UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ

CIENCIAS SOCIALES Y JURÍDICAS DE ELCHE

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Análisis de sensibilidad en Programación Lineal: implementación en R y aplicaciones

Autor

Alejandro Ayllón Rodríguez

Tutora

Maria Josefa Cánovas Cánovas

Grado de Estadística Empresarial

—

Curso 2016/2017

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado versa de forma general sobre el análisis de sensibilidad de problemas de Programación Lineal, estructurados en un objetivo concreto sujeto a ciertas limitaciones naturales establecidas.

Con el fin de comprender el enfoque de este campo de la optimización, se contextualizan con breves notas históricas las circunstancias que motivaron su origen y las investigaciones desarrolladas por los pioneros de la Programación Lineal.

Dentro del amplio campo de la Programación Lineal, el presente trabajo trata sobre el análisis de sensibilidad de problemas y, en concreto, se ocupa de analizar las repercusiones que pueden ocasionar sobre el valor óptimo (objetivo) ligeras modificaciones en los datos del mismo. Precisamente, esta variación del valor óptimo del problema se analiza cuando se perturban los valores asociados a nuestras limitaciones. Destacamos el hecho de que el trabajo se apoya en resultados recientes de investigación en este campo de la optimización (véanse las referencias bibliográficas comentadas en la sección de introducción).

En este contexto, nuestro objetivo principal es tratar de averiguar cómo mejoraría el objetivo del problema (por ejemplo, el beneficio de una empresa) si se ampliaran las limitaciones establecidas (por ejemplo, de inversión en materia prima, mano de obra, etc.). Para comprender este análisis, comenzamos recogiendo los conceptos básicos de Programación Lineal que se utilizan en éste. A continuación, nos centramos en el análisis de sensibilidad de problemas de Programación Lineal bajo ligeras perturbaciones del lado derecho de las restricciones, comentando brevemente la llamada *tasa (máxima) de mejora* y su aplicación a los problemas. Por último, ilustramos los conceptos y resultados de análisis de sensibilidad recogidos mediante diferentes ejemplos de problemas de Programación Lineal que se plantean en el ámbito empresarial.

Nuestra contribución principal en el desarrollo de este trabajo es la elaboración e implementación en R de dos funciones. La primera de ellas es capaz de calcular y mostrar genéricamente, mediante la introducción del usuario de los coeficientes del problema de Programación Lineal, el valor óptimo y los puntos extremos del conjunto factible del problema dual considerado, un concepto clave para el análisis de sensibilidad. Además, esta función comprueba la resolubilidad del problema. La segunda función determina de forma genérica los puntos extremos óptimos del problema dual útiles para un análisis más operativo, y los utiliza como ingredientes en el cálculo de la tasa de mejora.

Seguidamente exponemos las conclusiones generales del trabajo, que responden al objetivo planteado anteriormente. La aplicación de los conceptos expuestos a lo largo del trabajo sobre los problemas, ilustran con claridad el comportamiento del valor óptimo. Además, mediante el empleo de las funciones de R elaboradas, se analizan diferentes situaciones que se pueden plantear para cada uno de los problemas. La comprensión de estos resultados, facilitan al decisor la toma de decisiones óptimas conociendo el incremento de beneficios que pueden reportarle ligeras modificaciones de los límites originales, sin necesidad de probar empíricamente estas situaciones con el coste añadido que acarrearía.

Índice general

Introducción **1**

1. Optimalidad en Programación Lineal: un enfoque dual **5**

1.1. Introducción a la Programación Lineal 5

1.1.1. El nacimiento de la Programación Lineal 5

1.1.2. Ejemplo ilustrativo: "un problema de producción de láminas de acero" 6

1.1.3. Introducción de la notación 8

1.2. Resultados básicos de optimalidad y dualidad 10

1.3. Implementación en R 22

1.3.1. Descripción general 22

1.3.2. Sintaxis 23

1.3.3. Interpretación de salidas 24

1.3.4. Ejemplos 26

1.3.5. Resolución del problema de producción de láminas de acero . . 29

2. Análisis de sensibilidad RHS: tasa de mejora del valor óptimo **33**

2.1. Introducción al análisis de sensibilidad 33

2.1.1. Motivación e interés del análisis de sensibilidad 33

2.1.2. Diferentes enfoques del análisis de sensibilidad 34

2.2. Análisis de sensibilidad RHS: formulación del valor óptimo 35

2.3. Tasa de mejora del valor óptimo 37

2.3.1. Preliminares 38

2.3.2. Fórmula de la tasa de mejora 38

2.4. Implementación en R 40

2.4.1. Descripción general 40
2.4.2. Sintaxis 41
2.4.3. Interpretación de salidas 41
2.4.4. Ejemplo 42
2.4.5. Análisis de sensibilidad del problema de la producción de láminas de acero 43

3. Aplicaciones de la programación lineal 47
3.1. Un problema de fabricación de colonia 48
3.1.1. Enunciado del problema 48
3.1.2. Planteamiento y modelo matemático 48
3.1.3. Implementación en R 49
3.1.4. Resultados y conclusiones 50
3.2. Un problema de inversión 53
3.2.1. Enunciado del problema 54
3.2.2. Planteamiento y modelo matemático 54
3.2.3. Implementación en R 55
3.2.4. Resultados y conclusiones 56
3.3. Un problema de producción de fármacos 58
3.3.1. Enunciado del problema 58
3.3.2. Planteamiento y modelo matemático 59
3.3.3. Implementación en R 60
3.3.4. Resultados y conclusiones 60

A. Función puntos extremos y valor óptimo en R 65

B. Función puntos extremos óptimos y tasa de mejora en R 73

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado se enmarca en el campo del análisis de sensibilidad de problemas de Programación Lineal (PL, por brevedad). Un problema de PL se formula en términos de maximizar o minimizar un determinada función objetivo lineal (por ejemplo, maximizar el beneficio de una empresa o minimizar el coste de producción) dentro del denominado conjunto factible, el cual constituye el abanico de soluciones posibles teniendo en cuenta las restricciones lineales existentes de presupuesto, tiempo, espacio, etc.

La PL surge como disciplina independiente, tal y como la conocemos hoy en día, a mediados del siglo XX. Concretamente, su origen se sitúa en torno a la Segunda Guerra Mundial. De hecho, el término "programación" atiende al término militar que se refería a planificar secuencias de entrenamientos, paradas logísticas, despliegues de soldados, etc. En 1947, George B. Dantzig, mientras trabajaba en el Pentágono como consejero matemático de la *United States Air Force*, formuló en términos matemáticos precisos el modelo general de un problema de PL, al tiempo que inventó el método SIMPLEX para su resolución exacta. Este método ha sido seleccionado como uno de los diez algoritmos más decisivos del siglo XX. Dantzig es, de hecho, reconocido como el padre de la PL (véase Gass [3] para detalles). A mediados de los años cincuenta el interés por la PL alcanzó el terreno industrial[1] y el académico.

Dentro del amplio campo de la PL, el presente trabajo versa sobre el análisis de sensibilidad de problemas y, concretamente se ocupa de analizar las repercusiones

[1]Como ejemplo de la popularidad que fueron cobrando los métodos de la PL en la empresa, comentaremos que en una encuesta realizada en en 1972 en Estados Unidos sobre las 500 empresas más importantes del país (de acuerdo con la revista Fortune), se dedujo que la mitad de las empresas que contestaron la encuesta poseían un departamento especial dedicado a tareas relacionadas con la optimización. De acuerdo con este estudio las técnicas más empleadas eran el análisis estadístico, la simulación, la programación lineal, la teoría de inventarios y la programación dinámica.

que pueden ocasionar en el valor óptimo del problema (por ejemplo, en el máximo beneficio) ligeras modificaciones en los datos del mismo. El análisis de sensibilidad en PL es un tema paradigmático al que numerosos investigadores de primera línea internacional han dedicado un notable esfuerzo desde los orígenes de la PL. Como fruto de ese esfuerzo, podemos encontrar en la literatura numerosas publicaciones en revistas científicas internacionales muy prestigiosas; véanse por ejemplo los trabajos pioneros de Gass y Saaty ([13] and [16]) y otros más recientes como los de Ghaffari *et al.* [12] y Gauvin [15]. Asimismo, existen diferentes enfoques del análisis de sensibilidad, como puede consultarse, por ejemplo, en el artículo de revisión de Ward y Wendel [17] o en la monografía de Gal [14]. Encontramos trabajos que versan sobre las variaciones que pueden producirse en el conjunto de soluciones factibles, de soluciones óptimas, de los llamados conjuntos activos, etc., bajo pertubaciones de los datos. Además, existen también diferentes tipos de perturbaciones de los datos según si se producen en los términos independientes de las restricciones, los coeficientes de la función objetivo, la matriz de coeficientes (del lado izquierdo) del sistema de restricciones, etc.

Para concretar, el presente trabajo se ubica en el análsis de la variación del valor óptimo de un problema, por ejemplo máximo beneficio de una empresa, cuando se perturban los términos independientes de las restricciones, esto es, los valores asociados a nuestras limitaciones, por ejemplo presupuestarias. En este contexto, nuestro objetivo es tratar de averiguar cómo mejoraría dicho beneficio si se ampliara ligeramente el presupuesto disponible.

El objetivo global del trabajo se desarrolla en tres capítulos:

- En el primer capítulo, con el fin de presentar un trabajo autocontenido, comenzamos recogiendo la notación, la estructra típica de un modelo de PL y los resultados teóricos básicos de PL necesarios para el desarrollo de los restantes capítulos. Concretamente, incluimos determinados resultados básicos de optimalidad y dualidad en PL, así como diferentes caracterizaciones de puntos extremos de poliedros. Para la elaboración de los contenidos teóricos de este capítulo hemos consultado los textos de Goberna *et al.* [5] y Bertsimas y Tsitsiklis [2]. En cuanto a la selección de resultados, no hemos pretendido ofrecer un tratamemiento sistemático y exhaustivo de la teoría de la PL, sino recoger los enunciados (sin demostración) necesarios para comprender el tratamiento del análisis de sensibilidad en PL que se hace en el capítulo 2. Como veremos, el conjunto de puntos extremos del conjunto factible dual desempeña un papel destacado en nuestro análisis. Precisamente, nuestra principal contribución en este capítulo consiste en la implementación en R de una función capaz de calcular genéricamente el mencionado conjunto de puntos extremos; particularmente, el usuario de esta función de R ha de introducir los coeficientes del problema de PL y nuestra función compone el problema dual, comprueba su resolubilidad y proporciona como salidas los puntos extremos del conjunto factible dual y el valor óptimo del problema.

- El segundo capítulo se centra en el análisis de sensibilidad de problemas de PL bajo pertubaciones del lado derecho de las restricciones (los términos independientes de las desigualdades y las ecuaciones). Respecto de la teoría que recogemos en este capítulo, comentamos que se hace una breve incursión sobre determinados avances muy recientes del análisis de sensibilidad que pueden encontrarse en el trabajo de Gisbert *et al.* [4]. Un concepto destacado en este capítulo es la llamada *tasa (máxima) de mejora* del objetivo del problema, la cual trata de cuantificar la (mayor) mejora que puede conseguirse en el objetivo de un problema, por ejemplo en el beneficio por la producción de una empresa, por cada unidad (en rigor por incrementos suficientemente pequeños) que relajemos nuestras limitaciones, por ejemplo de presupuesto, tiempo, espacio disponible, etc. La principal contribución original del capítulo consiste en la implementación en R de una función que determina de forma genérica los puntos extremos del conjunto óptimo dual, y los utiliza como ingredientes en el cálculo de la tasa de mejora comentada anteriormente.

- Finalmente, el capítulo 3 tiene como objetivo ilustrar los conceptos y resultados de análisis de sensibilidad recogidos en este proyecto mediante diferentes ejemplos de problemas de PL que se plantean en el ámbito empresarial. Por motivos didácticos, hemos optado por seleccionar ejemplos típicos y sencillos de la PL en los que poder ilustrar con claridad el comportamiento del valor óptimo cuando se parametriza el problema con respecto al lado derecho de las restricciones. De este modo, la formulación matemática del valor óptimo con respecto a los parámetros (donde recaen las perturbaciones de los datos) nos permitirá extraer conclusiones acerca de la conveniencia o no de modificar algunos datos, teniendo en cuenta que la finalidad última de nuestro estudio es la de conseguir mejorar nuestro objetivo al menor coste posible. De entrada, el análisis de sensibilidad nos permite averiguar qué pasaría si modificásemos algunos datos (por ejemplo, presupuesto, mano de obra, etc.) sin necesidad de experimentarlo empíricamente, lo cual supone un ahorro de partida. Informalmente hablando, sustituimos el "ensayo y error" por un análisis teórico de consecuencias sin necesidad de ensayo.

Capítulo 1

Optimalidad en Programación Lineal: un enfoque dual

1.1. Introducción a la Programación Lineal

Este capítulo recoge los conceptos y resultados de Programación Lineal, relativos a las condiciones de optimalidad y dualidad, necesarios para desarrollar los resultados de análisis de sensibilidad que se presentan en el capítulo 2. Además, se incluyen unas breves notas históricas con el fin de ayudar a entender el sentido de la PL, comprendiendo las causas que motivaron su origen y su actual repercusión.

Uno de los resultados fundamentales del capítulo es el teorema 7, donde se determina el valor óptimo de un problema de PL a través de los puntos extremos del conjunto factible dual. Precisamente, la principal aportación original del capítulo consiste en la implementación en R del cálculo de dichos puntos extremos. Estos puntos extremos son primordiales a la hora de estudiar la evolución del valor óptimo del problema bajo perturbaciones del lado derecho de las restricciones, lo que constituye el objetivo del capítulo 2. Así pues, el presente capítulo desarrolla las herramientas teóricas y computacionales necesarias para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.1.1. El nacimiento de la Programación Lineal

El primer modelo de PL fue construido en el siglo XVIII para estimar datos astronómicos. Grandes matemáticos como Newton, Leibnitz, Bernouilli y, sobre todo, Lagrange ya se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones. De nuevo se formularon modelos de PL durante la Segunda Guerra Mundial para resolver problemas de asignación de recursos y transporte. Un ejemplo fue el caso de Kantorovich, que en 1939 escribió la monografía *El cálculo económico de la mejor utilización de los recursos*, una vez resuelto un problema concreto planteado por la industria maderera (productora de culatas para fusiles) acerca de efectuar los cortes en los tablones minimizando los desperdicios.

Como comentábamos en la introducción del trabajo, el gran matemático George Dantzig, considerado el "padre de la programación lineal" propuso el primer método eficiente para la resolución de problemas de PL, siendo el autor del método SIMPLEX (1947). Ese mismo año, el matemático John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad (véase la sección 1.2).

Con el tiempo, el uso de la PL se popularizó durante la segunda mitad del siglo XX, una vez se dispuso de un algoritmo eficiente y de ordenadores capaces de efectuar los cálculos con rapidez suficiente. La enseñanza de la historia que sigue es que la emergencia de los modelos está condicionada por las circunstancias tecnológicas e incluso políticas.

1.1.2. Ejemplo ilustrativo: "un problema de producción de láminas de acero"

El enunciado del siguiente problema ha sido extraído de la página web `https://es.slideshare.net/MiguelSanchez14/problemas-de-programacin-lineal`.

Problema 1. *Una empresa que realiza laminados de acero de aleación especial produce dos tipos de láminas, que le reportan 8.000 y 6.000 euros respectivamente por cada metro producido. El proceso consta de una nueva etapa previa de acondicionamiento del acero, otra de laminado propiamente dicho, y una tercera de pulido de la superficie resultante, disponiéndose diariamente para cada actividad de un número de horas limitado. Las horas requeridas por unidad de producto y las horas totales diarias disponibles para cada actividad se muestran en cuadro 1.1.*

	Horas requeridas por unidad de producto Laminado 1	Laminado 2	Horas totales disponibles
Acondicionamiento	4	2	60
Laminado	2	4	48
Pulido	6	2	76

Cuadro 1.1: Datos del problema 1. Fuente: Página web indicada anteriormente

En principio no existen limitaciones de material, si bien la empresa está obligada a producir al menos un metro de laminado 1, y un metro también de laminado 2 diariamente con objeto de generar una rentabilidad mínima. Por el contrario, debido a acuerdos en el sector siderúrgico de control de la competencia, no puede producir más de 15 metros diarios de laminado 1, ni más de 5 metros diarios de laminado 2.

Planteamiento del problema

El primer paso consiste en crear un modelo matemático que exprese de manera rigurosa la situación. En todo modelo matemático nos planteamos determinar:

- **Las variables del modelo**, que representan nuestras incógnitas (informalmente hablando, las cantidades que deseamos averiguar). En nuestro problema son:
  - x_1: metros de laminado 1 producidos.
  - x_2: metros de laminado 2 producidos.
- **Las restricciones**, que vienen dadas en forma de igualdad o desigualdad y expresan matemáticamente las limitaciones naturales (de tiempo, capital, dinero, mano de obra, etc.) que presenta nuestra situación particular. En este problema, las restricciones limitan la cantidad de láminas a producir y el tiempo disponible empleado para ello.
- **El objetivo**, que expresa matemáticamente el deseo de la persona que ha de tomar una decisión. En nuestro caso, el objetivo es maximizar los ingresos que reporta la producción de láminas.

Una vez explicado las elementos del problema que se han de determinar, el planteamiento del problema 1 queda como sigue:

El problema de producción de láminas de acero trata de maximizar '$8000x_1 + 6000x_2$' sujeto a las restricciones '$4x_1+2x_2 \leq 60$', '$2x_1+4x_2 \leq 48$', '$6x_1+2x_2 \leq 76$', '$1 \leq x_1 \leq 15$', '$1 \leq x_2 \leq 5$'.

La siguiente subsección presenta el modelo general de PL en el cual, como en el ejemplo anterior, tanto la función objetivo como las restricciones son lineales.

1.1.3. Introducción de la notación

La forma más general que puede tener un problema de PL, $\hat{P}$, es la siguiente, incluyendo todos los posibles casos de restricciones:

$$\begin{array}{lll} \hat{P}: & Min & c^T x \\ & \text{s.a} & a_i^T x \geq b_i, \; i \in \hat{I} \\ & & a_i^T x \leq b_i, \; i \in \hat{J} \\ & & a_i^T x = b_i, \; i \in \hat{K}, \end{array}$$

donde:

- Min indica que la tarea consiste en minimizar;
- $s.a$ es la abreviatura de "sujeto a las restricciones";
- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector (considerado como columna) de variables de decisión;
- $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector (columna) de coeficientes de la función objetivo, y c^T representa su transpuesto;
- $\hat{I}$, $\hat{J}$ y $\hat{K}$ son conjuntos finitos de índices, que suponemos disjuntos dos a dos, y que empleamos para describir las restricciones de "mayor o igual", "menor o igual", e "igual", respectivamente;
- Para cada índice $i \in \hat{I} \cup \hat{J} \cup \hat{K}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coeficientes del miembro izquierdo de la restricción i, y a_i^T representa su transpuesto;
- Para cada $i \in \hat{I} \cup \hat{J} \cup \hat{K}$, $b_i \in \mathbb{R}$ es el término independiente de la *i-ésima* restricción.

Cada una de las restricciones de igualdad se puede desdoblar en dos restricciones de desigualdad, por lo que, cuando sea necesario, podremos suponer sin pérdida de generalidad que no existen restricciones de igualdad en el problema. Además, multiplicado la restricción i, para cada $i \in \hat{J}$ por -1, se puede transformar la restricción de desigualdad "menor o igual", en otra de "mayor igual". De acuerdo con este comentario, todo problema de PL puede expresarse de las siguiente forma, que por simplicidad será la que emplearemos a lo largo de este trabajo:

$$\begin{aligned} P: \quad & Min \quad c^T x \\ & s.a \qquad a_i^T x \geq b_i, \; i \in I, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde I representa el conjunto de índices empleado para describir las restricciones de P. En lo sucesivo, por simplicidad en la notación, supondremos que

$$I := \{1, 2, ..., m\}, \;\; m \in \mathbb{N}.$$

Por comodidad, se puede expresar el anterior problema de forma matricial:

$$\begin{aligned} P: \quad & Min \quad c^T x \\ & \text{s.a} \qquad Ax \geq b, \end{aligned}$$

donde A representa la matriz de coeficientes del miembro izquierdo de las restricciones, y b representa al vector (columna) de valores del miembro derecho de las restricciones; formalmente, la fila *i-ésima* de A es a_i^T y $b := (b_i)_{i=1,...,m}$.

Terminología

Una vez expresado el problema, es necesario conocer los siguientes conceptos para entender los resultados básicos del siguiente apartado.

- **Conjunto factible (F).** El conjunto factible, F, en el supuesto que exista, es la región determinada por las distintas desigualdades de las restricciones, y está dado por:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}.$$

  - Si $F \neq \emptyset$, existen soluciones factibles y el problema se dice **consistente**.

- Si por el contrario $F = \emptyset$, el problema se dice **inconsistente**.

- **Valor óptimo (v).** El valor óptimo, v, es el valor ínfimo de la función objetivo sobre el conjunto factible, y está dado por:

$$v = \text{ínf}\{c^T x | x \in F\}.$$

  - Si P es inconsistente, consideramos $v = \text{ínf}(\emptyset) = +\infty$. En otro caso, si P es consistente siempre se tiene $v < +\infty$.
  - Si v es finito, es decir, $-\infty < v < +\infty$, el problema se dice **acotado**.

- **Conjunto óptimo (S).** El conjunto óptimo, S, es el conjunto de puntos de la región factible con los que se obtiene el valor óptimo; formalmente, está dado por:

$$S = \{x \in F | c^T x = v\}.$$

  - Si $S \neq \emptyset$, el problema se dice **resoluble**. A los elementos de S les llamaremos soluciones óptimas o, simplemente, óptimos.

1.2. Resultados básicos de optimalidad y dualidad

Para comenzar, presentamos a continuación un resultado clave para problemas de programación lineal.

Teorema 1

Sea P el problema de PL introducido en la fórmula anterior (1.1). Si P es acotado, entonces es resoluble.

Obviamente, como consecuencia directa de las definiciones, todo problema resoluble es acotado. Así pues, del teorema anterior se deduce que para un problema P de PL se tiene la equivalencia: P es acotado si, y solo si, es resoluble.

En general, en programación no lineal (PNL) la implicación del teorema anterior no es cierta, pues existen casos en los que no se cumple. Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. *Dado el siguiente problema:*

$$
\begin{aligned}
P: \quad & Min \quad e^{-x} \\
& s.a \qquad x \geq 0,
\end{aligned}
$$

cuya función objetivo se ilustra en la siguiente gráfica:

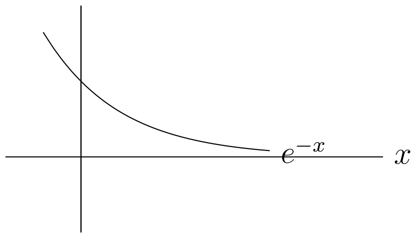

Figura 1.1: Ejemplo 1.1. Fuente: Elaboración propia

En este ejemplo de PNL se comprueba que no se cumple la implicación anterior, pues
$v = \text{ínf}\{e^{-x} | x \geq 0\} = 0$ y por lo tanto P es acotado. Sin embargo, dicho problema no es resoluble, pues $S = \emptyset$, ya que no existe ningún punto con el que se obtenga el valor óptimo.

Introducción del problema dual

En PL, asociamos a cada problema concreto, P, al que en adelante llamaremos primal, otro problema de PL, D, su dual, que viene definido como sigue:

$$
\begin{aligned}
D: \quad & Max \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \\
& \text{s.a} \qquad c = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i \\
& \qquad\qquad \lambda_i \geq 0, \ \ i = 1, 2, ..., m,
\end{aligned}
$$

donde 'Max' indica que la tarea consiste en maximizar, y $(\lambda_i)_{i=1,2,...,m} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de variables de decisión del problema dual.

De nuevo, por comodidad, en ocasiones escribimos D en formato matricial, que quedaría como sigue:

$$
\begin{aligned}
D: \quad & Max \quad b^T \lambda \\
& \text{s.a} \qquad c = A^T \lambda \\
& \qquad\qquad \lambda \geq 0,
\end{aligned}
$$

donde $\lambda = (\lambda_i)_{i=1,2,\ldots,m} \in \mathbb{R}^m$.

En adelante, con el fin de distinguir los valores óptimos de los problemas primal y dual, denotaremos por $v(P)$ al valor óptimo del problema primal y $v(D)$ al valor óptimo del problema dual. Por su parte, el conjunto factible del problema dual será denotado por Λ; esto es,

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid A^T\lambda = c,\ \lambda \geq 0\}.$$

Teorema 2 (de dualidad fuerte)

En PL, siempre que al menos uno de los problemas en el par primal-dual, P-D, sea consistente, se cumple

$$v(P) = v(D).$$

En consecuencia, si uno de ellos es acotado, ambos problemas son resolubles.

Un problema de programación lineal puede ser inconsistente (IC) o consistente. En el segundo caso, puede ser acotado (B, del inglés 'bounded') o no acotado (UB), según su valor sea finito o no. El cuadro 1.2 muestra los posibles estados de los problemas en el par primal-dual P-D, donde el símbolo '✓' significa que el estado es posible y 'X' que no es posible. Este cuadro es consecuencia directa del teorema anterior.

$D \setminus P$	IC	B	UB
IC	✓	X	✓
B	X	✓	X
UB	✓	X	X

Cuadro 1.2: Diagrama de dualidad. Fuente: Goberna *et al.* [5]

En nuestro caso, nos centraremos en el estado (B)-(B), es decir, que ambos problemas sean acotados, ya que el posterior estudio consiste en el análisis de sensibilidad de problemas con solución óptima (acotados). Por lo tanto, como consecuencia al Teorema 2, podremos elegir entre resolver el problema primal o el correspondiente dual según la comodidad computacional de cada uno. Téngase en cuenta que el número de variables de uno, se convierte en el número de restricciones del otro.

Caracterización de la consistencia en PL

Dado que nuestro estudio se centra en el estado (B)-(B), lo primero que hemos de comprobar es que nuestro problema primal P es consistente. El siguiente teorema proporciona una caracterización algebraica de la consistencia, que tiene la virtud de ser fácilmente implementable. De hecho, nuestra función de R, incluida en la sección 1.3, comienza con el chequeo de la consistencia del problema considerado.

Teorema 3

Consideremos el problema P de PL. Se tiene que P es consistente si, y solo si, no existen escalares $\lambda_i \geq 0$, con $i = 1, 2, ..., m$, tales que:

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},$$

donde 0_n representa el vector nulo en $\mathbb{R}^n$.

Optimalidad en PL

En este apartado presentamos una caracterización de la condición de punto óptimo en PL. Dicha caracterización viene dada en términos de las llamadas condiciones de Karush, Kuhn y Tucker, las cuales constituyen uno de los pilares de la PNL y que en PL adoptan una forma particularmente operativa.

Definición 1

Se dice que $x^* \in F$ es un punto de Karush, Kuhn y Tucker (KKT, por brevedad) de P si existen escalares $\lambda_i \geq 0$, con $i = 1, 2, ..., m$, tales que:

$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

$$\lambda_i (a_i^T x^* - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

$$a_i^T x^* \geq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$$

Teorema 4 (de Karush, Kunh y Tucker)

Sea $x^* \in F$. Se tiene que x^* es un óptimo de (P) si, y sólo si, x^* es un punto de KKT de P.

Además, si x^* es un punto de KKT y $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ es un vector de multiplicadores de KKT asociado a x^*, entonces λ^* es solución óptima del problema dual D.

Dado un punto $x^* \in F$, la holgura de la restricción i-ésima viene determinada por:

$$a_i^T x^* - b_i.$$

Si la restricción no tiene holgura (el valor de la expresión anterior es 0), se dice que la restricción es activa. En términos geométricos, el que la *i-ésima* restricción sea activa significa que el hiperplano (plano si trabajamos en $\mathbb{R}^3$ o recta si trabajamos en $\mathbb{R}^2$) de la ecuación '$a_i^T x = b_i$' pasa por el punto x^*. A lo largo del trabajo, denotaremos por $I(x^*)$ al conjunto de índices activos en x^*, esto es, el conjunto de índices asociados a restricciones activas en x^*; formalmente:

$$I(x^*) = \left\{ i \in \{1, 2, ..., m\} \mid a_i^T x^* = b_i \right\}.$$

Obsérvese que la condición '$\lambda_i^*(a_i^T x^* - b_i) = 0$' equivale a '$\lambda_i^* = 0$ siempre que $a_i^T x^* - b_i > 0$'. En consecuencia, la definición de punto de KKT puede, alternativamente, expresarse de la siguiente forma: existen escalares $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in I(x^*)$ tales que

$$c = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* a_i.$$

Seguidamente, ilustramos los conceptos anteriores con un ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Consideremos el siguiente problema P, en $\mathbb{R}^2$, y su dual D:*

$$\begin{array}{lll|lll}
P: & Min & -x_1 - x_2 & D: & Max & -3\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 \\
 & s.a & -\frac{1}{3}x_1 - x_2 \geq -3 & & s.a & -1 = -\frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 \\
 & & x_1 \geq 0 & & & -1 = -\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 \\
 & & x_2 \geq 0, & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.
\end{array}$$

Se comprueba fácilmente que obtenemos un único punto de KKT en el conjunto activo $I(x^*) = \{1, 3\}$, es decir, en la primera y tercera restricción. El punto obtenido de KKT es $(9, 0)$, con vector de multiplicadores asociado $\lambda^* = (3, 0, 2)$. Por lo tanto, λ^* es solución óptima de D. Nótese que:

- $v(P) = -1 \cdot 9 - 1 \cdot 0 = -9$,
- $v(D) = -3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = -9$,

lo que ilustra la igualdad $v(P) = v(D)$ que viene recogida en el teorema 2.

Análisis del valor óptimo desde una perspectiva dual

Como hemos comentado anteriormente, el teorema 2 nos proporciona dos alternativas para calcular el valor óptimo de un problema de PL, bien a través del problema primal, o bien a través del problema dual. En nuestro caso, optamos por el segundo camino debido a las repercusiones que tiene en el análisis de sensibilidad que desarrollamos en el siguiente capítulo. Este enfoque dual estará basado en el cálculo de los llamados puntos extremos del conjunto factible dual. Seguidamente, con el fin de hacer el capítulo autocontenido, recordamos los conceptos necesarios.

Definición 2

Se llama **poliedro** *a un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ de la forma:*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_i^T x \geq e_i, \;\; i = 1, 2, ..., m\},$$

donde $d_i \in \mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathbb{R}$, $\;i = 1, ..., m$.

Definición 3

Sea A un poliedro. Se dice que $x^* \in A$ es un **punto extremo** *de A si no existen dos puntos $y, z \in A$, ambos diferentes de x^*, y un escalar $\lambda \in]0, 1[$ tales que:*

$$x^* = \lambda y + (1 - \lambda) z.$$

Denotaremos por $ext(A)$ al conjunto de puntos extremos de A (puede ser vacío).

La siguiente proposición proporciona caracterizaciones algebraicas del concepto de punto extremo.

Proposición 1

Dado un poliedro A y un punto $x^* \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *x^* es un punto extremo de A.*

(b) *El rango de la matriz formada por los vectores a_i, $i \in I(x^*)$, es n.*

(c) *El sistema de ecuaciones $a_i^T x = b_i$, $i \in I(x^*)$, tiene solución única.*

En lo que sigue, dada una matriz M, denotaremos por $r(M)$ a su rango.

Ejemplo 1.3. *Consideremos el problema:*

$$\begin{array}{lll} P: & Min & c^T x \\ & s.a & -x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ & & -2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0. \end{array}$$

¿Es $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ un punto extremo de su conjunto factible, F?

Podemos responder esta pregunta mediante el apartado (b) de la proposición 1, es decir, calculando el rango de la matriz formada por los coeficientes de las restricciones activas del punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Estas restricciones son la primera y segunda:

$$I(x^*) = \{1, 2\} \implies I\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \{1, 2\}.$$

A continuación determinamos el rango de la matriz de coeficientes de dichas restricciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies r\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Conclusión: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ sí es un punto extremo de F en el ejemplo 1.3. De hecho, puede comprobarse que el conjunto de puntos extremos de F coincide con:

$$ext(F) = \{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}.$$

El siguiente ejemplo pone de manifiesto el hecho de que el conjunto de puntos extremos de un poliedro puede ser vacío.

Ejemplo 1.4. *Consideremos el poliedro A, dado por:*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 - 2x_2 \geq -2,\ x_1 + 2x_2 \geq 0\},$$

$$ext(A) = \emptyset.$$

El siguiente teorema responde a la pregunta que nos cuestionamos para evitar la situación del ejemplo 1.4 ¿Cuándo $ext(A) \neq \emptyset$?

Teorema 5

Sea A un poliedro, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $ext(A) \neq \emptyset$;

(b) *A no contiene rectas.*

Nótese que, para un problema de PL acotado, tanto el cojunto factible del problema primal, F, como el del dual, Λ, son poliedros (en particular, no vacíos). Puede ocurrir que $ext(F) = \emptyset$. Sin embargo, el siguiente corolario establece que $ext(\Lambda)$ es siempre no vacío (debido a las condiciones de no negatividad $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geq 0$, lo que asegura que Λ no contiene ninguna recta). Este resultado es un hecho clave en nuestro análisis dado que nos permitirá obtener el valor óptimo de un problema de forma fácilmente implementable (véase sección 1.3).

Corolario 1

Supongamos que D es consistente, entonces su conjunto factible tiene puntos extremos; esto es

$$ext(\Lambda) \neq \emptyset.$$

Ejemplo 1.5. *Consideremos el siguiente problema y veamos la representación gráfica de su conjunto factible (el área que aparece sombreada) en la figura 1.2:*

$$\begin{aligned} P: \quad Min \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

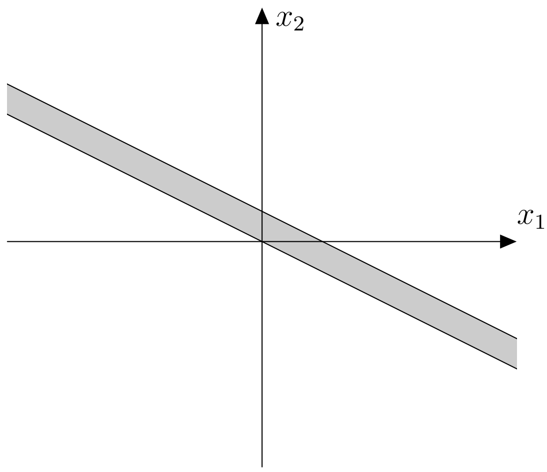

Figura 1.2: Ejemplo 1.5. Fuente: Elaboración propia

Se observa que para dicho problema no se cumplen las condiciones del teorema 5, es decir, F sí contiene rectas y por tanto, no contiene puntos extremos. Formalmente,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 - 2x_2 \geq -2,\ x_1 + 2x_2 \geq 0\},$$

$$ext(F) = \emptyset.$$

Sin embargo, se puede observar gráficamente en la figura 1.3 que el correspondiente problema dual, D, del ejemplo anterior sí contiene puntos extremos:

$$\begin{array}{lll} D: & Max & -2\lambda_1 + 0\lambda_2 \\ & \text{s.a} & 1 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ & & 2 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ & & \lambda_1 \geq 0 \\ & & \lambda_2 \geq 0. \end{array}$$

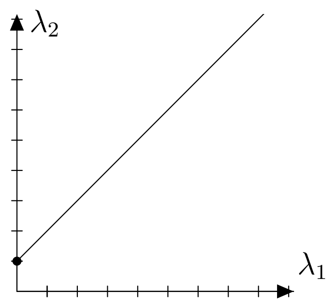

Figura 1.3: Ejemplo 1.5 (2). Fuente: Elaboración propia

Además, podemos obtener los puntos extremos siguiendo los siguientes pasos:

1. Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes de las combinaciones de n restricciones (siendo n la dimensión del problema). En este caso, n es 2.

$$I(\lambda^*) = \{1,2\}: \ r\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1. \qquad I(\lambda^*) = \{2,3\}: \ r\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$I(\lambda^*) = \{1,3\}: \ r\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2. \qquad I(\lambda^*) = \{2,4\}: \ r\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$I(\lambda^*) = \{1,4\}: \ r\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2. \qquad I(\lambda^*) = \{3,4\}: \ r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

2. Seleccionar las combinaciones de restricciones con las que se obtiene un rango de n, es decir, un rango de 2:

$$I(\lambda^*) = \{1,3\},$$

$$I(\lambda^*) = \{1,4\},$$

$$I(\lambda^*) = \{2,3\},$$

$$I(\lambda^*) = \{2,4\},$$

$$I(\lambda^*) = \{3,4\}.$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones formado por las restricciones activas calculadas en el apartado anterior para obtener los puntos.

$$I(\lambda^*) = \{1,3\}: \ \{(0,1)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{1,4\}: \ \{(-1,0)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{2,3\}: \ \{(0,1)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{2,4\}: \ \{(-1,0)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{3,4\}: \ \{(0,0)\}.$$

4. Descartar las soluciones que tengan alguna coordenada negativa y/o no cumplan con las restricciones de igualdad. En este caso, se descartan los casos:

$$I(\lambda^*) = \{1,4\}: \ \ \{(-1,0)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{2,4\}: \ \ \{(-1,0)\},$$

$$I(\lambda^*) = \{3,4\}: \ \ \{(0,0)\}.$$

5. Finalmente, se obtienen los puntos extremos seleccionados en los pasos anteriores, obteniendo la solución:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = \lambda_1 - \lambda_2,\ 2 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\},$$

$$ext(\Lambda) = \{(0,1)\}.$$

Teniendo en cuenta el corolario 1, el siguiente teorema presenta una implicación importante desde el punto de vista práctico a la hora de obtener el valor óptimo de un problema de PL.

Teorema 6

En PL, dado un problema acotado cuyo conjunto factible tenga algún punto extremo verifica que existe un punto extremo que es óptimo de dicho problema.

Teorema 7

Supongamos que P es acotado, entonces:

$$v(P) = v(D) = max\{b^T\lambda \mid \lambda \in ext(\Lambda)\}. \tag{1.2}$$

Si escribimos $ext(\Lambda) = \{\lambda^i,\ i = 1, ..., s\}$, se puede expresar el teorema anterior de la siguiente forma:

$$v(P) = v(D) = \max\{b^T\lambda^i, \quad i = 1, ..., s\}.$$

En el ejemplo anterior (ejemplo 1.5), se tenía: $ext(\Lambda) = \{(0,1)\}$. Entonces, si $P(b)$ es acotado:

$$v(P) = v(D) = (-2,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo 1.6. *Consideremos el siguiente problema* P*, en* $\mathbb{R}^n$*, y su dual* D*:*

$$
\begin{array}{lll|lll}
P: & Min & x_1 + 2x_2 & D: & Max & -2\lambda_1 - 6\lambda_3 \\
 & s.a & -x_1 - 2x_2 \geq -2 & & s.a & 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\
 & & 2x_1 + 4x_2 \geq 0 & & & 2 = -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \\
 & & -2x_1 - 4x_2 \geq -6 & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \\
 & & x_1 + 2x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

En la representación gráfica del conjunto factible del problema primal P que se muestra a continuación en la figura 1.4 se observa que dicho problema no contiene puntos extremos.

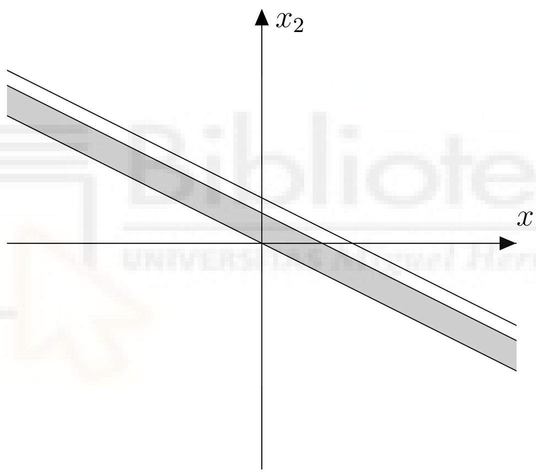

Figura 1.4: Ejemplo 1.6. Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, y como sucedía en el ejemplo anterior, el correspondiente problema dual D contiene los siguientes puntos extremos: $ext(\Lambda) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0.5, 0, 0)\}$. Entonces,

$$
v(P) = v(D) = \max\{(2, 0, -6, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (2, 0, -6, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = 0.
$$

Nota: Estos problemas se resolverán en la siguiente sección mediante una función de R que permite obtener los puntos extremos y el valor óptimo.

1.3. Implementación en R

En esta sección, sin entrar en detalles más técnicos, comentaremos nuestras principales aportaciones en relación con la implementación en R del cálculo de los puntos extremos del conjunto factible del problema dual. La función correspondiente se encuentra en el apéndice A.

1.3.1. Descripción general

En líneas generales, dado el problema:

$$\begin{aligned} P: \quad & Min \quad c^T x \\ & \text{s.a} \qquad a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, ..., m \end{aligned}$$

la función determina el conjunto de puntos extremos del conjunto factible dual, con el fin de determinar explícitamente la función valor óptimo. Recordemos que:

$$v(P) = v(D) = \max_{\lambda \in ext(\Lambda)} b^T \lambda.$$

La función está estructurada en los siguientes pasos:

1. Chequeo de la consistencia del problema primal. Para analizarla, se aplica el teorema 3 de la caracterización de la inconsistencia en PL, en la sección 1.2. Si se confirma la inconsistencia del problema primal planteado, la función se detendrá indicando el estado del problema. En caso, contrario, la función continuará siguiendo los siguientes pasos para determinar los puntos extremos del problema dual.

2. Formulación del dual del problema primal considerado. El usuario introduce los coeficientes del problema primal y nuestra función de R elabora directamente el correspondiente dual.

3. Calcular el determinante de la matriz formada por los coeficientes de las combinaciones de m restricciones (siendo m la dimensión del espacio donde está planteado el problema, es decir, el número de variables del problema dual).

4. Seleccionar las combinaciones del paso anterior con las que se obtiene un determinante distinto de cero, ya que con estas se obtiene un rango de m.

5. Resolver el sistema de ecuaciones formado por las restricciones activas calculadas en el apartado anterior para obtener los puntos candidatos.

6. De los puntos obtenidos en el paso anterior, descartar los siguientes:

   a) Los puntos que tengan alguna coordenada negativa.

   b) Los puntos que no cumplen las restricciones de igualdad.

7. Una vez descartados los puntos anteriores se plantean dos situaciones:

   a) Si se ha hallado algún punto, crear un "data frame" con los puntos extremos que han cumplido los pasos anteriores y con las restricciones activas con las que se obtienen dichos puntos. Como resultado se mostrará una tabla con estos valores (véase el cuadro 1.3).

   b) Si se han descartado todos los puntos con los pasos anteriores, aparecerá un mensaje que indica que el problema primal es no acotado y su dual correspondiente es inconsistente.

8. Calcular el valor óptimo del problema mediante la fórmula (1.2). Este valor también se mostrará como resultado de la función.

Nota: Como se ha explicado anteriormente, la función ha sido creada para resolver situaciones en las que ambos problemas (primal y dual) sean acotados. Sin embargo, si el usuario introduce un problema en la que no se produce este estado, B-B, y por tanto, no se puede calcular puntos extremos del problema dual, aparecerán los mensajes correspondientes indicando el estado de los problemas determinados en el paso 1 y 7b).

1.3.2. Sintaxis

La función ha sido implementada en R de tal forma que cualquier usuario con un conocimiento básico sobre el tema pueda utilizarla y resolver su problema. Los parámetros de entrada que el usuario debe introducir han sido preparados para reducir, en la medida de lo posible, la complejidad de manejo de la función. Esta escasez de complejidad se da en situaciones como la que se explica en el paso 1 de la sección anterior, es decir, no es necesario que el usuario tenga conocimiento de cómo transformar un problema primal a su correspondiente dual; o en que tampoco es necesario introducir el número de variables ni restricciones del problema, ya que son calculadas mediante la misma función. Además, las letras utilizadas para los parámetros de entrada corresponden con las expresadas en la estructura general del problema.

Por lo tanto, para resolver el problema, es decir, para obtener los puntos extremos del problema dual, se deben introducir en R los siguientes parámetros de entrada (ordenados en la posición que se introducen):

- **b**: vector (columna) de los términos independientes de las restricciones.
- **c**: vector de coeficientes de la función objetivo.
- **a**: matriz de coeficientes del miembro izquierdo de las restricciones.

Consecuentemente, para obtener los resultados que proporciona la función, el usuario debe introducir el nombre la función, TFG, y los parámetros de entrada anteriores. La sintaxis sería la siguiente:

```
TGF(b,c,a)
```

Nota: Puesto que los parámetros de entrada se introducen de forma matricial, el usuario debe tener conocimiento de cómo introducir matrices en el lenguaje R.

En la subsección 1.4.4. se mostrarán varios ejemplos que ayudarán a comprender el sistema de introducción de los parámetros de entrada.

1.3.3. Interpretación de salidas

Una vez analizado el método operativo de la función y el modo de utilización de ella por parte del usuario, en esta subsección se informa sobre los resultados que se obtiene y la interpretación de estos.

Del mismo modo que en la introducción de parámetros de entrada de la función, se ha tenido en cuenta la simplicidad de entendimiento a la hora de interpretar los resultados. Por este motivo, los resultados se muestran de una manera concisa, aportando información únicamente sobre las cuestiones de interés. Además, estos resultados vienen acompañados con su respectivo nombre para facilitar la comprensión en la identificación de estos valores.

Las cuestiones de interés mencionadas anteriormente son en primer lugar, los puntos extremos y las restricciones activas con las que se obtiene cada uno de estos puntos; y en segundo lugar, el valor óptimo del problema.

A continuación se muestra en el cuadro 1.3 la primera cuestión de interés (puntos extremos y restricciones activas). Así pues, las columnas (de manera general) que aparecen como salida en R de la función implementada son:

```
"Los puntos extremos son:"
```

Restriccion.1	...	Restriccion.m	Lambda.1	...	Lambda.m

Cuadro 1.3: Puntos extremos del dual. Fuente: Elaboración propia

En la tabla anterior se observa claramente los dos grupos de resultados que se obtienen. Por un lado, aparecen las **restricciones activas** con las que se obtiene el correspondiente punto extremo; y por otro lado, se muestran los puntos extremos, asociando cada **coordenada** a su respectiva variable λ. Por lo tanto, las salidas que proporciona la función son:

- **Restriccion.i**. Muestra la posición de la restricción activa que interviene para obtener el consiguiente punto extremo, para cada $i \in \{1, 2, ...m\}$. Es decir, "Restriccion.1" muestra la posición (las posiciones vienen determinadas en la estructura del enunciado del problema dual) de la primera restricción activa que interviene en la obtención del punto extremo que aparece a continuación.

- **Lambda.i**. Estas columnas muestran el valor de cada "Lambda.i", para cada $i \in \{1, 2, ...m\}$. Es decir, estas columnas proporcionan los valores de cada una de las coordenadas del punto extremo.

Por otro lado, el valor óptimo del problema aparece mediante un mensaje seguido de la tabla anterior, de la siguiente forma:

"El valor óptimo es $v(P)$ ",

donde $v(P)$ representa el resultado del valor óptimo.

1.3.4. Ejemplos

Esta subsección trata de ilustrar la aplicación práctica de la función mediante los ejemplos 1.5 y 1.6, obteniendo directamente los puntos extremos del problema dual tras introducir los parámetros del problema primal.

Ejemplo 1.7. *Resolver el siguiente problema (ejemplo 1.5) mediante la función implementada en R. En la parte derecha se encuentra el problema dual correspondiente:*

$$\begin{array}{lll|lll} P: & Min & x_1 + 2x_2 & D: & Max & -2\lambda_1 + 0\lambda_2 \\ & s.a & -x_1 - 2x_2 \geq -2 & & s.a & 1 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ & & x_1 + 2x_2 \geq 0 & & & 2 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ & & & & & \lambda_1 \geq 0 \\ & & & & & \lambda_2 \geq 0. \end{array}$$

Para resolver el problema, es decir, para obtener los puntos extremos del problema dual, se debe introducir en R la función seguida de los parámetros de entrada de la forma establecida anteriormente. Para este ejemplo, los valores a introducir en cada parámetro de entrada son:

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (1, 2), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, para obtener la solución, estos parámetros se deben introducir en la función con el lenguaje utilizado en R. Por este motivo, el código que proporciona la salida con los puntos extremos es la siguiente:

```
TFG(matrix(c(-2,0),nrow = 2),
    matrix(c(1,2), nrow = 1),
    matrix(c(-1,1,-2,2), nrow = 2))
```

El cuadro 1.4 muestra la salida de la función tras introducir el código anterior. En ella se muestran los puntos extremos del problema dual y las restricciones activas con las que se obtienen dichos puntos. Véase la salida de la solución del ejemplo planteado:

```
"Los puntos extremos son:"
```

Restriccion.1	Restriccion.2	Lambda.1	Lambda.2
1	3	0	1
2	3	0	1

Cuadro 1.4: Puntos extremos del dual. Fuente: Elaboración propia

donde se obtiene la siguiente conclusión:

- La primera fila indica que se obtiene un punto extremo en (0,1) con la primera y tercera restricción del problema (dual).
- La segunda fila indica que se obtiene el mismo punto extremo, (0,1), con la segunda y tercera restricción del problema (dual).

Además, el valor óptimo del problema obtenido mediante la función se muestra a continuación de la tabla a través del siguiente mensaje:

```
"El valor óptimo es 0".
```

Ejemplo 1.8. *Resolver el siguiente problema (planteado en el ejemplo 1.6 de la sección anterior) mediante la función implementada en R. En la parte derecha se encuentra el problema dual correspondiente:*

$$
\begin{array}{lll|lll}
P: & Min & x_1 + 2x_2 & D: & Max & -2\lambda_1 - 6\lambda_3 \\
 & s.a & -x_1 - 2x_2 \geq -2 & & s.a & 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\
 & & 2x_1 + 4x_2 \geq 0 & & & 2 = -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \\
 & & -2x_1 - 4x_2 \geq -6 & & & \lambda_1 \geq 0 \\
 & & x_1 + 2x_2 \geq 0 & & & \lambda_2 \geq 0 \\
 & & & & & \lambda_3 \geq 0 \\
 & & & & & \lambda_4 \geq 0.
\end{array}
$$

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, se debe introducir en R la función seguida de los parámetros de entrada de la forma establecida. Para este ejemplo, los valores a introducir en cada parámetro de entrada son:

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (1,2), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, estos parámetros se deben introducir en la función con el siguiente código:

```
TFG(matrix(c(-2,0,-6,0), nrow = 4),
    matrix(c(1,2), nrow = 1),
    matrix(c(-1,2,-2,1,-2,4,-4,2), nrow = 4))
```

En los cuadros 1.5 y 1.6 se muestran las salidas de la función tras introducir el comando anterior. En ellos se muestran los puntos extremos del conjunto factible del problema dual y las restricciones activas con las que se obtienen dichos puntos.

```
"Los puntos extremos son:"
```

Restriccion.1	Restriccion.2	Restriccion.3	Restriccion.4
1	3	4	5
1	3	5	6
2	3	4	5
2	3	5	6

Cuadro 1.5: Restricciones activas del dual. Fuente: Elaboración propia

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4
0	0	0	1
0	0.5	0	0
0	0	0	1
0	0.5	0	0

Cuadro 1.6: Puntos extremos del dual. Fuente: Elaboración propia

donde se obtiene la siguiente conclusión:

- La primera fila indica que se obtiene un punto extremo en $(0,0,0,1)$ con las restricciones 1, 3, 4, 5 del problema (dual).

- La segunda fila indica que se obtiene un punto extremo en $(0, 0.5, 0, 0)$ con las restricciones 1, 3, 5, 6 del problema (dual).
- La segunda fila indica que se obtiene un punto extremo en $(0, 0, 0, 1)$ con las restricciones 2, 3, 4, 5 del problema (dual).
- La segunda fila indica que se obtiene un punto extremo en $(0, 0.5, 0, 0)$ con las restricciones 2, 3, 5, 6 del problema (dual).

Además, el valor óptimo del problema obtenido mediante la función se muestra a continuación de la tabla a través del siguiente mensaje:

`"El valor óptimo es 0"`.

1.3.5. Resolución del problema de producción de láminas de acero

A lo largo de esta sección se ha explicado el modo de utilización de la función implementada en R que calcula los puntos extremos del conjunto factible dual, que son fundamentales para la obtención del valor óptimo. Además, se ha ilustrado a través de varios ejemplos el correcto uso de la función, indicado los parámetros de entrada y la forma de introducirlos para obtener el resultado deseado.

Así pues, del mismo modo podemos aplicar la función para obtener los puntos extremos y el valor óptimo del problema de producción de láminas de acero. Recordemos el planteamiento del modelo matemático del problema y su correspondiente problema dual:

$$
\begin{aligned}
P: \quad & Min \quad -8000x_1 - 6000x_2 \\
& \text{s.a} \quad -4x_1 - 2x_2 \geq -60 \\
& \qquad\;\; -2x_1 - 4x_2 \geq -48 \\
& \qquad\;\; -6x_1 - 2x_2 \geq -76 \\
& \qquad\;\; x_1 \geq 1 \\
& \qquad\;\; -x_1 \geq -15 \\
& \qquad\;\; x_2 \geq 1 \\
& \qquad\;\; -x_2 \geq -5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
D: & Max & -60\lambda_1 - 48\lambda_2 - 76\lambda_3 + \lambda_4 - 15\lambda_5 + \lambda_6 - 5\lambda_7 \\
 & \text{s.a} & -8000 = -4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 \\
 & & -6000 = -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_6 - \lambda_7 \\
 & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0.
\end{array}
$$

El siguiente paso, consiste en determinar los parámetros de entrada a introducir en la función. Estos son:

$$
b = \begin{pmatrix} -60 \\ -48 \\ -76 \\ 1 \\ -15 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c = (-8000, -6000), \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -6 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

El código que se ha de introducir en la R para obtener los resultados es:

```
TFG(matrix(c(-60,-48,-76,1,-15,1,-5),nrow = 7),
matrix(c(-8000,-6000), nrow = 1),
matrix(c(-4,-2,-6,1,-1,0,0,-2,-4,-2,0,0,1,-1), nrow = 7, ncol = 2))
```

Tras introducir el código anterior, la función comprueba la consistencia del problema y su resolubilidad (consistencia y valor óptimo finito), y posteriormente, nos proporciona los puntos extremos del conjunto factible del problema dual y su valor óptimo (que recordemos que coincide con el valor óptimo primal).

El cuadro 1.7 muestra la primera salida que proporciona la función.

Nota: Mostramos únicamente los puntos extremos, descartando las restricciones activas con las que se obtienen dichos dichos puntos, ya que, si bien es información útil para la obtención de dichos puntos, es menos relevante para el análisis posterior.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5	Lambda.6	Lambda.7
0	0	0	0	8000	0	6000
0	0	1333.333	0	0	0	3333.333
0	0	3000	10000	0	0	0
0	4000	0	0	0	10000	0
0	1500	0	0	5000	0	0
0	1000	1000	0	0	0	0
2000	0	0	0	0	0	2000
3000	0	0	4000	0	0	2000
1666.667	666.6667	0	0	0	0	0

Cuadro 1.7: Puntos extremos del dual. Fuente: Elaboración propia

Mediante estos puntos extremos, se pueden determinar los ingresos para cualquier limitación factible establecida de horas y de producción máxima como el máximo del producto de estas limitaciones por los puntos extremos. Sin embargo, las limitaciones en general no se pueden modificar considerablemente y como sucede en este problema, puede haber una gran cantidad de puntos extremos y suponer una dificultad para ver la repercusión directa que tienen las limitaciones sobre los ingresos. Por este motivo, en el capítulo 2 veremos cómo se puede reducir la cantidad de puntos extremos para observar con mayor facilidad los ingresos que se obtienen para pequeñas variaciones en las limitaciones.

El valor óptimo (para este problema concreto con las limitaciones planteadas) obtenido mediante la función se muestra a continuación de la tabla a través del siguiente mensaje:

```
"El valor óptimo es -117999.999973".
```

Como el problema trataba de maximizar y nuestro planteamiento siempre es minimizar, se ha multiplicado la función objetivo por -1. Sin embargo, hay que volver a transformar la función objetivo a su planteamiento original para indicar el verdadero valor óptimo del problema, que en este caso, es 177999.999973.

Mediante este resultado, se puede afirmar que a priori, tras realizar la producción óptima, los ingresos obtenidos son de 118000 euros. Sin embargo, y como veremos a continuación en el siguiente capítulo, estos ingresos pueden aumentar considerablemente con ligeras perturbaciones en los límites establecidos del problema.

Capítulo 2

Análisis de sensibilidad RHS: tasa de mejora del valor óptimo

2.1. Introducción al análisis de sensibilidad

En general, el análisis de sensibilidad de un problema de PL consiste en estudiar las repercusiones que pueden ocasionar en el conjunto factible, conjunto óptimo y/o valor óptimo del problema ligeras perturbaciones de sus datos. Cuando las perturbaciones afectan únicamente a los términos independientes de las restricciones, nos encontramos ante el llamado análisis de sensibilidad RHS; las siglas RHS provienen del inglés "right-hand-side" y hacen referencia al hecho de que las perturbaciones recaen sobre los coeficientes del lado derecho de las restricciones.

2.1.1. Motivación e interés del análisis de sensibilidad

Diferentes autores de primera línea internacional, entre los que se encuentran investigadores pioneros en la teoría y los métodos de la PL, coinciden en la relevancia de realizar un análisis de sensibilidad del problema considerado.

Los motivos que conducen a la necesidad de realizar un análisis de sensibilidad son varios. Por ejemplo, en ocasiones, como consecuencia del redondeo en los procesos computacionales, nos encontramos resolviendo un problema ligeramente diferente al original, donde los datos se encuentran ligeramente perturbados. En otras ocasiones, el decisor está interesado en conocer qué ocurriría si modificase algunos de los datos iniciales del problema. Por ejemplo, en nuestra ilustración del problema 1, el decisor estaría interesado en conocer cómo aumentarían sus ingresos si aumentase el número de horas totales disponibles dedicadas a cada actividad, por supuesto sin tener que llevar a la práctica dicho aumento (esto es, sin utilizar recursos monetarios, de personal, etc.). En definitiva, en vez de ensayar empíricamente (con el gasto que acarrea) para ver qué ocurriría, se trata de averiguarlo por métodos puramente matemáticos.

2.1.2. Diferentes enfoques del análisis de sensibilidad

Para llevar a cabo el análisis de sensibilidad, existen diferentes enfoques que son aplicados según el interés del estudio:

- En algunos casos, se analiza cómo varían las soluciones factibles cuando se modifican ligeramente los datos del problema.

- En otros, se analiza la **evolución del valor óptimo** o del conjunto de soluciones óptimas.

En este trabajo, nos centraremos en el segundo enfoque, es decir, en el análisis del valor óptimo.

Por otro lado, en cuanto al tipo de perturbaciones que pueden alterar el valor óptimo, se diferencia:

- Perturbaciones de c.

- Perturbaciones de A.

- Perturbaciones de b (*RHS perturbation*).

- Combinaciones de las anteriores.

En nuestro caso, nos centraremos en las perturbaciones de b; esto es, las perturbaciones recaerán sobre el lado derecho de las restricciones, por lo que nuestro estudio se ubica en el análisis de sensibilidad RHS.

2.2. Análisis de sensibilidad RHS: formulación del valor óptimo

En adelante, denotaremos por $P(b)$ al problema de PL asociado con el vector $b \in \mathbb{R}^m$ en el lado derecho del sistema de restricciones; formalmente:

$$\begin{array}{lll} P(b) & Min & c^T x \\ & \text{s.a} & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, ..., m. \end{array}$$

Nótese que tanto c como los vectores $a_i, \;\; i = 1, ..., m$, son fijos (no están sujetos a perturbaciones). Por lo tanto, esta sección, partiendo de un valor fijo para b, que denotaremos por $\bar{b}$, nos cuestionamos cómo repercutirían en el valor óptimo, $v\big(P(b)\big)$, ligeras modificaciones del parámetro $\bar{b}$.

Centraremos nuestro estudio en el caso de problemas acotados; formalmente, nos restringimos al conjunto de parámetros b tales que $P(b)$ es acotado. Recordemos que en este caso el teorema 2 establece que el valor óptimo del problema primal $P(b)$ coincide con el valor de su dual. El problema dual de $P(b)$, denotado por $D(b)$ está dado por

$$\begin{array}{lll} D(b) & Max & b^T \lambda \\ & \text{s.a} & c = A^T \lambda \\ & & \lambda \geq 0. \end{array}$$

Por simplicidad, emplearemos la notación

$$v(b) := v\left(P(b)\right) = v\big(D(b)\big).$$

Observación: El conjunto factible del problema dual $D(b)$ no depende de b, es decir, es el mismo para cualquier b. Por lo tanto, seguimos empleando el símbolo Λ para representar al conjunto factible de $D(b)$ para cualquier b.

El punto de partida de esta sección proviene de la fórmula del valor óptimo establecida en el teorema 7 del capítulo 1. Teniendo en cuenta la observación anterior, si $P(b)$ es acotado, se tiene que

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext(\Lambda)} b^T \lambda.$$

En este capítulo se refina la expresión anterior reemplazando Λ por un subconjunto suyo, aunque, a cambio, la expresión obtenida será válida en un entorno de $\bar{b}$.

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula para el valor óptimo $v(b)$, asumiendo que $P(b)$ es acotado, en un entorno de $\bar{b}$ empleando como ingredientes los puntos extremos del conjunto óptimo del problema dual. Dicho conjunto óptimo dual será denotado por $\Lambda^{OP}(b)$. Este teorema constituye uno de los resultados principales de este capítulo dado que nos permite analizar como varía el valor óptimo de nuestro problema bajo pequeñas perturbaciones del parámetro b.

Teorema 8

Sea $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ tal que $P(\bar{b})$ es acotado. Entonces, existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^m$ de $\bar{b}$ tal que

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda,$$

para todo $b \in U$, con $P(b)$ acotado.

El siguiente ejemplo pretende ilustrar el resultado que viene recogido en el teorema anterior.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el siguiente problema nominal $P(\bar{b})$, en $\mathbb{R}^2$, y su dual $D(\bar{b})$, en $\mathbb{R}^5$:*

$$\begin{array}{lll|lll}
P(\bar{b}) & Min & x_1 + x_2 & D(\bar{b}) & Max & \lambda_3 + \lambda_4 \\
 & s.a & x_1 + x_2 \geq 0 & & s.a & 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
 & & 2x_1 + x_2 \geq 0 & & & 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_5 \\
 & & x_1 + 2x_2 \geq 1 & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0. \\
 & & x_1 \geq 1 & & & \\
 & & x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

A continuación se muestra en la figura 2.1 la representación gráfica del conjunto factible del problema primal $P(\bar{b})$ (zona sombreada).

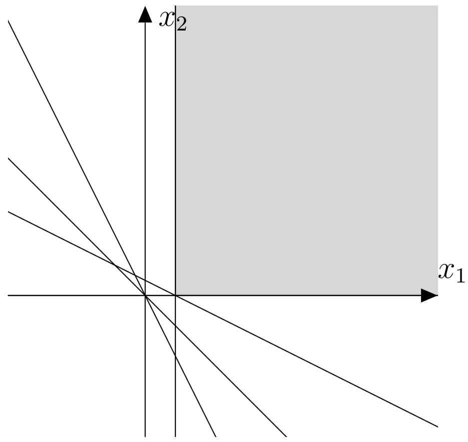

Figura 2.1: Ejemplo 2.1. Fuente: Elaboración propia

Siguiendo los pasos expuestos en el capítulo 1 para el cálculo de los puntos extremos del conjunto factible del problema dual correspondiente al primal planteado, se obtienen los siguientes puntos extremos: $ext(\Lambda) = \{(0,0,0,1,1),(0,0,0.5,0.5,0),(0,0.5,0,0,0.5),(0,0.3,0.3,0,0),(1,0,0,0,0)\}$. Sin embargo, como se establece en el teorema 8, nos quedaremos con los puntos extremos óptimos de $D(\bar{b})$. En este caso, $\bar{b} = (0,0,1,1,0)^T$ y el conjunto de puntos extremos que aparece en el teorema 8 coincide con:

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0,0,0,1,1),(0,0,0.5,0.5,0)\}.$$

Así pues, para un cierto entorno U de $\bar{b} = (0,0,1,1,0)^T$ se tiene que

$$v(b) = \text{máx}\{b_4 + b_5,\ 0.5b_3 + 0.5b_4\},$$

para $b \in U$, con $P(b)$ acotado.

2.3. Tasa de mejora del valor óptimo

Esta sección introduce uno de los conceptos fundamentales del presente trabajo, la llamada tasa de mejora del valor óptimo (véase definición 4). El teorema 9 de esta sección proporciona una fórmula operativa para calcular dicha tasa. De hecho, la fórmula del teorema 9 será implementada en una función de R que describimos en la siguiente sección.

El concepto de tasa de mejora está dado en términos del límite superior de un cierto cociente incremental. Así pues, previamente al estudio de la mencionada tasa recordamos algunos conceptos básicos de análisis matemático relativos al límite superior.

2.3.1. Preliminares

En general, dada una función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, y dado $\bar{z} \in \mathbb{R}^k$, el límite superior de f cuando z tiende a $\bar{z}$, denotado por

$$\limsup_{z \to \bar{z}} f(z),$$

es el supremo de todos los límites de sucesiones de la forma $\{f(z^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ siendo $\{z^r\}$ convergente a $\bar{z}$, entendido como $+\infty$ si alguna de estas sucesiones $\{f(z^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ es no acotada superiormente, y $-\infty$ si todas ellas tienen límite $-\infty$.

Además, podemos considerar límites superiores restringidos a conjuntos. Así pues, si $A \subset \mathbb{R}^k$ es no vacío,

$$\limsup_{\substack{z \to \bar{z} \\ z \in A}} f(z)$$

vale $+\infty$ si existe alguna sucesión $\{z^r\} \subset A$ convergente a $\bar{z}$ tal que la sucesión de imágenes $\{f(z^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ es no acotada superiormente, $-\infty$ si todas las sucesiones $\{f(z^r)\}$, con $z^r \subset A$ convergente a $\bar{z}$, tienen límite $-\infty$, y en el caso restante, coincide con el supremo de todos los límites de sucesiones convergentes de la forma $\{f(z^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ donde $\{z^r\} \subset A$ converge a $\bar{z}$.

2.3.2. Fórmula de la tasa de mejora

Seguidamente introducimos uno de los conceptos fundamentales del presente trabajo, la llamada tasa (máxima) de mejora del valor óptimo, la cual es caracterizada en el teorema 9. En términos informales, dicha tasa nos informa acerca de la (máxima) mejora que puede producirse en el valor óptimo de nuestro problema bajo ligeras perturbaciones del miembro derecho de las restricciones; véase la subsección 2.4.5 para una ilustración en una aplicación del mundo real.

Definición 4

Llamaremos tasa de mejora del valor óptimo en $\bar{b}$ a:

$$M(\bar{b}) := \limsup_{\substack{b \to \bar{b} \\ P(b)\ acotado}} \frac{v(\bar{b}) - v(b)}{||b - \bar{b}||}.$$

Definimos $\frac{0}{0} := 0$.

En este caso,

$$\limsup_{\substack{b \to \bar{b} \\ P(b)\ acotado}} ,$$

significa que estamos considerando sucesiones $\{b^r\}$ tales que $P(b^r)$ es acotado para todo r.

Calcular $M(\bar{b})$ a partir de la definición es engorroso, por lo que interesa proporcionar una fórmula más operativa.

Teorema 9

Sea $\bar{b}$ tal que $P(\bar{b})$ es acotado, se tiene que:

$$M(\bar{b}) = \min_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} ||\lambda||_1, \tag{2.1}$$

donde
$||\lambda||_1 = \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|.$

Ejemplo 2.2. *Dado el problema del ejemplo 2.1, obtener la tasa de mejora $M(\bar{b})$.*

Para obtener la tasa de mejora, partimos de los puntos extremos óptimos de $D(\bar{b})$ obtenidos del ejemplo anterior. Recordemos:

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0,0,0,1,1), (0,0,0.5,0.5,0)\}, \ \ para\, \bar{b} = (0,0,1,1,0)^T.$$

Por consiguiente, aplicando la fórmula del teorema 9 podemos obtener la tasa de mejora para este problema:

$$M(\bar{b}) = \min\{(0+0+0+1+1),\ (0+0+0.5+0.5+0)\} = 1.$$

Nota: Este problema se resolverá en la siguiente sección mediante una función de R que permite obtener los puntos extremos óptimos y la tasa de mejora.

2.4. Implementación en R

En esta sección, del mismo modo que en la sección de la función anterior, comentaremos nuestras principales aportaciones en relación con la implementación en R del cálculo de los puntos extremos óptimos del conjunto factible del problema dual. La función correspondiente se encuentra en el apéndice B. Esta función es una ampliación de la función anterior, con las que se obtendrá como solución otras cuestiones de interés correspondientes a este capítulo.

2.4.1. Descripción general

Desde un punto de vista general, dado el problema:

$$\begin{array}{lll} P(\bar{b}) & Min & c^T x \\ & \text{s.a} & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, ..., m, \end{array}$$

la función determina el conjunto de puntos extremos óptimos del conjunto factible dual, con el fin de determinar explícitamente la función valor óptimo y la tasa de mejora. Recordemos que en este caso existe un entorno U de $\bar{b}$ tal que si $b \in U$ y $P(b)$ es acotado, entonces

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda \, , \quad M(\bar{b}) = \min_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} ||\lambda||_1.$$

Partiendo del último paso de la función implementada en el capítulo anterior, la nueva función está estructurada en los siguientes pasos:

1. Cálculo de los puntos extremos óptimos del conjunto factible del problema dual. Estos puntos son los puntos extremos con los que se obtiene el valor óptimo.

2. Cálculo de la tasa de mejora. Este valor se obtiene con la fórmula anterior de $M(\bar{b})$ (2.1). La fórmula calcula el valor mínimo del sumatorio de las coordenadas de los puntos extremos óptimos.

2.4.2. Sintaxis

La sintaxis que el usuario debe conocer para introducir correctamente los parámetros de entrada de la función se encuentra en la sección 1.3.2, ya que se introducen del mismo modo que en la función del capítulo 1.

2.4.3. Interpretación de salidas

Como se venía explicando al inicio de esta sección, esta función permite obtener los puntos extremos óptimos de un problema dual y su tasa de mejora. Por consiguiente, este apartado trata de mostrar los resultados sobre estas cuestiones de interés, así como la interpretación de los mismos. Las salidas que se obtienen por tanto son:

- **Puntos extremos óptimos.** En el cuadro 2.1 se muestra la primera salida obtenida en la función implementada en R.

  `"Los puntos extremos óptimos son:"`

Lambda.1	Lambda.2	...	Lambda.m

Cuadro 2.1: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

  Estas columnas muestran el valor de cada “Lambda.i”, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Es decir, estas columnas proporcionan el valor de cada coordenada del punto extremo óptimo obtenido.

- **Valor óptimo.** Se obtiene del mismo modo que la función anterior, ya que es el mismo valor:

  `"El valor óptimo es` $v(P)$ `",`

  donde $v(P)$ representa el resultado del valor óptimo.

- **Tasa de mejora:** Por último se obtiene la tasa de mejora también en forma de mensaje a continuación del valor óptimo:

  `"La tasa de mejora es` $M(\bar{b})$ `",`

  donde $M(\bar{b})$ representa el resultado del valor de la tasa de mejora.

2.4.4. Ejemplo

Ejemplo 2.3. *Resolver el siguiente problema (planteado en el ejemplo 2.1 de la sección anterior) mediante la función implementada en R. En la parte derecha se encuentra el problema dual correspondiente:*

$$\begin{array}{lll|lll}
P(\bar{b}) & Min & x_1 + x_2 & D(\bar{b}) & Max & \lambda_3 + \lambda_4 \\
 & s.a & x_1 + x_2 \geq 0 & & s.a & 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
 & & 2x_1 + x_2 \geq 0 & & & 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_5 \\
 & & x_1 + 2x_2 \geq 1 & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0. \\
 & & x_1 \geq 1 & & & \\
 & & x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Para resolver el problema, en primer lugar se debe introducir en R la función seguida de los parámetros de entrada de la forma establecida en 1.3.2. Para este problema, los parámetros a introducir son:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (1,1), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, estos parámetros se deben introducir en la función con el lenguaje utilizado en R de la siguiente forma:

```
TFG(matrix(c(0,0,1,1,0),nrow = 5),
    matrix(c(1,1), nrow = 1),
    matrix(c(1,1,2,1,1,2,1,0,0,1), nrow = 5, byrow = T))
```

Tras introducir los parámetros de entrada mediante el código anterior, se obtienen los resultados de interés para el estudio del análisis de sensibilidad. Éstos son los puntos extremos, el valor óptimo y la tasa de mejora.

La primera salida resultante de la función es el cuadro 2.2, que se muestra a continuación. En ella se muestran las coordenadas de los puntos extremos óptimos del conjunto factible del problema dual.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5
0	0	0	1	1
0	0	0.5	0.5	0

Cuadro 2.2: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

Estos puntos son, como se habían mostrado en el ejemplo 2.2, el $(0, 0, 0, 1, 1)$ y el $(0, 0, 0.5, 0.5, 0)$.

Seguidamente, se obtiene el valor óptimo del problema, mostrándose a través del siguiente mensaje

```
El valor óptimo es 1.
```

Por último, a continuación del valor óptimo, se muestra el mensaje que se indica que valor que toma la tasa de mejora del problema:

```
La tasa de mejora es 1.
```

2.4.5. Análisis de sensibilidad del problema de la producción de láminas de acero

De igual modo que se ha realizado en el capítulo anterior, en esta subsección se aplica todo lo expuesto a lo largo de este capítulo al problema 1 de producción de láminas de acero. Por este motivo, podemos utilizar la función igual que en el ejemplo anterior, para obtener los puntos extremos óptimos, el valor óptimo y la tasa de mejora del problema. Como veremos a continuación, conocer los puntos óptimos de $D(b)$ nos permite entender directamente la evolución del valor óptimo con ligeras perturbaciones del lado derecho de las restricciones.

Así pues, podemos partir de la sección 1.3.5, ya que los parámetros de entrada determinados que se introducían a partir del modelo planteado son los mismos para esta función. El único cambio en el código que se ha de introducir en R para obtener el resultado es el nombre de la función, que en este caso es TFG2:

```
TFG2(matrix(c(-60,-48,-76,1,-15,1,-5),nrow = 7),
matrix(c(-8000,-6000), nrow = 1),
matrix(c(-4,-2,-6,1,-1,0,0,-2,-4,-2,0,0,1,-1), nrow = 7, ncol = 2))
```

En este caso, los resultados que nos proporciona la función son los siguientes:

- Puntos extremos óptimos. De los puntos extremos calculados en el capítulo anterior, se determinan aquellos con los que se obtiene el valor óptimo, es decir, el mayor ingreso. Este resultado se muestra en el cuadro 2.3.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5	Lambda.6	Lambda.7
0	0	1333.333	0	0	0	3333.333

Cuadro 2.3: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

Recordemos que el valor óptimo del problema $P(b)$, para b suficientemente próximo a $\bar{b} = (-60, -48, -76, 1, -15, 1, -5)^T$, con $P(b)$ acotado, viene dado por

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda.$$

Atendiendo a las salidas de R indicadas anteriormente, se tiene que

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0, 0, 1333.33, 0, 0, 0, 3333.333)^T\}.$$

En consecuencia,

$$v(b) = b_3 \cdot 1333.33 + b_7 \cdot 3333.333,$$

para b suficientemente próximo a $\bar{b}$, con $P(b)$ acotado. Nótese que $v(b)$ se corresponde con el máximo ingreso por la producción de láminas de acero bajo las limitaciones asociadas al parámetro b.

A través de esta fórmula, se puede observar que por cada hora disponible que aumentemos la actividad de pulido de láminas (en rigor, los incrementos han de ser suficientemente pequeños), los ingresos aumentan en 1333.33 euros. Por otro lado, por cada metro que se aumente la disponibilidad de producción de lámina 2, los ingresos aumentan en 3333.33 euros.

- Valor óptimo. Este valor, que indica el ingreso máximo que se puede obtener, lo obteníamos también mediante la función anterior.

  `"El valor óptimo es -117999.999973".`

  Este valor, en realidad y como se explicaba anteriormente, es 117999.999973.

- Tasa de mejora. Este valor indica cuánto incrementarían los ingresos si aumentamos en una unidad cada uno de los límites. Sin embargo, hay límites que no se pueden modificar (por ley, porque no puede tomar ciertos valores, etc.) o no tiene sentido modificarlos (porque no mejora el valor óptimo, o su mejora no es significativa comparado con el coste que supone).

  `"La tasa de mejora es 4666.666666".`

Situación 1

Como en este caso los ingresos dependen de la limitación de horas de pulido y la producción máxima de láminas de tipo 2, si aumentamos en una hora la disponibilidad de horas de pulido y en un metro el máximo de láminas de tipo 2, los ingresos aumentarían en 4666.66 euros[1]. Es decir, los ingresos pasarían de 118000 a 122666.66 pesos netos.

Situación 2

Sin embargo, la restricción de no producir más de 5 láminas de tipo 2 estaba establecida por acuerdos en el sector siderúrgico de control de competencia. Por este motivo, esta limitación es fija y no se puede incrementar. Esto supone que la única modificación de las limitaciones que van a incrementar los ingresos es la ampliación de horas de pulido, por lo que es esta la que hay que analizar para considerar su ampliación.

[1] En rigor, los incrementos de las limitaciones de horas de pulido y de metros de láminas de tipo 2 habrían de considerarse suficientemente pequeños como para poder utilizar el teorema 8.

Situación 3

Realizar un incremento de las horas disponibles de una actividad puede acarrear un coste adicional. En esta situación, el decisor debe estudiar si es beneficioso incrementarlo teniendo en cuenta el coste que supone. Como la única actividad que hay que tener en cuenta es la de pulido, si el coste por cada hora que se aumenta la disponibilidad de horas totales de dicha actividad es inferior a 1333.333 euros, sí interesa realizar dicha inversión, ya que aumentarán los beneficios. En caso contrario, no interesa realizar dicha inversión.

Capítulo 3

Aplicaciones de la programación lineal

El objetivo de este capítulo es ilustrar los conceptos relativos al análisis de sensibilidad en PL, estudiados en los capítulos anteriores, en situaciones prácticas. El análisis de situaciones que surgen día a día en el mundo real constituye un apartado importante de la PL, el cual ha contribuido notablemente al auge actual de esta ciencia.

Existen numerosos problemas de la vida real que pueden ser abordados mediante las técnicas de PL (véanse por ejemplo los textos de Hillier y Lieberman [6], Prawda [9], Taha [10] y Winston [11]). Estos problemas pueden encontrarse en áreas tan diversas como análisis de la producción, investigación de mercados, marketing, logística, finanzas, etc. En todos esos ámbitos, la PL se revela como herramienta insustituible en la toma de decisiones. El presente capítulo ofrece unas breves pinceladas sobre diferentes aplicaciones de la PL en los ámbitos de la producción y de las inversiones.

Como adelantábamos en la introducción del trabajo, por motivos didácticos hemos optado por seleccionar ejemplos sencillos con la finalidad de ilustrar con claridad la fórmula que explica el comportamiento del valor óptimo de un problema parametrizado y el concepto de tasa de mejora del objetivo (introducidos en el capítulo 2). De este modo, podremos interpretar con facilidad los diferentes ingredientes que intervienen en las fórmulas y extraer conclusiones contundentes relativas a las repercusiones que pueden ocasionar en el valor óptimo de un problema de PL ligeras modificaciones en sus datos.

3.1. Un problema de fabricación de colonia

El siguiente problema se puede enmarcar en el área de la producción, en la que una empresa debe gestionar la producción y establecer los límites disponibles en elaboración de colonia. El enunciado del mismo ha sido extraído de la página web `http://www.bdigital.unal.edu.co/5037/4/guillermojimenezlozano.2006_Parte1.pdf`. Nuestra contribución en relación con este ejemplo consiste en realizar un análisis de sensibilidad de dicho problema con ayuda de la función implementada en R en el capítulo anterior.

3.1.1. Enunciado del problema

Problema 2. *Una empresa fabrica dos tipos de colonia: A y B. La primera contiene un 15 % de extracto de jazmín, un 20 % de alcohol y el resto es agua; la segunda lleva un 30 % de extracto de jazmín, un 15 % de alcohol y el resto es agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y de 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de la colonia B. El precio de venta por litro de la colonia A es de 500 unidades monetarias (abreviado por u.m.) y el de la colonia B es 2000 u.m.*

El cuadro 3.1 muestra los niveles de los extractos de cada colonia, la producción máxima de cada una y la disponibilidad (litro/día) de cada extracto.

Colonia	Jazmín	Alcohol	Precio venta/litro	Producción máxima
A	15 %	20 %	500	-
B	30 %	15 %	2000	150 litros
Disponible (litro/día)	60	50		

Cuadro 3.1: Producción de colonia. Fuente: Página web mencionada anteriormente

3.1.2. Planteamiento y modelo matemático

El primer paso es identificar los elementos claves del problema, y una vez determinados, elaborar un modelo matemático que exprese de manera rigurosa la situación.

Variables del modelo

- x_1: número de litros de colonia A a preparar diariamente.
- x_2: número de litros de colonia B a preparar diariamente.

Restricciones

Estas restricciones están dadas por los datos del cuadro 3.1 y establecen las limitaciones de extractos empleados en la elaboración de cada colonia y los límites de producción considerados. En cuanto a los extractos, no se puede utilizar más de 60 litros al día de jazmín ni más de 50 litros al día de alcohol. Por otro lado, no se puede producir más de 150 litros de colonia B, mientras que no hay límite para la producción de colonia A. Además, se tienen que producir ambas colonias todos los días. Estas restricciones se expresarán a continuación en el modelo matemático.

Función objetivo

El deseo de la empresa es maximizar los ingresos que reporta la venta de colonias, cumpliendo las restricciones establecidas mencionadas anteriormente.

Modelo matemático

Una vez determinados los elementos anteriores, se puede plantear el modelo matemático que expresa su situación y será utilizado para identificar los parámetros de entrada que se han de introducir en la función de R.

$$
\begin{array}{lll}
P(\bar{b}) & Max & 500x_1 + 2000x_2 \\
 & \text{s.a} & -0.15x_1 - 0.3x_2 \geq -60 \\
 & & -0.2x_1 - 0.15x_2 \geq -50 \\
 & & -x_2 \geq -150 \\
 & & x_1 \geq 0 \\
 & & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

3.1.3. Implementación en R

Realizaremos un análisis de sensibilidad del problema planteado en la subsección anterior con ayuda de la función implementada en R en el capítulo 2. Recordemos que esta función determina los puntos extremos del conjunto óptimo nominal y los utiliza para calcular la tasa de mejora del valor óptimo. Seguidamente, indicamos la sintaxis empleada en la ejecución de dicha función.

Para el problema que nos ocupa los datos son:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} -60 \\ -50 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-500, -2000), \quad A = \begin{pmatrix} -0.15 & -0.3 \\ -2 & -0.15 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
TFG2(matrix(c(-60,-50,-150,0,0),nrow = 5),
    matrix(c(-500,-2000), nrow = 1),
    matrix(c(-0.15,-2,0,1,0,-0.3,-0.15,-1,0,1), nrow = 5, ncol = 2))
```

3.1.4. Resultados y conclusiones

Tras el planteamiento de la situación, la expresión del modelo que la explica y la identificación e introducción de los parámetros de entrada en la función, podemos obtener los resultados que nos proporciona la función para estudiar el análisis de sensibilidad y tomar la decisión óptima. Lo primero que analizamos es la expresión del valor óptimo del problema bajo ligeras perturbaciones del miembro derecho de las restricciones. Formalmente, el valor óptimo $v(b)$ en la situación actual no es otro que el valor óptimo del siguiente problema parametrizado:

$$\begin{array}{lll} P(b) & Max & 500x_1 + 2000x_2 \\ & \text{s.a} & -0.15x_1 - 0.3x_2 \geq b_1 \\ & & -0.2x_1 - 0.15x_2 \geq b_2 \\ & & -x_2 \geq b_3 \\ & & x_1 \geq b_4 \\ & & x_2 \geq b_5. \end{array}$$

Para analizar el comportamiento de $v(b)$ alrededor del parámetro nominal $\bar{b} = (-60, -50, -150, 0, 0)^T$ utilizamos como ingredientes los puntos extremos del conjunto óptimo dual del problema $P(\bar{b})$. En este caso, a partir de nuestra función implementada en R obtenemos los siguientes resultados:

- Puntos extremos óptimos del conjunto óptimo dual. El cuadro 3.2 muestra dichos puntos.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5
0	250	1962.5	0	0

Cuadro 3.2: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

En general, recordemos que el valor óptimo del problema $P(b)$, para b suficientemente próximo a $\bar{b} = (-60, -50, -150, 0, 0)^T$, viene dado por

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda,$$

suponiendo que $P(b)$ es acotado.

Atendiendo a las salidas de R indicadas anteriormente, se tiene que

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0, 250, 1962.5, 0, 0)^T\}.$$

En consecuencia,

$$v(b) = b_2 \cdot 250 + b_3 \cdot 1962.5,$$

para b suficientemente próximo a $\bar{b}$ con $P(b)$ acotado. Nótese que $v(b)$ se corresponde con el máximo ingreso por la venta de los dos tipos de colonia bajo las limitaciones asociadas al parámetro b.

Se puede observar la simplicidad de la función valor óptimo en este caso, dado que el conjunto óptimo dual del problema actual tiene un único punto extremo. Concretamente, obsérvese que la función valor óptimo se comporta localmente como una función lineal. De este modo, se aprecia la influencia directa que tienen los límites establecidos en los coeficientes del lado derecho de las restricciones (siempre y cuando sean ligeras las modificaciones de éstos) sobre el valor óptimo del problema (ingresos por la venta de los dos tipos de colonia).

Mediante esta fórmula, se puede apreciar que por cada litro que se aumente la disponibilidad de extracto de jazmín, los ingresos aumentan en 250 u.m.; y por cada litro disponible que se aumente la producción máxima de colonia B, los ingresos aumentan en 1962.5 u.m. Es significativa la diferencia de incremento sobre los ingresos que supondría aumentar ligeramente la producción máxima de colonia B frente al aumento ligero de litros disponibles de extracto de jazmín.

- Valor óptimo. Mediante la asignación de producción óptima y los límites establecidos del problema se obtiene el siguiente valor óptimo, dado por la función implementada en R:

  `"El valor óptimo es -306875".`

  Del mismo modo que sucedía en el problema anterior, el verdadero valor óptimo del problema que indica los ingresos máximos que se pueden obtener, es 306875 u.m.

- Tasa de mejora.

  `"La tasa de mejora es 4666.66".`

  Por cada litro que se aumenten los límites establecidos, los ingresos aumentan en 4666.66. Sin embargo, no tiene sentido aumentar los límites que no supongan un incremento en los ingresos, ya que pueden acarrear costes. Estos límites que no se deben incrementar, que en este caso es el de disponibilidad de litro de alcohol, se pueden reducir ligeramente si ahorra algún coste adicional, ya que los ingresos no se ven repercutidos por esta modificación, y supondrían por tanto un aumento en el beneficio total.

Situación 1

La situación de partida con el análisis realizado, lleva a la idea de que la decisión óptima es aumentar ligeramente la disponibilidad de extracto de jazmín y la producción máxima de producción de colonia B, que suponen incrementar los ingresos en

250 u.m. y 1962.5 u.m. por cada litro aumentado, respectivamente. Además, también parece conveniente reducir ligeramente la disponibilidad de extracto de alcohol, ya que al no verse afectados los ingresos, puede reducir costes.

Sin embargo, la empresa determina que no es posible incrementar la producción máxima de colonia B por motivos de demanda, ya que podría generase superproducción y acarrear costes innecesarios al no vender cierta cantidad de colonia B. Por este motivo, se puede dar la situación 2.

Situación 2

Los litros de extractos de colonia (jazmín y alcohol) son suministrados por diferentes proveedores. La disponibilidad de cada extracto establecida en el problema está dada por los litros que les suministran los proveedores cada día. El proveedor A suministra los extractos de jazmín, con un coste de 50 u.m. El proveedor B suministra los extractos de alcohol, con un coste de 80 u.m.

En esta situación, se pueden incrementar los beneficios mediante la modificación de la disponibilidad de estos dos extractos.

- Jazmín. Se puede reducir ligeramente la disponibilidad de este extracto, ya que los ingresos no dependen de este límite. Sin embargo, supone una disminución de 50 u.m. por litro que no se suministre.

- Alcohol. Se puede aumentar ligeramente la disponibilidad de este extracto, ya que como los ingresos que supone el aumento es mayor que su coste, los beneficios aumentan en $250 - 80 = 170$ u.m. por litro adicional suministrado.

3.2. Un problema de inversión

A continuación se presenta un problema básico de acciones en bolsa que se puede plantear una persona que desea invertir cierta cantidad de dinero y desea conocer el incremento de las ganancias que puede conseguir aumentando ligeramente la cantidad disponible de inversión. El enunciado de dicho problema ha sido extraído de la página web `http://www.investigaciondeoperaciones.net/programacion_lineal.html`. Como en el ejemplo anterior, nuestra aportación se centra en el análisis de sensibilidad del problema.

3.2.1. Enunciado del problema

Problema 3. *Considere que usted dispone de un capital de 21.000 dólares para invertir en la bolsa de valores. Un amigo le recomienda 2 acciones que en el último tiempo han estado al alza: Acción A y Acción B. La Acción A tiene una rentabilidad del 10 % anual y la Acción B del 8 % anual. Su amigo le aconseja tener una cartera equilibrada y diversa y por tanto le recomienda invertir un máximo de 13.000 dólares en la Acción A y como mínimo 6.000 dólares en la Acción B. Además la inversión en la Acción A debe ser menor o igual que el doble de la inversión destinada a la Acción B. El cuadro 3.3 recoge la situación del problema.*

Acción	Rentabilidad anual	Inversión máxima	Inversión mínima	Inversión
A	10 %	13000	-	$\leq$ 2B
B	8 %	-	6000	$\geq$ A/2
Capital disponible	21000 dólares			

Cuadro 3.3: Inversión en acciones. Fuente: Página web mencionada anteriormente

3.2.2. Planteamiento y modelo matemático

Seguiremos los pasos de los ejemplos anteriores:

Variables del modelo

- x_1: dólares invertidos en acción A.
- x_2: dólares invertidos en acción B

Restricciones

Las restricciones son las limitaciones y condiciones de inversión que están enunciadas en el problema y plasmados en el cuadro 3.3. Estas restricciones indican que la cantidad máxima de inversión de acciones de tipo A es 13000 dólares y la cantidad mínima de inversión de acciones de tipo B es 6000 dólares. Además, está restringida la cantidad total a invertir a 21000 dólares. Por último, siguiendo los consejos del amigo, la inversión en la Acción A debe ser menor o igual que el doble de la inversión destinada a la Acción B. Estas restricciones son imprescindibles para expresar el modelo matemático.

Función objetivo

La finalidad del inversor es maximizar los ingresos que le reportan las acciones sobre las que invierte, teniendo en cuenta las limitaciones y condiciones establecidas como restricciones.

Modelo matemático

El modelo que se plantea es el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
P(\bar{b}) & Max & -0.1x_1 - 0.08x_2 \\
 & \text{s.a} & 5x_1 - x_2 \geq -21000 \\
 & & -x_1 \geq -13000 \\
 & & x_2 \geq 6000 \\
 & & -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\
 & & x_1 \geq 0 \\
 & & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Para este problema nominal, el problema parametrizado quedaría de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
P(b) & Max & -0.1x_1 - 0.08x_2 \\
 & \text{s.a} & 5x_1 - x_2 \geq b_1 \\
 & & -x_1 \geq b_2 \\
 & & x_2 \geq b_3 \\
 & & -x_1 + 2x_2 \geq b_4 \\
 & & x_1 \geq b_5 \\
 & & x_2 \geq b_6.
\end{array}
$$

3.2.3. Implementación en R

Como se explicaba en el problema anterior, para el estudio de estos problemas nos apoyamos en la función elaborada en el capítulo 2, ya que el cálculo del valor óptimo se obtiene mediante una fórmula más simple y es más práctica para las situaciones en las que el análisis se realiza para ligeras modificaciones de los límites establecidos.

A continuación, se presentan los datos y el código que se ha de utilizar para introducirlos.

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} -21000 \\ -13000 \\ 6000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-0.1, -0.8), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
TFG2(matrix(c(-21000,-13000,6000,0,0,0),nrow = 6),
     matrix(c(-0.1,-0.08), nrow = 1),
     matrix(c(-1,-1,0,-1,1,0,-1,0,1,2,0,1), nrow = 6, ncol = 2))
```

3.2.4. Resultados y conclusiones

Como se planteaba en la introducción del problema de inversión, el decisor desea conocer el incremento de las ganancias que puede obtener aumentando ligeramente la cantidad disponible de inversión. Para analizar la situación y extraer las conclusiones que le ayuden a tomar la decisión óptima, el decisor se puede apoyar de la función elaborada e implementada en R del capítulo 2. Estas conclusiones se pueden interpretar a partir de los siguientes resultados obtenidos por la función:

- Puntos extremos óptimos. El valor óptimo $v(b)$ en la situación actual el es valor óptimo del problema parametrizado anterior. Para analizar el comportamiento de $v(b)$ en un entorno del parámetro nominal $\bar{b} = (-21000, -13000, 6000, 0, 0, 0)^T$ se utiliza como ingrediente el único punto extremo del conjunto óptimo de $P(\bar{b})$, obtenido a partir de nuestra función implementada en R y que se muestran en el cuadro 3.4.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5	Lambda.6
0.08	0.02	0	0	0	0

Cuadro 3.4: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

En general, recordemos que el valor óptimo del problema $P(b)$, para b suficientemente próximo a $\bar{b} = (-21000, -13000, 6000, 0, 0, 0)^T$, con $P(b)$ acotado, viene dado por:

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda.$$

Contemplando las salidas de R indicadas anteriormente, se tiene que

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0.08, 0.02, 0, 0, 0, 0)^T\}.$$

Por consiguiente,

$$v(b) = b_1 \cdot 0.08 + b_2 \cdot 0.02,$$

para b suficientemente póximo a $\bar{b}$, con $P(b)$ acotado. Nótese que $v(b)$ se corresponde con el máximo ingreso por la inversión en los dos tipos de acciones bajo las limitaciones asociadas al parámetro b.

Como la incertidumbre surgía sobre la decisión de incrementar o no la inversión total, es en el coeficiente correspondiente a la restricción que limitaba la cantidad disponible de inversión en el que nos debemos fijar para analizar la relación que tiene sobre los ingresos totales. Esta limitación estaba limitada por b_1. Así pues, por cada dólar que aumentemos la inversión total, los ingresos aumentarán en un 0.08.

En principio, este incremento no parece ser significativo como para tomar la decisión de aumentar la inversión. Sin embargo, una vez comprendida la situación, corresponde a la persona que realiza la inversión la toma de esta decisión.

- Valor óptimo. Tras realizar la inversión óptima en cada acción, el valor óptimo que nos proporciona la función es el siguiente:

```
"El valor óptimo es -1940".
```

Como el problema trataba de maximizar, el verdadero valor óptimo que indica los ingresos máximos que se puede obtener es 1940.

- Tasa de mejora.

```
"La tasa de mejora es 0.1".
```

Por cada dólar que se aumente[1] cada uno de los límites establecidos en el planteamiento del problema, los ingresos aumentan en 0.1 dólares. Sin embargo, ligeras modificaciones de algunas de estas limitaciones no alteran los ingresos totales. Es importante destacar que las limitaciones que sí lo alteran son la limitación de inversión total y la limitación de acciones de A.

Aunque dependiendo del contexto este incremento puede ser significativo, es imprescindible para el decisor comprender la situación extraída mediante las conclusiones anteriores a la hora de tomar la decisión.

3.3. Un problema de producción de fármacos

El siguiente problema se enmarca en el campo de la producción en general, y en la medicina en particular. Una empresa debe gestionar las disponibilidades máximas de mano de obra de los técnicos y operarios que se encargan de la producción de medicinas, con el objetivo de maximizar las ganancias. El enunciado del problema ha sido extraído de la página web `https://es.slideshare.net/MiguelSanchez14/problemas-de-programacin-lineal`. Nuestra contribución en relación con este ejemplo consiste en estudiar el análisis de sensibilidad de dicho problema con la ayuda de la función implementada en R en el capítulo anterior.

3.3.1. Enunciado del problema

Problema 4. *Una pequeña empresa de producción de fármacos elabora dos tipos de medicinas A y B, a granel de tal forma que las ganancias netas por cada kilogramo de fármaco A son 400 euros, y 300 euros por cada kilogramo de fármaco B.*

Para la elaboración de cada kilogramo de A son necesarias 2 horas de trabajo por parte de técnicos X, 2 horas por parte de técnicos Y, y 5 horas de operario. Por otro lado, para fabricar un kilogramo de B son necesarias 3 horas de técnico X, 1 hora de técnico Y, y 7 horas de operario. Las disponibilidades diarias máximas de mano de obra son de 13 horas de técnicos X, 6 horas de técnicos Y y 25 horas de operarios.

El cuadro 3.5 recoge los datos del problema para poder plantear a continuación

[1]Como comentábamos anteriormente, en rigor los incrementos han de ser suficientemente pequeños para poder utilizar el teorema 8.

el modelo matemático.

Fármaco	Técnico X	Técnico Y	Operario	Ganancia/kg
A	2	2	5	400
B	3	1	7	300
Disponible (horas/día)	13	6	25	

Cuadro 3.5: Producción de fármacos. Fuente: Elaboración propia

3.3.2. Planteamiento y modelo matemático

Para elaborar el modelo matemático, seguimos los pasos descritos en los ejemplos anteriores.

Variables del modelo

- x_1: kilogramos de fármaco A producidos diariamente.
- x_2: kilogramos de fármaco B producidos diariamente.

Restricciones

Las restricciones recogen las limitaciones establecidas en el enunciado y cuantificadas en el cuadro 3.5. Las disponibilidades diarias máximas de mano de obra son de 13 horas de técnicos X, 6 horas de técnicos Y y 25 horas de operarios. Además está la restricción de que se deben producir ambos fármacos cada día.

Función objetivo

La función objetivo muestra la finalidad de la empresa, y ésta es maximizar las ganancias obtenidas por la venta de los fármacos producción. Esta producción está limitada por una serie de restricciones mencionadas anteriormente.

Modelo matemático

La expresión del modelo matemático es útil para determinar de manera más sencilla los parámetros a introducir en la función que nos proporcionará los resultados deseados.

$$
\begin{array}{lll}
P(\bar{b}) & Max & -400x_1 - 300x_2 \\
& \text{s.a} & -2x_1 - 3x_2 \geq -13 \\
& & -2x_1 - x_2 \geq -6 \\
& & -5x_1 - 7x_2 \geq -25 \\
& & x_1 \geq 0 \\
& & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

3.3.3. Implementación en R

Mediante la función implementada en el capítulo 2, podemos analizar la evolución de las ganancias tras realizar ligeras modificaciones de los límites establecidos en las restricciones. Para ello, debemos introducir en la función los parámetros de entrada que se encuentran en el modelo matemático. Estos parámetros se muestran a continuación, seguidos del código con el que se debe introducir en R para obtener los resultados deseados.

$$
\bar{b} = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-400, -300), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \\ -5 & -7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

```
TFG2(matrix(c(-13,-6,-25,0,0),nrow = 5),
     matrix(c(-400,-300), nrow = 1),
     matrix(c(-2,-2,-5,1,0,-3,-1,-7,0,1), nrow = 5, ncol = 2))
```

3.3.4. Resultados y conclusiones

En primer lugar, analizamos la expresión del valor óptimo del problema bajo ligeras perturbaciones del lado derecho de las restricciones. Formalmente, el valor óptimo $v(b)$ en el contexto actual es el valor óptimo del siguiente problema parametrizado:

$$
\begin{array}{lll}
P(b) & Max & -400x_1 - 300x_2 \\
 & \text{s.a} & -2x_1 - 3x_2 \geq b_1 \\
 & & -2x_1 - x_2 \geq b_2 \\
 & & -5x_1 - 7x_2 \geq b_3 \\
 & & x_1 \geq b_4 \\
 & & x_2 \geq b_5.
\end{array}
$$

Para analizar el comportamiento de $v(b)$ cuando b está próximo a $\bar{b} = (-13, -6, -25, 0, 0)^T$ utilizamos como componentes los puntos extremos del conjunto óptimo dual del problema $P(\bar{b})$. En este caso, mediante nuestra función implementada en R en la que se introduce los parámetros de entrada de la subsección anterior, obtenemos los siguientes resultados:

- Puntos extremos óptimos. El cuadro 3.6 recoge el único punto extremo obtenido en el presente ejemplo.

Lambda.1	Lambda.2	Lambda.3	Lambda.4	Lambda.5
0	144.44	22.22	0	0

Cuadro 3.6: Puntos extremos óptimos del dual. Fuente: Elaboración propia

En general, recordemos que el valor óptimo del problema $P(b)$, para b suficientemente cercano a $\bar{b} = (-13, -6, -25, 0, 0)^T$, suponiendo que $P(b)$ es acotado, viene dado por

$$v(b) = \max_{\lambda \in ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right)} b^T \lambda.$$

Atendiendo a las salidas de R indicadas anteriormente, se tiene que

$$ext\left(\Lambda^{OP}(\bar{b})\right) = \{(0, 144.44, 22.22, 0, 0)^T\}.$$

Así pues,

$$v(b) = b_2 \cdot 144.44 + b_3 \cdot 22.22,$$

para b suficientemente próximo a $\bar{b}$, con $P(b)$ acotado. Nótese que $v(b)$ se corresponde con el máximo ingreso por la venta de los dos tipos de fármaco bajo las limitaciones asociadas al parámetro b.

Se puede apreciar la influencia que ejerce cada uno de los límites establecidos sobre las ganancias. Los coeficientes determinan el incremento de las ganancias por hora aumentada de la disponibilidad máxima de hora de los trabajadores. En este caso, b_2 y b_3 representan los límites de horas de técnicos Y y operarios, respectivamente.

Por un lado, si aumentamos en una hora la disponibilidad máxima de mano de obra de técnicos Y, las ganancias se incrementan en 144.44 euros.

Por otro lado, si aumentamos en una hora la disponibilidad máxima de mano de obra de operarios, las ganancias se incrementan en 22.22 euros.

Finalmente, un aumento ligero de horas de disponibilidad de técnicos X no incrementa las ganancias.

Así pues, hay una diferencia positiva de 122.22 euros de incremento de ganancias producido por el aumento de disponibilidad de horas de técnicos Y frente a operarios.

- Valor óptimo. Mediante la asignación de la producción óptima y los límites establecidos del problema se obtiene el siguiente valor óptimo (ganancias máximas):

  `"El valor óptimo es -1422.22".`

  De nuevo, el verdadero valor óptimo que indica las ganancias máximas que se pueden alcanzar es 1422.22

- Tasa de mejora.

  `"La tasa de mejora es 166.66".`

  Por cada hora que se aumenten las horas de mano de obra de cada uno de los tipo de técnicos y operarios, las ganancias incrementan en 166.66 euros. Sin embargo, el siguiente análisis determina las horas que interesan aumentar.

Situación 1

Tras la situación inicial planteada y los resultados obtenidos, la decisión óptima es invertir en primer lugar en mano de obra de técnicos Y aumentando ligeramente las horas disponibles de éstos, pues son las que mayor incremento de ganancias producen. Además, también parece conveniente invertir en mano de obra de operarios, ya que aunque en menor medida, también incrementan las ganancias.

Este aumento de disponibilidad de horas se puede realizar mediante contrato de personal (teniendo en cuenta que los límites aumenten ligeramente), pero puede acarrear costes adicionales. Por este motivo, habría que tenerlos en cuenta para calcular el beneficio de ambas inversiones, y realizar las que resulten óptimas.

Por otro lado, como ligeras modificaciones de la disponibilidad de horas de técnicos X no alteran las ganancias, se plantea la opción de reducirlas ligeramente en el caso de que ahorre costes adicionales.

Situación 2

Se plantea la siguiente situación:

El agobio con el que trabajan los técnicos induce al director a considerar que lo que hace falta únicamente es contratar de éstos para mejorar la producción. Sin embargo, no existe la posibilidad de contratar nuevos técnicos Y, por lo que esta posibilidad ha de ser descartada. Sin embargo, sí existe la posibilidad de contratar horas adicionales de técnicos X, pero por el convenio colectivo firmado en la empresa existe el compromiso de contratar un operario por cada hora adicional de técnico X.

Como contratar técnicos X no aumenta en este caso las ganancias, en el caso de que el coste de contratar un operario sea menor que las ganancias que produce, interesa realizar dicha contratación disponible. En caso contrario, no interesa, ya que los beneficios disminuirían debido a los costes adicionales.

Apéndice A

Función puntos extremos y valor óptimo en R

```
TFG <- function(b,c,a){


  ###CHEQUEO DE LA INCONSISTENCIA

  mat <- rbind(t(a),t(b)); mat
  for(i in 1:nrow(b)){
    mat <- rbind(mat,c(rep(0,nrow(b))))
  }
  for(i in (nrow(t(a))+nrow(t(b))+1):nrow(mat)){
    mat[i,i-(nrow(t(a))+nrow(t(b)))] <- 1
  }

  der <- matrix(c(rep(0,nrow(t(a))),1,rep(0,nrow(b))),
                nrow = nrow(t(a))+1+nrow(b)); der

  nvariables2 <- ncol(mat)
  nrestricciones2 <- nrow(mat)

function (n, r, v = 1:n, set = TRUE, repeats.allowed = FALSE)
```

```
{
    if (mode(n) != "numeric" || length(n) != 1 || n < 1 || (n%%1) !=
        0)
        stop("bad value of n")
    if (mode(r) != "numeric" || length(r) != 1 || r < 1 || (r%%1) !=
        0)
        stop("bad value of r")
    if (!is.atomic(v) || length(v) < n)
        stop("v is either non-atomic or too short")
    if ((r > n) & repeats.allowed == FALSE)
        stop("r > n and repeats.allowed=FALSE")
    if (set) {
        v <- unique(sort(v))
        if (length(v) < n)
            stop("too few different elements")
    }
    v0 <- vector(mode(v), 0)
    if (repeats.allowed)
        sub <- function(n, r, v) {
            if (r == 0)
                v0
            else if (r == 1)
                matrix(v, n, 1)
            else if (n == 1)
                matrix(v, 1, r)
            else rbind(cbind(v[1], Recall(n, r - 1, v)), Recall(n -
                1, r, v[-1]))
        }
    else sub <- function(n, r, v) {
        if (r == 0)
            v0
        else if (r == 1)
```

```
            matrix(v, n, 1)
        else if (r == n)
            matrix(v, 1, n)
        else rbind(cbind(v[1], Recall(n - 1, r - 1, v[-1])),
            Recall(n - 1, r, v[-1]))
    }
    sub(n, r, v[1:n])
}

  com2 <- combinations(nrestricciones2,nvariables2);com2

  determinantes2 <- c()
  sol2 <- matrix(c(rep(0,nrow(com2)*nvariables2)),
                 ncol = nvariables2, nrow = nrow(com2));sol2 #iniciar soluciones


  for(i in 1:nrow(com2)){
    determinantes2 <- c(determinantes2,det(mat[com2[i,],]))
    if (round(det(mat[com2[i,],]),6)!=0){
      sol2[i,] <- solve(mat[com2[i,],],der[com2[i,]])
    }else{
      sol2[i,] <- "No"
    }
  }

  sol2 <- data.frame(sol2)
  sol2$Descartes <- c(rep("",nrow(sol2)))
  for(i in 1:nrow(sol2)){
    for(j in 1:(ncol(sol2)-1)){
      if(sol2[i,j]=="No"){
        sol2[i,ncol(sol2)] <- "eliminar"
      }
```

```
    }
  }

  sol2 <- sol2[which(sol2[,ncol(sol2)]!="eliminar"),]

  for(i in 1:nvariables2){
    sol2[,i] <- as.numeric(as.character(sol2[,i]))
  }

  for(i in 1:nrow(sol2)){
    for(j in 1:(ncol(sol2)-1)){
      if(round(sol2[i,j],6) < 0){
        sol2[i,ncol(sol2)] <- "eliminar"
      }
    }
  }

  sol2 <- sol2[which(sol2[,ncol(sol2)]!="eliminar"),]

  for(i in 1:nrow(sol2)){
    if(round(sum(abs(mat[1:(nrow(mat)-nvariables2),]%*%
                    t(sol2[i,1:nvariables2])-
                    matrix(der[-((nrow(der)-nvariables2+1):nrow(der)),]))),6)!=0){
      sol2$Descartes[i] <- "eliminar"
    }
  }

  if(length(which(sol2=="eliminar"))<nrow(sol2)){
    return("El problema primal es inconsistente")
  }else

##1. Transformación del problema primal al dual:
```

```
nvariables <- nrow(b) #número variables
nrestricciones <- nvariables+dim(c)[2] #número restricciones

b <-  t(b)
c <- matrix(c(c,rep(0,nvariables)))
a <- t(a)

for(i in 1:nvariables){
  a <- rbind(a,c(rep(0,nvariables)))
}

for(i in ((nrestricciones-nvariables)+1):nrestricciones){
  a[i,i-(nrestricciones-nvariables)] <- 1
}

##2. Posibles combinaciones de las restricciones (las combinaciones deben ser
#de tamaño igual al número de variables del dual)

com <- combinations(nrestricciones,nvariables);com



##3. Inicializamos los derminantes y las soluciones (puntos) si las hay

determinantes <- c()
sol <- matrix(c(rep(0,nrow(com)*nvariables)),
              ncol = nvariables, nrow = nrow(com));sol #iniciar soluciones



##4. Eliminamos las combinaciones con los que se obtiene un determinante de 0

for(i in 1:nrow(com)){
```

```
  determinantes <- c(determinantes,det(a[com[i,],]))
  if (round(det(a[com[i,],]),6)!=0){
    sol[i,] <- solve(a[com[i,],],c[com[i,]])
  }else{
    sol[i,] <- "No"
  }
}

datos <- data.frame(com,sol)
for(i in 1:nvariables){
names(datos)[i] <- paste("Restriccion",i, sep = " ")
}
for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
  names(datos)[i] <- paste("Lambda",i-nvariables, sep = " ")
}
datos$Descartes <- c(rep("",nrow(datos)))


##5. Eliminamos las combinaciones con las que se obtienen puntos negativos,
#ya que no cumplen las restricciones de no negatividad

for(i in 1:nrow(datos)){
  for(j in 1:(ncol(datos)-1)){
    if(datos[i,j] == "No"){
      datos[i,ncol(datos)] <- "eliminar"
    }
  }
}
datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]


for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
```

```
  datos[,i] <- as.numeric(as.character(datos[,i]))
}

for(i in 1:nrow(datos)){
  for(j in 1:(ncol(datos)-1)){
    if(round(datos[i,j],6) < 0){
      datos[i,ncol(datos)] <- "eliminar"
    }
  }
}
datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]



##6. Eliminamos los puntos que no cumpla con las restricciones que no son
#las de no negatividad de las variables

for(i in 1:nrow(datos)){
  if(round(sum(abs(a[1:(nrow(a)-nvariables),]%*%
                  t(datos[i,(nvariables+1):(nvariables+nvariables)])-
                  matrix(c[-((nrow(c)-nvariables+1):nrow(c)),]))),6)!=0){
    datos$Descartes[i] <- "eliminar"
  }
}

if(length(which(datos[,ncol(datos)]=="eliminar"))==nrow(datos)){
  return("El problema primal es no acotado y su dual es inconsistente")
}else

  datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]
datos <- datos[,-ncol(datos)]
```

```
##7. Creamos un dataframe con los puntos extremos
PuntosExtremos <- data.frame(c(datos))
for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
  PuntosExtremos[,i] <- round(PuntosExtremos[,i],6)
}

valores <- c()
for(i in 1:nrow(PuntosExtremos)){
  valores[i] <- sum(PuntosExtremos[i,(nvariables+1):(nvariables+nvariables)]*b)
  ValorOptimo <- max(valores)
}
ValorOptimo <- paste("El valor óptimo es", ValorOptimo, sep = " ")

print("Los puntos extremos son:")
print(PuntosExtremos)

return(print(ValorOptimo))
}
```

Apéndice B

Función puntos extremos óptimos y tasa de mejora en R

```
TFG2 <- function(b,c,a){

  ###CHEQUEO DE LA INCONSISTENCIA

  mat <- rbind(t(a),t(b)); mat
  for(i in 1:nrow(b)){
    mat <- rbind(mat,c(rep(0,nrow(b))))
  }
  for(i in (nrow(t(a))+nrow(t(b))+1):nrow(mat)){
    mat[i,i-(nrow(t(a))+nrow(t(b)))] <- 1
  }

  der <- matrix(c(rep(0,nrow(t(a))),1,rep(0,nrow(b))),
                nrow = nrow(t(a))+1+nrow(b)); der

  nvariables2 <- ncol(mat)
  nrestricciones2 <- nrow(mat)

function (n, r, v = 1:n, set = TRUE, repeats.allowed = FALSE)
{
```

```
if (mode(n) != "numeric" || length(n) != 1 || n < 1 || (n%%1) !=
    0)
    stop("bad value of n")
if (mode(r) != "numeric" || length(r) != 1 || r < 1 || (r%%1) !=
    0)
    stop("bad value of r")
if (!is.atomic(v) || length(v) < n)
    stop("v is either non-atomic or too short")
if ((r > n) & repeats.allowed == FALSE)
    stop("r > n and repeats.allowed=FALSE")
if (set) {
    v <- unique(sort(v))
    if (length(v) < n)
        stop("too few different elements")
}
v0 <- vector(mode(v), 0)
if (repeats.allowed)
    sub <- function(n, r, v) {
        if (r == 0)
            v0
        else if (r == 1)
            matrix(v, n, 1)
        else if (n == 1)
            matrix(v, 1, r)
        else rbind(cbind(v[1], Recall(n, r - 1, v)), Recall(n -
            1, r, v[-1]))
    }
else sub <- function(n, r, v) {
    if (r == 0)
        v0
    else if (r == 1)
        matrix(v, n, 1)
```

```
        else if (r == n)
            matrix(v, 1, n)
        else rbind(cbind(v[1], Recall(n - 1, r - 1, v[-1])),
            Recall(n - 1, r, v[-1]))
    }
    sub(n, r, v[1:n])
}

  com2 <- combinations(nrestricciones2,nvariables2);com2

  determinantes2 <- c()
  sol2 <- matrix(c(rep(0,nrow(com2)*nvariables2)),
               ncol = nvariables2, nrow = nrow(com2));sol2 #iniciar soluciones


  for(i in 1:nrow(com2)){
    determinantes2 <- c(determinantes2,det(mat[com2[i,],]))
    if (round(det(mat[com2[i,],]),6)!=0){
      sol2[i,] <- solve(mat[com2[i,],],der[com2[i,]])
    }else{
      sol2[i,] <- "No"
    }
  }

  sol2 <- data.frame(sol2)
  sol2$Descartes <- c(rep("",nrow(sol2)))
  for(i in 1:nrow(sol2)){
    for(j in 1:(ncol(sol2)-1)){
      if(sol2[i,j]=="No"){
        sol2[i,ncol(sol2)] <- "eliminar"
      }
    }
```

```
}

sol2 <- sol2[which(sol2[,ncol(sol2)]!="eliminar"),]

for(i in 1:nvariables2){
  sol2[,i] <- as.numeric(as.character(sol2[,i]))
}

for(i in 1:nrow(sol2)){
  for(j in 1:(ncol(sol2)-1)){
    if(round(sol2[i,j],6) < 0){
      sol2[i,ncol(sol2)] <- "eliminar"
    }
  }
}

sol2 <- sol2[which(sol2[,ncol(sol2)]!="eliminar"),]

for(i in 1:nrow(sol2)){
  if(round(sum(abs(mat[1:(nrow(mat)-nvariables2),]%*%
                  t(sol2[i,1:nvariables2])-
                  matrix(der[-((nrow(der)-nvariables2+1):nrow(der)),]))),6)!=0){
    sol2$Descartes[i] <- "eliminar"
  }
}

if(length(which(sol2=="eliminar"))<nrow(sol2)){
  return("El problema primal es inconsistente")
}else


##1. Transformación del problema primal al dual:
```

```
nvariables <- nrow(b) #número variables
nrestricciones <- nvariables+dim(c)[2] #número restricciones

b <-  t(b)
c <- matrix(c(c,rep(0,nvariables)))
a <- t(a)

for(i in 1:nvariables){
  a <- rbind(a,c(rep(0,nvariables)))
}

for(i in ((nrestricciones-nvariables)+1):nrestricciones){
  a[i,i-(nrestricciones-nvariables)] <- 1
}

##2. Posibles combinaciones de las restricciones (las combinaciones deben ser
#de tamaño igual al número de variables del dual)

com <- combinations(nrestricciones,nvariables);com


##3. Inicializamos los derminantes y las soluciones (puntos) si las hay

determinantes <- c()
sol <- matrix(c(rep(0,nrow(com)*nvariables)),
              ncol = nvariables, nrow = nrow(com));sol #iniciar soluciones


##4. Eliminamos las combinaciones con los que se obtiene un determinante de 0

for(i in 1:nrow(com)){
```

```
    determinantes <- c(determinantes,det(a[com[i,],]))
    if (round(det(a[com[i,],]),6)!=0){
      sol[i,] <- solve(a[com[i,],],c[com[i,]])
    }else{
      sol[i,] <- "No"
    }
  }

  datos <- data.frame(com,sol)
  for(i in 1:nvariables){
    names(datos)[i] <- paste("Restriccion",i, sep = " ")
  }
  for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
    names(datos)[i] <- paste("Lambda",i-nvariables, sep = " ")
  }
  datos$Descartes <- c(rep("",nrow(datos)))


  ##5. Eliminamos las combinaciones con las que se obtienen puntos negativos,
  #ya que no cumplen las restricciones de no negatividad

  for(i in 1:nrow(datos)){
    for(j in 1:(ncol(datos)-1)){
      if(datos[i,j] == "No"){
        datos[i,ncol(datos)] <- "eliminar"
      }
    }
  }
  datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]


  for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
```

```
  datos[,i] <- as.numeric(as.character(datos[,i]))
}

for(i in 1:nrow(datos)){
  for(j in 1:(ncol(datos)-1)){
    if(round(datos[i,j],6) < 0){
      datos[i,ncol(datos)] <- "eliminar"
    }
  }
}
datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]



##6. Eliminamos los puntos que no cumpla con las restricciones que no son
#las de no negatividad de las variables

for(i in 1:nrow(datos)){
  if(round(sum(abs(a[1:(nrow(a)-nvariables),]%*%
                  t(datos[i,(nvariables+1):(nvariables+nvariables)])-
                  matrix(c[-((nrow(c)-nvariables+1):nrow(c)),]))),6)!=0){
    datos$Descartes[i] <- "eliminar"
  }
}

if(length(which(datos[,ncol(datos)]=="eliminar"))==nrow(datos)){
  return("El problema primal es no acotado y su dual es inconsistente")
}else

  datos <- datos[which(datos[,ncol(datos)]!="eliminar"),]
datos <- datos[,-ncol(datos)]
```

```
##7. Creamos un dataframe con los puntos extremos
PuntosExtremos <- data.frame(c(datos))
for(i in (nvariables+1):(nvariables+nvariables)){
  PuntosExtremos[,i] <- round(PuntosExtremos[,i],6)
}

valores <- c()
for(i in 1:nrow(PuntosExtremos)){
  valores[i] <- sum(PuntosExtremos[i,(nvariables+1):(nvariables+nvariables)]*b)
  ValorOptimo <- max(valores)
}
ExtremosOptimos <- PuntosExtremos[which(valores==ValorOptimo),(nvariables+1):(nco
ExtremosOptimos <- unique(ExtremosOptimos)

CalculoModuloDecrecimiento <- c()
for(i in 1:nrow(ExtremosOptimos)){
  CalculoModuloDecrecimiento <- sum(ExtremosOptimos[i,])
}
ModuloDecrecimiento <- min(CalculoModuloDecrecimiento)
ModuloDecrecimiento <- paste("La tasa de mejora es", ModuloDecrecimiento, sep = "

ValorOptimo <- paste("El valor óptimo es", ValorOptimo, sep = " ")

##Salidas:
#print("Los puntos extremos son:")
#print(PuntosExtremos)

print("Los puntos extremos óptimos son:")
print(ExtremosOptimos)

print(ValorOptimo)
```

```
  return(print(ModuloDecrecimiento))

}
```

Bibliografía

[1] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sherali, H.D.: *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Limusa, 1998

[2] Bertsimas, D, Tsitsiklis, J.N.: *Introduction to Linear Optimization*, Dynamic Ideas and Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, March, 2008.

[3] Gass, S.: *IFORS' Operational research Hall of Fame George B. Dantzig*, Itl. Trans. in Oper. Res. 10 (2003), 191-193

[4] Gisbert, M.J., Cánovas, M.J., Parra, J., Toledo, F.J.: *Calmness of the optimal value in linear programming,* preprint 2017.

[5] Goberna, M.A., Jornet, V., Puente, R.: *Optimización Lineal. Teoría, métodos y modelos.* McGraw-Hill / Interamericama de España, Madrid, 2004.

[6] Hillier, F., Lieberman, G.: *Introduction to Operations Research*, Mcgraw-Hill, 2005 (8.^{a} ed.).

[7] Kuhn, H. W., Tucker, A. W.: *Nonlinear programming*, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Neyman (Ed.), University of California Press, Berkeley, Calif., 1951.

[8] Luenberger, D. G.: *Programación Lineal y No Lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.

[9] Prawda, J.: *Métodos y modelos de Investigación de Operaciones (vol. I)*, Limusa, México, 1989.

[10] Taha, H. A.: *Investigación de Operaciones*, Alfaomega, México, 1991 (2.^{a} ed.).

[11] Winston, W.L.: *Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos*, México: Thompson, 2005 (4.^{a} ed.).

[12] A. Ghaffari Hadigheh, T. Terlaky: *Sensitivity analysis in linear optimization: invariant support set intervals.* European J. Oper. Res. 169 (2006), pp. 1158-1175.

[13] S. Gass, T. Saaty: *Parametric objective function (Part 2)-Generalization*, J. Oper. Res. Soc. Am., 3 (1955), pp. 395-401.

[14] T. Gal: *Postoptimal Analyses, Parametric Programing, and Related Topics: Degeneracy, Multicriteria Decision Making, Redundancy* (2nd ed.). Walter de Gruyter, New York, 1995.

[15] J. Gauvin: *Formulae for the sensitivity analysis of linear programming problems.* In: Lassonde, M. (ed.), Approximation, Optimization and Mathematical Economics, pp. 117-120. Physica-Verlag, Berlin (2001).

[16] T. Saaty, S. Gass: *Parametric objective function (Part 1)*, J. Oper. Res. Soc. Am., 2 (1954), pp. 316-319

[17] J.E. Ward, R.E. Wendel*: Approaches to sensitivity analysis in linear programming*, Annals of Oper. Res. 27 (1990), pp. 3-38.