



## **ANEXO 2**

### **Resumen de la tesis**

## 1. PRELIMINARES. ELECCIÓN DEL TÍTULO. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.

La tesis “Transformaciones homográficas de modelos tridimensionales. Análisis proyectivo para el desarrollo de una aplicación infográfica.” se encuentra dentro del programa de doctorado de “Tecnologías Industriales” de la Universidad Miguel Hernández de Elche. La elección del título obedece al contenido de la misma, en la que si bien se abordan las homografías tanto en 2D como en 3D, lo que realmente es más novedoso es el enfoque que se le da desde la Geometría Proyectiva a la resolución del problema tridimensional, y su posterior implementación en un programa que funciona sobre Autocad.

Los motivos de realizar esta tesis son cuatro: el interés del autor por las temáticas del CAD; dar continuidad a una de las líneas abiertas por la tesis de Ramón Maestre: “Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura”; el carácter novedoso de las homografías sobre Autocad; y las aplicaciones de las mismas en campos de la arquitectura, la ingeniería y el arte.

Como objetivos tenemos analizar las homografías 2D y 3D desde la geometría proyectiva, diseñar los algoritmos que permitan implementar los programas *Homograf* y *Homograf3D* que permitan aplicarlas de forma automatizada sobre modelos en Autocad e ilustrar con ejemplos algunas de sus aplicaciones en la arquitectura y la ingeniería.

## 2. ESTADO DEL ARTE. ANTECEDENTES.

Se analiza el estado del arte actual, y no desde el punto de vista histórico, desde tres enfoques: el de la geometría clásica, el álgebra y la geometría proyectiva, y la infografía.

En lo referente a geometría clásica se ha estudiado la homologías desde Desargues en el siglo XVII: *Dados dos triángulos sin elementos comunes, si sus lados se cortan dos a dos en puntos alineados, las rectas que unen sus vértices concurren en el mismo punto.* En los tratados de geometría descriptiva encontramos estudiados los trazados de homologías planas, y las homologías entre figuras planas en el espacio, así como referencias a las homologías tridimensionales entre volúmenes y superficies en el espacio, pero en estas últimas son escasas las aportaciones con ilustraciones, que en a mayoría de casos se hacen en diédrico con lo que la homología espacial se traduce a dos homologías planas.

Desde el álgebra y la geometría proyectiva se estudian las homografías en espacios n-dimensionales, definiéndose como una función que asigna a cada elemento  $x$  un elemento  $x'$  tal que para algún  $\lambda$ , perteneciente a  $R$ , se cumple  $\lambda x' = A \cdot x$ , siendo “A” una matriz invertible de dimensión  $n \times n$ , siendo  $3 \times 3$  para  $R^2$  y  $4 \times 4$  para  $R^3$ , al trabajarse en coordenadas homogéneas lo que nos permite trabajar con puntos impropios. El la bibliografía manejada siempre se ilustra con ejemplos para  $R^2$  realizándose una clasificación de las mismas en base a los puntos dobles y rectas dobles que aparecen en función de los valores propios de la matriz “A”. No aparecen estudios concretos para el caso tridimensional, ni se plantea determinar la matriz “A” a partir de pares de puntos homólogos, como sí se hace en la presente tesis. Si aparece un estudio exhaustivo de las superficies cuádricas desde el punto de vista analítico, si bien no con un enfoque desde el

punto de vista gráfico, de transformaciones homológicas de la superficie esférica como se muestra en esta tesis.

En el campo de la infografía aparecen bien diferenciados los antecedentes 2D y 3D. En el campo 2D encontramos el enderezado o rectificación de fotografías de elementos planos, que no es otra cosa que una transformación homográfica para corregir las fugas. Todas las referencias estudiadas aplican la homografía a la imagen raster, mientras que en esta tesis se hace sobre dibujos vectoriales. Se destaca la tesis "Rectificación Fotogramétrica de Objetos Planos por Métodos Gráficos Basados en Principios Proyectivos" de José Luis Cabanes donde esta rectificación se realiza con un software de gran difusión como es Microstation, mediante la herramienta cámara, obteniendo una foto de la foto.

Respecto a las homologías 3D, José Luis Subias en su tesis "Desarrollo de un modelo de tratamiento por ordenador de los problemas de la geometría proyectiva" plantea una matriz proyectiva 4x4 pero pasa a utilizarla para la obtención de proyecciones de  $R^3$  sobre  $R^2$  y no en el caso más general de  $R^3$  en  $R^3$  como se hace en la presente tesis.

Sí encontramos referencias de transformaciones de  $R^3$  en  $R^3$  en la bibliografía referente al registro de imágenes médicas. Nos referimos a la superposición de imágenes tridimensionales raster, formadas por voxeles, obtenidas mediante tomografías o resonancias magnéticas. Para lograr esta superposición se realizan transformaciones rígidas (traslaciones y giros) y no rígidas (lineales o no). Entre las lineales se encuentran los escalados, las transformaciones afines y las proyectivas. Hemos encontrado referencias del uso de todas ellas excepto de las proyectivas, que también se omiten en las librerías de programación en C manejadas (ITK y VTK). Por ello entendemos como novedoso su programación en esta tesis.

### 3. HOMOGRAFÍAS EN EL PLANO.

En primer lugar y con el fin de centrar el tema se expone la construcción geométrica de una homología a partir de su eje, su centro y un par de puntos homólogos, definiéndose el coeficiente de homología. De entre las diversas formas de definir una homología se centra en la expuesta y en la que utiliza cuatro pares de puntos homólogos, pues servirán para diseñar los algoritmos de las distintas versiones de *Homograf*.

Se clasifican las homografías en ordenadas (homologías) y desordenadas siguiendo con la propuesta realizada en la tesis de Ramón Maestre y atendiendo a la existencia o no de centro y eje de homología, con un marcado criterio geométrico y no discrepante con la clasificación matemática. También se analizan las homografías "asociadas", es decir, cuando se aplica una homología a la figura resultante de otra homología previa, y cuando la homografía resultante entre la primera y la última figura es ordenada (proviene de una radiación única en 3D) o desordenada.

Pasa a analizarse el problema desde el punto de vista analítico planteándose la ecuación general de una homografía en el plano:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sobre la que sustituyendo las coordenadas homogéneas por las de cuatro pares de puntos homólogos se obtienen 12 ecuaciones con 8 parámetros de la matriz de transformación, más unos factores de escalado que se despejan y se reduce a un sistema 8x8, con todas las ecuaciones linealmente independientes. Resuelto el sistema de ecuaciones por triangulación de Gauss, se conoce ya la matriz de la transformación proyectiva. A continuación se aplica a todos los puntos a transformar, convirtiéndolos a coordenadas homogéneas, multiplicándolos por la matriz y volviendo a coordenadas euclídeas dividiendo sus componentes por la componente Z.

Analizado el problema desde el punto de vista geométrico y desde la geometría proyectiva, se exponen en la tesis los distintos algoritmos que se han implementado en las sucesivas versiones del programa *Homograf* (antes *homo.lsp*). Las primeras versiones se basaron en la construcción geométrica, trabajando con intersecciones de líneas primero, y con vectores unitarios después, dado que el autor desconocía la geometría proyectiva. Fue tras los cursos de doctorado cuando se planteó la solución proyectiva y se programó la versión definitiva, no sin antes programar una versión que utilizaba la matriz de transformación obteniéndola del comando tablero de Autocad en su variante de calibración proyectiva con 4 o más pares de puntos. Existen unas limitaciones en *Homograf*: no se admiten ni cambios en el sistema de coordenadas de Autocad ni más de dos puntos colineales y el programa sólo transforma objetos “línea” de Autocad.

Realizado el programa se exponen algunas de sus aplicaciones: fotogrametría de paramentos planos a través de una sola fotografía conocidos cuatro puntos del paramento; montajes fotográficos; obtención de dibujos 2D en perspectivas cilíndricas o cónicas; deformación de dichas perspectivas; trazado de anaglifos; trazado de curvas cónicas, corrección de cartografía 2D, etc.

#### 4. HOMOGRAFÍAS EN EL ESPACIO 3D.

En primer lugar se expone la construcción geométrica de una homología 3D a partir del plano de homología, su centro y un par de puntos homólogos, obteniéndose la figura homóloga de un cubo y los planos límite de la homología. Se define el coeficiente de homología, y de entre las diversas formas de definir una homología nos centramos en la expuesta y en la que utiliza cinco pares de puntos homólogos, pues servirá para diseñar el algoritmo de *Homograf 3D*.

Seguidamente se estudia el caso particular de la homología entre figuras planas en el espacio, donde de nuevo se obtienen las curvas cónicas como homólogas de la circunferencia, esta vez utilizando *Homograf 3D* para seccionar radiaciones tridimensionales.

Se clasifican las homografías en “ordenadas” (homologías) y “desordenadas” siguiendo con la propuesta realizada en la tesis de Ramón Maestre y atendiendo a si existe o no centro y plano de homología; en esta clasificación se estudian casos particulares como son las homotecias 3D, la afinidad 3D, la traslación 3D, la simetría respecto un punto y respecto un plano. También se analizan las homografías “asociadas”, y cuando la homografía resultante entre la primera y la última figura es “ordenada” (proviene de una radiación única en 4D) o “desordenada”.

Se propone un nuevo concepto con la definición de las homologías “pseudo-regulares”, son aquellas en que el rayo principal pasa por el centro y además coincide con un eje de simetría radial de una figura regular a transformar. La figura resultante de dicha transformación será irregular, pero mantendrá ciertas regularidades como son caras iguales (no todas) simetría radial respecto del rayo principal, y aristas iguales por grupos.

Pasa a analizarse el problema desde el punto de vista analítico planteándose la ecuación general de una homografía en el espacio 3D:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Sobre la que, sustituyendo las coordenadas homogéneas por las de cinco pares de puntos homólogos, se obtienen 20 ecuaciones con 15 parámetros de la matriz de transformación, más unos factores de escalado que se despejan y se reduce a un sistema 15x15, con todas las ecuaciones linealmente independientes. Resuelto el sistema de ecuaciones por triangulación de Gauss se conoce ya la matriz de la transformación proyectiva. Se aplica a continuación a todos los puntos a transformar, eso sí convirtiéndolos a coordenadas homogéneas, multiplicándolos por la matriz y volviendo a coordenadas euclídeas dividiendo sus componentes por la cuarta componente T.

Resuelto el problema en 3D se implementa el programa Homograf 3D, que funciona de forma que requiere 5 pares de puntos homólogos y que designemos las líneas o 3Dcaras de Autocad a transformar. De nuevo se plantean una serie de limitaciones al programa, de las que destacamos la de trabajar en el sistema de coordenadas universal de Autocad y que no deben haber más de tres puntos coplanares.

Una vez el programa está disponible se pasa a aplicarlo en distintos casos a fin de ilustrar algunas de sus aplicaciones entre las que destacan:

- La obtención homológica de las superficies cuádricas, donde se obtienen superficies de elipsoides, de hiperboloides de dos hojas y de paraboloides a partir de la superficie esférica, según ésta sea exterior, secante o tangente al plano límite de la homología respectivamente. Se constata también aquí el concepto de homología “pseudo-regular”, pues se obtienen en ese caso cuádricas de revolución. Se obtienen modelos tanto alámbricos como mallados, los primeros discretizando la esfera en meridianos y éstos en

polígonos (líneas); y los segundos mediante poliedros geodésicos pseudo-regulares (3dcaras). Se ilustra cómo pueden utilizarse estas superficies en formas cupulares rebajadas, realzadas u oblicuas.

- Se completa el punto anterior con la transformación homológica entre las cuádricas regladas, obteniéndose un paraboloides hiperbólico a partir de un hiperboloides de una hoja; y planteando el problema inverso.

- La arquitectura ilusoria, las escenografías teatrales y los bajorelieves son otra aplicación de las homologías 3D basadas en la ambigüedad de la perspectiva cónica, que es igual para las distintas secciones de una misma radiación visual. Basándonos en esta ambigüedad se resuelven en Autocad mediante *Homograf 3D* tres ejemplos clásicos: la galería del palacio Spada de Roma, la cámara Ames y el bajo relieve de Santa María Presso San Satiro en Milán.

- La arquitectura oblicua y la estereotomía también encuentran en *Homograf 3D* una potente herramienta que permite mediante afinidades pasar de geometrías ortogonales a oblicuas con sus correspondientes despieces de cada piedra.

- La transformación de modelos de elementos finitos puede ser un campo a explotar desde las homologías 3D, de forma que ciertos cambios en el diseño de un modelo no impliquen la aplicación de costosos algoritmos de remallado.

## 5. CONCLUSIONES.

En el campo de las dos dimensiones se ha programado *Homograf* que resuelve las homografías con objetos línea en el plano, en un entorno vectorial como es Autocad; resultando este extremo novedoso al estar resuelto hasta ahora en imágenes raster. También se ha ilustrado con un buen número de aplicaciones prácticas.

En lo relacionado con las homologías 3D se ha programado *Homograf 3D* que resuelve las homografías 3D en entorno Autocad manejando objetos “línea” y “3dcara”; tras un estudio de las homologías en 3D, realizado desde la geometría descriptiva y desde la geometría proyectiva. Podemos considerar novedoso la resolución del problema desde la geometría proyectiva, determinando los 15 parámetros de la matriz de transformación a partir de 5 pares de puntos homólogos; pues no se ha encontrado referencia alguna en la bibliografía que se ha manejado. También es novedosa la clasificación en ordenadas y desordenadas, siguiendo el criterio introducido por Ramón Maestre en 2D; o la introducción del concepto de homologías 3D pseudos-regulares. Finalmente se ha ilustrado con un buen número de ejemplos las aplicaciones en diversos campos.

Finalmente se citan posibles futuras líneas de investigación que den continuidad a esta tesis:

- *Homograf 4D*. Un programa que resuelva las homologías en cuatro dimensiones y las represente gráficamente.

- El cálculo y dibujo de elementos notables en las cuádricas.
- La extensión de *Homograf* y *Homograf 3D* a objetos más complejos de Autocad.
- El empleo de *Homograf 3D* en la corrección de cartografía 3D.
- El empleo de *Homograf* y *Homograf 3D* en la generación de múltiples homologías.

## 6. FUENTES DE LA INFORMACIÓN.

En este capítulo se detallan todas las referencias que se han estudiado y utilizado para la elaboración de esta Tesis, como son libros, revistas y comunicaciones en Congresos científicos, otras Tesis Doctorales e Internet.





**ANEXO 3**

**Abstract en Castellano.**



En esta tesis se aborda un aspecto de las homografías tanto en 2D como en 3D bajo el enfoque de la geometría proyectiva, para después diseñar algoritmos e implementarlos en programas que funcionan sobre un programa infográfico de gran uso como Autocad. Estos programas son potentes herramientas gráficas que se podrán emplear en diversas disciplinas de la arquitectura, la ingeniería y el arte.

Desde la Geometría Descriptiva y Métrica se vienen estudiando las homologías entre figuras planas, bien sea en el plano o en el espacio. Pero son escasos los estudios que se refieren a figuras tridimensionales, y la mayoría de ellos van ligados a algún sistema de representación bidimensional, y no tridimensional como se hace en esta tesis mediante Autocad.

El Álgebra y la Geometría Proyectiva estudian las homografías en general en espacios  $n$ -dimensionales, mediante un producto matricial en coordenadas homogéneas de un espacio de dimensión  $n+1$ . Existen numerosas publicaciones donde se ilustra el caso bidimensional, no habiéndose encontrado ninguna en que se concrete el caso tridimensional, ni se resuelva con datos concretos tal y como se hace en esta tesis.

En el ámbito infográfico los precedentes se diferencian en 2D y 3D. En 2D encontramos lo que se llama enderezado o rectificación de fotogramas de elementos planos, es decir, corrección de fugas para lograr una imagen de una figura plana sin deformaciones; en esta tesis se aborda el problema en un entorno vectorial y no raster. En 3D hay referencias en lo relativo al registro de imágenes médicas 3D procedentes de tomografías o resonancias magnéticas, donde se estudian transformaciones no rígidas como el escalado, la afinidad y la homografía (transformación proyectiva), si bien de estas últimas no se han encontrado referencias concretas de su uso, ni están disponibles en las librerías de programación más manejadas (ITK y VTK).

Los programas diseñados en esta tesis *Homograf* y *Homograf3D* resuelven las homografías 2D y 3D a partir de cuatro o cinco pares de puntos homólogos respectivamente, pudiendo transformar objetos “línea” o “3Dcara” de Autocad. Para ello se plantean y resuelven los sistemas de ecuaciones que nos dan los parámetros de la matriz de transformación, multiplicándose por ella las coordenadas homogéneas de los puntos a transformar para obtener las coordenadas de los puntos transformados.

En la tesis se muestran estos algoritmos así como otros 2D previos, basados en las construcciones de la Geometría Descriptiva. Se clasifican las homografías en ordenadas y desordenadas, se propone el concepto de homología pseudo-regular y finalmente se exponen una serie de ejemplos de aplicación del programa, de los que destacamos en 2D: la fotogrametría de elementos planos, la obtención de perspectivas planas, la generación de anaglifos, el trazado de cónicas, la corrección de cartografía 2D, etc. Y en 3D el trazado de superficies cuádricas, la generación de modelos 3D para arquitectura ilusoria y oblicua, escenografías, bajorelieves, estereotomía, cálculo por elementos finitos, etc.

Finalmente se apuntan cuatro futuras líneas de investigación: las homografías 4D, el dibujo de elementos notables en las cuádricas, la extensión a otros objetos de Autocad y la corrección de cartografía 3D.



#### **ANEXO 4**

#### **Abstract en Inglés.**

This PhD thesis deals with one aspect of the homography of both two-dimensional design (2D) and three-dimensional design (3D) from the Projective Geometry perspective, so that algorithms may be designed and implemented in programs that work on widely-used info-graphic programs such as Autocad. These programs are powerful graphic tools capable of being used for various disciplines such as Architecture, Engineering and the Arts.

Studies from the Descriptive and Metric Geometry view have tackled the homologies between flat figures, both in the plain or in space. However, there are few studies relating to three-dimensional figures and the great majority of them go hand in hand with a two-dimensional graphic representation system as opposed to a three-dimensional system as proposed by this thesis using Autocad.

Algebra and Projective Geometry study the homographies in general in  $n$ -dimensional spaces by means of a matrix product in homogeneous coordinates of space of dimension  $n+1$ . There are numerous publications illustrating the two-dimensional case, but no publication has been found where the three-dimensional case is tackled nor resolved with precise data as this thesis presents.

In the info-graphic field, the precedents can be differentiated in 2D and 3D. In 2D we find what it is known as straightening or rectification of flat elements photograms, that is, the correction of leaks to achieve an imagine of a flat figure without any distortion. This thesis considers the problem in a vectorial environment and not in a raster one. In 3D there are references in relation to the registration of 3D medical images originating from tomography or magnetic resonance, where non-rigid transformation such as ratio scaling, affinity and homography (projective transformation) are studied, although no precise references have been found of the latter with regards to its use, nor are they available in the most-widely used programming bookshops (ITK and VTK).

The programs designed in this thesis, *Homografy Homograf3D*, solve the homographies in 2D and 3D from four or five pairs of homologous points respectively, being capable of transforming “line” or “3Dface” Autocad objects. For that purpose, the present thesis proposes and resolves the equation systems that would provide us with the parameters for the transformation matrix; this matrix would then be used to multiply the homogeneous coordinates of the points to be transformed to obtain the coordinates of the transformed points.

This thesis demonstrates these algorithms as well as other existing 2D ones, based on the learnings of Descriptive Geometry. Homographies are classified as organised and disorganised, the concept of “pseudo-regular” homology is proposed and finally, a series of examples on the application of the program is provided, of which the following 2D are highlighted: photogrammetry of flat elements, the achieving of plat perspectives, the generation of “anaglifos”, drawing of conical section, 2D-mapping correction, etc. Similarly, the following 3D are highlighted: the drawing of quadrics surfaces, the generation of 3D models for illusory and oblique architecture, scenography, underneath embossment, finite element calculation, etc.

Finally, four future paths of investigation are outlined: the 4D homographies, the drawing of characteristic elements in the quadrics surfaces, Autocad’s expansion to other objects and the correction of 3D mapping.



Elche, octubre de 2009

Fdo: FRANCISCO IRLES MAS.