t_0(s), t_i^0(s)\}}^{\min\{t_f(s), t_i^1(s, G)\}} \chi(v(s, t), G \cup \{i\}) r(s, t) dt \quad (5.13)$$

y, por tanto, se tiene que

$$V(F \cup \{i\}, t) - V(F, t) \leq V(G \cup \{i\}, t) - V(G, t). \quad (5.14)$$

Ahora, sea $(N, \tilde{V}) \in DC_{13}$, y $F \subset G \subset N \setminus \{i\}$. Por (5.7) y (5.8), se

cumple que,

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\{w_p\}, F \cup \{i\}) \chi(\text{act}(s, t), F \cup \{i\}) r(s, t) dt, \quad (5.15)$$

$$\tilde{V}(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\{w_p\}, F) \chi(\text{act}(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.16)$$

Por lo tanto, si $w_p \in F$, entonces

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\text{act}(s, t), \{i\}) r(s, t) dt, \quad (5.17)$$

en otro caso, se tendría que $\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = 0$.

De forma similar, si $w_p \in G$, entonces

$$\tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t) = \sum_{s \in S(t)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\text{act}(s, t), \{i\}) r(s, t) dt, \quad (5.18)$$

en otro caso, se cumpliría que $\tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t) = 0$.

Por lo tanto, se tiene que,

$$\tilde{V}(F \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(F, t) = \tilde{V}(G \cup \{i\}, t) - \tilde{V}(G, t). \quad (5.19)$$

■

Proposición 5.2. Los juegos en DC_{12} , y DC_{13} son separables en el tiempo.

Demostración:

Sean $(N, V) \in DD_{12}$, $F \subset N$, y $t_1 < t_2 \leq t_3$. Por (5.4) y (5.5), se tiene que,

$$V(F, t_1, t_3) = \sum_{s \in S(t_1, t_3)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.20)$$

Por definición de S , se verifica que $S(t_1, t_3) = S(t_1, t_2) \cup S(t_2, t_3)$, y

$S(t_1, t_2) \cap S(t_2, t_3) = \emptyset$. Por lo tanto, se tiene que,

$$V(F, t_1, t_3) = \sum_{s \in S(t_1, t_2) \cup S(t_2, t_3)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt = \quad (5.21)$$

$$\sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt + \sum_{s \in S(t_2, t_3)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt = \quad (5.22)$$

$$V(F, t_1, t_2) + V(F, t_2, t_3). \quad (5.23)$$

Para DC_{13} , la demostración es, *mutatis mutandis*, completamente análoga a la demostración para DC_{12} . ■

En el caso continuo se pueden definir dos nuevos juegos basados en la definición de R^* . De este modo, considerando las suposiciones 4.1 y 4.2, la función característica, V^* , vendrá definida para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ por la siguiente expresión

$$V^*(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S^*(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.24)$$

Y, bajo las suposiciones 4.1 y 4.3, la función característica, \tilde{V}^* , estará definida para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ por la expresión siguiente

$$\tilde{V}^*(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S^*(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} \chi(\{w_p\}, F) \chi(act(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.25)$$

Como en los casos previos, se tienen los siguientes resultados para las dimensiones coalicional y temporal de estas funciones características.

Proposición 5.3. Los juegos dinámicos cooperativos (N, V^*) y (N, \tilde{V}^*) son convexos en el tiempo.

Demostración:

Para el juego (N, V^*) , la demostración sería completamente análoga a la demostración de la proposición 5.1, cambiando únicamente los límites de las integrales por $\max\{t_1, t_i^0(s)\}$ y $\min\{t_2, t_i^1(s, F)\}$.

Y para el juego (N, \tilde{V}^*) , la demostración es análoga a la parte correspondiente de la proposición 5.1. ■

Proposición 5.4. Los juegos dinámicos cooperativos (N, V^*) y (N, \tilde{V}^*) son separables en el tiempo.

Demostración:

La demostración se sigue directamente de las propiedades de las integrales definidas. ■

5.4 Reglas para la asignación de ingresos

5.4.1 El valor de Shapley

En primer lugar, obsérvese que los juegos V y \tilde{V} pueden escribirse como la suma de los juegos asociados de las sesiones que los componen, es decir, $V = \sum_{s \in S(0, +\infty)} V^s$ y $\tilde{V} = \sum_{s \in S(0, +\infty)} \tilde{V}^s$. Ahora, desde que el valor de Shapley es aditivo (Shapley 1953), es separable en sesiones, es decir, $Sh(N, V) = \sum_{s \in S(0, +\infty)} Sh(N, V^s)$ y $Sh(N, \tilde{V}) = \sum_{s \in S(0, +\infty)} Sh(N, \tilde{V}^s)$. Los resultados siguientes muestran la expresión del valor de Shapley para las clases de juegos dinámicos DC_{12} y DC_{13} .

Teorema 5.1. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DC_{12}^N$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, V) viene dado por

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \frac{\chi(\{i\}, v(s, t))}{|v(s, t)|} r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.26)$$

Demostración:

Para demostrar el resultado, se considera el juego asociado a una sesión s en una ventana temporal $[t_1, t_2]$ y la siguiente expresión del valor de Shapley (Shapley 1953) adaptada a los juegos dinámicos en este capítulo:

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V^s) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi} (V^s(P(\pi, i) \cup \{i\}, t_1, t_2) - V^s(P(\pi, i), t_1, t_2)), \quad (5.27)$$

donde Π es el conjunto de todas las permutaciones de los jugadores en N , y $P(\pi, i)$ es el conjunto de todos los jugadores que preceden a i en la permutación π .

Ahora se analiza cuándo en una permutación π un jugador i contribuirá marginalmente con los ingresos asociados con un instante de tiempo t . La respuesta es que tal jugador i contribuirá si se dan las dos condiciones siguientes:

1. Hay un evento antes de t que pertenece al jugador i , es decir, $i \in v(s, t)$
2. La permutación π es tal que el jugador i aparece en ella después de todos los otros jugadores en $v(s, t)$ en la permutación.

Estas dos condiciones pueden satisfacerse sólo por aquellos jugadores en $v(s, t)$. Ahora la pregunta es en cuántas permutaciones las dos condiciones previas serán cumplidas por cierto jugador. La respuesta es en exactamente $\frac{1}{|v(s, t)|}$ de todas las permutaciones. De este modo, cada ingreso $r(s, t)$ es distribuido igualitariamente entre los jugadores en $v(s, t)$. Por lo tanto, cuando $s \in S(t_1, t_2)$, se tiene que

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V^s) = \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \frac{\chi(\{i\}, v(s, t))}{|v(s, t)|} r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.28)$$

Ahora aplicando la propiedad de aditividad del valor de Shapley se tiene que

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \frac{\chi(\{i\}, v(s, t))}{|v(s, t)|} r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.29)$$

■

Teorema 5.2. Dado un juego dinámico $(N, \tilde{V}) \in DC_{13}^N$, el valor de Shapley de ventana temporal del juego (N, \tilde{V}) viene dado por

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \frac{1}{2} \chi(\{i\}, act(s, t) \cup \{w_p\}) r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.30)$$

Demostración:

Esta demostración utiliza argumentos análogos a los empleados en el teorema 5.1 por lo que se omite. ■

Obsérvese que cuando $act(s, t) = \{w_p\}$ debería escribirse 1 en vez de $\frac{1}{2}$, sin embargo, esto no es un problema porque se asumió que la plataforma no generaba ingresos por sí sola, es decir, $r(s, t) = 0$ en esos instantes.

Finalmente, también se puede dar la expresión para el valor de Shapley de los juegos (N, V^*) y (N, \tilde{V}^*) . Como se verá en el próximo resultado su estructura es igual a las anteriores con la única diferencia de los límites que definen las integrales.

Teorema 5.3. Dados dos juegos cooperativos dinámicos (N, V^*) y (N, \tilde{V}^*) sus valores de Shapley de ventana temporal vienen dados por:

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, V^*) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\chi(\{i\}, v(s, t))}{|v(s, t)|} r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.31)$$

$$Sh_i^{[t_1, t_2]}(N, \tilde{V}^*) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \chi(\{i\}, act(s, t) \cup \{w_p\}) r(s, t) dt, \forall i \in N. \quad (5.32)$$

Demostración:

La demostración sigue argumentos completamente análogos a los de la demostración del teorema 5.1 por lo que se omite. ■

En cuanto a las propiedades que satisface el valor de Shapley de ventana temporal para los juegos en DC_{12} y DC_{13} se tendría un resultado totalmente análogo al del teorema 4.3 que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. El valor de Shapley de ventana temporal satisface las propiedades de eficiencia, simetría, jugador nulo, monotonía, estabilidad, separabilidad temporal y separabilidad en sesiones en la clase de los juegos dinámicos DC_{12} y DC_{13} .

Demostración:

La demostración sigue los mismos argumentos que en el teorema 4.3 que se basan en las propiedades del valor de Shapley. ■

Finalmente, se ilustra con un ejemplo cómo funcionan algunos de los valores de Shapley de ventana temporal introducidos en esta sección para los juegos dinámicos de evento continuo.

Ejemplo 5.1. Considérese una plataforma de vídeos en Internet y una sesión en la que sólo participan dos canales. En particular, se tiene que la función de densidad de ingresos es la siguiente:

$$r(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ t^2 & \text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{cases} \quad (5.33)$$

Y sea la siguiente sucesión de jugadores a lo largo de la sesión.

$$\begin{cases} w_p & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \text{canal 1} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 2, \\ \text{canal 2} & \text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{cases} \quad (5.34)$$

En primer lugar, $V(N) = \int_0^1 1 \cdot 0 dt + \int_1^2 t dt + \int_2^3 t^2 dt = 7.833$. El valor de Shapley de ventana temporal para el juego V vendrá dado por:

$$\begin{aligned} Sh_{w_p}(V) &= \int_0^3 \frac{\chi(\{w_p\}, v(s, t))}{|v(s, t)|} r(s, t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot 0 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \cdot 0 dt \\ &+ \int_1^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^3 \frac{1}{3} t^2 dt = 2.861; \\ Sh_1(V) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \cdot 0 dt + \int_1^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^3 \frac{1}{3} t^2 dt = 2.861; \\ Sh_2(V) &= \int_2^3 \frac{1}{3} t^2 dt = 2.111. \end{aligned}$$

Para el juego \tilde{V} , se tendría el siguiente valor de Shapley de ventana temporal:

$$\begin{aligned} Sh_{w_p}(\tilde{V}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot 0 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \cdot 0 dt + \int_1^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^3 \frac{1}{2} t^2 dt = 3.917; \\ Sh_1(\tilde{V}) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \cdot 0 dt + \int_1^2 \frac{1}{2} t dt = 0.750; \\ Sh_2(\tilde{V}) &= \int_2^3 \frac{1}{2} t^2 dt = 3.167. \end{aligned}$$

Se observa fácilmente que en el juego V es muy relevante la posición que se ocupa en la secuencia de navegación de un usuario a la hora de repartir los ingresos. Mientras que en el juego \tilde{V} , la posición no tiene ninguna relevancia. Esto invita a pensar en la posibilidad de definir valores intermedios entre los dos anteriores, fijando, por ejemplo, qué número de eventos se podrían tener en cuenta antes de uno dado a la hora de repartir los ingresos generados por ese último.

5.4.2 Otro valor no atenuado en el tiempo

En los juegos dinámicos de evento continuo se dispone de más información que en los juegos dinámicos de evento discreto, porque se sabe no sólo el número de eventos en cada sesión sino que también la duración de cada uno de ellos. Esta información puede ser utilizada para definir otro valor para la asignación del ingreso. Este nuevo mecanismo de reparto se denominará valor de t-Shapley de ventana temporal. Como en el caso discreto (véase la sección 4.7.2), se dará en primer lugar el valor para el juego dinámico asociado con una sesión. Para los juegos (N, V^s) , el nuevo valor de ventana temporal viene dado, para cada $i \in W \cup C$, por

$$TS_i^{]t_1, t_2]}(N, V^s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \notin S(]t_1, t_2]) \\ \sum_{k=0}^{n_s} \frac{\alpha_i(s, t_k)}{\sum_{j \in N} \alpha_j(s, t_k)} \int_{t_k(s)}^{t_{k+1}(s)} r(s, t) dt, & \text{si } s \in S(]t_1, t_2]), \end{cases} \quad (5.35)$$

donde $\{t_0(s), t_1(s), \dots, t_{n_s}(s), t_{n_s+1}(s) = t_f(s)\}$, con $t_0(s)$ y $t_f(s)$ marcan el inicio y final de la sesión respectivamente, corresponden a los instantes de tiempo en los que ocurren los cambios de los sucesivos eventos en la sesión s , y $\alpha_i(s, t_k) = \int_{t_0(s)}^{t_{k+1}(s)} a_i(s, t) dt$, tal que

$$a_i(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{si el canal } i \text{ está siendo visto en la sesión } s \text{ en el instante } t, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (5.36)$$

además, se considera que la plataforma, a través del jugador w_p , siempre está activa, es decir, $a_{w_p}(s, t) = 1$ para toda sesión s y todo instante de tiempo t .

A continuación, sumando (5.35) para cada sesión s en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$, se obtiene la definición del valor t-Shapley de ventana temporal.

Definición 5.1. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DC_{12}^N$, su valor de t-Shapley de ventana temporal viene dado, para cada jugador $i \in W \cup C$, por

$$TS_i^{]t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=0}^{n_s} \frac{\alpha_i(s, t_k)}{\sum_{j \in N} \alpha_j(s, t_k)} \int_{t_k(s)}^{t_{k+1}(s)} r(s, t) dt. \quad (5.37)$$

Obsérvese que la función $\alpha_i(s, t_k)$ mide el tiempo que el jugador i ha sido visitado durante la sesión s desde el inicio de la sesión hasta el instante $t_{k+1}(s)$. Por lo tanto, en el valor de t-Shapley de ventana temporal se tiene en cuenta el tiempo que un canal ha sido visitado en la sesión cuando el ingreso generado durante la misma es asignado a las distintas partes involucradas. Asimismo, la plataforma está siempre activa durante la sesión, de tal modo que su influencia es considerada permanente cuando se reparten los ingresos generados en la sesión. El valor de t-Shapley de ventana temporal también hereda todas las propiedades del valor de Shapley de ventana temporal excepto la propiedad de simetría. Además, se puede definir el valor de t-Shapley en el tiempo simplemente considerando la ventana temporal $]0, +\infty[$.

Con respecto a las propiedades, el valor de Shapley de ventana temporal satisface todas las propiedades listadas en la sección 4.6, mientras que la regla introducida en esta subsección también las satisface excepto la propiedad de

simetría como ya se ha mencionado en el párrafo anterior. Por lo tanto, parece que esta nueva regla de reparto de los ingresos no mejora al valor de Shapley de ventana temporal. Sin embargo, hay una propiedad que no satisface este último y sí satisface el valor de t-Shapley de ventana temporal: la propiedad de no manipulabilidad en el contexto de juegos dinámicos de evento continuo que es la misma que para el caso de evento discreto. Recuérdese que esta propiedad dice que si un canal toma la decisión de dividirse en varios canales o varios canales toman la decisión de unirse en sólo uno, el resultado agregado para ellos sería exactamente el mismo.

- No manipulabilidad (NM). Un valor de ventana temporal Φ satisface la propiedad de no manipulabilidad, si dados dos juegos $(N, V), (N', V') \in DC_{12}$, tal que $N' \subset N$ y existe un canal de vídeo $i \in N'$ tal que $v'(i) = v(i) \cup v(N \setminus N')$, y para todo $j \in N' \setminus i$, $v'(j) = v(j)$, entonces

$$\phi_i(N', V') = \phi_i(N, V) + \sum_{j \in N \setminus N'} \phi_j(N, V). \quad (5.38)$$

donde $v(i)$ es el conjunto de todos los vídeos del canal i .

Recuérdese que, en la definición de la propiedad de la no manipulabilidad, se supone que las sesiones y los ingresos generados por cada evento son los mismos en ambos juegos. La única diferencia entre los juegos (N, V) y (N', V') son los propietarios de los eventos (vídeos). Además, esta propiedad solo se da para el contexto de juegos dinámicos de eventos discretos, es decir, no es una propiedad general para los juegos dinámicos dados en la subsección 2.5.

Un par de comentarios finales son, primero, que en el contexto de los juegos dinámicos DC_{13} , el valor de Shapley de ventana temporal también satisface la propiedad de no manipulabilidad, puesto que sólo se tienen en cuenta la plataforma y el contenido visto. Segundo, que el valor de t-Shapley de ventana temporal también puede definirse para los juegos (N, V^*) simplemente teniendo en cuenta todas las sesiones que han estado activas en la ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ y teniendo en cuenta la división temporal de cada sesión dentro del intervalo de tiempo considerado.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se aplica el valor de t-Shapley de ventana temporal para el juego V .

Ejemplo 5.2. Considérese otra vez la situación descrita en el ejemplo 5.1 de la subsección anterior. El valor de t-Shapley de ventana temporal para el

juego V vendrá dado por:

$$TS_{w_p}(V) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{2}{2 + \frac{3}{2}} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} + \frac{3}{3 + \frac{3}{2} + 1} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} = 4.312;$$

$$TS_1(V) = \frac{0}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{\frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} + \frac{\frac{3}{2}}{3 + \frac{3}{2} + 1} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} = 2.370;$$

$$TS_2(V) = \frac{0}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{0}{2 + \frac{3}{2}} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} + \frac{1}{3 + \frac{3}{2} + 1} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} = 1.151.$$

5.4.3 Valores atenuados en el tiempo

En las subsecciones anteriores, se han introducido valores en los que sólo se tenía en cuenta si los jugadores aparecían antes o después en la sesión para evaluar su participación en la generación de ingresos. Sin embargo, no se tenía en cuenta cómo de próximos en el tiempo estaban de la generación del ingreso. Por lo tanto, al igual que se hizo para el caso discreto en la sección 4.7.3, se pueden introducir ciertas funciones que atenúen la relevancia asignada a un canal en función del tiempo que ha pasado hasta que se genera el ingreso, y no sólo de la posición como en el caso discreto. En este sentido, se introducen las funciones de atenuación continuas.

Definición 5.2. Una *función de atenuación continua* γ es una aplicación del conjunto de los números reales, \mathbb{R} , al intervalo $[0, 1]$, tal que

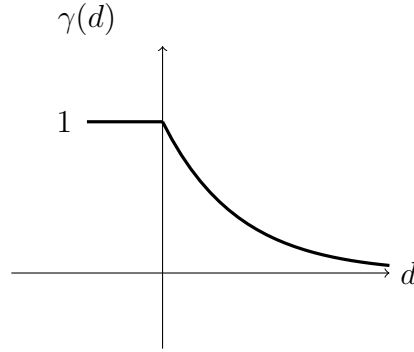
1. $\gamma(d) = 1$ si $d \leq 0$, y
2. $\gamma(d) \leq \gamma(d'), \forall d \geq d'$,

donde d es la distancia temporal hasta un instante dado que se utiliza como referencia.

Una familia especial de funciones de atenuación continua es el conjunto de funciones que tienen la siguiente forma:

$$\gamma(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \leq 0, \\ \theta^d & \text{si } d \geq 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

donde $\theta \in [0, 1]$. Se observa que estas funciones de atenuación tienen un decaimiento exponencial lo que implica que cuando un canal está muy alejado de un momento en el que se generan ingresos, su relevancia será pequeña a la hora de evaluar su impacto en la generación de los citados ingresos. La gráfica de estas funciones es de la siguiente forma:



Utilizando como base el valor de t-Shapley de ventana temporal, se pueden definir nuevos valores de Shapley de ventana temporal atenuados por una función γ . Estos nuevos mecanismos de reparto se denominarán valores de γ -t-Shapley de ventana temporal. Como en la sección anterior, se dará en primer lugar el valor para el juego dinámico asociado con una sesión. Para los juegos (N, V^s) , el nuevo valor de ventana temporal viene dado, para cada $i \in W \cup C$, por

$$TS_i^{\gamma, [t_1, t_2]}(N, V^s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \notin S([t_1, t_2]) \\ \sum_{k=0}^{n_s} \frac{\rho_i(s, t_k)}{\sum_{j \in N} \rho_j(s, t_k)} \int_{t_k(s)}^{t_{k+1}(s)} r(s, t) dt, & \text{si } s \in S([t_1, t_2]), \end{cases} \quad (5.40)$$

donde $\{t_0(s), t_1(s), \dots, t_{n_s}(s), t_{n_s+1}(s) = t_f(s)\}$, con $t_0(s)$ y $t_f(s)$ marcan el inicio y final de la sesión respectivamente, corresponden a los instantes de tiempo en los que ocurren los cambios de los sucesivos eventos en la sesión s , y

$$\rho_i(s, t_k) = \int_{t_0(s)}^{t_{k+1}(s)} \gamma(t_k(s) - t) a_i(s, t) dt,$$

tal que

$$a_i(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{si el canal } i \text{ está siendo visto en la sesión } s \text{ en el instante } t, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (5.41)$$

además, se considera de nuevo que la plataforma, a través del jugador w_p , siempre está activa, es decir, $a_{w_p}(s, t) = 1$ para toda sesión s y todo instante de tiempo t .

A continuación, sumando (5.40) para cada sesión s en la ventana de tiempo $[t_1, t_2]$, se obtiene la definición del valor γ -t-Shapley de ventana temporal.

Definición 5.3. Dado un juego dinámico $(N, V) \in DC_{12}^N$, y una función de atenuación γ , su *valor de γ -t-Shapley de ventana temporal* viene dado, para cada jugador $i \in W \cup C$, por

$$TS_i^{\gamma, [t_1, t_2]}(N, V) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k=0}^{n_s} \frac{\rho_i(s, t_k)}{\sum_{j \in N} \rho_j(s, t_k)} \int_{t_k(s)}^{t_{k+1}(s)} r(s, t) dt. \quad (5.42)$$

Como en el caso discreto estudiado en la sección 4.7.3, para la familia de funciones de atenuación exponenciales, si se asume que $0^0 = 1$, entonces cuando $\theta = 0$, se obtiene el valor de Shapley de ventana temporal dado por (5.32), es decir, que se estaría en la situación descrita por los juegos en DC_{13} ; y cuando $\theta = 1$, se obtiene el valor de t-Shapley de ventana temporal dado por (5.35). Por lo tanto, se tienen, como en la sección 4.7.3, dos polos o extremos, desde que todos los jugadores son irrelevantes en la generación de ingresos excepto la plataforma y el jugador que posee el correspondiente vídeo visto ($\theta = 0$), hasta que todos los jugadores son igualmente relevantes en la generación de ingresos en el evento en cuestión ($\theta = 1$). En este sentido, el parámetro θ da una medida de la relevancia que tiene la proximidad de un instante de tiempo al momento en el que se genera el ingreso. Todo esto resulta interesante porque permite tener en la misma familia ambos extremos. Sin embargo, el valor de Shapley de ventana temporal dado por la expresión (5.26) no se puede obtener con ningún valor de $\theta \in [0, 1]$. De hecho, no se puede obtener a partir de ninguna función de atenuación γ . Por lo tanto, por una parte, se tiene el valor de Shapley de ventana temporal dado por la expresión (5.26), y, por otra parte, la familia de valores γ -t-Shapley de ventana temporal con funciones de atenuación exponenciales.

Finalmente, el siguiente ejemplo ilustra cómo funcionan este tipo de reglas de reparto de los ingresos.

Ejemplo 5.3. Considérese una vez más la situación descrita en el ejemplo 5.1 de la subsección anterior. El valor de γ -t-Shapley de ventana temporal, con función de atenuación exponencial con $\theta = e^{-1}$, para el juego V vendrá dado por:

$$\begin{aligned} TS_{w_p}^{\gamma}(V) &= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t-\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t-\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} \\ &+ \frac{\int_0^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt}{\int_0^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} \\ &= \frac{1.893}{3.393} \cdot 1.5 + \frac{1.865}{3.642} \cdot 6.333 = 4.080; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TS_1^\gamma(V) &= \frac{0}{\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{\int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t-\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} \\
&+ \frac{\int_{\frac{1}{2}}^2 e^{t-2} dt}{\int_0^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} \\
&= \frac{1.5}{3.393} \cdot 1.5 + \frac{0.777}{3.642} \cdot 6.333 = 2.014;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TS_2^\gamma(V) &= \frac{0}{\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt} \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dt + \frac{0}{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t-\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 dt} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt + \int_1^2 t dt \right\} \\
&+ \frac{\int_2^3 1 dt}{\int_0^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{t-2} dt + \int_2^3 1 dt} \left\{ \int_2^3 t^2 dt \right\} = \frac{1}{3.642} \cdot 6.333 = 1.739.
\end{aligned}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de Shapley de ventana temporal de la situación descrita en el ejemplo 5.1 y que se ha ido utilizando también en las sucesivas secciones.

Jugadores	w_p	1	2
$Sh_i^{[t_1, t_2]}(V)$	2.861	2.861	2.111
$Sh_i^{[t_1, t_2]}(\tilde{V})$	3.917	0.750	3.167
$TS_i^{\gamma; [t_1, t_2]}(V)$	4.080	2.014	1.739
$TS_i^{[t_1, t_2]}(V)$	4.312	2.370	1.151

5.5 Discusión y conclusiones

En primer lugar, recuérdese la definición de los juegos dinámicos asociados a estos problemas tanto en el caso discreto como en el caso continuo añadiendo los superíndices d y c para distinguir los casos discreto y continuo. Las funciones características vienen dadas para cada coalición $F \subset N$ y cada ventana de tiempo $]t_1, t_2]$ por:

$$V^d(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s|F) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k \leq \max\{h \in \mathbb{Z} | P(E^h(s)) \subset F\}} r(e_k(s)). \quad (5.43)$$

$$\tilde{V}^d(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \tilde{R}(s|F) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \sum_{k: P(\tilde{E}^k(s)) \subset F} r(e_k(s)). \quad (5.44)$$

$$V^c(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} R(s|F) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.45)$$

$$\tilde{V}^c(F, t_1, t_2) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \tilde{R}(s|F) = \sum_{s \in S(t_1, t_2)} \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(\{w_p\}, F) \chi(act(s, t), F) r(s, t) dt. \quad (5.46)$$

Si ahora se identifican los instantes de tiempo en una sesión s en los que se producen los cambios de eventos como $\{t_0(s), t_1(s), \dots, t_{n_s}(s), t_f(s)\}$, donde $t_0(s)$ y $t_f(s)$ marcan el inicio y final de la sesión respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt = \\ & = \int_{t_0(s)}^{t_1(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt + \dots + \int_{t_{n_s}(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt \end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\chi(v(s, t), F)$ es una constante en el intervalo correspondiente ya que los cambios se producen en precisamente en los instantes $\{t_0(s), t_1(s), \dots, t_{n_s}(s), t_f(s)\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt = \\ & = \chi(v(s, t_1(s)), F) \int_{t_0(s)}^{t_1(s)} r(s, t) dt + \dots + \chi(v(s, t_{n_s}(s)), F) \int_{t_{n_s}(s)}^{t_f(s)} r(s, t) dt \end{aligned}$$

Si ahora hacemos $r(e_k(s)) = \int_{t_k(s)}^{t_{k+1}(s)} r(s, t) dt$ para cada instante $t_k(s)$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F) r(s, t) dt = \\ & = \chi(v(s, t_1(s)), F) r(e_0(s)) + \chi(v(s, t_2(s)), F) r(e_1(s)) + \dots + \chi(v(s, t_{n_s}(s)), F) r(e_{n_s}(s)) \end{aligned}$$

Por la definición de $v(s, t)$ se tiene que $v(s, t_1) \subset v(s, t_2)$ para todo $t_1 < t_2$, por tanto, si $\chi(v(s, t_1), F) = 0$ entonces $\chi(v(s, t_2), F) = 0$. En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F)r(s, t)dt = \\ & = \chi(v(s, t_1(s)), F)r(e_0(s)) + \chi(v(s, t_2(s)), F)r(e_1(s)) + \dots + \chi(v(s, t_h(s)), F)r(e_h(s)) \end{aligned}$$

donde $t_h^*(s)$ es el último instante de tiempo para el que $\chi(v(s, t_h^*(s)), F) = 1$. En consecuencia, se tiene que

$$\int_{t_0(s)}^{t_f(s)} \chi(v(s, t), F)r(s, t)dt = \sum_{k \leq h^*} r(e_k(s)).$$

y $h^* = \max\{h \in \mathbb{Z} | P(E^h(s)) \subset F\}$.

Por tanto, se puede concluir que $V^d = V^c$. La diferencia entre ambos juegos entonces es que en el primero, en el juego de evento discreto, no se sabe en qué instante de tiempo y cómo se genera el ingreso, mientras que en el segundo, en el juego de evento continuo, se sabe en qué instante y cómo se genera el ingreso. No obstante, de forma agregada los dos juegos son iguales. Siguiendo los mismos argumentos se llega también a que $\tilde{V}^d = \tilde{V}^c$ con las mismas diferencias que se acaban de mencionar.

Una consecuencia de lo anterior es que los valores de Shapley de los juegos dinámicos de evento discreto y de evento continuo son iguales. Esta es la razón por la que en la notación utilizada en esta tesis doctoral no se hace distinción entre uno y otro caso. No obstante, como se apuntó en la sección 5.3, en el caso del modelo de evento continuo se pueden definir otros juegos dinámicos que sí son diferentes a los anteriores, como son los juegos V^* y \tilde{V}^* .

Sin embargo, cuando utilizamos más información para definir un mecanismo de reparto de los ingresos entre las partes involucradas en la plataforma de vídeos, entonces las soluciones que se obtienen son diferentes, como sucede entre las soluciones ES y TS , que aunque tienen filosofías semejantes son diferentes puesto que en la primera sólo se cuenta el número de veces que aparece un determinado canal antes de la generación de ingreso y en la segunda lo que se tiene en cuenta es el tiempo. Esta diferencia se sustenta en el tipo de dinamismo que se considera, evento discreto vs evento continuo. El mismo comentario sirve cuando se comparan los valores atenuados en el tiempo ES^α y TS^γ .

Ante la pregunta de qué modelo dinámico es más adecuado, el discreto o el continuo, la respuesta dependerá de la facilidad para obtener una u otra

información y la relevancia de la misma para la generación del ingreso dentro del modelo de negocio de las plataformas de vídeo en Internet.

Capítulo 6

Conclusiones y futuras líneas de investigación

Las conclusiones generales que se presentan a continuación, no pretenden ser una simple relación de aquellas que se han presentado de forma más detallada al final de los capítulos 3 a 5, que constituyen la contribución de esta tesis doctoral a la literatura de los problemas de reparto en teoría de juegos, sino que resultan de la consecución de los objetivos descritos en el capítulo 1 de esta tesis, así como de las aportaciones realizadas a la literatura como consecuencia de la investigación desarrollada durante todos estos años de trabajo.

6.1 Conclusiones

Esta sección se divide en dos bloques, el primero dedicado a explicar la consecución de los objetivos planteados en el plan de investigación y, el segundo dedicado a las principales aportaciones a la literatura de los problemas de reparto.

6.1.1 Consecución de los objetivos

Los objetivos planteados en el plan de investigación son los que se relacionan en la sección 1.2 y, como queda reflejado en esta memoria, se han alcanzado de una forma razonable. A continuación, se detalla cómo se han alcanzado:

1. Se han definido dos modelos matemáticos diferentes que definen adecuadamente el problema de reparto de ingresos en sistemas de consumo de vídeo en Internet considerando únicamente como agentes relevantes

para el reparto de ingresos la propia plataforma donde se visualizan los vídeos y los creadores de contenido.

2. Se han analizado las restricciones del sistema que determinan el tipo de mercado en el que se ubicaría el problema que se estudia en esta tesis doctoral, este análisis se puede encontrar en el capítulo 3 en sus secciones 3.1, 3.2 y 3.6, y en el capítulo 4 en sus secciones 4.1, 4.2 y 4.8. En las secciones 3.1, 3.2, 4.1 y 4.2 se lleva a cabo un análisis económico del entorno donde se enmarca el problema estudiado en esta tesis, y en las secciones 3.6 y 4.8 se analiza la viabilidad de la implementación de las posibles soluciones aportadas al problema desde la perspectiva de su cálculo y complejidad computacional.
3. A lo largo de toda esta memoria se ha argumentado que un usuario final no necesita inyectar dinero al sistema, puesto que la inserción de publicidad en los contenidos puede compensar el hecho de que los usuarios finales no tengan que pagar por ver los contenidos. Un ejemplo de esto es el principio de equivalencia utilizado en el capítulo 3 de la memoria, que establece que el ingreso que puede generar un contenido puede considerarse el mismo por la inserción de publicidad o por pago-por-visión.
4. Se han introducido y analizado varias soluciones de reparto de los ingresos generados en un sistema de vídeo bajo demanda (VoD), en particular, basadas y derivadas del reconocido valor de Shapley. En concreto, se han introducido mecanismos de reparto para los dos modelos matemáticos introducidos en esta tesis doctoral basados en la teoría de juegos cooperativos, tanto desde una perspectiva estática como dinámica de la generación de ingresos. Asimismo, en uno de los modelos los mecanismos propuestos se basan en la experiencia de navegación del usuario en el sistema. Todo esto queda recogido en los capítulos 3 a 5 de esta memoria.

6.1.2 Aportaciones a la literatura de los problemas de reparto

Además de la consecución de los objetivos que se propusieron para esta tesis doctoral, se han realizado contribuciones interesantes a la literatura de la teoría de juegos cooperativos, en particular, para aportar soluciones a problemas de reparto y atribución. A continuación, se relacionan algunas de esas contribuciones:

1. Se ha introducido la clase de los juegos STV que no son juegos del gran jefe (Muto et al., 1988) ni TFTS-juegos (van den Nouweland et al., 1996), aunque a primera vista lo parecieran. Los juegos STV son convexos y tienen la peculiaridad de que el valor de Tijs pertenece al núcleo. Además, el valor de Shapley y el valor de Tijs de estos juegos tienen expresiones matemáticas que los hacen sencillos de calcular.
2. Se han introducido juegos dinámicos cooperativos, tanto de evento discreto como de evento continuo, que describen de forma razonable la generación de ingresos en sistemas de vídeo bajo demanda. Estos juegos, además, tienen buenas propiedades matemáticas que los hacen interesantes de analizar. Pero, también, estos juegos podrían ser utilizados para analizar problemas de atribución en situaciones en las que hay una secuencia temporal de factores o acciones que conducen finalmente a un resultado, por ejemplo, las campañas de marketing en Internet por diferentes canales.
3. Para todos los juegos dinámicos anteriores se han encontrado expresiones sencillas para calcular sus valores de Shapley respectivos. Además, se han introducido otras soluciones derivadas de la estructura del valor de Shapley y utilizado el concepto de atenuación para valorar la relevancia de cada jugador en la consecución del ingreso. Todo este análisis también puede ser útil para el estudio de problemas de atribución como los que se han descrito en el punto anterior.

6.2 Futuras líneas de investigación

Después de dar por concluída una investigación siempre queda pensar sobre todo aquello que ha quedado en el tintero y sería interesante de abordar en futuros trabajos y qué nuevos objetivos de investigación plantearse. A continuación se ofrece una relación de algunas líneas de investigación futuras:

1. Analizar en más profundidad algunas de las soluciones introducidas en la sección 3.5 para los juegos STV, distintas del valor de Shapley y el valor de Tijs, e introducir propiedades razonables en el contexto de estos juegos para su caracterización.
2. Buscar propiedades relevantes en el contexto de los juegos dinámicos cooperativos para caracterizar las soluciones introducidas en los capítulos 4 y 5 diferentes del valor de Shapley.

3. Profundizar más en los juegos dinámicos cooperativos de evento continuo porque todavía parece que se le puede sacar más partido al análisis del problema de reparto de ingresos en sistemas de vídeo en Internet.
4. Analizar cómo aplicar los resultados obtenidos en esta tesis al problema de atribución en problemas con secuenciación temporal de factores o acciones para la obtención de un resultado. Este tipo de análisis tiene gran interés en problemas de marketing digital (véase Molina et al. 2022), pero también podría aplicarse a otros problemas como los descritos en Algaba et al. (2019b) en los que se considere la componente dinámica.

Como siempre, esto es una declaración de intenciones, pero espero tener el tiempo necesario para poder seguir trabajando en estos temas de investigación o, al menos, que sirvan para que otros continúen con el trabajo aquí comenzado.

Referencias

- [1] Acemoglu, D., Ozdaglar, A. (2011) Opinion dynamics and learning in social networks. *Dynamics Games and Applications* 1:3–49.
- [2] Ackermann, H., Ewe, H., Küfer, K.H., Schröder, M. (2014) Modeling profit sharing in combinatorial exchanges by network flows. *Annals of Operations Research* 222:5–28.
- [3] Aggarwal, G., Goel, A., Motwani, R. (2006) Truthful auctions for pricing keywords. *Proceedings of the 7th ACM Conference on Electronic Commerce*, Ann Arbor, MI, pp. 1–7.
- [4] Ahmadi-Javid, A., Hoseinpour, P. (2018) Cooperative advertising in a capacitated manufacturer-retailer supply chain: a game-theoretic approach. *International Transactions in Operational Research* 25:1677–1694.
- [5] Algaba, E., Fragnelli, V., Llorca, N., Sánchez-Soriano, J. (2019) Horizontal cooperation in a multimodal public transport system: The profit allocation problem. *European Journal of Operational Research* 275:659–665.
- [6] Algaba, E., Béal, S., Fragnelli, V., Llorca, N., Sánchez-Soriano, J. (2019b) Relationship between labeled network games and other cooperative games arising from attributes situations. *Economics Letters* 185:108708.
- [7] Algaba, E., Fragnelli, V., Sánchez-Soriano, J. (eds.) (2019c) *Handbook of the Shapley Value*. Series in Operations Research. CRC Press. Taylor & Francis Group.
- [8] Algaba, E., Fragnelli, V., Sánchez-Soriano, J. (2019d) The Shapley value, a paradigm of fairness, in E. Algaba, V. Fragnelli and J. Sánchez-Soriano (eds) *Handbook of the Shapley Value*, Series in Operations Research, CRC Press. Taylor & Francis Group, Ch. 2, pp. 17–30.

- [9] Alonso, E., Sánchez-Soriano, J., Tejada, J. (2015) A parametric family of two ranked objects auctions: equilibria and associated risk. *Annals of Operations Research* 225:141–160.
- [10] Aparicio, J., Llorca, N., Pulido, M., Sánchez-Soriano, J., Sancho, J. (2012) Ranking auctions: a cooperative approach. *International Game Theory Review* 14:1250003.
- [11] Bahbouni, J., Moussa, N. (2017) Prisoner’s dilemma game model for e-commerce. *Applied Mathematics and Computation* 292:128–144.
- [12] Basso, F., D’Amours, S., Rönnqvist, M., Weintraub, A. (2019) A survey on obstacles and difficulties of practical implementation of horizontal collaboration in logistics. *International Transactions in Operational Research* 26:775–793.
- [13] Bonastre, O., Montpetit, M., Crowcroft, J., Cesar, P., Matijasevic, M., Liu, Z. (2012) Smart, social, and convergeted TV. *IEEE Transactions on Multimedia* 14:1513–1514.
- [14] Bonastre, O., Sánchez-Soriano, J., Neville, S., López, F. (2011) Promoting game theory techniques for targeted advertisements for Social TV business models. *Proceedings of 2011 IEEE Consumer Communications and Networking Conference (CCNC)*, IEEE, pp. 687–688.
- [15] Bouwman, H., Zhengjia, M., van der Duin, P., Limonard, S. (2008) A business model for IPTV service: a dynamic framework. *Info* 10:22–38.
- [16] Chen, X., Ding, F., Zhang, T., Hou, G., Lan, L. (2017) A Cost-Optimized Resource Provisioning Policy for Heterogeneous Cloud Environments. *IEEE Access* 5:26681–26689.
- [17] Chen, X., Sun, Y., Ou, Y., Zheng, X., Wang, Z., Li, M. (2020) A Conflict Decision Model Based on Game Theory for Intelligent Vehicles at Urban Unsignalized Intersections. *IEEE Access* 8:189546–189555.
- [18] Cisco Systems, Inc. (2009) White paper: Cisco visual networking index: forecast and methodology, 2008–2013.
- [19] Colajanni, G., Daniele, P., Giuffre, S., Nagurney, A. (2018) Cybersecurity investments with nonlinear budget constraints and conservation laws: variational equilibrium, marginal expected utilities, and Lagrange multipliers. *International Transactions in Operational Research* 25:1443–1464.

- [20] Driessen, T., Tijs, S. (1985) The τ -value, the core and semi-convex games. *International Journal of Game Theory* 14:229–247.
- [21] Duro, J.A., Giménez-Gómez, J.M., Vilella, C. (2020) The allocation of CO2 emissions as a claims problem. *Energy Economics* 86:104652.
- [22] Edelman, B., Ostrovsky, M., Schwarz, M. (2007) Internet advertising and the generalized second-price auction. *American Economic Review* 97:242–259.
- [23] Feng, J., Shen, Z.J., Zhan, R. (2007) Ranked items auctions and online advertisement. *Productions Operations Management* 16:510–522.
- [24] Filar, J.A., Petrosjan, L.A. (2000) Dynamic cooperative games. *International Game Theory Review* 2:47–65.
- [25] Fries, A. (2011) Online advertising methods and systems and revenue sharing methods and systems related to same. U.S. Patent 2011/0071901 A1, Mar. 24.
- [26] Galai, Y., Tamir, I., Bass, R., Doody, C., Gilad, Y., Sternlicht, D., Lempel, R., Gurevitch, S., Bregman, C., Rosenstein, D., Liberman, S., Bar, E., Orlov, I. (2019) User lifetime revenue allocation associated with provisioned content recommendations. U.S. Patent 2019/0058770 A1, Feb . 21.
- [27] Geng, Q., Mallik, S. (2019) Managing television commercial inventory under competition: an equilibrium analysis. *Decision Sciences* 50:170–201.
- [28] Gillies, D. (1953) Some theorems on n-person games. PhD thesis, Princeton University, Princeton, NJ.
- [29] Giménez-Gómez, J.M., Teixidó-Figueras, J., Vilella, C. (2016) The global carbon budget: a conflicting claims problem. *Climatic Change* 136:693–703.
- [30] Gimpel, G. (2013) Five Pressing Issues Shaping the Future of TV & Video. The MIT Center for Digital Business, May 2013. [online] Available: http://ebiz.mit.edu/research/papers/2013.05_Gimpel_Five%20Pressing%20Issues%20Shaping%20the%20Future%20of%20TV%20Video.pdf
- [31] Google (2021a) Attribution reports and attribution models. Accessed on: Apr. 8, 2021a, [Online]. Available: https://support.google.com/google-ads/topic/7279627?hl=en&ref_topic=3119145.

-
- [32] Google (2021b) Multi-Channel Funnels Attribution. Accessed on: Apr. 8, 2021b, [Online]. Available: https://support.google.com/analytics/answer/6148697?hl=en&ref_topic=3205717.
- [33] Goyal, T., Kaushal, S. (2017) An intelligent scheduling scheme for real-time traffic management using cooperative game theory and AHP-TOPSIS method for next generation telecommunication networks. *Expert Systems with Applications* 86:125–134.
- [34] Gozálviz, J., Lucas-Estañ, M., Sánchez-Soriano, J. (2012) Joint radio resource management for heterogeneous wireless systems. *Wireless Networks* 18:443–455.
- [35] Guajardo, M., Rönnqvist, M. (2016) A review on cost allocation methods in collaborative transportation. *International Transactions in Operational Research* 23:371–392.
- [36] Gutiérrez, E., Llorca, N., Sánchez-Soriano, J., Mosquera, M. (2018) Sustainable allocation of greenhouse gas emission permits for firms with Leontief technologies. *European Journal of Operational Research* 269:5–15.
- [37] Heller, J., Yu, J., Evangelista, M.H. (2008) Method and apparatus for dynamically allocating monetization rights and access and optimizing the value of digital content. U.S. Patent 2008/0208668A1, Aug. 28.
- [38] Kamiyama, N., Kawahara, R., Hasegawa, H. (2010) Profit allocation in coalitional VoD service. *Proceedings of 18th Annual IEEE/ACM International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems, IEEE/ACM*, pp. 111–120.
- [39] Khan, M., Tembine, H., Marx, S. (2011) Learning in user-centric IPTV services selection in heterogeneous wireless networks. *Proceedings of 2011 IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, IEEE, pp. 103–108.
- [40] Kim, W.-S. (2006) Pricing model for internet-based multi-class Video-On-Demand(VOD) services. *Telecommunication Systems* 33:317–331.
- [41] Kim, S. (2018) A New Adaptive Data Center Resource Provisioning Scheme Based on the Dual-Level Cooperative Game Approach. *IEEE Access*, 6:52047–52057.

- [42] Kodialam, M., Lakshman, T., Mukherjee, S., Wang, L. (2010) Online scheduling of targeted advertisements for IPTV. Proceedings of 2010 IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM), IEEE, pp. 1–9.
- [43] Kranich, L., Perea, A., Peters, H. (2005) Core concepts for dynamic TU games. *International Game Theory Review* 7:43–61.
- [44] Le, T.H.T., Tran, N.H., Vo, P.L., Han, Z., Bennis, M., Hong, C.S. (2019) Joint Cache Allocation With Incentive and User Association in Cloud Radio Access Networks Using Hierarchical Game. *IEEE Access* 7:20773–20788.
- [45] Lim, W., Tang, C. (2006) An auction model arising from an Internet search service provider. *European Journal of Operational Research* 172:956–970.
- [46] López-Navarrete, F., Sánchez-Soriano, J., Bonastre, O.M. (2019) Allocating revenues in a Smart TV ecosystem. *International Transactions in Operational Research* 26:1611–1632.
- [47] López-Navarrete, F., Sánchez-Soriano, J., Bonastre, O.M. (2022) Dynamic Generation of Revenue through the insertion of advertisements into video contents, 2022 IEEE 19th Annual Consumer Communications & Networking Conference (CCNC), Las Vegas, NV, USA, 2022, pp. 481–482.
- [48] López-Navarrete, F., Sánchez-Soriano, J., Bonastre, O.M. (2023) Dynamic generation and attribution of revenues in a video platform. arXiv:2304.12268 [cs.GT].
- [49] Lucas-Estañ, M.C., Gozávez, J., Sánchez-Soriano, J. (2012) Bankruptcy-based radio resource management for multimedia mobile networks. *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies* 23:186–201.
- [50] Luqman, M., Peng, S., Huang, S., Bibi, A., Ahmad, N. (2018) Cost allocation for the problem of pollution reduction: a dynamic cooperative game approach. *Economic Research* 31:1717–1736.
- [51] Molina, E., Tejada, J., Weiss, T. (2022) Some game theoretic marketing attribution models. *Annals of Operations Research*, 318:1043–1075.
- [52] Montpetit, M., Klym, N., Mirlacher, T. (2009) The future of IPTV: adding social networking and mobility. Proceedings of the 10th International Conference on Telecommunications (ConTEL), IEEE, pp. 405–409.

-
- [53] Montpetit, M., Medard, M. (2012) Social television: enabling technologies and architectures. *Proceedings of the IEEE (Centennial-Issue)*, IEEE, pp. 1395–1399.
- [54] Montpetit, M., Sassatelli, L. (2018) Technologies and architectures for future IP television services. In Mohamed, S., Azad, S., Pathan, A.K. (eds) *A Comprehensive Guide to IPTV Delivery Networks*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, pp. 315–343.
- [55] Morais, V., Mateus, G.R. (2019) Configuration-based approach for topological problems in the design of wireless sensor networks. *International Transactions in Operational Research* 26:836–855.
- [56] Moretti, S., Patrone, F. (2008) Transversality of the Shapley value. *TOP* 16:1–41.
- [57] Muto, S., Nakayama, M., Potters, J., Tijs, S. (1988) On Big Boss games. *The Economic Studies Quarterly* 39:303–321.
- [58] Nagarajan, M., Sošić, G. (2008) Game-theoretic analysis of cooperation among supply chain agents: review and extensions. *European Journal of Operational Research* 187:719–745.
- [59] Niyato, D., Hossain, E. (2006) A Cooperative Game Framework for Bandwidth Allocation in 4G Heterogeneous Wireless Networks. 2006 IEEE International Conference on Communications, Istanbul, Turkey, pp. 4357–4362.
- [60] Pagès-Bernaus, A., Ramalhinho, H., Juan, A.A., Calvet, L. (2019) Designing e-commerce supply chains: a stochastic facility-location approach. *International Transactions in Operational Research* 26:507–528.
- [61] Petrosjan, L., Zaccour, G. (2003) Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27:381–398.
- [62] Quintero-Araujo, C.L., Gruler, A., Juan, A.A., Faulin, J. (2019) Using horizontal cooperation concepts in integrated routing and facility-location decisions. *International Transactions in Operational Research* 26:551–576.
- [63] Redlich, D. (2012) Revenue sharing system that incentivizes content providers and registered users and includes payment processing. U.S. Patent 8,145,526 B2, Mar. 27.

- [64] Ribeiro, C.C., de A. Santos, T., de Souza, C.C. (2019) Multicast routing under quality of service constraints for vehicular ad hoc networks: mathematical formulation and a relax-and-fix heuristic. *International Transactions in Operational Research* 26:1339–1364.
- [65] Risso, C., Nesmachnow, S., Robledo, F. (2018) Metaheuristic approaches for IP/MPLS network design. *International Transactions in Operational Research* 25:599–625.
- [66] Rochet, J.C., Tirole, J. (2006) Two-Sided Markets: A Progress Report. *The RAND Journal of Economics* 37:645–667.
- [67] Roels, G., Fridgeirsdottir, K. (2009) Dynamic revenue management for online display advertising. *Journal of Revenue and Pricing Management* 8:452–466.
- [68] Roson, R. (2005) Two-Sided Markets: A Tentative Survey. *Review of Network Economics* 4:142–160.
- [69] Roth, A. (1988) *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press.
- [70] Sánchez-Soriano, J. (2013) An overview on game theory applications to engineering. *International Game Theory Review* 15:1340019.
- [71] Sánchez-Soriano, J. (2020) Attribution problems and their applications. A game theoretical approach,” *Kempton Autumn Talks 2020*, Accessed on: Apr. 8, 2021, [Online]. Available: <https://internationalprojectskempton.de/autumn-talks/>.
- [72] Sánchez-Soriano, J., Llorca, N., Meca, A., Molina, E., Pulido, M. (2002) An integrated transport system for alacant’s students. *Univercity. Annals of Operations Research* 109:41–60.
- [73] Shapley, L. (1953) A value for n-person games. In Kuhn, H., Tucker, A.W. (eds) *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. 307–317.
- [74] Shapley, L. (1971) Cores of convex games. *International Journal of Game Theory* 1:11–26.
- [75] Sumita, H., Kawasez, Y., Fujita, S., Fukunaga, T. (2017) Online Optimization of Video-Ad Allocation. *Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence, Melbourne, Australia, 19-25 August, 2017*, pp. 423–429.

- [76] Taleizadeh, A.A., Akhavizadegan, F., Ansarifard, J. (2019) Pricing and quality level decisions of substitutable products in online and traditional selling channels: game theoretical approaches. *International Transactions in Operational Research* 26:718–1751.
- [77] The Economics of Two-Sided Markets, Toulouse, France, January 23-24 (2004) [Online]. Available: <https://www.tse-fr.eu/conferences/2004-economics-two-sided-markets>. Toulouse School of Economics (TSE). Retrieved March 10, 2019.
- [78] Tijs, S. (1981) Bounds for the core and the τ -value. In Moeschlin, O., Pallaschke, D. (eds) *Game Theory and Mathematical Economics*. North Holland, Amsterdam, pp. 123–132.
- [79] Tran, T.N., Nguyen, T.-V., Shim, K., An, B. (2020) A Game Theory Based Clustering Protocol to Support Multicast Routing in Cognitive Radio Mobile Ad Hoc Networks. *IEEE Access* 8:141310-141330.
- [80] Varian, H. (2007) Position auctions. *International Journal of Industrial Organization* 25:1163–1178.
- [81] van den Nouweland, A., Borm, P., van Golstein Brouwers, W., Bruinderink, R.G., Tijs, S. (1996) A game theoretic approach of problems in telecommunication. *Management Sciences* 42:294–303.
- [82] van Hove, L. (2017) A note on cooperative interconnection settlement among ISPs through NAP. *European Journal of Operational Research* 261:800–802.
- [83] Wang, N., Fan, Z.P., Zhao, X. (2017) Coordination in competitive dual sales channels of the mobile phone industry. *International Transactions in Operational Research* 27:984–1012.
- [84] Wang, C., Yin, K., Xin, Z. (2012) Pricing and revenue sharing analysis on platforms and content providers of IPTV service. In Kim, H. (ed.) *Advances in Technology Management, Advances in Intelligent and Soft Computing*, Vol. 165. Springer, Berlin, pp. 361–371.
- [85] Winter, E. (2002) The Shapley value. In Aumann, R.J., Hart, S. (eds) *The Handbook of Game Theory*. North-Holland, Amsterdam, pp. 2026–2052.
- [86] Ye, F., Yan, H., Wu, Y. (2019) Optimal online channel strategies for a hotel considering direct booking and cooperation with an online travel agent. *International Transactions in Operational Research* 26:968–998.

-
- [87] Young, H. P. (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory* 14:65–72.
- [88] Yuan, S., Zainal Abidin, A., Sloan, M., Wang, J. (2012) Internet Advertising: An Interplay among Advertisers, Online Publishers, Ad Exchanges and Web Users,” arXiv:1206.1754v2 [cs.IR].
- [89] Zeng, Y., Zhang, L., Cai, X., Li, J. (2018) Cost sharing for capacity transfer in cooperating queueing systems. *Production and Operations Management* 27:644–662.
- [90] Zhang, Z., Wu, Y., Chu, X., Zhang, J. (2019) Resource Allocation and Power Control for D2D Communications to Prolong the Overall System Survival Time of Mobile Cells. *IEEE Access* 7:17111-17124.
- [91] Zhu, Q., Başar, T. (2013) Multi-resolution large population stochastic differential games and their application to demand response management in the smart grid. *Dynamics Games and Applications* 3:68–88.