

Memoria de Tesis

Estimación en áreas pequeñas bajo modelos lineales mixtos con dos factores aleatorios anidados

Autor: **Agustín Pérez Martín**

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática
Universidad Miguel Hernández de Elche.

Director: **Domingo Morales González**

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática
Universidad Miguel Hernández de Elche.



Estimación en áreas pequeñas bajo modelos lineales mixtos con dos factores aleatorios anidados

Agustín Pérez Martín

Memoria presentada por
Agustín Pérez Martín
para optar al grado de doctor por la
Universidad Miguel Hernández de Elche.
Elche, Junio 2008

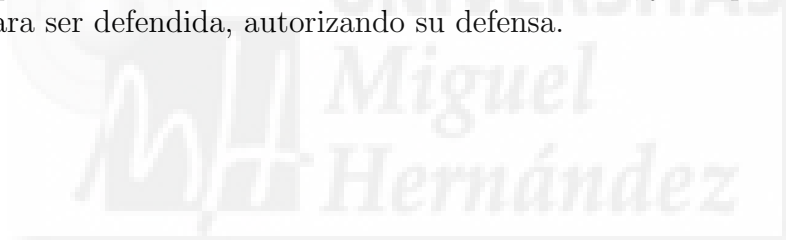
Director:
Domingo Morales González

D. Domingo Morales González, catedrático de Estadística e Investigación Operativa del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche

CERTIFICA que la Memoria de Investigación titulada:

“Estimación en áreas pequeñas bajo modelos lineales mixtos con dos factores aleatorios anidados”

ha sido realizada bajo mi dirección por Agustín Pérez Martín en el Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, para optar al grado de Doctor por la Universidad Miguel Hernández de Elche. Trata un tema de importancia en el ámbito de la Estadística Pública, y cumple todas las condiciones exigibles para ser defendida, autorizando su defensa.



Para que así conste, firmo el presente certificado.

Domingo Morales González
Junio de 2008

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE

Autor: **Agustín Pérez Martín**

Título: **Estimación en áreas pequeñas bajo modelos lineales mixtos con dos factores aleatorios anidados**

Dpto: **Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática**

D. José María Amigó García, Profesor Titular de Universidad y director del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, da su conformidad para la defensa pública de la tesis doctoral. Y para que surta los efectos oportunos, emite el presente informe en Elche, Alicante, Junio de 2008.



Para que así conste, firmo el presente certificado.

José María Amigó García

A mis padres, hermanos y abuelos.



A mi esposa.

Índice general

Prólogo	1
Introducción	1
Antecedentes y estado actual del tema	3
Contenido de la memoria	5
Agradecimientos	6
1. Preliminares	9
1.1. Teoría de la predicción bajo el modelo lineal general	9
1.2. Modelos lineales con efectos aleatorios	13
1.2.1. Introducción	13
1.2.2. Modelos lineales mixtos con varianzas conocidas	14
1.2.3. Modelos lineales mixtos de tipo ANOVA	17
1.3. Estimación máximo verosímil	19
1.3.1. Descripción del método	19
1.3.2. Máxima verosimilitud con parametrización alternativa	21
1.4. Estimación máximo verosímil residual	22
1.4.1. Descripción del método	22
1.4.2. Máxima verosimilitud residual con parametrización alternativa	25
1.5. El método 3 de Henderson	26
1.5.1. Descripción del método	26
1.6. El error cuadrático medio de los EBLUP	31
1.6.1. Introducción	31
1.6.2. Cálculo del error cuadrático medio al predecir τ	32
1.6.3. Cálculo del error cuadrático medio al predecir η	37
1.6.4. Estimación del error cuadrático medio al predecir η	38
2. Modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados	41
2.1. Introducción	41
2.2. Varianzas conocidas	42
2.3. Método de la máxima verosimilitud (ML)	45
2.4. Método de la máxima verosimilitud residual (REML)	49
2.5. Método de la máxima verosimilitud residual con parametrización alternativa	59
2.6. Método 3 de Henderson (H3)	67

2.6.1.	Cálculos relacionados con M_1	68
2.6.2.	Cálculos relacionados con M_2	68
2.6.3.	Cálculos relacionados con M_3	71
2.7.	Experimento de simulación para el ajuste del modelo	75
2.7.1.	Simulación de muestras. Cálculo de medidas de eficiencia	76
2.7.2.	Experimento 1	77
2.7.3.	Experimento 2	83
2.7.4.	Conclusiones	88
3.	Predictores BLUP en un modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados	91
3.1.	Introducción	91
3.2.	BLUP y EBLUP de una media poblacional	92
3.2.1.	Cálculo de \hat{Y}_d^{blup} e \hat{Y}_d^{eblup}	94
3.2.2.	Cálculo de \hat{Y}_{di}^{blup} e \hat{Y}_{di}^{eblup}	96
3.3.	Experimento de simulación para los EBLUP	98
3.3.1.	Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia	98
3.3.2.	Experimento de simulación y principales resultados	99
3.3.3.	Conclusiones	104
4.	El error cuadrático medio de los EBLUP	107
4.1.	Introducción	107
4.2.	Error cuadrático medio de \hat{Y}_d^{eblup}	107
4.2.1.	Cálculo de $g_{1,d}(\theta)$	108
4.2.2.	Cálculo de $g_{2,d}(\theta)$	110
4.2.3.	Cálculo de $g_{3,d}(\theta)$	111
4.2.4.	Cálculo de $g_{4,d}(\theta)$	112
4.3.	Error cuadrático medio de \hat{Y}_{di}^{eblup}	113
4.3.1.	Cálculo de $g_{1,di}(\theta)$	114
4.3.2.	Cálculo de $g_{2,di}(\theta)$	114
4.3.3.	Cálculo de $g_{3,di}(\theta)$	115
4.3.4.	Cálculo de $g_{4,di}(\theta)$	115
4.4.	Estimación del error cuadrático medio de los estimadores EBLUP	116
4.4.1.	Estimación del error cuadrático medio de \hat{Y}_d^{eblup}	116
4.4.2.	Estimación del error cuadrático medio de \hat{Y}_{di}^{eblup}	116
4.5.	Experimento de simulación para el ECM de los EBLUP	116
4.5.1.	Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia	117
4.5.2.	Experimento de simulación y principales resultados	118
4.5.3.	Conclusiones	122

5. El error cuadrático medio Bootstrap	125
5.1. Introducción	125
5.2. Procedimiento Bootstrap	125
5.3. Experimento de simulación para el ECM Bootstrap de los EBLUP	127
5.3.1. Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia	127
5.3.2. Experimento de simulación y principales resultados	131
5.3.3. Conclusiones	134
6. Aplicación a dos casos reales	137
6.1. Introducción	137
6.2. Consideraciones previas	138
6.3. Otros estimadores a comparar	141
6.4. Encuesta de Población Activa. EPA	143
6.4.1. Introducción	143
6.4.2. Especificaciones de los datos	144
6.4.3. Resultados	146
6.5. Encuesta Continua de Presupuestos Familiares. ECPF	153
6.5.1. Introducción	153
6.5.2. Especificaciones de los datos	154
6.5.3. Resultados	156
7. Conclusiones generales y futuras líneas de investigación	161
7.1. Conclusiones generales	161
7.2. Futuras líneas de investigación	162
Apéndices	164
A. Cálculos de expresiones en el capítulo 2	167
A.1. Introducción	167
A.2. Desarrollo de $\hat{\beta}$ y \hat{u}	167
A.3. Cálculos para el ajuste mediante el método ML	169
A.4. Cálculos para el ajuste mediante el método REML	174
A.4.1. Cálculos para REML mediante parametrización habitual	175
A.4.2. Cálculos para REML mediante parametrización alternativa	188
B. Cálculos de expresiones en el capítulo 4	197
B.1. Introducción	197
B.2. Definiciones	197
B.3. Cálculo de derivadas de b en d	198
B.4. Cálculo de derivadas de b en d_i	216
C. Resultados de los experimentos de simulación del capítulo 2	229
C.1. Introducción	229
C.2. Tablas numéricas del experimento 1	230
C.3. Tablas numéricas del experimento 2	233

D. Resultados del experimento de simulación del capítulo 3	237
D.1. Introducción	237
D.2. Resultados gráficos	238
D.3. Tablas numéricas del experimento para ajuste REML	242
D.3.1. Caso homocedástico, $\ell = 0$	242
D.3.2. Caso heterocedástico, $\ell = 1/2$	251
D.4. Tablas numéricas del experimento para ajuste ML	260
D.4.1. Caso homocedástico, $\ell = 0$	260
D.4.2. Caso heterocedástico, $\ell = 1/2$	269
E. Resultados del experimento de simulación del capítulo 4	279
E.1. Introducción	279
E.2. Tablas numéricas correspondientes al caso homocedástico, $\ell = 0$	280
E.3. Tablas numéricas correspondientes al caso heterocedástico, $\ell = 1/2$	289
F. Resultados del experimento de simulación del capítulo 5	299
F.1. Introducción	299
F.2. Tablas correspondientes al caso homocedástico, $\ell = 0$	300
F.2.1. Error cuadrático medio empírico, E_d y E_{di}	300
F.2.2. Sesgo empírico, B_d y B_{di}	309
F.2.3. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 95%	318
F.2.4. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 99%	327
F.3. Tablas correspondientes al caso heterocedástico, $\ell = 1/2$	336
F.3.1. Error cuadrático medio empírico, E_d y E_{di}	336
F.3.2. Sesgo empírico, B_d y B_{di}	345
F.3.3. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 95%	354
F.3.4. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 99%	363

Prólogo

Introducción

En los últimos años ha venido constatándose en la sociedad española la existencia de una mayor exigencia de información estadística, tanto en cantidad como en calidad, como consecuencia de su mayor cultura económica y social. Esto ha planteado a los institutos de estadística la necesidad de abordar nuevas investigaciones, ahondar en múltiples análisis de la realidad económica y social, y someter todos sus datos a un estricto control de calidad capaz de mantener el alto grado de confianza del que disfruta la información estadística oficial.

La recolección de datos estadísticos y su utilización para estimar parámetros demográficos o socioeconómicos es hoy en día de vital importancia para el mantenimiento de nuestra sociedad de la información. El estado de la nación, el de la comunidad autónoma o el de la provincia puede diagnosticarse a partir del análisis de los datos publicados por el Instituto Nacional de Estadística (INE) o por sus equivalentes organismos autonómicos. Así por ejemplo, parámetros como el Índice de Precios al Consumo, Producto Interior Bruto, Tasa de Paro, Tasa de Natalidad, Ingresos Netos por Hogar, etc., están siendo utilizados constantemente por nuestros gobernantes para decidir cuándo y cómo distribuir los presupuestos públicos y, más generalmente, para elaborar políticas sociales y económicas.

Si se analizan las encuestas que publica el INE (por ejemplo, la Encuesta de Población Activa (EPA) o la Encuesta Europea de Ingresos y Condiciones de Vida (Panel de Hogares, anteriormente Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (ECPF)) se observará que hay estimaciones relativas a España, a las 17 Comunidades Autónomas y a las 52 provincias. Sin embargo, al disminuir el tamaño de la muestra, las encuestas de ámbito nacional no pueden, en general, descender a desagregaciones inferiores a la provincia (por ejemplo, la comarca o el municipio), pues las estimaciones pierden precisión.

Los usuarios de las estadísticas públicas están demandando, con creciente intensidad, la disposición de una base de datos accesible y constantemente actualizada para áreas pequeñas (comarcas y municipios). En este punto, los Gobiernos Autónomos, los Ayuntamientos, las Cámaras de Comercio, las Organizaciones Empresariales y Sindicales, las Universidades, etc., presionan constantemente para la consecución de este fin.

La ausencia de estimaciones para áreas pequeñas es un problema común a la mayoría de los países europeos, y por tal motivo se está potenciando la investigación en técnicas estadísticas

para la estimación en dichas áreas. Esas técnicas, de última generación, permiten resolver el problema con costes moderados. Hay que tener en cuenta que, con las técnicas estadísticas actualmente vigentes en los Institutos Nacionales de Estadística europeos, el problema se podría solucionar con un aumento de los tamaños de muestra. Sin embargo, tal solución conlleva un aumento desorbitado de los costes y en consecuencia ningún país occidental la ha adoptado.

En España, el INE y los Institutos Autonómicos de Estadística (IAE) están interesados en el desarrollo de técnicas estadísticas modernas que permitan la estimación en áreas pequeñas, para las que son ineficientes los procedimientos de elevación empleados habitualmente en sus operaciones estadísticas. Por tal motivo, en esta memoria se ha desarrollado una metodología estadística aplicable a las encuestas por muestreo de la Estadística Pública española. En concreto, se presentan dos aplicaciones. En la primera se estiman totales de parados en las Encuesta de Población Activa y en la segunda se estima el gasto anual medio del hogar en la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares.

Los métodos de estimación en áreas pequeñas pueden, en general, clasificarse de la siguiente forma:

1. Estimadores compuestos sin modelos explícitos. Un estimador compuesto es una suma ponderada de estimadores directos e indirectos. El estimador indirecto es sesgado para un área pequeña dada, pero insesgado a un nivel de agregación mayor del de pertenencia al área pequeña. Los pesos se suelen elegir de una de las dos formas siguientes:
 - 1.1. Minimizando el error cuadrático medio del estimador compuesto. Por ejemplo, el “composite estimator” y el “constrained composite estimator”.
 - 1.2. Determinando los pesos a partir de los tamaños muestrales en el área pequeña. Por ejemplo, el “sample-size dependent estimator” y el “GREG”.
2. Modelización explícita de las variables objetivo en términos de las variables auxiliares. El modelo se puede definir a nivel de unidad o a nivel de área. Conviene además distinguir que:
 - 2.1. En los modelos marginales se especifica la esperanza de las variables objetivo dadas las variables auxiliares y, en consecuencia, los efectos marginales de las variables auxiliares en la población. Los modelos marginales no contienen efectos aleatorios. Por ejemplo, el estimador sintético básico o el estimador sintético de regresión.
 - 2.2. En los modelos condicionales se introducen efectos aleatorios a nivel de unidad o de área. La independencia entre las variables de la encuesta, en distintas unidades o áreas, se da condicionalmente a la realización de los efectos aleatorios. Por ejemplo, el estimador EBLUP.

La investigación desarrollada en esta memoria se enmarca en el apartado 2.2.

Antecedentes y estado actual del tema

Estimación en áreas pequeñas es una parcela de la estadística que trata el problema de estimar parámetros de subconjuntos (llamados áreas pequeñas o dominios) de la población a partir de muestras e información auxiliar. Debido a la falta de precisión de los estimadores directos de parámetros de áreas pequeñas, se han desarrollado nuevos procedimientos de estimación. Ghosh y Rao (1994), y más recientemente Rao (2003) o Jiang y Lahiri (2006), dan una descripción detallada de esta teoría. Los modelos de regresión lineal mixta (véase Searle, Casella y McCulloch, 1992) incrementan la eficiencia de la información usada en el proceso de estimación estableciendo nexos o relaciones entre todas las observaciones de la muestra, y al mismo tiempo introduciendo variabilidad entre áreas. Los modelos de este estilo se han usado en Estados Unidos para estimar ingresos per cápita en áreas pequeñas (Fay y Herriot, 1979), para estimar conteos no incluidos en el censo (Erickson y Kadane, 1985, y Dick, 1995 en el censo canadiense), y para estudios de pobreza en población escolar (National Research Council, 2000). Conviene mencionar que utilizando estos estimadores, el Departamento de Educación de Estados Unidos asigna más de 7000 millones de dólares en fondos generales a los condados, y luego los estados distribuyen estos fondos entre los distritos escolares (Rao, 2003). El uso de estas técnicas no se restringe a datos socioeconómicos. El trabajo de Battese, Harter y Fuller (1988) es un ejemplo de aplicación al campo de la agricultura. Estos autores usaron un modelo lineal mixto para estimar extensiones de determinados cultivos.

Cuando los parámetros son lineales (combinaciones lineales de los valores que la variable objetivo toma en los elementos de la población), los predictores lineales insesgados óptimos (BLUP - Best Linear Unbiased Predictor) dependen de algunos parámetros desconocidos que generalmente son componentes de la varianza o correlaciones (Henderson, 1975). Cuando esos parámetros se reemplazan por estimadores, entonces los correspondientes predictores se denominan empíricos (EBLUP - Empirical BLUP). Sin embargo el error de predicción (o error cuadrático medio - MSE) exacto no puede obtenerse analíticamente. Por este motivo han aparecido diversas aproximaciones en la literatura científica. La primera simplificación del MSE la obtuvieron Kackar y Harville (1981) suponiendo normalidad de los errores y de los efectos aleatorios. En un segundo artículo Kackar y Harville (1984) obtuvieron una aproximación del MSE y propusieron un estimador que se basaba en ella. Prasad y Rao (1990) dieron una nueva aproximación para modelos con matrices de covarianza diagonales a bloques. Bajo ciertas condiciones de regularidad para los modelos y los estimadores de las componentes de la varianza, demostraron que cuando el número de bloques D tiende a infinito su aproximación es del orden $1/D$. Ellos propusieron un estimador del MSE y dieron expresiones específicas para tres tipos de modelos: los modelos Fay-Herriot, los de errores anidados y los de coeficientes aleatorios. Los estimadores de las componentes de la varianza obtenidos por el método del ajuste de constantes, también llamado Henderson 3 (véase Searle, Casella y McCulloch (1992)) satisfacen las condiciones de regularidad mencionadas; sin embargo, esto no ocurre con los estimadores de máxima verosimilitud. Datta y Lahiri (2000) obtuvieron el estimador análogo del MSE en modelos con matrices de covarianza diagonales a

bloque y componentes de la varianza estimadas por máxima verosimilitud (ML) o por máxima verosimilitud residual (REML). Más recientemente, Das, Jiang y Rao (2004) estudiaron la aproximación del error de predicción en una clase más amplia de modelos, cuando las componentes de la varianza se estiman por los métodos ML o REML.

Cuando no se dispone de estimadores adecuados, los métodos de remuestreo resuelven el problema; pero incluso cuando los hay también proporcionan estimadores alternativos de gran calidad. En lo relativo a la estimación del MSE de predictores empíricos en modelos para áreas pequeñas, se pueden encontrar algunos métodos de remuestreo en la literatura científica. Jiang, Lahiri y Wan (2002), basándose en la técnica del jackknife, dan estimadores asintóticamente insesgados especificando el orden de consistencia. Pfeffermann y Tiller (2005) introducen procedimientos bootstrap, paramétricos y no paramétricos, para estimar MSE en modelos de espacio-estado. Recientemente Hall y Maiti (2006a,b) introducen algoritmos de doble bootstrap (paramétrico o de momentos ajustados), González-Manteiga et al. (2006) aplican procedimientos bootstrap en modelos mixtos de regresión logística a nivel de áreas y González-Manteiga et al. (2008) aplican procedimientos bootstrap en modelos lineales mixtos a nivel de individuos. Sus resultados computacionales muestran una reducción de sesgo con respecto a otros estimadores.

El modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados, que se estudia en esta memoria, fue utilizado en el contexto de la estimación en áreas pequeñas, por Datta y Ghosh (1991) y Pfeffermann y Barnard (1991). Estos autores asumieron un modelo simplificado, con variables auxiliares constantes en los subdominios. Stukel y Rao (1997) suprimen la citada simplificación y desarrollan algoritmos de ajuste para modelos mixtos anidados con uno y dos factores aleatorios. Stukel y Rao (1999) estudian la aplicabilidad del modelo a la estimación de parámetros lineales en áreas pequeñas. En concreto, Stukel y Rao (1999) ajustan el modelo mediante el método Henderson 3, proponen un estimador EBLUP y proporcionan una aproximación de su error cuadrático medio. En la presente memoria se extienden los resultados de Stukel y Rao en dos direcciones:

1. Ajuste del modelo. Se consideran los métodos Henderson 3 (H3), máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual (REML). Se dan algoritmos de cálculo y se analizan los errores cuadráticos medios y sesgos mediante estudios de simulación. Se concluye aconsejando el uso del método REML.
2. Se proporcionan dos tipos de procedimientos para estimar el error cuadrático medio de los EBLUP: los estimadores de fórmula explícita y los estimadores por remuestreo bootstrap. Se concluye recomendando un estimador basado en remuestreo bootstrap paramétrico con corrección de sesgo.

En la memoria no se han dejado las aplicaciones estadísticas en un segundo plano. Los procedimientos desarrollados se han empleado con dos casos reales. En la primera aplicación (Encuesta de Población Activa) se realiza una modelización jerárquica, donde el dominio del primer nivel es la provincia y el del segundo nivel (subdominio) es la comarca dentro de la

provincia. En este caso, el modelo se usa para tratar datos con estructura geográfica anidada. En la segunda aplicación (Encuesta Continua de Presupuestos Familiares) los dominios de primer nivel son las comunidades autónomas y los de segundo nivel son los trimestres del año dentro de la provincia. En este último caso, el modelo se usa para tratar datos de carácter temporal.

Contenido de la memoria

En esta memoria se investiga la aplicabilidad de los modelos lineales mixtos con dos factores aleatorios anidados a la estimación de parámetros de dominios y subdominios de poblaciones finitas. En estimación en áreas pequeñas, estos modelos son de gran utilidad, pues permiten tanto la modelización de datos de carácter temporal, como la estimación simultánea de parámetros poblacionales en áreas d y subáreas di , más pequeñas que las grandes áreas para las cuales se diseña un estudio por muestreo. La utilización de este tipo de modelos tiene interés en estadística pública, y en particular en las estadísticas socioeconómicas. Sin embargo, también hay aplicaciones relevantes en el campo de la estadística medioambiental, en la modelización de datos agrícolas, etc.

La investigación llevada a cabo con esta tesis doctoral, pretende aportar una nueva modelización dentro de la teoría de la estimación en áreas pequeñas, comparar varios métodos de ajuste del modelo propuesto, desarrollar la teoría necesaria para el cálculo de estimadores de áreas pequeñas así como de sus errores cuadráticos medios, implementar software ad-hoc y adaptar la metodología introducida a la estimación de parámetros de interés (socioeconómicos, laborales, etc).

La presente memoria consta de siete capítulos y seis apéndices distribuidos del siguiente modo:

En el **Capítulo 1** se introduce la teoría general de modelos lineales mixtos necesaria para abordar posteriormente el resto de capítulos. Se hace hincapié en la teoría general de predicción, en la metodología de ajuste de los modelos lineales mixtos y en la obtención de errores cuadráticos medios de predictores.

En el **Capítulo 2** se introduce el modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados, se plantean tres métodos de ajuste, Henderson 3, máxima verosimilitud, y máxima verosimilitud residual. Se desarrollan los algoritmos de ajuste para la estimación de los parámetros desconocidos del modelo, de manera que posteriormente puedan ser eficientes computacionalmente. Por último se describe un experimento de simulación que permite comparar los tres métodos de ajuste.

En el **Capítulo 3** se aplica el teorema general de predicción, revisado en el capítulo 1, a la obtención de una predicción lineal insesgada óptima de determinados parámetros poblacionales de tipo lineal asociados a la variable de interés. A este tipo de predictores se les conoce como BLUP y EBLUP, cuando las componentes de la varianza son conocidas o desconocidas respectivamente. Por último se presenta un experimento de simulación que permite comparar las predicciones obtenidas a través de ciertas medidas de eficiencia empírica.

En el **Capítulo 4** se aplica la teoría correspondiente a la estimación del error cuadrático medio de los EBLUP introducida en el capítulo 1. Se extiende esta teoría al modelo objeto de estudio y se realiza un experimento de simulación que permite analizar el comportamiento de estos estimadores.

En el **Capítulo 5** se obtienen estimaciones del error cuadrático medio de los EBLUP mediante remuestreo bootstrap. Se analiza el comportamiento de dos estimadores bootstrap a través de un experimento de simulación. El experimento se ha diseñado para obtener comparaciones con los estimadores desarrollados y estudiados en el capítulo anterior.

El **Capítulo 6** está dedicado a la aplicación de la metodología desarrollada en dos ejemplos prácticos. En el primero de ellos (Encuesta de Población Activa) se busca, a través de este tipo de modelos, una estimación del total de parados para comarcas dentro de su correspondiente provincia. En el segundo (Encuesta Continua de Presupuestos Familiares), se busca una estimación del gasto total anual medio del hogar por trimestres para cada comunidad autónoma.

En el **Capítulo 7** se ofrecen algunas conclusiones de carácter general y se plantean futuras líneas de investigación.

En los **Apéndices A y B** se detallan los cálculos intermedios que dan lugar a las expresiones descritas en los capítulos 2 y 4, respectivamente.

En los **Apéndices C, D, E y F** se presentan tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización de los experimentos de simulación descritos en cada uno de los capítulos.

Agradecimientos

Desde que era niño, mi madre en su continua labor educadora, siempre me ha repetido una frase, una y otra vez: *“Es de bien nacidos, ser agradecidos”*.

Bien, pues este es el momento de hacer justicia con todos los que en algún momento de este duro camino habéis sido una pieza fundamental. Pero antes permitirme que os cuente una historia que para mí resume el apoyo y ayuda que vosotros me habéis ofrecido:

*Una noche un hombre tuvo un sueño...
soñó que caminaba a lo largo de la playa con el Señor...
En el cielo, escenas de su vida se proyectaban rápidamente...
y en cada escena notaba dos pares de huellas de pies en la arena:
una la de sus pies y a su lado...
la huella de los pies del Señor.*

*Cuando la última escena de su vida pasó ante él,
miró atrás, a las huellas en la arena...
y se fijó que muchas veces, a lo largo del sendero de su vida solamente había un par de huellas...
y se dio cuenta que esto sucedía en los momentos más tristes, cuando se había sentido más solo, en los peores momentos de su vida...
y le preguntó al Señor: Señor, tú me dijiste una vez que caminarías todo el camino conmigo...*

¿Por qué en los momentos más difíciles de mi vida, hay una sola huella en la arena?

¿Por qué, cuando más te he necesitado, me dejaste solo?

El Señor le contestó:

“Hijo mío, yo te amo, siempre te he amado y nunca te he dejado en esos momentos de tu vida.

Cuando sólo has visto la huella de unos pies...

es... solamente... porque yo te llevaba en mis brazos”

Gracias a todos los que me habéis llevado en vuestros brazos.

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, Domingo Morales González, la confianza, esfuerzo y dedicación que ha depositado en mí, así como su labor dentro de esta tesis, su constante apoyo y ayuda y por supuesto por ese cable con el L^AT_EX.

También quiero manifestar mi agradecimiento a todos los componentes del grupo de investigación: Lola Esteban, Ángel Sánchez, Yolanda Marhuenda y en particular a mi buen amigo Laureano Santamaría por su constante apoyo, ayuda y colaboración en “la fase 2” de esta tesis doctoral y como no, por prestarme a Fenix.

No me quiero olvidar de los compañeros del departamento que me han animado: Alex Rabasa, Javi Toledo, Luis Guardiola, Nirian Martín, Mavi Herranz, Mari Carmen Marín, Jesusjas Rodríguez, Javier Alcaraz, Monge, Joaquín Sánchez, Roberto Dale y Tomas Hobza, que siempre están dispuestos a escucharme, a tomar un café o a reírnos hasta de nuestra sombra. También a la buena gente que ha pasado por la hemeroteca y no tengo espacio para enumerar. Mi agradecimiento a los técnicos del CIO y sobre todo a Rafa Garbayo, ese artista del Linux que siempre está disponible para prepararme las máquinas y comenzar a simular.

También quiero tener un recuerdo para mis amigos Manuel Morán, Álvaro Artigues y Lola Monsalve por su manifiesta preocupación. Chicos, siempre nos quedará Cancún...

Quiero darle las gracias a un pequeño personaje, que desde hace poco más de un año me alegra en esos momentos de abatimiento, mi sobrino Samuel. Me ha contagiado su arrojo, tenacidad y afán de superación y aunque todavía tarde mucho tiempo en saberlo, me ha ayudado como el que más.

Esto es por y para las personas que han vivido más de cerca este trabajo, toda mi familia. A los que hicieron que hoy sea quien soy, que siempre han creído en mí, —algunos por desgracia no pueden ver el trabajo ya terminado— a ellos se lo dedico especialmente.

Gracias a mi mujer Cristina, inspiración de mis actos, apoyo y fuerza constante. Eres la propietaria de la mayor parte de ese único par de huellas de mi vida.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de la predicción bajo el modelo lineal general

En esta sección se presenta un resumen de la Teoría de la predicción bajo el modelo lineal general, extraído del capítulo 2 de Valliant et al. (2000).

Se considera una población finita definida por el conjunto $\Omega = \{1, \dots, N\}$. A cada unidad de la población se le asocia un valor de la variable objetivo y , de modo que existe el vector de observaciones $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^t$. Este vector se trata matemáticamente como la realización de un vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$.

El *objetivo* es estimar una combinación lineal de y_1, \dots, y_N , $\mathbf{a}^t \mathbf{y}$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^t$ es un vector de N constantes. Por ejemplo,

- Si $\mathbf{a}_i = 1 \forall i$, entonces $\mathbf{a}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N y_i = \text{total poblacional}$,
- Si $\mathbf{a}_i = \frac{1}{N} \forall i$, entonces $\mathbf{a}^t \mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \text{media poblacional}$.

De la población se selecciona una muestra, $s \subset \Omega$, de $n \leq N$ unidades. Sea $r = \Omega - s$ el conjunto de unidades que no han sido seleccionadas en la muestra. Sin pérdida de generalidad, se puede reenumerar la población y escribir $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_s^t, \mathbf{y}_r^t)^t$, donde

- \mathbf{y}_s es el vector de n unidades observadas
- \mathbf{y}_r es el vector de $N - n$ unidades no observadas

Análogamente, se escribe $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_s^t, \mathbf{a}_r^t)^t$ y $\mathbf{a}^t \mathbf{y} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{y}_r$, que es la realización de $\mathbf{a}^t \mathbf{Y} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r$. Obsérvese que el problema de estimar $\mathbf{a}^t \mathbf{y}$ es equivalente al problema de predecir el valor $\mathbf{a}_r^t \mathbf{y}_r$ de la variable aleatoria no observada $\mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r$.

Definición 1.1.1. Un *estimador lineal* de $\theta = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$ es $\hat{\theta} = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s$, donde $\mathbf{g}_s = (g_1, \dots, g_n)^t$ es un vector de n coeficientes.

Definición 1.1.2. El *error de estimación* de un estimador $\hat{\theta} = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s$ es $\hat{\theta} - \theta = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s - \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$.

Observación 1.1.3. *El error de estimación puede escribirse en términos de las unidades observadas y no observadas de la siguiente forma:*

$$\widehat{\theta} - \theta = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s - \mathbf{a}^t \mathbf{Y} = (\mathbf{g}_s^t - \mathbf{a}_s^t) \mathbf{Y}_s - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r = \boldsymbol{\gamma}^t \mathbf{Y}_s - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r, \quad \text{con } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g}_s - \mathbf{a}_s.$$

Por tanto,

- *El primer término depende sólo de las unidades en la muestra s , y su valor se conoce después de observar la muestra.*
- *El segundo término depende de las unidades no muestrales y debe ser predicho.*
- *Un estimador ideal verificará $0 = \widehat{\theta} - \theta = \boldsymbol{\gamma}^t \mathbf{Y}_s - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r$. Por tanto, usar $\mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s$ para estimar $\mathbf{a}^t \mathbf{Y}$ es equivalente a usar $\boldsymbol{\gamma}^t \mathbf{Y}_s$ para predecir $\mathbf{a}_r^t \mathbf{Y}_r$. Con lo cual, encontrar un buen “ \mathbf{g}_s ” es equivalente a encontrar un buen “ $\boldsymbol{\gamma}$ ”.*

En este apartado se introduce el problema de predicción bajo el modelo lineal general M :

$$E_M[\mathbf{Y}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \quad V_M[\mathbf{Y}] = \mathbf{V},$$

donde $\mathbf{X}_{N \times p}$ es la matriz de las variables auxiliares, $\boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$ es el vector de parámetros desconocidos y $\mathbf{V}_{N \times N}$ es una matriz de covarianzas conocida y *definida positiva*. Se supone que los valores de las variables auxiliares son conocidos en todas las unidades de la población; es decir $\mathbf{X}_{N \times p}$ es conocida.

Reordenando los elementos de la población se puede escribir

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s \\ \mathbf{X}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ss} & \mathbf{V}_{sr} \\ \mathbf{V}_{rs} & \mathbf{V}_{rr} \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{X}_s es $n \times p$, \mathbf{X}_r es $(N-n) \times p$, \mathbf{V}_{ss} es $n \times n$, \mathbf{V}_{rr} es $(N-n) \times (N-n)$, \mathbf{V}_{sr} es $n \times (N-n)$ y $\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_{sr}^t$. Se supone además que \mathbf{V}_{ss} es definida positiva.

Definición 1.1.4. El estimador $\widehat{\theta}$ es *insesgado para θ bajo el modelo M* si $E_M[\widehat{\theta} - \theta] = 0$. (también se dice: **PREDICTIVAMENTE INSESGADO** o insesgado respecto de la distribución del modelo). Obsérvese que escribir $E_M[\widehat{\theta}] = \theta$ es incorrecto, ya que θ es aleatorio.

Definición 1.1.5. La varianza del error (varianza de predicción) de $\widehat{\theta}$ bajo M es $E_M[(\widehat{\theta} - \theta)^2]$.

A continuación se enuncia el Teorema General de Predicción. Su demostración se puede ver en Vaillant et al. (2000), p. 29. También se presentan otros resultados enunciados, pero no demostrados, en Valliant et al. (2000).

Teorema 1.1.6. De entre los estimadores lineales y predictivamente insesgados $\widehat{\theta} = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s$ de $\theta = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$, la varianza del error se minimiza en

$$\widehat{\theta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \left[\mathbf{X}_r \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} (\mathbf{Y}_s - \mathbf{X}_s \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \right], \quad (1.1)$$

donde $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s$. La varianza del error de $\hat{\theta}_{opt}$ es

$$\begin{aligned} V_M[\hat{\theta}_{opt} - \theta] &= \mathbf{a}_r^t (\mathbf{V}_{rr} - \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{V}_{sr}) \mathbf{a}_r \\ &+ \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r - \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s) (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} (\mathbf{X}_r - \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^t \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

Corolario 1.1.7. El estimador $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s$ minimiza la suma ponderada de cuadrados residuales $SSE = (\mathbf{Y}_s - \mathbf{X}_s \beta)^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} (\mathbf{Y}_s - \mathbf{X}_s \beta)$.

Demostración: Se verifica que

$$SSE = \mathbf{Y}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s + \beta^t \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \beta - 2\beta^t \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s.$$

Entonces

$$0 = \frac{\partial SSE}{\partial \beta} = 2\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \hat{\beta} - 2\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s \iff \hat{\beta} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s.$$

□

Observación 1.1.8. Conviene hacer las siguientes observaciones:

1. Las ecuaciones $\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \hat{\beta} = \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s$ se denominan ECUACIONES NORMALES. Son p ecuaciones con p incógnitas β_1, \dots, β_p , donde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$.
2. El estimador de β , $\hat{\beta}$, recibe el nombre de ESTIMADOR MÍNIMO-CUADRÁTICO.
3. Si $\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s$ es singular, se sustituye $(\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1}$ por $(\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^-$ en la expresión del estimador; es decir, se usan inversas generalizadas.

Corolario 1.1.9. Si $\mathbf{V}_{rs} = 0$, entonces el predictor BLU y la varianza del error son

$$\hat{\theta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \hat{\beta}, \quad V_M(\hat{\theta}_{opt} - \theta) = \mathbf{a}_r^t (\mathbf{V}_{rr} + \mathbf{X}_r \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}_r^t) \mathbf{a}_r.$$

Demostración: Inmediata.

□

Observación 1.1.10. Si $\mathbf{V}_{rs} = 0$, entonces $\hat{\theta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \hat{\mathbf{Y}}_r$, donde $\hat{\mathbf{Y}}_r = \mathbf{X}_r \hat{\beta}$.

Proposición 1.1.11. De entre todos los estimadores lineales y predictivamente insesgados $\hat{\theta}$ de θ , la varianza del estimador se minimiza en $\hat{\theta}^\circ = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \hat{\beta}$, donde $\hat{\beta} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s$. La varianza del estimador es

$$V_M[\hat{\theta}^\circ] = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{a}, \quad \text{con } \mathbf{A}_s = \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s.$$

Demostración: Sea $\hat{\theta} = \mathbf{g}_s^t \mathbf{Y}_s$ un estimador lineal de $\theta = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$. La varianza de $\hat{\theta}$ es $V_M[\hat{\theta}] = \mathbf{g}_s^t \mathbf{V}_{ss} \mathbf{g}_s$. Como $\hat{\theta}$ es predictivamente insesgado, verifica

$$0 = E_M [\hat{\theta} - \theta] = \mathbf{g}_s^t \mathbf{X}_s \boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}^t \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{g}_s^t \mathbf{X}_s - \mathbf{a}^t \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}.$$

La función Lagrangiana a minimizar es

$$L = \mathbf{g}_s^t \mathbf{V}_{ss} \mathbf{g}_s + 2(\mathbf{g}_s^t \mathbf{X}_s - \mathbf{a}^t \mathbf{X}) \boldsymbol{\lambda}.$$

Se verifica que

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{g}_s} = 2\mathbf{V}_{ss} \mathbf{g}_s + 2\mathbf{X}_s \boldsymbol{\lambda}. \quad (1.2)$$

De (1.2) se deduce que $\mathbf{g}_s = -\mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \boldsymbol{\lambda}$. Premultiplicando (1.2) por $\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1}$, y teniendo en cuenta que $\mathbf{X}_s^t \mathbf{g}_s = \mathbf{X}^t \mathbf{a}$, se obtiene

$$0 = \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{V}_{ss} \mathbf{g}_s + \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}^t \mathbf{a} + \mathbf{A}_s \boldsymbol{\lambda}.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_s^\circ = \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{a}.$$

Sustituyendo en la expresiones de $\hat{\theta}$ y $V_M[\hat{\theta}]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^\circ &= \mathbf{g}_s^{\circ t} \mathbf{Y}_s = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{Y}_s = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \\ V_M[\hat{\theta}^\circ] &= \mathbf{g}_s^{\circ t} \mathbf{V}_{ss} \mathbf{g}_s^\circ = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{V}_{ss} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{a} = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{a}. \end{aligned}$$

□

Observación 1.1.12. Conviene observar que:

1. El estimador $\hat{\theta}_{opt}$ se puede escribir de la siguiente forma

$$\hat{\theta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{a}_r^t \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} (\mathbf{Y}_s - \mathbf{X}_s \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \hat{\mathbf{Y}}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{e}_s.$$

Por tanto $\hat{\theta}_{opt}$ usa las unidades muestrales para reconstruir la “parte muestral” del parámetro $\theta = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$. Los valores de y de las unidades no muestrales los predice $\hat{\mathbf{Y}}_r$ y los usa para reconstruir la parte no muestral del parámetro. Finalmente usa los residuos muestrales $\mathbf{e}_s = \mathbf{Y}_s - \mathbf{X}_s \hat{\boldsymbol{\beta}}$ para corregir el sesgo y conseguir la insesgidez predictiva.

2. El estimador $\hat{\theta}^\circ = \mathbf{a}^t \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{a}^t \hat{\mathbf{Y}}$, se olvida de los valores muestrales observados y no corrige el sesgo predictivo. Reconstruye el parámetro usando solamente las predicciones de los valores \mathbf{Y} .

Observación 1.1.13. Supóngase que $\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{0}$. Si el parámetro de interés es $Y_i = \boldsymbol{\eta}^t \mathbf{Y}$, con $\boldsymbol{\eta} = (0, \dots, 0, 1^{(i)}, 0, \dots, 0)$, el estimador BLU es

$$\hat{Y}_i = \begin{cases} Y_i & \text{si } i \in s \\ \mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{Y}_i & \text{si } i \in r \end{cases}$$

donde \mathbf{x}_i es la fila i de la matrix \mathbf{X} . Para cualquier otro parámetro $\theta = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}$, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{opt} &= \mathbf{a}_s^t \mathbf{Y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i \in s} a_i Y_i + \sum_{i \in r} a_i \mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i \in s} a_i Y_i + \sum_{i \in r} a_i \tilde{Y}_i, \\ \hat{\theta}_{opt}^\circ &= \mathbf{a}^t \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i \in s \cup r} a_i \mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i \in s \cup r} a_i \tilde{Y}_i.\end{aligned}$$

El estimador $\hat{\theta}_{opt}$ recibe el nombre de *predictivo*, y el estimador $\hat{\theta}_{opt}^\circ$ se llama *proyectivo*.

1.2. Modelos lineales con efectos aleatorios

1.2.1. Introducción

Los modelos lineales (ML) tratan de modelizar la relación entre una variable dependiente (o de respuesta) y y un conjunto de variables \mathbf{x} . Estos modelos asumen básicamente tres hipótesis: linealidad, normalidad e independencia. La primera hipótesis afirma que la media de la variable y es una función lineal de las componentes de \mathbf{x} . La segunda hipótesis especifica una distribución normal multivariante para el vector de valores observados de y . Finalmente, también se asume la hipótesis de independencia estocástica de las observaciones de y . Los ML constituyen una materia clásica dentro de la estadística y se pueden mencionar muchos libros sobre el tema. Sin ánimo de ser exhaustivos, se pueden citar los siguientes textos: Graybill (1976), Seber (1977), Arnold (1981), Hocking (1985), Searle (1971) and Rencher (2000).

Los ML asumen que las mediciones de la variable objetivo en las unidades extraídas de la población son independientes. Los modelos lineales mixtos (LMM) tienen una estructura jerárquica y multinivel más compleja. Las observaciones de distintos niveles o clusters son independientes, pero las observaciones dentro de un mismo cluster son dependientes ya que comparten un efecto aleatorio asociado a la subpoblación. En el contexto de los modelos mixtos se suele hablar de dos tipos de variabilidad: *entre* e *intra* clusters. La modelización de estos tipos de variabilidad es lo que da tanta flexibilidad (aplicabilidad) a los LMM.

Los LMMs manejan conjuntos de datos en los que las observaciones no son independientes. Estos modelos permiten modelizar correlaciones entre efectos aleatorios, lo cual los hace muy aptos para el tratamiento estadístico de datos en situaciones muy variadas:

Efectos aleatorios, donde el conjunto de valores de una variable explicativa categórica es tan grande (con respecto al tamaño muestral) que no es posible estimar con precisión un efecto para cada categoría. Si este es el caso, la variable explicativa no puede introducirse en un modelo lineal. Los LMM resuelven este problema dándole el carácter de aleatorio a la variable categórica, estimando su varianza y prediciendo su valor. Mediante los efectos aleatorios, el investigador puede hacer inferencias sobre poblaciones con una estructura más compleja que en el caso de usar ML.

Efectos jerárquicos, donde las variables se miden en más de un nivel; por ejemplo territorios

anidados para problemas de estimación en áreas pequeñas. Esta es una propiedad muy interesante de los LMM.

Medidas repetidas y correlaciones temporales, donde las observaciones están correladas en lugar de ser independientes; por ejemplos en estudios longitudinales, datos de series temporales o diseños estadísticos con datos emparejados.

Correlaciones espaciales, donde la correlación entre clusters es significativa; por ejemplo la correlación entre dominios próximos puede dar una información adicional que permita mejorar las predicciones.

Estimación en áreas pequeñas, donde la flexibilidad para la combinar eficientemente las distintas fuentes de información y modelizar adecuadamente las diferentes fuentes de error es de gran ayuda. Los LMM incorporan un efecto aleatorio asociado a las áreas para explicar la variabilidad de los datos (entre ellas) que no es recogida por la parte fija del modelo.

Algunos libros sobre LMM son: Searle, Casella and McCulloch (1992), Longford (1995), Goldstein (2003), Demidenko (2004) and Jiang (2007).

En lo relativo al ajuste de los LMM hay tres métodos básicos: máxima verosimilitud, máxima verosimilitud residual y método (de los momentos) Henderson 3. Estos métodos se describen en las secciones 1.3–1.5. En lo que resta de sección se introduce el LMM básico y se abordan los problemas de estimar el parámetro de regresión y de predecir los efectos aleatorios cuando las componentes de la varianza son conocidas. También se introduce un LMM particular muy importante: el LMM ANOVA.

1.2.2. Modelos lineales mixtos con varianzas conocidas

Considérese el modelo

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}, \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{y}_{n \times 1}$ es el vector de observaciones, $\boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$ es el vector de efectos fijos, $\mathbf{u}_{q \times 1}$ es el vector de efectos aleatorios, $\mathbf{X}_{n \times p}$ y $\mathbf{Z}_{n \times q}$ son las matrices de incidencia correspondientes y $\mathbf{e}_{n \times 1}$ es el vector de perturbaciones aleatorias. Se supone que los efectos aleatorios y las perturbaciones son independientes y normales con medias nulas y matrices de varianza-covarianza conocidas,

$$V[\mathbf{u}] = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^t] = \boldsymbol{\Sigma}_u \quad \text{y} \quad V[\mathbf{e}] = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^t] = \boldsymbol{\Sigma}_e,$$

que dependen de unos parámetros $\boldsymbol{\theta}$ llamados componentes de la varianza. De (1.3) se obtiene

$$\mathbf{V} = V[\mathbf{y}] = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}_u\mathbf{Z}^t + \boldsymbol{\Sigma}_e.$$

Se supone que \mathbf{V} es no singular.

Estimación mínimo cuadrática de β

Suponiendo que las componentes de la varianza en el modelo (1.3) son conocidas. El término aleatorio es $\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$, con varianza $V[\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}] = \mathbf{Z}\Sigma_u\mathbf{Z}^t + \Sigma_e = \mathbf{V}$. Se transforma el modelo para tener términos aleatorios incorrelados con varianza común igual a 1; es decir,

$$\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{X}\beta + \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}).$$

Sea $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{y}$, $\mathbf{e}^\circ = \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e})$ y $\mathbf{X}^\circ = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{X}$, de modo que

$$\mathbf{y}^\circ = \mathbf{X}^\circ\beta + \mathbf{e}^\circ$$

con $V[\mathbf{e}^\circ] = \mathbf{V}^{-1/2}V[\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}]\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{I}_n$. Por tanto, se puede aplicar aquí el método de los mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta}(\mathbf{e}^{\circ t}\mathbf{e}^\circ).$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\circ t}\mathbf{e}^\circ &= (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{y} - \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{X}\beta)^t (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{y} - \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{X}\beta) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) = \mathbf{y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} - 2\beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} + \beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \beta. \end{aligned}$$

Tomando derivadas, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{e}^{\circ t}\mathbf{e}^\circ}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \beta.$$

Las ecuaciones normales resultantes de aplicar el método de los mínimos cuadrados son

$$\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$$

con solución

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y},$$

siempre y cuando $\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}$ y \mathbf{V} sean invertibles.

Se comprueba que $\hat{\beta}$ es el *estimador de máxima verosimilitud* (EMV) de β ; es decir,

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmax}_{\beta} \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \right).$$

Predicción lineal insesgada óptima de una combinación lineal de efectos

Considérese el modelo (1.3). Sea $\tau = \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r \beta + \mathbf{Z}_r \mathbf{u})$, donde \mathbf{a}_r ($k \times 1$), \mathbf{X}_r ($k \times p$) y \mathbf{Z}_r ($k \times q$) son vectores y matrices conocidas. Sea $\hat{\tau} = \mathbf{g}^t \mathbf{y} + g_0$ un estimador (predictor) lineal de τ , donde \mathbf{g} ($n \times 1$) y g_0 (1×1) deben determinarse de modo que:

1. $\hat{\tau}$ sea insesgado. Para lo cual debe verificarse que

$$E[\tau] = \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \boldsymbol{\beta} \quad \text{y} \quad E[\hat{\tau}] = \mathbf{g}^t \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + g_0$$

coincidan. Así pues, $g_0 = 0$ y $\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r = \mathbf{g}^t \mathbf{X}$.

2. $\hat{\tau}$ minimice el error de predicción

$$\begin{aligned} E[(\hat{\tau} - \tau)^2] &= V(\hat{\tau} - \tau) = V(\mathbf{g}^t \mathbf{y} - \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \boldsymbol{\beta} - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{u}) = V(\mathbf{g}^t \mathbf{y} - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{g}^t \mathbf{V} \mathbf{g} + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r - 2\mathbf{g}^t \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{Z} \boldsymbol{\Sigma}_u$.

En definitiva se plantea el problema de

$$\text{minimizar } V(\hat{\tau} - \tau), \quad \text{sujeto a } \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r = \mathbf{g}^t \mathbf{X}.$$

Puesto que $\mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r$ no depende \mathbf{g} , la función Lagrangiana es

$$L(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g}^t \mathbf{V} \mathbf{g} - 2\mathbf{g}^t \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + 2(\mathbf{g}^t \mathbf{X} - \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r) \boldsymbol{\lambda}.$$

Derivando parcialmente respecto de \mathbf{g} y $\boldsymbol{\lambda}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}} = 2\mathbf{V} \mathbf{g} - 2\mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r - 2\mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + 2\mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} \iff \mathbf{V} \mathbf{g} + \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\ 0 &= \frac{\partial L(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 2\mathbf{g}^t \mathbf{X} - 2\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \iff \mathbf{g}^t \mathbf{X} = \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \end{aligned}$$

Matricialmente, se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\ \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ I \end{bmatrix} (C - B^t A^{-1} B)^{-1} [-B^t A^{-1}, I],$$

con $A = \mathbf{V}$, $B = \mathbf{X}$, $C = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \\ I \end{bmatrix} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} [-\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}, I] \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} & \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \\ (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} & -(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\ \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{g} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r,$$

El predictor lineal insesgado óptimo (BLUP) de τ es

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \mathbf{g}^t \mathbf{y} = \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \{ (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \} + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{C}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \\ &\quad - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{C}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \{ (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \} \\ &= \mathbf{a}_r^t \left[\mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}_r \mathbf{C}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (1.4)$$

es el estimador mínimo cuadrático de $\boldsymbol{\beta}$.

Predicción lineal insesgada óptima de \mathbf{u}

Puesto que $\mathbf{C} = \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{Z} \boldsymbol{\Sigma}_u$, haciendo $\mathbf{X}_r = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_r = \mathbf{1}_{(i)} = (0, \dots, 0, 1^{(i)}, 0, \dots, 0)^t$ y $\mathbf{Z}_r = \mathbf{I}$ se obtiene

$$\hat{u}_i = \mathbf{1}_{(i)}^t \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad i = 1, \dots, q,$$

o matricialmente

$$\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (1.5)$$

que es la expresión final del predictor lineal insesgado óptimo (BLUP) de \mathbf{u} .

El predictor (1.5) tiene las siguientes propiedades:

- “óptimo” en el sentido de minimizar $E[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \mathbf{A} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})]$ para cualquier matriz \mathbf{A} definida positiva.
- Lineal en \mathbf{y} .
- Insesgado: $E[\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}] = \mathbf{0}$.

Para más detalles consúltese los libros de Searle (1971) y Searle et al. (1992).

1.2.3. Modelos lineales mixtos de tipo ANOVA

Un caso particular importante del modelo (1.3) es el modelo de tipo ANOVA. Su estructura es

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{Z}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{e}, \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ es el vector de observaciones de la variable respuesta, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^t$ es el vector de efectos fijos, y $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{iq_i})^t$ es el vector de efectos de los q_i niveles del factor aleatorio i -ésimo. Así se llama factor aleatorio i -ésimo al propio \mathbf{u}_i . Por último, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^t$

es el vector de errores aleatorios, y \mathbf{X} , $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_m$ son las matrices de diseño, de órdenes $n \times p$, $n \times q_1, \dots, n \times q_m$ respectivamente.

El modelo (1.6) puede escribirse en la forma (1.3) tomando

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_m] \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^t, \dots, \mathbf{u}_m^t]^t, \quad q = \sum_{i=1}^m q_i.$$

Las siguientes hipótesis aseguran la estimabilidad de los parámetros del modelo:

(F1) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$, \mathbf{e} son independientes, y además

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{u}_i \sim \mathcal{N}_{q_i}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \Omega_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

con \mathbf{V}_0 y Ω_i , $i = 1, \dots, m$, conocidas.

(F2) $\text{rg}(\mathbf{X}) = p$.

La hipótesis (F2) siempre se puede verificar efectuando una reparametrización adecuada del modelo.

A continuación, se exige que el número de observaciones sea al menos el número de parámetros.

(F3) $n \geq p + m + 1$.

La hipótesis (F4) garantiza que ningún efecto fijo se confunda con los efectos aleatorios de ningún factor.

(F4) $\text{rg}(\mathbf{X} : \mathbf{Z}_i) > p$, $i = 1, \dots, m$.

La hipótesis (F5) asegura que los efectos aleatorios de un factor no se confundan con los efectos de los demás factores. Sean $\mathbf{V}_i = \mathbf{Z}_i \Omega_i \mathbf{Z}_i^t$, $i = 1, \dots, m$.

(F5) $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m$ son linealmente independientes; es decir,

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \mathbf{V}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Por último, la hipótesis (F6) determina que \mathbf{Z}_i , $i = 1, \dots, m$, son matrices de diseño estándar.

(F6) \mathbf{Z}_i contiene solamente ceros y unos, de manera que hay exactamente un 1 en cada fila, y al menos un 1 en cada columna, $i = 1, \dots, m$.

Esta hipótesis implica que $\mathbf{Z}_i^t \mathbf{Z}_i$ es una matriz diagonal no singular de orden $q_i \times q_i$, que $\text{rg}(\mathbf{Z}_i) = q_i$, y que $q_i \leq n$, $i = 1, \dots, m$.

De las hipótesis anteriores, se deduce que

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}), \quad \text{con} \quad \mathbf{V} = \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \mathbf{V}_i.$$

Sea $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)^t$. Cuando convenga, se hará referencia a $\boldsymbol{\sigma}$ en \mathbf{V} de la forma $\mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma})$. Sea $M = p + m + 1$ y sea $\boldsymbol{\theta}^t = (\boldsymbol{\beta}^t, \boldsymbol{\sigma}^t)$ el vector de parámetros desconocidos. El espacio paramétrico es

$$\Theta = \{\boldsymbol{\theta}^t = (\boldsymbol{\beta}^t, \boldsymbol{\sigma}^t); \boldsymbol{\beta} \in R^p; \sigma_0^2 > 0; \sigma_i^2 \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

La verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ para un vector de observaciones \mathbf{y} dado se denota, igual que la función de densidad conjunta de \mathbf{y} dado $\boldsymbol{\theta}$, mediante

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

1.3. Estimación máximo verosímil

1.3.1. Descripción del método

Considérese el modelo (1.6). El estimador máximo verosímil $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p, \hat{\sigma}_0^2, \dots, \hat{\sigma}_m^2)^t$ de $\boldsymbol{\theta}$ es el vector que satisface

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}).$$

Sea $l(\boldsymbol{\theta}) = \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$, se denota el vector de puntuaciones por $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = (S_{\beta}, S_{\sigma_0^2}, \dots, S_{\sigma_m^2})^t$, donde

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_0^2}, \dots, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_m^2} \right)^t.$$

Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ existe en el interior de Θ , entonces es solución de las ecuaciones de verosimilitud, que son las ecuaciones que resultan de igualar las componentes del vector de puntuaciones a cero. Derivando la logverosimilitud, se obtienen las componentes de dicho vector para el modelo (1.6) introducido en la sección anterior,

$$S_{\beta} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (1.7)$$

$$S_{\sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |\mathbf{V}|}{\partial \sigma_i^2} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \frac{\partial \mathbf{V}^{-1}}{\partial \sigma_i^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Se sabe que

$$\frac{\partial \log |\mathbf{V}|}{\partial \sigma_i^2} = \operatorname{tr} \left\{ \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i^2} \right\}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^{-1}}{\partial \sigma_i^2} = -\mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma_i^2} \mathbf{V}^{-1}. \quad (1.9)$$

Como además $\partial \mathbf{V} / \partial \sigma_i^2 = \mathbf{V}_i$, se tiene

$$S_{\sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \} + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (1.10)$$

Igualando (1.7) y (1.10) a cero, se obtienen las ecuaciones de verosimilitud

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}, \\ \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i\} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}), \quad i = 0, 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Nótese que en general no existen expresiones explícitas para los estimadores máximo-verosímiles. Los métodos de Newton-Raphson y Fisher-Scoring los calculan de forma iterativa, partiendo de un valor inicial $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$. En cada iteración, el método de Newton-Raphson actualiza el estimador de $\boldsymbol{\theta}$ mediante la fórmula

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$$

donde $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ es el vector de puntuaciones y $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ es la matriz Hessiana de $l(\boldsymbol{\theta})$, ambos evaluados en el estimador proporcionado en la iteración anterior $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Los elementos de la matriz Hessiana se obtienen derivando de nuevo, utilizando (1.9) y teniendo en cuenta que la derivada de una traza es la traza de la derivada,

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^t} = -\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^2 \partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma_i^2} = -\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}), \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_j^2 \partial \sigma_i^2} = \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i\} - (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}), \quad (1.13)$$

para $i, j = 0, 1, \dots, m$. El cálculo del segundo sumando en (1.13) se obtiene haciendo $Q = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$, donde $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1}$; entonces $\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}$ y $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \sigma_j^2} = \mathbf{V} \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_j + \mathbf{V}_j \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}$. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \sigma_j^2} &= -\frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \sigma_j^2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^t (\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1}) [\mathbf{V} \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}_j + \mathbf{V}_j \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{V}] (\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1}) \mathbf{y} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} = -\mathbf{y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}\end{aligned}$$

El método Fisher-Scoring sustituye la matriz Hessiana por su esperanza cambiada de signo, es decir, por la matriz de información de Fisher. La fórmula de actualización es

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}),$$

siendo $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ la matriz de información de Fisher definida por

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = -E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})],$$

y evaluada en $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Tomando esperanzas en (1.11)–(1.13), cambiando de signo y usando el resultado

$$E[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{A} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})] = \text{tr}\{\mathbf{A} \mathbf{V}\},$$

para cualquier matriz no aleatoria \mathbf{A} , se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\beta\beta} &= \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_{\sigma_i^2 \beta} &= \mathbf{F}_{\beta \sigma_i^2} = \mathbf{0}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ F_{\sigma_j^2 \sigma_i^2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} & \cdots & F_{\sigma_0^2 \sigma_m^2} \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_1^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} & \cdots & F_{\sigma_1^2 \sigma_m^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_m^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_m^2 \sigma_1^2} & \cdots & F_{\sigma_m^2 \sigma_m^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \end{pmatrix}.$$

La estructura por bloques de la matriz $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ permite separar la ecuación de actualización en dos ecuaciones

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}), \quad \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}).$$

Además

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}) (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^{(k)}) = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}) \mathbf{y}.$$

Las propiedades asintóticas de este estimador pueden verse en Miller (1977).

1.3.2. Máxima verosimilitud con parametrización alternativa

Considérese en el modelo (1.6), la siguiente reparametrización

$$\sigma^2 = \sigma_0^2, \quad \varphi_i = \sigma_i^2 / \sigma_0^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sean $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma^2, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\boldsymbol{\theta}^t = (\boldsymbol{\beta}^t, \boldsymbol{\sigma}^t)$ y $\mathbf{V} = \sigma^2 (\mathbf{V}_0 + \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathbf{V}_i) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$. La verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, para un vector de observaciones dado, es

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

La función de logverosimilitud es

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}).$$

Las componentes del vector de puntuaciones son

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\beta &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \\ S_{\sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \\ S_{\varphi_i} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i) + \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

De las igualdades $\mathbf{S}_\beta = \mathbf{0}$ y $S_{\sigma^2} = 0$ se obtiene

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Las derivadas parciales segundas de la función de log verosimilitud son

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\beta\beta} &= -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}, & \mathbf{H}_{\beta\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \\ \mathbf{H}_{\beta\varphi_i} &= -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), & \mathbf{H}_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \\ \mathbf{H}_{\sigma^2\varphi_i} &= -\frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \\ \mathbf{H}_{\varphi_i\varphi_j} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_j \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i) - \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_j \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Tomando esperanzas y cambiando el signo se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\beta\beta} &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}, & \mathbf{F}_{\beta\sigma^2} &= \mathbf{0}, & \mathbf{F}_{\beta\varphi_i} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{n}{2\sigma^4}, & \mathbf{F}_{\sigma^2\varphi_i} &= \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i), & \mathbf{F}_{\varphi_i\varphi_j} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_j \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{V}_i). \end{aligned}$$

1.4. Estimación máximo verosímil residual

1.4.1. Descripción del método

Considérese el modelo (1.6). La estimación máximo verosímil residual (REML) trata de reducir el sesgo que tienen los estimadores de máxima verosimilitud de las componentes de la varianza. Para ello, se transforma el vector \mathbf{y} en dos vectores independientes $\mathbf{y}_1^* = \mathbf{K}_1 \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2^* = \mathbf{K}_2 \mathbf{y}$, donde se desea que la distribución de \mathbf{y}_1^* no dependa del efecto fijo $\boldsymbol{\beta}$. Así se busca una matriz \mathbf{K}_1 que satisfaga $\mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}$; y en consecuencia

$$E[\mathbf{y}_1^*] = E[\mathbf{K}_1 \mathbf{y}] = E[\mathbf{K}_1 (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{Z}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{e})] = \mathbf{0}.$$

El vector \mathbf{y}_2^* se selecciona de modo que sea independiente de \mathbf{y}_1^* . Por tanto debe satisfacer que

$$E[\mathbf{y}_1^* \mathbf{y}_2^{*t}] = \mathbf{K}_1 E[\mathbf{y} \mathbf{y}^t] \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_2^t = \mathbf{0}.$$

Las filas \mathbf{k}^t de la matriz \mathbf{K}_1 son *contrastos*, ya que verifican $\mathbf{k}^t \mathbf{X} = \mathbf{0}$. El número máximo de contrastes linealmente independientes es $n - \text{rg}(\mathbf{X})$. Supóngase que \mathbf{X} es de rango máximo p , entonces el rango de \mathbf{K}_1 será $n - p$. La matriz \mathbf{K}_2 se elige de rango p .

Para proponer una matriz \mathbf{K}_1 se puede considerar el modelo sin efectos aleatorios

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{con } \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon). \quad (1.14)$$

El estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\beta}$ en (1.14) es

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}.$$

Se define el vector transformado (residuo normalizado)

$$\mathbf{y}_1^* = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}) = \mathbf{K}_1 \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}$. Además se elige $\mathbf{K}_2 = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$.

Dado que $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^t$, se verifica que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}_1^*] &= E[\mathbf{K}_1 \mathbf{y}] = (\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}) \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \\ E[\mathbf{y}_2^*] &= E[\mathbf{K}_2 \mathbf{y}] = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \\ V[\mathbf{y}_1^*] &= E[\mathbf{y}_1^* \mathbf{y}_1^{*t}] = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_1, \\ V[\mathbf{y}_2^*] &= \mathbf{K}_2 \mathbf{V} \mathbf{K}_2^t = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \\ E[\mathbf{y}_1^* \mathbf{y}_2^{*t}] &= \mathbf{K}_1 E[\mathbf{y} \mathbf{y}^t] \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Puesto que el número máximo de columnas linealmente independientes en \mathbf{K}_1 es $n - rg(\mathbf{X})$, seleccionando $n - rg(\mathbf{X})$ de esas columnas se construye una submatriz \mathbf{K} de orden $n \times (n - rg(\mathbf{X}))$ que verifica $\mathbf{K}^t \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Se definen los vectores $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^t \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2^*$. Puesto que $rg(\mathbf{X}) = p$ se tiene que

$$\mathbf{y}_1 \sim \mathcal{N}_{n-p}(\mathbf{0}, \mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}), \quad \mathbf{y}_2 \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}) \quad \text{son independientes.}$$

Se define $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)^t$ y $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t$. La función de logverosimilitud de \mathbf{y}_1 es

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}_1,$$

donde $\mathbf{V} = \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \mathbf{V}_i$ e $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^t \mathbf{y}$. Derivando parcialmente respecto de σ_i^2 se obtiene

$$\begin{aligned} S_{\sigma_i^2} &= \frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_i^2} \{ \log |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}| \} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_i^2} \{ \mathbf{y}_1^t \mathbf{K} (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{y} \} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left((\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{V}_i \mathbf{K} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t \mathbf{K} (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{K}^t \mathbf{V}_i \mathbf{K}) (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{y} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{V}_i) + \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t \mathbf{P} \mathbf{V}_i \mathbf{P} \mathbf{y}_1. \end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma_j^2} = \frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t]}{\partial \sigma_j^2} = -\mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{V}_j \mathbf{K} (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t = -\mathbf{P} \mathbf{V}_j \mathbf{P},$$

las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i) - \mathbf{y}^t \mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i\mathbf{P}\mathbf{y}.$$

Tomando esperanzas y cambiando de signo se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher. Para calcularlos se usan las relaciones $\mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{P} = \mathbf{P}$, y el siguiente resultado

$$\text{si } E[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\mu} \text{ y } V[\mathbf{y}] = \mathbf{V}, \text{ entonces } E[\mathbf{y}^t \mathbf{A}\mathbf{y}] = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{V}) + \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}. \quad (1.15)$$

Los elementos de la matriz de información de Fisher son

$$\begin{aligned} F_{\sigma_j^2 \sigma_i^2} &= -E \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} \right] = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i) + \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i\mathbf{P}\mathbf{V}) + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{X}^t \mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i\mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i) + \text{tr}(\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i\mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_j\mathbf{P}\mathbf{V}_i). \end{aligned}$$

Para el cálculo de los estimadores máximo verosímiles residuales, el método Fisher-Scoring usa la fórmula de actualización

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}),$$

siendo $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})$ la matriz de información de Fisher evaluada en $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$. Conviene observar que $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma})$ es una matriz $(m+1) \times (m+1)$, mientras que la matriz de información de Fisher necesaria para el cálculo de estimadores de máxima verosimilitud, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$, es $(p+m+1) \times (p+m+1)$.

La salida del algoritmo Fisher-Scoring proporciona la estimación de $\boldsymbol{\sigma}$. Si se sustituye la citada estimación en la función de verosimilitud de \mathbf{y}_2 , se le da el carácter de constante y se maximiza en $\boldsymbol{\beta}$, se obtiene el estimador REML de $\boldsymbol{\beta}$. La función de logverosimilitud de \mathbf{y}_2 es

$$l(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}| - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Derivando parcialmente respecto de $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a cero, se obtiene

$$0 = \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Con lo cual

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{REML} = (\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{y}_2 = (\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y}.$$

donde $\hat{\mathbf{V}} = \sum_{i=0}^m \hat{\sigma}_i^2 \mathbf{V}_i$ y $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_m^2$ son los estimadores REML de $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$.

Derivando nuevamente respecto de $\boldsymbol{\beta}$ se obtiene

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} = -E [\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^t] = \mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X},$$

que coincide con el valor $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}$ obtenido en el procedimiento de estimación máximo verosímil.

El teorema 1.4.1 implica que el método de la máxima verosimilitud residual no depende de la matriz \mathbf{K} (con $\mathbf{K}^t \mathbf{X} = \mathbf{0}$) escogida.

Teorema 1.4.1. Sea \mathbf{K}^t una matriz $(n-r) \times n$ de rango máximo. Sea \mathbf{V} una matriz $n \times n$ simétrica y definida positiva. Sea \mathbf{X} una matriz $n \times p$ de rango $r \leq p$. Si $\mathbf{K}^t \mathbf{X} = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t = \mathbf{P}, \quad \text{con} \quad \mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}.$$

La demostración a este teorema puede encontrarse en el apéndice 11.4f de Searle et al. (1992)

1.4.2. Máxima verosimilitud residual con parametrización alternativa

Considérese en el modelo (1.6), la siguiente reparametrización

$$\sigma^2 = \sigma_0^2, \quad \varphi = \sigma_i^2 / \sigma_0^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sean $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma^2, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\boldsymbol{\theta}^t = (\boldsymbol{\beta}^t, \boldsymbol{\sigma}^t)$ y $\mathbf{V} = \sigma^2 (\mathbf{V}_0 + \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathbf{V}_i) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$. Para el método de la máxima verosimilitud residual, la presente parametrización da lugar a la logverosimilitud

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2}(n-p) \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$. Las componentes del vector de puntuaciones son

$$\begin{aligned} S_{\sigma^2} &= -\frac{n-p}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ S_{\varphi_i} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{V}_i) + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_i \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales segundas de la función de log verosimilitud son

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2 \sigma^2} &= \frac{n-p}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad H_{\sigma^2 \varphi_i} = -\frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_i \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\varphi_i \varphi_j} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{V}_j \mathbf{P} \mathbf{V}_i) - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_j \mathbf{P} \mathbf{V}_i \mathbf{P} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Tomando esperanzas, cambiando el signo y teniendo en cuenta que $\mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P} = \mathbf{P}$, se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher

$$F_{\sigma^2 \sigma^2} = -\frac{n-p}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^4} \text{tr}(\mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma}), \quad F_{\sigma^2 \varphi_i} = \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{V}_i), \quad F_{\varphi_i \varphi_j} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{V}_j \mathbf{P} \mathbf{V}_i).$$

Observación 1.4.2. De la ecuación $S_{\sigma^2} = 0$, se obtiene

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}. \quad (1.16)$$

Lo cual permitiría introducir un algoritmo que actualice σ^2 con (1.16) y $\boldsymbol{\varphi}$ con

$$\boldsymbol{\varphi}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^{(k)}).$$

Al igual que con la primera parametrización, el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ es

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{REML} = \left(\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y}.$$

Este tipo de reparametrización del modelo, facilita en gran medida su programación y por tanto se consigue un algoritmo más eficiente desde el punto de vista computacional.

1.5. El método 3 de Henderson

1.5.1. Descripción del método

En la sección 1.3 se puede ver que el método de máxima verosimilitud proporciona al mismo tiempo la estimación de los coeficientes del modelo $\boldsymbol{\beta}$ y de las componentes de la varianza $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$. En esta sección se presenta el *método de ajuste de constantes* para la estimación de las componentes de la varianza. Así $\boldsymbol{\beta}$ se estima por mínimos cuadrados, y los efectos aleatorios se predicen a partir de la teoría BLUP, reemplazando las componentes de la varianza por sus estimaciones aquí obtenidas. El predictor de \mathbf{u} obtenido se denomina entonces EBLUP (empirical BLUP). El método de ajuste de constantes es conocido también como *método 3 de Henderson* desde su introducción en Henderson (1953). Al tratarse de un método no paramétrico, bajo distribuciones distintas de la normal puede pensarse que se comportaría mejor que los otros dos métodos.

Considérese el modelo lineal mixto general, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$, donde se puede escribir de la forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{e}, \quad (1.17)$$

donde $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1})$, \mathbf{W} es una matriz simétrica, definida positiva y conocida. Se supone que $\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X}$ y $\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1$ son invertibles. La partición simplemente divide $\boldsymbol{\beta}$ en dos grupos de efectos $\boldsymbol{\beta}_1$ y $\boldsymbol{\beta}_2$, sin importar que los grupos representen efectos fijos o aleatorios. Este punto se considerará posteriormente.

Considérese la siguiente transformación del modelo

$$\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{y} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{e}.$$

El modelo (1.17) se puede expresar como

$$\mathbf{y}^\circ = \mathbf{X}_1^\circ \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2^\circ \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{e}^\circ, \quad (1.18)$$

donde $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{y}$, $\mathbf{X}_1^\circ = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2^\circ = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X}_2$ y $\mathbf{e}^\circ = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{e}$, con $\mathbf{e}^\circ \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$.

Si se ajusta el modelo (1.18) bajo el supuesto de que $\boldsymbol{\beta}_1$ y $\boldsymbol{\beta}_2$ sean efectos fijos, la suma total de cuadrados es

$$SST = \mathbf{y}^{\circ t} \mathbf{y}^\circ = \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y}. \quad (1.19)$$

La suma de cuadrados residual es

$$SSE(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \mathbf{y}^t \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (1.20)$$

donde $\mathbf{M} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}]^t \mathbf{W} [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}]$. La reducción en suma de cuadrados (suma de cuadrados debida a la regresión) es

$$SSR(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = SST - SSE(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}$.

Si se ajusta el submodelo

$$\mathbf{y}^\circ = \mathbf{X}_1^\circ \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{e}^\circ,$$

bajo la hipótesis de que $\boldsymbol{\beta}_1$ son efectos fijos, la suma residual de cuadrados es

$$SSE(\boldsymbol{\beta}_1) = \mathbf{y}^t \mathbf{M}_1 \mathbf{y}, \quad (1.21)$$

donde $\mathbf{P}_1 = [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^t \mathbf{W}]^t \mathbf{W} [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^t \mathbf{W}]$. La reducción en suma de cuadrados (suma de cuadrados debida a la regresión) es

$$SSR(\boldsymbol{\beta}_1) = SST - SSE(\boldsymbol{\beta}_1) = \mathbf{y}^t \mathbf{Q}_1 \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{W} \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^t \mathbf{W}$. La reducción en suma de cuadrados debido a la introducción de \mathbf{X}_2 en el modelo que tiene sólo \mathbf{X}_1 es

$$SSR(\boldsymbol{\beta}_2 | \boldsymbol{\beta}_1) = SSR(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) - SSR(\boldsymbol{\beta}_1) = SSE(\boldsymbol{\beta}_1) - SSE(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2).$$

El método 3 de Henderson consiste en calcular la esperanza de $SSR(\boldsymbol{\beta}_2 | \boldsymbol{\beta}_1)$ y de $SSR(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, y a partir de ahí obtener estimadores insesgados de las componentes de la varianza mediante corrección de sesgo. Nótese que todas las sumas de cuadrados son funciones cuadráticas de \mathbf{y} , donde se puede aplicar el resultado (1.15) para su simplificación. Para un modelo lineal general $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$, donde $\boldsymbol{\beta}$ puede contener efectos fijos o aleatorios, se tiene que $E[\mathbf{y}] = \mathbf{X}E[\boldsymbol{\beta}]$ y $V[\mathbf{y}] = \mathbf{X}V[\boldsymbol{\beta}]\mathbf{X}^t + \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1}$. Con lo cual aplicando (1.15), se obtiene

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y}] &= \text{tr}(\mathbf{Q} [\mathbf{X}V[\boldsymbol{\beta}]\mathbf{X}^t + \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1}]) + E[\boldsymbol{\beta}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta}]] \\ &= \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{X} V[\boldsymbol{\beta}] \mathbf{X}^t) + \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1}) + \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta}] E[\boldsymbol{\beta}^t] \mathbf{X}^t) \\ &= \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t] \mathbf{X}^t) + \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t]) + \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1}). \end{aligned}$$

La esperanza de la suma total de cuadrados que aparece en (1.19) es entonces

$$E[SST] = E[\mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y}] = \text{tr}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t]) + \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{I}_n) = \text{tr}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t]) + n\sigma_0^2 \quad (1.22)$$

La esperanza de la suma de cuadrados residuales que aparece en (1.20) es

$$E[SSE(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)] = E[\mathbf{y}^t \mathbf{M} \mathbf{y}] = \text{tr}(\mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} E[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t]) + \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{W}^{-1}).$$

Esta última expresión puede simplificarse teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} &= \mathbf{X}^t [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}]^t \mathbf{W} [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}] \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \\ &\quad - 2\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} + \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\mathbf{W}^{-1} &= [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{W}]^t\mathbf{W}[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{W}]\mathbf{W}^{-1} \\
&= [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{W}]^t[\mathbf{I}_n - \mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t] \\
&= \mathbf{I}_n - 2\mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t + \mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t \\
&= \mathbf{I}_n - \mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t,
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}$ es igual a la identidad, se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{W}^{-1}) &= \text{tr}(\mathbf{I}_n - \mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t) = n - \text{tr}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}) \\
&= n - p = n - \text{rg}(\mathbf{X}),
\end{aligned}$$

donde $\text{rg}(\mathbf{X})$ denota el rango de \mathbf{X} . Este resultado también se verifica en el caso $\text{rg}(\mathbf{X}) < p$. Por tanto

$$E[SSE(\beta_1, \beta_2)] = \sigma_0^2 [n - \text{rg}(\mathbf{X})] \quad (1.23)$$

y también de (1.22) y (1.23) se obtiene

$$E[SSR(\beta_1, \beta_2)] = E[SST] - E[SSE(\beta_1, \beta_2)] = \text{tr}(\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X}E[\beta\beta^t]) + \sigma_0^2 \text{rg}(\mathbf{X}).$$

En el modelo (1.17) se tiene que

$$\mathbf{X}^t\mathbf{W}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t \\ \mathbf{X}_2^t \end{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia

$$E[SSR(\beta_1, \beta_2)] = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \end{pmatrix} E[\beta\beta^t] \right\} + \sigma_0^2 \text{rg}(\mathbf{X}). \quad (1.24)$$

De (1.21) y (1.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
E[SSE(\beta_1)] &= \text{tr} \{ \mathbf{X}^t\mathbf{M}_1\mathbf{X}E[\beta\beta^t] \} + \sigma_0^2 \text{tr} \{ \mathbf{M}_1\mathbf{W}^{-1} \} \\
&= \text{tr} \{ \mathbf{X}^t\mathbf{M}_1\mathbf{X}E[\beta\beta^t] \} + \sigma_0^2 [n - \text{rg} \{ \mathbf{X}_1 \}].
\end{aligned}$$

De (1.22) y (1.24), se deduce que

$$E[SSR(\beta_1)] = E[SST] - E[SSE(\beta_1)] = \text{tr} \{ \mathbf{X}^t\mathbf{Q}_1\mathbf{X}E[\beta\beta^t] \} + \sigma_0^2 \text{rg} \{ \mathbf{X}_1 \},$$

donde $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{W} - \mathbf{M}_1 = \mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}$. Si $\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1$ es invertible, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^t\mathbf{Q}_1\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t \\ \mathbf{X}_2^t \end{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^t\mathbf{W}\mathbf{X}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$E[SSR(\beta_1)] = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} E[\beta \beta^t] \right\} + \sigma_0^2 \text{rg}(\mathbf{X}_1). \quad (1.25)$$

Por tanto, aplicando (1.24) y (1.25), se obtiene

$$\begin{aligned} E[SSR(\beta_2|\beta_1)] &= E[SSR(\beta_1, \beta_2)] - E[SSR(\beta_1)] \\ &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2^t \mathbf{W} [\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^t] \mathbf{W} \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} E[\beta \beta^t] \right\} + \sigma_0^2 [\text{rg}(\mathbf{X}) - \text{rg}(\mathbf{X}_1)] \\ &= \text{tr} \{ \mathbf{X}_2^t \mathbf{W} [\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^t] \mathbf{W} \mathbf{X}_2 E[\beta_2 \beta_2^t] \} + \sigma_0^2 [\text{rg}(\mathbf{X}) - \text{rg}(\mathbf{X}_1)]. \quad (1.26) \end{aligned}$$

Obsérvese que $E[SSR(\beta_2|\beta_1)]$ es una función simplemente de $E[\beta_2 \beta_2^t]$ y σ_0^2 . No depende ni de $E[\beta_1 \beta_1^t]$ ni de $E[\beta_1 \beta_2^t]$. Nótese también que se ha deducido (1.26) sin hacer ninguna suposición sobre la forma de $E[\beta \beta^t]$; con lo cual es válida para cualquier estructura de la matriz de varianzas-covarianzas de β .

Considérese nuevamente el modelo (1.6)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{Z}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{e},$$

con $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1})$, y $\mathbf{u}_i \sim \mathcal{N}_{q_i}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_{q_i})$, $i = 1, \dots, m$. Se define

$$\beta^{(i)} = (\beta^t, \mathbf{u}_1^t, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^t)^t \quad \text{y} \quad \mathbf{u}^{(i)} = (\mathbf{u}_i^t, \dots, \mathbf{u}_m^t)^t.$$

Para $i = 1, \dots, m$ considérese el caso

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_1^{(i)} = (\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{i-1}), & \beta_1 &= \beta^{(i)}, \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_2^{(i)} = (\mathbf{Z}_i, \dots, \mathbf{Z}_m), & \beta_2 &= \mathbf{u}^{(i)} \end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{X}_1^{(i)} (\mathbf{X}_1^{(i)t} \mathbf{X}_1^{(i)})^{-1} \mathbf{X}_1^{(i)t} \mathbf{W}, \\ \mathbf{L}_i &= \mathbf{Z}_i^t \mathbf{W} [\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{X}_1^{(i)} (\mathbf{X}_1^{(i)t} \mathbf{W} \mathbf{X}_1^{(i)})^{-1} \mathbf{X}_1^{(i)t}] \mathbf{W} \mathbf{Z}_i. \end{aligned}$$

Entonces (1.23) y (1.26) se reducen a

$$E[SSE(\beta^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)})] = E[SSE(\beta, \mathbf{u})] = \sigma_0^2 [n - \text{rg}(\mathbf{X} \ \mathbf{Z})] \quad (1.27)$$

$$E[SSR(\mathbf{u}^{(i)}|\beta^{(i)})] = \sum_{k=i}^m \text{tr} \{ \mathbf{L}_k \} \sigma_k^2 + \sigma_0^2 [\text{rg}(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - \text{rg}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{i-1})] \quad (1.28)$$

De las fórmulas (1.27) y (1.28), y aplicando el método de los momentos, se obtiene el siguiente

sistema lineal y triangular de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
SSE(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}) &= \sigma_0^2 [n - rg(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_m)] \\
SSR(\mathbf{u}^{(m)} | \boldsymbol{\beta}^{(m)}) &= \sigma_0^2 [rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - rg(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{m-1})] + \sigma_m^2 \text{tr} \{ \mathbf{L}_m \} \\
SSR(\mathbf{u}^{(m-1)} | \boldsymbol{\beta}^{(m-1)}) &= \sigma_0^2 [rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - rg(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{m-2})] + \sigma_m^2 \text{tr} \{ \mathbf{L}_m \} + \sigma_{m-1}^2 \text{tr} \{ \mathbf{L}_{m-1} \} \\
&\vdots \\
SSR(\mathbf{u}^{(1)} | \boldsymbol{\beta}^{(1)}) &= \sigma_0^2 [rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - rg(\mathbf{X})] + \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \text{tr} \{ \mathbf{L}_i \}
\end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene un estimador insesgado de σ_0^2 ,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{SSE(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u})}{n - rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z})} = MSE(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}).$$

De la segunda ecuación se obtiene un estimador insesgado de σ_m^2 ,

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{SSR(\mathbf{u}^{(m)} | \boldsymbol{\beta}^{(m)}) - \hat{\sigma}_0^2 [rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - rg(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{m-1})]}{\text{tr} \{ \mathbf{L}_m \}}.$$

De la tercera ecuación se obtiene un estimador insesgado de σ_{m-1}^2 ,

$$\hat{\sigma}_{m-1}^2 = \frac{SSR(\mathbf{u}^{(m-1)} | \boldsymbol{\beta}^{(m-1)}) - \hat{\sigma}_0^2 [rg(\mathbf{X} \ \mathbf{Z}) - rg(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{m-2})] - \hat{\sigma}_m^2 \text{tr} \{ \mathbf{L}_m \}}{\text{tr} \{ \mathbf{L}_{m-1} \}},$$

y así sucesivamente.

Nótese que $SSR(\mathbf{u}^{(i)} | \boldsymbol{\beta}^{(i)}) = SSE(\boldsymbol{\beta}^{(i)}) - SSE(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) = SSE(\boldsymbol{\beta}^{(i)}) - SSE(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{u})$, con lo cual las fórmulas anteriores se pueden expresar en función de las sumas de cuadrados residuales únicamente. Es decir,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_{m+1} \mathbf{y}}{n - rg(\mathbf{X}_1^{(m+1)})} \quad (1.29)$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_m \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_{m+1} \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 [rg(X_1^{(m+1)}) - rg(X_1^{(m)})]}{\text{tr}(\mathbf{L}_m)} \quad (1.30)$$

\vdots

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_i \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_{m+1} \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 [rg(X_1^{(m+1)}) - rg(X_1^{(i)})] - \sum_{j=i+1}^m \hat{\sigma}_j^2 \text{tr}(\mathbf{L}_j)}{\text{tr}(\mathbf{L}_i)} \quad (1.31)$$

\vdots

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_1 \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_{m+1} \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 [rg(X_1^{(m+1)}) - rg(X_1^{(1)})] - \sum_{j=2}^m \hat{\sigma}_j^2 \text{tr}(\mathbf{L}_j)}{\text{tr}(\mathbf{L}_1)} \quad (1.32)$$

Para más detalles se pueden consultar los libros Searle et al. (1992), 202-208, o Searle (1971), 443-445.

Reemplazando las componentes de la varianza $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$ por sus estimadores $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_m^2$ en (1.4) y (1.5), se obtiene el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ y los predictores de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$.

Observación 1.5.1. Si se usa la parametrización alternativa el sistema de ecuaciones deja de ser lineal. En consecuencia su solución no proporciona estimadores insesgados.

Observación 1.5.2. En los desarrollos anteriores al poner los efectos aleatorios como fijos, puede surgir colinealidad. Estos problemas se corrigen generalmente eliminando una columna de cada \mathbf{Z}_i , $i = 1, \dots, m$.

1.6. El error cuadrático medio de los EBLUP

1.6.1. Introducción

Sea $\Omega = \{1, \dots, N\}$ una población finita. Sea $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^t$ el vector de valores que toma una variable objetivo en las unidades de Ω . Se supone que se verifica el modelo

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}, \quad (1.33)$$

donde $\boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$ es el vector de efectos fijos, $\mathbf{u}_{q \times 1}$ es el vector de efectos aleatorios, $\mathbf{X}_{N \times p}$ y $\mathbf{Z}_{N \times q}$ son matrices de incidencia conocidas y $\mathbf{e}_{N \times 1}$ es el vector de perturbaciones aleatorias. Supóngase que los efectos aleatorios y las perturbaciones son independientes y normales con medias nulas y matrices de varianza-covarianza,

$$V[\mathbf{u}] = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^t] = \boldsymbol{\Sigma}_u \quad \text{y} \quad V[\mathbf{e}] = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^t] = \boldsymbol{\Sigma}_e,$$

que son funciones con derivadas parciales continuas de unos parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)$ llamados *componentes de la varianza*.

De (1.33) se obtiene

$$\mathbf{V} = V[\mathbf{y}] = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}_u\mathbf{Z}^t + \boldsymbol{\Sigma}_e.$$

Supóngase que \mathbf{V} , $\boldsymbol{\Sigma}_u$ y $\boldsymbol{\Sigma}_e$ son no singulares.

Se selecciona una muestra aleatoria simple, $s \subset \Omega$, de $n \leq N$ unidades. Sea $r = \Omega - s$ el conjunto de unidades que no han sido seleccionadas, de modo que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_s^t, \mathbf{y}_r^t)^t$, donde \mathbf{y}_s es el vector de n unidades observadas e \mathbf{y}_r es el vector de $N - n$ unidades no observadas. En lo sucesivo se usa el subíndice s para denotar la parte observada del modelo (1.33) y el subíndice r para denotar la parte no observada.

Sea $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_s^t, \mathbf{a}_r^t)^t$ un vector de constantes conocidas de dimensión $N \times 1$. Se está interesado en estimar $\eta = \mathbf{a}^t\mathbf{y} = \mathbf{a}_s^t\mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t\mathbf{y}_r$. Se define $\tau = \mathbf{a}_r^t(\mathbf{X}_r\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_r\mathbf{u})$, con lo cual se verifica que $\mathbf{a}_r^t\mathbf{y}_r = \tau + \mathbf{a}_r^t\mathbf{e}_r$.

En el apartado 1.6.2 se procede a calcular el error cuadrático medio que se comete cuando se predice el valor de τ con el predictor lineal insesgado óptimo (BLUP) y con el predictor empírico lineal insesgado óptimo (EBLUP). En el apartado 1.6.3 se estudia el problema de calcular el error cuadrático medio que se comete cuando se predice el valor de η con el predictor EBLUP. En la apartado 1.6.4 se dan procedimientos para estimar el error cuadrático medio.

1.6.2. Cálculo del error cuadrático medio al predecir τ

En este apartado se calcula el error cuadrático medio de estimadores BLUP o EBLUP de τ . Se consideran los siguientes casos:

1. $\beta, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ son conocidos,
2. $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ son conocidos, pero β es desconocido,
3. Todos los parámetros son desconocidos

Todos los parámetros son conocidos

En este apartado se supone que β y $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ son conocidos. Puesto que el estimador BLUP de τ es

$$\tilde{\tau} = \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r \beta + \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{u}}), \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s \beta)$$

y $\mathbf{C}_s = \text{Cov}(\mathbf{y}_s, \mathbf{u}) = \mathbf{Z}_s \Sigma_u$, el error de predicción es $\tilde{\tau} - \tau = \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$. El error cuadrático medio es

$$MSE(\tilde{\tau}) = E[(\tilde{\tau} - \tau)^2] = V(\tilde{\tau} - \tau) = \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \text{Var}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) &= V(\tilde{\mathbf{u}}) + V(\mathbf{u}) - 2\text{Cov}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \Sigma_u - 2\mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\ &= \Sigma_u - \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u. \end{aligned}$$

Se sabe que $\mathbf{V}_s^{-1} = (\Sigma_{es} + \mathbf{Z}_s \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t)^{-1}$. Usando la fórmula de inversión

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1}, \quad (1.34)$$

se obtiene

$$\mathbf{V}_s^{-1} = \Sigma_{es}^{-1} - \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s (\Sigma_u^{-1} + \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s)^{-1} \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1}.$$

Sea $\mathbf{T}_s = (\Sigma_u^{-1} + \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s)^{-1}$, entonces se puede escribir \mathbf{V}_s en función de \mathbf{T}_s ; es decir

$$\mathbf{V}_s^{-1} = \Sigma_{es}^{-1} - \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1}.$$

De la misma forma, aplicando la formula (1.34) a \mathbf{T}_s se obtiene

$$\mathbf{T}_s = \Sigma_u - \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t (\Sigma_{es} + \mathbf{Z}_s \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t)^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u = \Sigma_u - \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u$$

Así pues, se ha demostrado que

$$V(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = \mathbf{T}_s.$$

y en consecuencia

$$MSE(\tilde{\tau}) = \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \triangleq g_1(\boldsymbol{\theta}).$$

Varianzas conocidas y parámetros de regresión desconocidos

En este apartado se supone que $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ son conocidas, pero β es desconocido. Sean $\mathbf{Q}_s = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1}$ y $\mathbf{C}_s = Cov(\mathbf{y}_s, \mathbf{u}) = \mathbf{Z}_s \Sigma_u$, entonces el estimador BLUP de τ es

$$\hat{\tau}_{blup} = \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r \hat{\beta} + \mathbf{Z}_r \hat{\mathbf{u}}),$$

donde

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s \hat{\beta}) \quad \text{y} \quad \hat{\beta} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{y}_s = \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{y}_s.$$

Por tanto,

$$\hat{\tau}_{blup} - \tau = \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r (\hat{\beta} - \beta) + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$$

y

$$\begin{aligned} (\hat{\tau}_{blup} - \tau)^2 &= [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r (\hat{\beta} - \beta) + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})] [(\hat{\beta} - \beta)^t \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r + (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r] \\ &= \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r (\hat{\beta} - \beta) (\hat{\beta} - \beta)^t \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r (\hat{\beta} - \beta) (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\ &\quad + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) (\hat{\beta} - \beta)^t \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r. \end{aligned}$$

En forma matricial, se tiene

$$(\hat{\tau}_{blup} - \tau)^2 = [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r, \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r] \begin{bmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \end{bmatrix} [(\hat{\beta} - \beta)^t, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \\ \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \end{bmatrix}.$$

Con lo cual

$$MSE(\hat{\tau}_{blup}) = E [(\hat{\tau}_{blup} - \tau)^2] = [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r, \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r] E \left[\begin{bmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \end{bmatrix} [(\hat{\beta} - \beta)^t, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \\ \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \end{bmatrix}.$$

Calculando por separado las componentes de la fórmula anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11} &\triangleq E [(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^t] = V(\hat{\beta}) = \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \\ &= \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s^{-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_s, \\ \mathbf{R}_{12} &\triangleq E [(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t] = Cov(\hat{\beta}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = Cov(\hat{\beta}, \hat{\mathbf{u}}) - Cov(\hat{\beta}, \mathbf{u}) \\ &= Cov(\mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{y}_s, \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{y}_s) - Cov(\mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{y}_s, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{V}_s (\mathbf{I} - \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t) \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s - \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\ &= -\mathbf{Q}_s (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s) \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s = -\mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{22} &\triangleq E[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t] = Cov(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \\
&= V(\hat{\mathbf{u}}) - Cov(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) - Cov(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) + V(\mathbf{u}) \\
&= \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{V}_s (\mathbf{I} - \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t) \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\
&\quad - \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{C}_s - \mathbf{C}_s^t (\mathbf{I} - \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t) \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \Sigma_u \\
&= \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\
&\quad - \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\
&\quad - \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{C}_s - \mathbf{C}_s^t (\mathbf{I} - \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t) \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \Sigma_u \\
&= -\mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s) \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s \\
&\quad - \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \Sigma_u \\
&= \Sigma_u - \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u + (\Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t (\mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u).
\end{aligned}$$

Para obtener una fórmula más sintética de \mathbf{R}_{22} , se usan las igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_s^{-1} &= (\Sigma_{es} + \mathbf{Z}_s \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t)^{-1} = \Sigma_{es}^{-1} - \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1}, \\
\mathbf{T}_s &= (\Sigma_u^{-1} + \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s)^{-1} = \Sigma_u - \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Sigma_u.
\end{aligned}$$

De estas relaciones, se deduce que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s &= \mathbf{T}_s^{-1} - \Sigma_u^{-1} \\
\mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} &= \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} - \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} = \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} - \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} + \Sigma_u^{-1} \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \\
&= \Sigma_u^{-1} \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \\
\Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} &= \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\mathbf{R}_{22} = E[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t] = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s.$$

Volviendo al cálculo de $MSE(\hat{\tau}_{blup})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\tau}_{blup}) &= [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r, \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r] E \begin{bmatrix} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^t & (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \\ (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^t & (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \\ \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \mathbf{R}_{11} \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \mathbf{R}_{12} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{R}_{12}^t \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{R}_{22} \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\
&= \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r \\
&\quad + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{X}_s \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r \\
&= \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r + [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{X}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r].
\end{aligned}$$

En definitiva, dado el vector de componentes de la varianza $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\tau}_{blup}) &= g_1(\boldsymbol{\theta}) + g_2(\boldsymbol{\theta}), \\
g_1(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r, \\
g_2(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{X}_s^t \Sigma_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r].
\end{aligned}$$

Todos los parámetros son desconocidos

El estimador BLUP de τ , cuando las componentes de $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)$ son conocidas, es $\hat{\tau}_{blup} = \tau(\boldsymbol{\theta})$. De hecho, habitualmente $\hat{\tau}_{blup}$ sólo depende de los cocientes θ_i/θ_0 , $i = 1, \dots, m$. Cuando $\boldsymbol{\theta}$ es desconocida, se reemplaza por un estimador adecuado, para obtener el estimador EBLUP de τ ; es decir,

$$\hat{\tau}_{eblup} = \tau(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

El error cuadrático medio de $\hat{\tau}_{eblup}$ es

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\tau}_{eblup}) &= E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup} + \hat{\tau}_{blup} - \tau)^2] \\ &= MSE(\hat{\tau}_{blup}) + E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup})^2] + 2E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup})(\hat{\tau}_{blup} - \tau)]. \end{aligned}$$

Se dice que una función (posiblemente vectorial) del vector de observaciones, $s(\mathbf{y}_s)$ es *par* si para todo \mathbf{y}_s se verifica la igualdad $s(-\mathbf{y}_s) = s(\mathbf{y}_s)$. Se dice que $s(\mathbf{y}_s)$ es *invariante por traslaciones* si $s(\mathbf{y}_s + \mathbf{X}_s\boldsymbol{\beta}) = s(\mathbf{y}_s)$ para cualesquiera $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$.

Kackar y Harville (1981) demostraron que los estimadores Henderson 3, ML y REML de $\boldsymbol{\theta}$ son funciones de \mathbf{y}_s pares e invariantes por traslaciones. También demostraron que si $E[\tau(\boldsymbol{\theta})]$ es finita y el estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es función de \mathbf{y}_s par e invariante por traslaciones, entonces $\hat{\tau}_{eblup} = \tau(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ es centrado ($E[\tau(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \tau] = 0$). Kackar y Harville (1984) demostraron que si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es función de \mathbf{y}_s par e invariante por traslaciones, entonces

$$E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup})(\hat{\tau}_{blup} - \tau)] = 0. \quad (1.35)$$

En este apartado se supone que se verifica (1.35). En consecuencia, se tiene la igualdad

$$MSE(\hat{\tau}_{eblup}) = MSE(\hat{\tau}_{blup}) + E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup})^2]. \quad (1.36)$$

En lo sucesivo se va a encontrar una aproximación del término

$$E [(\hat{\tau}_{eblup} - \hat{\tau}_{blup})^2].$$

Sea $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un valor admisible de $\boldsymbol{\theta}$ y sea $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}) = (d_0(\boldsymbol{\theta}), d_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, d_m(\boldsymbol{\theta}))^t$, donde

$$d_j(\boldsymbol{\theta}) = \left. \frac{\partial \tau(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

El desarrollo de Taylor de primer orden de $\tau(\boldsymbol{\gamma})$ en torno a $\boldsymbol{\theta}$ es

$$\tau(\boldsymbol{\gamma}) \approx \tau(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=0}^m d_j(\boldsymbol{\theta})(\gamma_j - \theta_j).$$

Haciendo la sustitución $\boldsymbol{\gamma} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, se obtiene

$$\hat{\tau}_{eblup} \approx \hat{\tau}_{blup} + \sum_{j=0}^m d_j(\boldsymbol{\theta})(\hat{\theta}_j - \theta_j) = \hat{\tau}_{blup} + \mathbf{d}^t(\boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}).$$

Supóngase que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ es asintóticamente insesgado; es decir

$$E \left[\widehat{\theta}_j - \theta_j \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Entonces

$$E \left[(\widehat{\tau}_{eblup} - \widehat{\tau}_{blup})^2 \right] \approx E \left[(\mathbf{d}^t(\boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}))^2 \right] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m E \left[d_i(\boldsymbol{\theta})(\widehat{\theta}_i - \theta_i) d_j(\boldsymbol{\theta})(\widehat{\theta}_j - \theta_j) \right]. \quad (1.37)$$

Kackar y Harville (1981) demostraron que

$$E [d_j(\boldsymbol{\theta})] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Dado que $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$ es un vector aleatorio, el sumando (i, j) en (1.37) es

$$E \left[d_i(\boldsymbol{\theta}) d_j(\boldsymbol{\theta})(\widehat{\theta}_i - \theta_i)(\widehat{\theta}_j - \theta_j) \right] = E_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} \left[(\widehat{\theta}_i - \theta_i)(\widehat{\theta}_j - \theta_j) E_{\mathbf{d}} \left[d_i(\boldsymbol{\theta}) d_j(\boldsymbol{\theta}) \mid \widehat{\boldsymbol{\theta}} \right] \right].$$

Ahora bien,

$$E_{\mathbf{d}} \left[d_i(\boldsymbol{\theta}) d_j(\boldsymbol{\theta}) \mid \widehat{\boldsymbol{\theta}} \right] = Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \mid \widehat{\boldsymbol{\theta}} \right).$$

En el caso en que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ se obtenga a partir de datos distintos e independientes de los usados para calcular $\widehat{\tau}_{blup} = \widehat{\tau}(\boldsymbol{\theta})$, se tiene que

$$Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \mid \widehat{\boldsymbol{\theta}} \right) = Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \right)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} E \left[d_i(\boldsymbol{\theta}) d_j(\boldsymbol{\theta})(\widehat{\theta}_i - \theta_i)(\widehat{\theta}_j - \theta_j) \right] &= Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \right) E \left[(\widehat{\theta}_i - \theta_i)(\widehat{\theta}_j - \theta_j) \right] \\ &= Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \right) Cov(\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_j) \end{aligned}$$

Así pues, el segundo sumando de (1.36) es

$$E \left[(\widehat{\tau}_{eblup} - \widehat{\tau}_{blup})^2 \right] = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^m Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \right) Cov(\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_j).$$

Sean $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ las matrices de varianza-covarianza de $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta})$ y $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ respectivamente. Entonces

$$\sum_{j=0}^m Cov \left(d_i(\boldsymbol{\theta}), d_j(\boldsymbol{\theta}) \right) Cov(\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_j)$$

es el elemento i -ésimo de la diagonal principal de $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$, con lo cual

$$E \left[(\widehat{\tau}_{eblup} - \widehat{\tau}_{blup})^2 \right] = \text{tr} \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \}.$$

En el caso de que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\tau}_{blup} = \hat{\tau}(\boldsymbol{\theta})$ se calculen a partir de los mismos datos, Kackar y Harville (1984) proponen la aproximación

$$E [(\hat{\tau}_{eb lup} - \hat{\tau}_{blup})^2] \approx \text{tr} \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \}.$$

En consecuencia el MSE de $\hat{\tau}_{eb lup}$ puede aproximarse de la siguiente forma

$$MSE(\hat{\tau}_{eb lup}) \approx MSE(\hat{\tau}_{blup}) + \text{tr} \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \}.$$

Prasad y Rao (1990) propusieron la siguiente nueva aproximación

$$\text{tr} \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \} \approx \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}, \quad (1.38)$$

donde $\mathbf{b}^t = (b_1, \dots, b_n) = \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}$,

$$\frac{\partial \mathbf{b}^t}{\partial \theta_j} = \left(\frac{\partial b_1}{\partial \theta_j}, \dots, \frac{\partial b_n}{\partial \theta_j} \right) \quad \text{y} \quad \nabla \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}^t}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial \mathbf{b}^t}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{b}^t}{\partial \theta_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial \theta_0} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial b_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial \theta_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial b_1}{\partial \theta_m} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial \theta_m} \end{pmatrix}_{(m+1) \times n}.$$

En definitiva, si el vector de componentes de la varianza $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)$ es desconocido, se tiene que

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\tau}_{eb lup}) &= g_1(\boldsymbol{\theta}) + g_2(\boldsymbol{\theta}) + g_3(\boldsymbol{\theta}), \\ g_1(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r, \\ g_2(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r], \\ g_3(\boldsymbol{\theta}) &\approx \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

1.6.3. Cálculo del error cuadrático medio al predecir η

Supóngase ahora que se quiere predecir

$$\eta = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{y}_r = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_r \mathbf{u} + \mathbf{e}_r) = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \tau + \mathbf{a}_r^t \mathbf{e}_r,$$

usando el predictor

$$\hat{\eta} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \hat{\tau}_{eb lup}.$$

El error cuadrático medio es

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\eta}) &= E [(\hat{\eta} - \eta)^2] = E [(\hat{\tau}_{eb lup} - \tau - \mathbf{a}_r^t \mathbf{e}_r)^2] \\ &= E [(\hat{\tau}_{eb lup} - \tau)^2] + E [(\mathbf{a}_r^t \mathbf{e}_r)^2] - 2E [(\hat{\tau}_{eb lup} - \tau) \mathbf{a}_r^t \mathbf{e}_r] \\ &= MSE(\hat{\tau}_{eb lup}) + E [\mathbf{a}_r^t \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^t \mathbf{a}_r] - 2E \left[\mathbf{a}_r^t \left((\mathbf{X}_r (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{Z}_r (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})) \mathbf{e}_r^t \mathbf{a}_r \right) \right] \\ &= MSE(\hat{\tau}_{eb lup}) + \mathbf{a}_r^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_r - 2\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r E [(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \mathbf{e}_r^t] \mathbf{a}_r - 2\mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r E [(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \mathbf{e}_r^t] \mathbf{a}_r. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} E \left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \mathbf{e}_r^t \right] &= \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{e}_r) = \text{Cov}(\mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{y}_s, \mathbf{e}_r) = 0 \\ E \left[(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \mathbf{e}_r^t \right] &= \text{Cov}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \mathbf{e}_r) = \text{Cov}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_r) - \text{Cov}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_r) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{Z}_s \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{V}_s^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1}) \mathbf{y}_s, \mathbf{e}_r) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\eta}) &= \text{MSE}(\hat{\tau}_{eblup}) + \mathbf{a}_r^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_r = \text{MSE}(\hat{\tau}_{eblup}) + E \left[(\hat{\tau}_{eblup} - \tau_{eblup})^2 \right] + \mathbf{a}_r^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_r \\ &\approx g_1(\boldsymbol{\theta}) + g_2(\boldsymbol{\theta}) + g_3(\boldsymbol{\theta}) + g_4(\boldsymbol{\theta}), \\ g_1(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r. \\ g_2(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_r - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_r], \\ g_3(\boldsymbol{\theta}) &\approx \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}, \\ g_4(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_r^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_r. \end{aligned}$$

1.6.4. Estimación del error cuadrático medio al predecir η

En las aplicaciones se necesita un estimador de $\text{MSE}(\hat{\eta})$ para tener una medida de la variabilidad de $\hat{\eta}$. Un procedimiento sencillo para estimar $\text{MSE}(\hat{\tau})$ consiste en sustituir $\boldsymbol{\theta}$ por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ en la expresión del error cuadrático medio. En primer lugar se estima el error cuadrático medio de $\tau = \mathbf{a}_r^t (\mathbf{X}_r \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_r \mathbf{u})$. Así se obtiene el estimador analógico

$$mse_1(\hat{\tau}_{eblup}) = g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (1.39)$$

Si se usan estimadores $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ consistentes de $\boldsymbol{\theta}$, se verifica que $E[g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \cong g_2(\boldsymbol{\theta})$ y $E[g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \cong g_3(\boldsymbol{\theta})$. Sin embargo, esta propiedad no se cumple para g_1 .

Para evaluar el sesgo de $g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, se desarrolla $g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\theta}$, obteniéndose

$$g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx g_1(\boldsymbol{\theta}) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \nabla g_1(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \nabla^2 g_1(\boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \triangleq g_1(\boldsymbol{\theta}) + \Delta_1 + \Delta_2,$$

donde $\nabla g_1(\boldsymbol{\theta})$ es el vector de derivadas primeras de $g_1(\boldsymbol{\theta})$ con respecto a $\boldsymbol{\theta}$ y $\nabla^2 g_1(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de derivadas segundas de $g_1(\boldsymbol{\theta})$ con respecto a $\boldsymbol{\theta}$. Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es insesgado para $\boldsymbol{\theta}$, entonces $E[\Delta_1] = 0$. En general, si el término $E[\Delta_1] \approx \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^t(\boldsymbol{\theta}) \nabla g_1(\boldsymbol{\theta})$ donde $\mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta})$ es una aproximación al sesgo $E[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}]$, es de orden inferior a $E[\Delta_2]$, entonces una aproximación posible es

$$E[g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx g_1(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\nabla^2 g_1(\boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{V}}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \right), \quad (1.40)$$

siendo $\bar{\mathbf{V}}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ la matriz de covarianzas asintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Si además la matriz de covarianzas \mathbf{V} tiene una estructura lineal en $\boldsymbol{\theta}$, entonces (1.40) se reduce a

$$E[g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx g_1(\boldsymbol{\theta}) - g_3(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.41)$$

De (1.39) y (1.41) se deduce que el sesgo de $mse_1(\hat{\tau}_{eblup})$ es

$$E[mse_1(\hat{\tau}_{eblup})] - MSE(\hat{\tau}_{eblup}) \approx (g_1(\boldsymbol{\theta}) - g_3(\boldsymbol{\theta}) + g_2(\boldsymbol{\theta}) + g_3(\boldsymbol{\theta})) - (g_1(\boldsymbol{\theta}) + g_2(\boldsymbol{\theta}) + g_3(\boldsymbol{\theta})) = -g_3(\boldsymbol{\theta}).$$

Consecuentemente $mse_1(\hat{\tau}_{eblup})$ se estima con

$$mse(\hat{\tau}_{eblup}) = g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (1.42)$$

La fórmula (1.42) es válida cuando se estima $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ por los métodos de Henderson 3 o REML, que producen estimadores $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ insesgados de $\boldsymbol{\theta}$. Sin embargo, para estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, se verifica que $E[\Delta_1] \approx \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^t(\boldsymbol{\theta}) \nabla g_1(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$. En este caso $MSE(\hat{\tau}_{eblup})$ se estima con

$$mse(\hat{\tau}_{eblup}) = g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^t(\boldsymbol{\theta}) \nabla g_1(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.43)$$

Prasad y Rao (1990) obtuvieron el estimador del ECM dado en (1.42) para casos especiales cubiertos por el modelo lineal mixto general con una matriz de covarianzas diagonal a bloques. Harville y Jeske (1992) propusieron (1.42) para un modelo lineal mixto general como (1.33), bajo la hipótesis de que $E[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}] = 0$. Das, Jiang y Rao (2001) proporcionan demostraciones rigurosas de las aproximaciones (1.42) y (1.43) para los métodos ML y REML. Lahiri y Rao (1995) estudiaron la robustez de las citadas aproximaciones.

A la hora de estimar η mediante $\hat{\eta} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \hat{\tau}_{eblup}$, se utiliza

$$mse(\hat{\eta}) = g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (1.44)$$

en el caso de que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sea aproximadamente insesgado, y en caso contrario se utiliza la expresión alternativa

$$mse(\hat{\eta}) = g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^t(\boldsymbol{\theta}) \nabla g_1(\boldsymbol{\theta}).$$



Capítulo 2

Modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados

2.1. Introducción

El modelo lineal mixto definido en (1.3) presenta algunas simplificaciones cuando tiene dos factores aleatorios anidados; el primero con D niveles y para cada nivel d ($d = 1, \dots, D$) de éste, el segundo con m_d subniveles. Supóngase que

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_n^{-1/2}\mathbf{e}, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1,D \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_D)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{2,M \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_2^2 \mathbf{I}_M)$ y $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{n \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$ son independientes, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n \times 1}$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{n \times p}$ con $rg(\mathbf{X}) = p$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$, $\mathbf{Z}_1 = \text{diag}(\mathbf{1}_{n_d})_{n \times D}$, $1 \leq d \leq D$

$\mathbf{Z}_2 = \text{diag}(\text{diag}(\mathbf{1}_{n_{di}}))_{n \times M}$, $M = \sum_{d=1}^D m_d$, $n = \sum_{d=1}^D n_d$, $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} n_{di}$, \mathbf{I}_n , \mathbf{I}_D e \mathbf{I}_M son matrices identidad de ordenes n , D , y M , $\mathbf{1}_{n_d}$ y $\mathbf{1}_{n_{di}}$ son vectores columnas de ordenes n_d y n_{di} con todos sus elementos iguales a 1 y $\mathbf{W}_n = \text{diag}(\text{diag}(\text{diag}(w_{dij})))_{n \times n}$ con $w_{dij} > 0$ conocidas, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, n_{di}$.

El modelo (2.1) puede escribirse alternativamente como en Prasad y Rao (1990); es decir

$$y_{dij} = \mathbf{x}_{dij}\boldsymbol{\beta} + u_{1,d} + u_{2,di} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}, \quad d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d, j = 1, \dots, n_{di}, \quad (2.2)$$

donde y_{dij} es la característica de interés para la unidad muestral j , del subnivel i , dentro del nivel d , \mathbf{x}_{dij} es la fila (d, i, j) de la matriz \mathbf{X} , conteniendo las variables auxiliares correspondientes y w_{dij} representa la heterocedasticidad del elemento (d, i, j) en el modelo.

El modelo (2.1) tiene la siguiente estructura de correlaciones

1. Para el caso $d_1 = d_2$, $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ se tiene

$$\text{Cov}(y_{d_1 i_1 j_1}, y_{d_1 i_1 j_1}) = V(y_{d_1 i_1 j_1}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + w_{d_1 i_1 j_1}^{-1} \sigma_0^2.$$

2. Para el caso $d_1 = d_2$, $i_1 = i_2$, $j_1 \neq j_2$

$$\text{Cov}(y_{d_1 i_1 j_1}, y_{d_1 i_1 j_2}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 .$$

3. Para el caso $d_1 = d_2$, $i_1 \neq i_2$

$$\text{Cov}(y_{d_1 i_1 j_1}, y_{d_1 i_2 j_2}) = \sigma_1^2 .$$

4. Para el caso $d_1 \neq d_2$

$$\text{Cov}(y_{d_1 i_1 j_1}, y_{d_2 i_2 j_2}) = 0 .$$

En estimación en áreas pequeñas, el modelo (2.1) es de gran utilidad, pues permite la estimación de parámetros poblacionales en áreas d y subáreas di , ambas generalmente más pequeñas que las grandes áreas para las cuales fue realizado el diseño de muestreo. El capítulo 6 está dedicado a la aplicación de dos amplios ejemplos; en el primero de ellos (sección 6.4) se busca, a través de este tipo de modelos, una estimación del total de parados para comarcas ($i = 1, \dots, m_d$) dentro de su correspondiente provincia ($d = 1, \dots, D$); en el segundo (sección 6.5), se busca una estimación del gasto total anual medio del hogar por trimestres ($i = 1, \dots, m_d$) para cada comunidad autónoma ($d = 1, \dots, D$). Las citadas aplicaciones muestran la utilidad del modelo (2.1) en el tratamiento de datos con estructura geográfica anidada o temporal. Se trata de un modelo flexible que puede ser adaptado incluso a estudios longitudinales de medidas repetidas.

En el presente capítulo se desarrollan los cálculos para la obtención del estimador BLUE de β y el predictor BLUP de \mathbf{u} bajo las condiciones del modelo (2.1). En este proceso, surgen dos posibles caminos; que las componentes de la varianza σ sean conocidas y por tanto bastará con desarrollar en (1.4) y (1.5), o que σ sea desconocida y se tengan que plantear métodos de estimación para su obtención. El primero de los casos se expone en la sección 2.2, mientras que el segundo se hace en las secciones 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6. El desarrollo analítico de la teoría presentada a lo largo de estas secciones tienen un gran valor en el ámbito de la estadística computacional. Desde una perspectiva computacional es aconsejable implementar los programas principales y subrutinas usando objetos en los que todos sus elementos (scores, componentes de la matriz de información de Fisher, etc.) estén ligados a expresiones asociadas a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d . Sin estos desarrollos analíticos, las ejecuciones de los experimentos de simulación y de los métodos bootstrap consumirían espacio en memoria RAM y tiempos de CPU prohibitivos. La investigación en la mejora de los procedimientos computacionales para la aplicación viable de las técnicas estadísticas propuestas en grandes conjuntos de datos (por ejemplo, la encuesta de población activa) ha sido uno de los objetivos básicos de esta memoria.

2.2. Varianzas conocidas

Sea $\sigma = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t$ el vector de componentes de la varianza, con $\sigma_0^2 > 0$, $\sigma_1^2 > 0$ y $\sigma_2^2 > 0$. Cuando σ sea conocida el estimador BLUE de $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^t$ y el predictor BLUP

de $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t)^t$, que se obtuvieron en (1.4) y (1.5), son

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}). \quad (2.3)$$

A efectos computacionales conviene deducir expresiones desarrolladas de (2.3). Nótese que en el presente modelo (2.1), se tiene que $V(\mathbf{u}_1) = \sigma_1^2 \mathbf{I}_D$, $V(\mathbf{u}_2) = \sigma_2^2 \mathbf{I}_M$, $V(\mathbf{e}) = \sigma_0^2 \mathbf{I}_n$ y

$$\mathbf{V} = V(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}_1 V(\mathbf{u}_1) \mathbf{Z}_1^t + \mathbf{Z}_2 V(\mathbf{u}_2) \mathbf{Z}_2^t + \sigma_0^2 \mathbf{W}_n^{-1} = \text{diag}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_D),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_d &= \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} = \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \boldsymbol{\Upsilon}_d, \quad d = 1, \dots, D, \\ \mathbf{W}_d &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{W}_{di}), \quad \mathbf{W}_{di} = \text{diag}_{1 \leq j \leq n_{di}} (w_{dij}), \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d, \\ \boldsymbol{\Upsilon}_d &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\sigma_2^2 \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t + \sigma_0^2 \mathbf{W}_{di}^{-1}) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\boldsymbol{\Upsilon}_{di}), \quad d = 1, \dots, D. \end{aligned}$$

Se define $\mathbf{w}_{n_{di}} = \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} = (w_{di1}, \dots, w_{din_{di}})^t_{n_{di} \times 1}$, $w_{di\cdot} = \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{w}_{n_{di}} = \sum_{j=1}^{n_{di}} w_{dij}$ y

$$\gamma_{di} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}}}, \quad \delta_d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot}}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d. \quad (2.4)$$

Para calcular $\mathbf{V}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{V}_1^{-1}, \dots, \mathbf{V}_D^{-1})$ es necesario conocer $\boldsymbol{\Upsilon}_d^{-1}$ y en consecuencia también es preciso calcular $\boldsymbol{\Upsilon}_{di}^{-1}$. Para calcularlos se utiliza el resultado estándar de inversión de matrices

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^t)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^t \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}$$

(véase, e.g. Rao (1973), p. 33). Este resultado se aplica dos veces; en primer lugar para calcular $\boldsymbol{\Upsilon}_{di}^{-1}$ y posteriormente para poder obtener \mathbf{V}_d^{-1} .

Para $\boldsymbol{\Upsilon}_{di}^{-1} = (\sigma_2^2 \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t + \sigma_0^2 \mathbf{W}_{di}^{-1})^{-1}$, se hace $\mathbf{A} = \sigma_0^2 \mathbf{W}_{di}^{-1}$, $\mathbf{u} = \sigma_2^2 \mathbf{1}_{n_{di}}$, $\mathbf{v}^t = \mathbf{1}_{n_{di}}^t$ y se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Upsilon}_{di}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{W}_{di} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} \frac{\mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di}}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 (1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} w_{di\cdot})} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di\cdot}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right), \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{\Upsilon}_d^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di\cdot}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \triangleq \frac{1}{\sigma_0^2} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{B}_{di}).$$

Para $\mathbf{V}_d^{-1} = (\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \boldsymbol{\Upsilon}_d)^{-1}$, se hace $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Upsilon}_d$, $\mathbf{u} = \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d}$, $\mathbf{v}^t = \mathbf{1}_{n_d}^t$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \text{diag} (\mathbf{B}_{di}) - \frac{\sigma_1^2 \text{diag} (\mathbf{B}_{di}) \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \text{diag} (\mathbf{B}_{di})}{\sigma_0^4 \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \mathbf{1}_{n_d}^t \text{diag} (\mathbf{B}_{di}) \mathbf{1}_{n_d} \right)} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \text{diag} (\mathbf{B}_{di}) - \frac{\sigma_1^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{w}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\mathbf{w}_{n_{di}}^t - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right]}{\sigma_0^4 \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} w_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} w_{di} \right) \right)} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right]. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Mediante esta última expresión se obtiene el desarrollo de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ en (2.3).

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right] \right) \tag{2.6}
\end{aligned}$$

En el apéndice A se presenta una versión más detallada de los cálculos de esta sección.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_M \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^t \\ \mathbf{Z}_2^t \end{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_d^{-1}) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{Z}_1^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_d^{-1}) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \\ \sigma_2^2 \mathbf{Z}_2^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_d^{-1}) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d}^t) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_d^{-1}) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \\ \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t) \right) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_d^{-1}) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \left(\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right] \\ \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t) \mathbf{V}_d^{-1} \left(\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Realizando los cálculos detallados en el apéndice A, se obtiene $\hat{u}_{1,d}$ y $\hat{u}_{2,di}$

$$\hat{u}_{1,d} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}, \quad d = 1, \dots, D \quad (2.7)$$

$$\hat{u}_{2,di} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{di} - \delta_d (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{di} \right) \right] \quad d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d, \quad (2.8)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{di} = \mathbf{y}_{di} - \mathbf{X}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

2.3. Método de la máxima verosimilitud (ML)

Considérese el modelo propuesto en (2.1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_n^{-1/2} \mathbf{e}.$$

Para este modelo, la varianza se puede expresar como

$$\mathbf{V} = \sigma_0^2 \mathbf{V}_0^\circ + \sigma_1^2 \mathbf{V}_1^\circ + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2^\circ = \sigma_0^2 \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d^{-1}) + \sigma_1^2 \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t) + \sigma_2^2 \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \right).$$

El estimador máximo verosímil $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2)^t$ de $\boldsymbol{\theta}$ es el vector que satisface

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}),$$

donde $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^t, \boldsymbol{\sigma}^t)^t = (\boldsymbol{\beta}^t, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t; \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p; \sigma_0^2 > 0, \sigma_1^2 \geq 0, \sigma_2^2 \geq 0\}$ es el espacio paramétrico y $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$ la verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ para el vector de observaciones \mathbf{y} ,

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

Sea $l(\boldsymbol{\theta}) = \log f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = (S_{\boldsymbol{\beta}}^t, S_{\sigma_0^2}, S_{\sigma_1^2}, S_{\sigma_2^2})^t$, el vector de puntuaciones donde

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_0^2}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2}, \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^2} \right)^t.$$

Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ existe en el interior de Θ , entonces es solución de las ecuaciones de verosimilitud, que son las ecuaciones que resultan de igualar las componentes del vector de puntuaciones a cero. Derivando la logverosimilitud y utilizando (1.8) y (1.9), se obtienen las componentes de dicho vector para el modelo (2.1); es decir,

$$S_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

$$S_{\sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ\} + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad i = 0, 1, 2.$$

Al no existir expresiones explícitas para los estimadores máximo-verosímiles, es necesario recurrir a métodos iterativos de cálculo numérico, Newton-Raphson o Fisher-Scoring, como se advierte en la sección 1.3. Para esto se hace necesario el cálculo de la matriz Hessiana. Los elementos de la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ se obtienen derivando de nuevo respecto de $\boldsymbol{\theta}$, utilizando (1.9), y teniendo en cuenta que la derivada de una traza es la traza de la derivada,

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^t} = -\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^2 \partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma_i^2} = -\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_j^2 \partial \sigma_i^2} = \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ\} - (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (2.11)$$

para $i, j = 0, 1, 2$.

El método de Fisher-Scoring sustituye la matriz Hessiana por su esperanza cambiada de signo; es decir, por la matriz de información de Fisher

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = -E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})]$$

Tomando esperanzas en (2.9), (2.10), (2.11), cambiando de signo y usando el resultado

$$E[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{A} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})] = \text{tr}\{\mathbf{A}\mathbf{V}\},$$

para cualquier matriz no aleatoria \mathbf{A} , se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\beta\beta} &= \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \\ \mathbf{F}_{\sigma_i^2 \beta} &= \mathbf{F}_{\beta \sigma_i^2} = \mathbf{0}, \quad i = 0, 1, 2, \\ \mathbf{F}_{\sigma_j^2 \sigma_i^2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_i^\circ\}, \quad i, j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

La fórmula de actualización mediante el algoritmo de Fisher-Scoring es

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}),$$

siendo $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ la matriz de información de Fisher evaluada en $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Sea $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Como

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_1^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ \mathbf{0} & F_{\sigma_2^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \end{pmatrix}$$

tiene estructura en bloques, entonces se puede separar la ecuación de actualización en dos; es decir,

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}), \quad \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}).$$

No es difícil comprobar que para el actual modelo, tanto las puntuaciones, como los elementos de la matriz de información de Fisher, pueden escribirse como sumas de elementos correspondientes a cada nivel d

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\beta &= \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}), \\ S_{\sigma_0^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}), \\ S_{\sigma_1^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}), \\ S_{\sigma_2^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{\beta\beta} = \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d, \quad \mathbf{F}_{\sigma_k^2 \beta} = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \}, & F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \}, \\ F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \}, & F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \}, \\ F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \}, & F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{J}_{n_d} = \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t$ y $\mathbf{J}_{n_{di}} = \text{diag} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t)$.

Del mismo modo y usando las fórmulas (2.4) y (2.5), relativas a $\mathbf{w}_{n_{di}}$, w_{di} , γ_{di} y \mathbf{V}_d^{-1} , se puede llegar a escribir cada uno de los elementos del vector de puntuaciones y cada uno de los elementos de la matriz de información de Fisher, como sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d

$$S_{\beta} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right], \quad (2.12)$$

$$S_{\sigma_0^2} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} - \gamma_{di}) - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \quad (2.13)$$

$$S_{\sigma_1^2} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right]^2, \quad (2.14)$$

$$S_{\sigma_2^2} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di})^2 \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \quad (2.15)$$

donde

$$\boldsymbol{\varsigma}_{di} = \mathbf{y}_{di} - \mathbf{X}_{di} \boldsymbol{\beta} \quad \text{y} \quad \delta_d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d.$$

Las expresiones desarrolladas de los elementos de la matriz de información de Fisher son

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\beta\beta} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \triangleq \mathbf{Q}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} &= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(n_{di} + \gamma_{di}(\gamma_{di} - 2) \right) - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \right. \\ &\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} = \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right]^2, \quad (2.20)$$

$$F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right], \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Los cálculos de las anteriores expresiones pueden verse en el apéndice A, donde se da una versión más detallada de los pasos realizados.

2.4. Método de la máxima verosimilitud residual (REML)

Considérese el modelo propuesto en (2.1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_n^{-1/2}\mathbf{e}.$$

La estimación máximo verosímil residual trata de reducir el sesgo que aparece en los estimadores de máxima verosimilitud de las componentes de la varianza. Para ello se transforma el vector \mathbf{y} , en dos vectores independientes \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 , donde se desea que la distribución de \mathbf{y}_1 no dependa del efecto fijo $\boldsymbol{\beta}$. Para un mayor detalle sobre la descripción de este método, véase la sección 1.4.

Supóngase que $rg(\mathbf{X}) = p$ y considérense los vectores $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^t \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$ tales que

$$\mathbf{y}_1 \sim \mathcal{N}_{n-p}(\mathbf{0}, \mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}), \quad \mathbf{y}_2 \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})$$

son independientes. Sea $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t$. La logverosimilitud de \mathbf{y}_1 es

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}_1,$$

donde $\mathbf{V} = \sigma_0^2 \mathbf{V}_0^\circ + \sigma_1^2 \mathbf{V}_1^\circ + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2^\circ = \sigma_0^2 \text{diag}(\mathbf{W}_d^{-1}) + \sigma_1^2 \text{diag}(\mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t) + \sigma_2^2 \text{diag}(\text{diag}(\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t))$.

Derivando parcialmente respecto de $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ se obtienen las componentes del vector de puntuaciones $\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})$

$$S_{\sigma_i^2} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad i = 0, 1, 2,$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t$.

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j^2} \mathbf{P} = -\mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t = -\mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P}, \quad j = 0, 1, 2,$$

las derivadas parciales segundas, que dan lugar a los elementos de la matriz Hessiana son

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \} - \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Tomando esperanzas, cambiando el signo, teniendo en cuenta que $\mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{0}$, $\mathbf{P} \mathbf{V} \mathbf{P} = \mathbf{P}$ y el resultado enunciado en (1.15), se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher

$$\begin{aligned} F_{\sigma_j^2 \sigma_i^2} &= -E \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} \right] = -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \} + \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{P} \mathbf{V} \} + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{X}^t \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \mathbf{P} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \} + \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \} = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \mathbf{V}_j^\circ \mathbf{P} \mathbf{V}_i^\circ \}, \quad i, j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Por tanto las componentes del vector de puntuaciones y los elementos de la matriz de información de Fisher son

$$\begin{aligned} S_{\sigma_0^2} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{W}_d^{-1}) \} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{W}_d^{-1}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ S_{\sigma_1^2} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ S_{\sigma_2^2} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\sigma_0^2\sigma_0^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{W}_d^{-1}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{W}_d^{-1})\right\}, & F_{\sigma_0^2\sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{W}_d^{-1}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_d})\right\}, \\
F_{\sigma_0^2\sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{W}_d^{-1}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_{di}})\right\}, & F_{\sigma_1^2\sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_d})\right\}, \\
F_{\sigma_1^2\sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_{di}})\right\}, & F_{\sigma_2^2\sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left\{\mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D}(\mathbf{J}_{n_{di}})\right\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{J}_{n_d} = \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t$ y $\mathbf{J}_{n_{di}} = \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d}(\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t)$.

La fórmula de actualización mediante el algoritmo de Fisher-Scoring es

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}),$$

siendo $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})$ y $\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)})$ la matriz de información de Fisher y el vector de puntuaciones, respectivamente, evaluados en $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$.

La salida del algoritmo Fisher-Scoring proporciona la estimación máximo verosímil residual de $\boldsymbol{\sigma}$. Si se sustituye la citada estimación en la función de verosimilitud de \mathbf{y}_2 , se le da el carácter de constante y se maximiza en $\boldsymbol{\beta}$, se obtiene el estimador REML de $\boldsymbol{\beta}$. La función de logverosimilitud de \mathbf{y}_2 es

$$l(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}| - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}).$$

Derivando parcialmente respecto de $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a cero, se obtiene

$$0 = \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}),$$

con lo que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{REML} = \left(\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{y}_2 = \left(\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y},$$

donde $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{V}_0^\circ + \hat{\sigma}_1^2 \mathbf{V}_1^\circ + \hat{\sigma}_2^2 \mathbf{V}_2^\circ$ y $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ son los estimadores REML de $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

El teorema 1.4.1 asegura que $\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$, y por tanto se puede comprobar que para el actual modelo, tanto las puntuaciones, como los elementos de la matriz de información de Fisher pueden escribirse como sumas de elementos correspondientes a cada nivel d ; es decir,

$$\begin{aligned}
S_{\sigma_0^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D [\text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} - \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \}] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d - 2 \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right], \\
S_{\sigma_1^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d - 2 \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right], \\
S_{\sigma_2^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D [\text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} - \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \}] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d - 2 \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right]. \\
F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} - 2 \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \} \right. \\
&+ \left. \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right], \\
F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - 2 \sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \right. \\
&+ \left. \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right], \\
F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} - 2 \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \} \right. \\
&+ \left. \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - 2 \sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right], \\
F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - 2 \sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right], \\
F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d=1}^D \operatorname{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} - 2 \sum_{d=1}^D \operatorname{tr} \{ \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q} \right\} \right],
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{Q} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} = (\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d)^{-1}$. En (2.16) se encuentra desarrollada \mathbf{Q}^{-1} .

Del mismo modo y usando las fórmulas (2.4) y (2.5), relativas a $\mathbf{w}_{n_{di}}$, w_{di} , γ_{di} y \mathbf{V}_d^{-1} , se puede escribir las puntuaciones y los elementos de la matriz de información de Fisher como sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d

$$S_{\sigma_0^2} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left[s_1 - \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{s}_2 \mathbf{Q} \} \right] + \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[s_3 - \frac{2}{\sigma_0^2} s_4 \mathbf{Q} s_5 + \frac{1}{\sigma_0^4} s_5^t \mathbf{Q} s_6 \mathbf{Q} s_5 \right], \quad (2.23)$$

$$S_{\sigma_1^2} = -\frac{1}{2\sigma_1^2} s_7 + \frac{1}{2\sigma_1^4} \left[s_8 - \frac{2}{\sigma_0^2} s_9 \mathbf{Q} s_5 + \frac{1}{\sigma_0^4} s_5^t \mathbf{Q} s_{10} \mathbf{Q} s_5 \right], \quad (2.24)$$

$$S_{\sigma_2^2} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left[s_{11} + \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{s}_{12} \mathbf{Q} \} \right] + \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[s_{13} - \frac{2}{\sigma_0^2} s_{14} \mathbf{Q} s_5 + \frac{1}{\sigma_0^4} s_5^t \mathbf{Q} s_{15} \mathbf{Q} s_5 \right], \quad (2.25)$$

$$F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} = \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[f_1 - \frac{2}{\sigma_0^2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} \} + \frac{1}{\sigma_0^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.26)$$

$$F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} = \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[f_4 - \frac{2}{\sigma_1^2} f_5 + \frac{1}{\sigma_1^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} \mathbf{f}_6 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.27)$$

$$F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[f_7 - \frac{2}{\sigma_0^2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_8 \mathbf{Q} \} + \frac{1}{\sigma_0^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} \mathbf{f}_9 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.28)$$

$$F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} = \frac{1}{2\sigma_1^4} \left[f_{10} - \frac{2}{\sigma_1^2} f_{11} + \frac{1}{\sigma_1^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_6 \mathbf{Q} \mathbf{f}_6 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.29)$$

$$F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{2\sigma_1^4} \left[f_{12} - \frac{2}{\sigma_0^2} f_{13} + \frac{1}{\sigma_0^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_6 \mathbf{Q} \mathbf{f}_9 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.30)$$

$$F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{2\sigma_0^4} \left[f_{14} - \frac{2}{\sigma_0^2} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_{15} \mathbf{Q} \} + \frac{1}{\sigma_0^4} \operatorname{tr} \{ \mathbf{f}_9 \mathbf{Q} \mathbf{f}_9 \mathbf{Q} \} \right], \quad (2.31)$$

donde

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} - \gamma_{di}) - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right], \\
s_2 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_3 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \\
s_4 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_5 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_6 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_7 &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \frac{1}{\sigma_1^2} \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right], \\
s_8 &= \sum_{d=1}^D \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2, \\
s_9 &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{10} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{11} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right], \\
s_{12} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{13} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{14} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
\mathbf{s}_{15} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
f_1 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} - \gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)) - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right)^2 \right], \\
f_2 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} (\gamma_{di}^2 - 3\gamma_{di} + 3) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_3 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
\mathbf{f}_4 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right], \\
\mathbf{f}_5 &= \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \cdot \mathbf{Q} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right\}, \\
\mathbf{f}_6 &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
\mathbf{f}_7 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \\
&\cdot \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
f_9 &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \left. \right], \\
f_{10} &= \sum_{d=1}^D \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2, \\
f_{11} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right], \\
f_{12} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{13} &= \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right] \mathbf{Q} \left[\left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right] \right\}, \\
f_{14} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \right], \\
f_{15} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. - \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

Los cálculos detallados de las anteriores expresiones pueden verse en el apéndice A.

2.5. Método de la máxima verosimilitud residual con parametrización alternativa

Considérese el modelo propuesto en (2.1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_n^{-1/2}\mathbf{e},$$

en el que se propone la siguiente reparametrización

$$\sigma^2 = \sigma_0^2, \quad \varphi_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2}. \quad (2.32)$$

Supóngase que $rg(\mathbf{X}) = p$, se definen los vectores $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^t \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$ tal que

$$\mathbf{y}_1 \sim \mathcal{N}_{n-p}(\mathbf{0}, \mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}), \quad \mathbf{y}_2 \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})$$

son independientes. Sean $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^2, \varphi_1, \varphi_2)^t$ y $\mathbf{V} = \sigma^2 (\mathbf{V}_0^\circ + \varphi_1 \mathbf{V}_1^\circ + \varphi_2 \mathbf{V}_2^\circ) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$. Para el método de la máxima verosimilitud residual, la presente parametrización da lugar a la logverosimilitud

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\sigma}) &= -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2}(n-p) \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}_1^t (\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}_1 \\ &= -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2}(n-p) \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t$. Para un desarrollo más detallado véase la sección 1.4.

Derivando parcialmente respecto de σ^2 , φ_1 y φ_2 se obtienen las componentes del vector de puntuaciones

$$\begin{aligned} S_{\sigma^2} &= -\frac{n-p}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ S_{\varphi_1} &= -\frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ S_{\varphi_2} &= -\frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{J}_{n_d} = \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t$ y $\mathbf{J}_{n_{di}} = \text{diag}(\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t)$. Dado que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \mathbf{P} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_j^2} \mathbf{P} = -\mathbf{K}(\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t \mathbf{K}(\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t = -\mathbf{P} \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t \mathbf{P}, \quad j = 1, 2,$$

las segundas derivadas parciales de la función de log verosimilitud, que dan lugar a los elementos de la matriz Hessiana son

$$\begin{aligned} H_{\sigma^2 \sigma^2} &= \frac{n-p}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\sigma^2 \varphi_1} &= -\frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\sigma^2 \varphi_2} &= -\frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\varphi_1 \varphi_1} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\varphi_1 \varphi_2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \mathbf{y}, \\ H_{\varphi_2 \varphi_2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}}) \mathbf{P} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Tomando esperanzas, cambiando el signo y teniendo en cuenta que $\mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P} = \mathbf{P}$, se obtienen los elementos de la matriz de información de Fisher,

$$\begin{aligned} F_{\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{n-p}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^4} \text{tr}\{\mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\}, & F_{\sigma^2\varphi_1} &= \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\}_{1 \leq d \leq D}, \\ F_{\sigma^2\varphi_2} &= \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\}_{1 \leq d \leq D}, & F_{\varphi_1\varphi_1} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\}_{1 \leq d \leq D}, \\ F_{\varphi_1\varphi_2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_d})\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\}_{1 \leq d \leq D}, & F_{\varphi_2\varphi_2} &= \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\mathbf{P} \text{diag}(\mathbf{J}_{n_{di}})\}_{1 \leq d \leq D}. \end{aligned}$$

Observación 2.5.1. De la ecuación $S_{\sigma^2} = 0$, se obtiene

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad (2.33)$$

lo cual permitiría introducir un algoritmo que actualice σ^2 con (2.33) y $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^t$ con

$$\boldsymbol{\varphi}^{k+1} = \boldsymbol{\varphi}^k + \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^k)^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^k),$$

donde $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^{(k)})$ y $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^{(k)})$ son la matriz de información de Fisher y el vector de puntuaciones, respectivamente, evaluados en $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}$,

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} F_{\varphi_1\varphi_1} & F_{\varphi_1\varphi_2} \\ F_{\varphi_2\varphi_1} & F_{\varphi_2\varphi_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} S_{\varphi_1} \\ S_{\varphi_2} \end{bmatrix}$$

La salida del anterior algoritmo proporciona la estimación máximo verosímil residual de $\boldsymbol{\sigma}$. Si se sustituye la citada estimación en la función de verosimilitud de \mathbf{y}_2 , se le da el carácter de constante y se maximiza en $\boldsymbol{\beta}$, se obtiene el estimador REML de $\boldsymbol{\beta}$. La función de logverosimilitud de \mathbf{y}_2 es

$$l(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}| - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}).$$

Derivando parcialmente respecto de $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a cero, se obtiene

$$0 = \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}),$$

con lo que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{REML} = (\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{y}_2 = (\mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y},$$

donde $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{V}_0^\circ + \hat{\varphi}_1 \mathbf{V}_1^\circ + \hat{\varphi}_2 \mathbf{V}_2^\circ) = \hat{\sigma}^2 \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ y $\hat{\sigma}^2, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ son los estimadores REML de $\sigma^2, \varphi_1, \varphi_2$.

En el teorema 1.4.1 se afirma que $\mathbf{P} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$. Por tanto se puede comprobar que, para la actual parametrización del modelo, tanto las puntuaciones como los elementos de la matriz de información de Fisher, se pueden escribir como sumas de elementos correspondientes a cada nivel d . Para esto es necesario poder expresar $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ del mismo modo que se expresó \mathbf{V}^{-1} en (2.5).

Se tiene que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{W}_n^{-1} + \varphi_1 \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_1^t + \varphi_2 \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_2^t = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_D),$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_d &= \mathbf{W}_d^{-1} + \varphi_1 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \varphi_2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) = \varphi_1 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \mathbf{C}_d, \quad d = 1, \dots, D, \\ \mathbf{W}_d &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{W}_{di}), \quad \mathbf{W}_{di} = \text{diag}_{1 \leq j \leq n_{di}} (w_{dij}), \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d, \\ \mathbf{C}_d &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\varphi_2 \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t + \mathbf{W}_{di}^{-1}) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}), \quad d = 1, \dots, D. \end{aligned}$$

Para calcular $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_D^{-1})$ es necesario conocer \mathbf{C}_d^{-1} y en consecuencia es preciso calcular previamente \mathbf{C}_{di}^{-1} . Para calcularlos se utiliza el resultado estándar de inversión de matrices

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^t\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^t\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

(véase, e.g. Rao (1973), p. 33). Este resultado se aplica dos veces; en primer lugar para calcular \mathbf{C}_{di}^{-1} y posteriormente para poder obtener $\boldsymbol{\Sigma}_d^{-1}$.

Para $\mathbf{C}_{di}^{-1} = (\varphi_2 \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t + \mathbf{W}_{di}^{-1})^{-1}$, se hace $\mathbf{A} = \mathbf{W}_{di}^{-1}$, $\mathbf{u} = \varphi_2 \mathbf{1}_{n_{di}}$, $\mathbf{v}^t = \mathbf{1}_{n_{di}}^t$ y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{di}^{-1} &= \mathbf{W}_{di} - \frac{\varphi_2 \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di}}{1 + \varphi_2 \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}} = \mathbf{W}_{di} - \frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2 w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \\ &= \mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{C}_d^{-1} = \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right).$$

Para $\boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} = (\varphi_1 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \mathbf{C}_d)^{-1}$, se aplica de nuevo el anterior resultado para la inversión de matrices, siendo ahora $\mathbf{A} = \mathbf{C}_d$, $\mathbf{u} = \varphi_1 \mathbf{1}_{n_d}$, $\mathbf{v}^t = \mathbf{1}_{n_d}^t$ y se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}^{-1}) - \frac{\varphi_1 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}^{-1}) \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}^{-1})}{1 + \varphi_1 \mathbf{1}_{n_d}^t \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}^{-1}) \mathbf{1}_{n_d}} \\ &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{C}_{di}^{-1}) - \frac{\varphi_1}{1 + \varphi_1 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t], \quad (2.34) \end{aligned}$$

donde $\delta_d = \frac{\varphi_1}{1 + \varphi_1 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}$ y γ_{di} coinciden con lo ya definido en (2.4).

Por tanto las puntuaciones y los elementos de la matriz de Fisher son

$$\begin{aligned}
S_{\varphi_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \left(\mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \right) \\
&+ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d - 2 \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right], \\
S_{\varphi_2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \left[\text{tr} \left\{ \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \right\} - \text{tr} \left\{ \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \right] \\
&+ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d - 2 \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right], \\
F_{\varphi_1\varphi_1} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\}, \\
F_{\varphi_1\varphi_2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\}, \\
F_{\varphi_2\varphi_2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \right\} - \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \right\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{Q}^{(p)} = (\mathbf{X}^t \Sigma^{-1} \mathbf{X})^{-1} = \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Q}$. En (2.16) se presenta una versión desarrollada de \mathbf{Q}^{-1} . Además por la ecuación (2.33) se tiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-p} \left[\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d - \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d \right) \right].$$

Del mismo modo y usando las fórmulas (2.4) y (2.34), relativas a $\mathbf{w}_{n_{di}}$, w_{di} , γ_{di} y Σ_d^{-1} , se puede

llegar a escribir las puntuaciones y los elementos de la matriz de información de Fisher como sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d

$$S_{\varphi_1} = -\frac{1}{2\varphi_1} s_{1,p} + \frac{1}{2\sigma^2\varphi_1^2} \left[s_{2,p} - 2\mathbf{s}_{3,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{4,p} + \mathbf{s}_{4,p}^t\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{5,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{4,p} \right], \quad (2.35)$$

$$S_{\varphi_2} = -\frac{1}{2} \left[s_{6,p} - \text{tr} \left\{ \mathbf{s}_{7,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\} \right] \quad (2.36)$$

$$+ \frac{1}{2\sigma^2} \left[s_{8,p} - 2\mathbf{s}_{9,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{4,p} + \mathbf{s}_{4,p}^t\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{10,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{4,p} \right], \quad (2.37)$$

$$F_{\varphi_1\varphi_1} = \frac{1}{2\varphi_1^2} f_{1,p} - \frac{1}{\varphi_1^3} \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{2,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\} + \frac{1}{2\varphi_1^4} \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{3,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{f}_{3,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\}, \quad (2.38)$$

$$F_{\varphi_1\varphi_2} = \frac{1}{2\varphi_1^2} f_{4,p} - \frac{1}{\varphi_1^2} \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{5,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\} + \frac{1}{2\varphi_1^2} \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{6,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{f}_{3,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\}, \quad (2.39)$$

$$F_{\varphi_2\varphi_2} = \frac{1}{2} f_{7,p} - \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{8,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \mathbf{f}_{6,p}\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{f}_{6,p}\mathbf{Q}^{(p)} \right\}. \quad (2.40)$$

Además por la ecuación (2.33) se tiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-p} \left[s_{11,p} - \mathbf{s}_{4,p}^t\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{s}_{4,p} \right], \quad (2.41)$$

donde

$$\mathbf{s}_{1,p} = \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \frac{\delta_d^2}{\varphi_1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right],$$

$$\mathbf{s}_{2,p} = \sum_{d=1}^D \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2,$$

$$\mathbf{s}_{3,p} = \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{4,p} = & \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\ & \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}_{5,p} = \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right],$$

$$\mathbf{s}_{6,p} = \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right],$$

$$\begin{aligned}
s_{7,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{8,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \\
s_{9,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{10,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
s_{11,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di} \cdot} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1,p} &= \sum_{d=1}^D \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2, \\
f_{2,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
f_{3,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
f_{4,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right], \\
f_{5,p} &= \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \left[\left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right\}, \\
f_{6,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
f_{7,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \right], \\
f_{8,p} &= \mathbf{f}_{8,p_1} + \mathbf{f}_{8,p_2}, \\
f_{8,p_1} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{8,p_2} = & \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
& + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
& + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
& \left. - \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

Los cálculos detallados de las anteriores expresiones pueden encontrarse en el apéndice A.

Observación 2.5.2. Basta con deshacer la parametrización realizada en (2.32) para la obtención de $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}^2 \hat{\varphi}_1$, $\hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}^2 \hat{\varphi}_2$ y $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}^2$.

2.6. Método 3 de Henderson (H3)

En esta sección se presenta el *método de ajuste de constantes* para la estimación de las componentes de la varianza. Este método, ya expuesto en 1.5, también es conocido como *método 3 de Henderson* desde su introducción en Henderson (1953). Para aplicar el método H3, se tratan los efectos \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 del modelo (2.1) como efectos fijos y se ajusta el modelo

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_n^{-1/2}\mathbf{e} \quad (2.42)$$

por mínimos cuadrados. Para que el modelo (2.42) de efectos fijos esté determinado, se igualan a cero los parámetros correspondientes al último nivel del segundo factor dentro de cada nivel del primero; es decir, se hace $u_{2,dm_d} = 0$, $d = 1, \dots, D$. Esto equivale a suprimir las columnas $\sum_{j=1}^d m_j$, $d = 1, \dots, D$, de la matriz $\mathbf{Z}_2 = \text{diag} \left(\text{diag} (\mathbf{1}_{n_{di}}) \right)_{1 \leq d \leq D, 1 \leq i \leq m_d}$. Así pues, se usan las matrices de incidencia

$$\mathbf{Z}_1 = \text{diag} (\mathbf{1}_{n_d})_{1 \leq d \leq D} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{Z}}_2 = \text{diag} \left(\text{col} \left[\text{diag} (\mathbf{1}_{n_{di}}), \mathbf{0}_{n_{dm_d} \times (m_d - 1)} \right] \right)_{1 \leq d \leq D},$$

donde $\mathbf{0}_{a_1 \times a_2}$ es una matriz de orden $a_1 \times a_2$ con todos sus elementos iguales a 0.

Aplicando las ecuaciones (1.29) a (1.32) se obtienen los estimadores H3

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y}}{n - \text{rg}(\mathbf{X}^{(3)})} = \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y}}{n - p - M} \\
\hat{\sigma}_2^2 &= \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_2 \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 \left[\text{rg}(\mathbf{X}^{(3)}) - \text{rg}(\mathbf{X}^{(2)}) \right]}{\text{tr}\{\mathbf{L}_2\}} \\
&= \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_2 \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 (M - D)}{\text{tr}\{\mathbf{L}_2\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_1 \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 \left[\text{rg}(\mathbf{X}^{(3)}) - \text{rg}(\mathbf{X}^{(1)}) \right] - \hat{\sigma}_2^2 \text{tr}\{\mathbf{L}_2\}}{\text{tr}\{\mathbf{L}_1\}} \\ &= \frac{\mathbf{y}^t \mathbf{M}_1 \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y} - \hat{\sigma}_0^2 M - \hat{\sigma}_2^2 \text{tr}\{\mathbf{L}_2\}}{\text{tr}\{\mathbf{L}_1\}}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1], \quad \mathbf{X}^{(3)} = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \tilde{\mathbf{Z}}_2], \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_n \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{X}^{(1)} (\mathbf{X}^{(1)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(1)})^{-1} \mathbf{X}^{(1)t} \mathbf{W}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{Z}_1^t \mathbf{M}_1 \mathbf{Z}_1, \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{X}^{(2)} (\mathbf{X}^{(2)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(2)})^{-1} \mathbf{X}^{(2)t} \mathbf{W}, \quad \mathbf{L}_2 = \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{X}^{(3)} (\mathbf{X}^{(3)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(3)})^{-1} \mathbf{X}^{(3)t} \mathbf{W}\end{aligned}$$

Reemplazando las componentes de la varianza $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, por sus estimadores aquí obtenidos $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ en las ecuaciones (2.3), se obtiene el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ y los predictores de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 buscados.

Los estimadores H3 se pueden calcular programando de forma directa las fórmulas anteriores, pero ello obliga a operar con matrices de orden n e invertir matrices de orden $p + M$. Dado que tanto n como $p + M$ son generalmente grandes, este enfoque es computacionalmente ineficiente. En lo sucesivo se describe una forma más eficiente de calcular los estimadores H3.

2.6.1. Cálculos relacionados con \mathbf{M}_1

Se define $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^{(1)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(1)})^{-1} = \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right)^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^t \mathbf{M}_1 \mathbf{y} &= \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{C} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{y} \\ &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{C} \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right)^t \\ \mathbf{L}_1 &= \mathbf{Z}_1^t \mathbf{M}_1 \mathbf{Z}_1 = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}) - \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d] \mathbf{C} \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}] \\ \text{tr}\{\mathbf{L}_1\} &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} w_{di} - \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right)^t \right\},\end{aligned}$$

donde recuerdese que $\mathbf{w}_{n_{di}}^t = \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di}$ y $w_{di} = \sum_{j=1}^{n_{di}} w_{dij} = \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{1}_{n_{di}}$.

2.6.2. Cálculos relacionados con \mathbf{M}_2

Se define $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1)^{-1} = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{d\cdot}^{-1})$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W}$ y

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^{(2)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} & \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X} & \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{11} & \mathbf{B}^{12} \\ \mathbf{B}^{21} & \mathbf{B}^{22} \end{pmatrix},$$

donde $w_{d\cdot} = \sum_{i=1}^{m_d} w_{di} = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{n_{di}} w_{dij}$. Usando el resultado de inversión de matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Sc(\mathbf{A}_{22})^{-1} & -Sc(\mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}Sc(\mathbf{A}_{22})^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}Sc(\mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

donde $Sc(\mathbf{A}_{22})^{-1}$ es la inversa del conocido complemento de Schur, $Sc(\mathbf{A}_{22}) = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{11} &= (\mathbf{X}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{X})^{-1}, \\ \mathbf{B}^{12} &= -\mathbf{B}^{11} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_1 = -\mathbf{B}^{11} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} [w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}], \quad \mathbf{B}^{21} = \mathbf{B}^{12t}, \\ \mathbf{B}^{22} &= \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_1 \\ &= \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} (w_{d\cdot}^{-1}) + \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{w}_{n_d}^t \mathbf{X}_d] \mathbf{B}^{11} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} [w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{w}_{n_d}] \\ &= \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} (w_{d\cdot}^{-1}) + \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} \left[w_{d\cdot}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right] \mathbf{B}^{11} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[w_{d\cdot}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^t \mathbf{P}_1 \mathbf{X} &= \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{X} = \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d - \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d} w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d \\ &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{d=1}^D \left[w_{d\cdot}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \right)^t \right]. \end{aligned}$$

La forma cuadrática es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^t \mathbf{M}_2 \mathbf{y} &= \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{W} [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1] \mathbf{B} [\mathbf{X}^t, \mathbf{Z}_1^t]^t \mathbf{W} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y} - [\mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{22} \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{y} + 2\mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{12} \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{y}] \\ &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{B}^{11} \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right)^t \\ &\quad - \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right) \mathbf{B}^{22} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right)^t \\ &\quad - 2 \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{B}^{12} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right)^t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 &= \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2 = \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1] \mathbf{B} [\mathbf{X}^t, \mathbf{Z}_1^t]^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ &= \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} [\mathbf{X} \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{22} \mathbf{Z}_1^t + \mathbf{X} \mathbf{B}^{12} \mathbf{Z}_1^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{21} \mathbf{X}^t] \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ &= \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{11} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X})^t - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{22} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1)^t \\ &\quad - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{12} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1)^t - \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{21} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X})^t, \end{aligned}$$

Para calcular la traza de L_2 son necesarios los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left\{ \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \begin{pmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{W}_{di}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{dm_d} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}) \right) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di \cdot}) \right), \\
\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left\{ \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \begin{pmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{W}_{di}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{dm_d} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \\ \mathbf{1}_{dm_d} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}] \right) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [w_{di \cdot}] \right), \\
\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X} &= \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left\{ \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \begin{pmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{W}_{di}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{dm_d} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{X}_{di}] \\ \mathbf{X}_{dm_d} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}] \right].
\end{aligned}$$

Finalmente la traza de L_2 es

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{L_2\} &= \text{tr}\left\{\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2\right\} - \text{tr}\left\{\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{11} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X})^t\right\} - \text{tr}\left\{\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 \mathbf{B}^{22} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1)^t\right\} \\
&\quad - 2\text{tr}\left\{\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{B}^{12} (\tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1)^t\right\} = \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} w_{di \cdot} - \sum_{d=1}^D w_{dm_d} \right) - t_{11} - t_{22} - 2t_{12},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}] \mathbf{B}^{11} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d-1} \text{tr} \left\{ \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \right\} = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}}, \\
t_{12} &= -\text{tr} \left\{ \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}] \right] \mathbf{B}^{11} \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [w_{d \cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di \cdot}] \right) \right\} \\
&= -\text{tr} \left\{ \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}] \right] \mathbf{B}^{11} \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [w_{d \cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di \cdot}] \right\} \\
&= -\sum_{d=1}^D w_{d \cdot}^{-1} \text{tr} \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}] \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}_d^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di \cdot}] \right\} \\
&= -\sum_{d=1}^D w_{d \cdot}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di \cdot} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{B}^{11} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{22} &= \text{tr} \left\{ \text{diag} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d-1}{w_{di}} \right] \right) \left[\text{diag} (w_{d\cdot}^{-1}) + \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{w}_{n_d}^t \mathbf{X}_d] \mathbf{B}^{11} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} [w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{w}_{n_d}] \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \text{diag} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d-1}{w_{di}} \right] \right) \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-1} \text{tr} \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}} [w_{di}] \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}^t} [w_{di}] \right\} \\
&+ \text{tr} \left\{ \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} \left[w_{d\cdot}^{-1} \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}} [w_{di}] \mathbf{w}_{n_d}^t \mathbf{X}_d \right] \mathbf{B}^{11} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[w_{d\cdot}^{-1} \mathbf{X}_d^t \mathbf{w}_{n_d} \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}} [w_{di}] \right] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di}^2 + \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-2} \text{tr} \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}} [w_{di}] \mathbf{w}_{n_d}^t \mathbf{X}_d \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}_d^t \mathbf{w}_{n_d} \underset{1 \leq i \leq m_d-1}{\text{col}^t} [w_{di}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di}^2 + \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-2} \left(\mathbf{w}_{n_d}^t \mathbf{X}_d \mathbf{B}^{11} \mathbf{X}_d^t \mathbf{w}_{n_d} \right) \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di}^2 \\
&= \sum_{d=1}^D w_{d\cdot}^{-1} \left\{ \left[1 + w_{d\cdot}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{B}^{11} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right] \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di}^2 \right\},
\end{aligned}$$

2.6.3. Cálculos relacionados con M_3

El objetivo de este apartado es dar una fórmula computacionalmente eficiente de $\mathbf{y}^t M_3 \mathbf{y}$. El primer paso es calcular la inversa de $\mathbf{X}^{(3)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(3)}$. Se tiene que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^{(3)t} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} & \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{X} & \mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{Z} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{11} & \mathbf{D}^{12} \\ \mathbf{D}^{21} & \mathbf{D}^{22} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \tilde{\mathbf{Z}}_2]$. Aplicando el resultado (2.43) de inversion de matrices se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{11} &= (\mathbf{X}^t \mathbf{P}_2 \mathbf{X})^{-1}, \\
\mathbf{D}^{12} &= -\mathbf{D}^{11} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z} \mathbf{G}, \quad \mathbf{D}^{21} = (\mathbf{D}^{12})^t, \\
\mathbf{D}^{22} &= \mathbf{G} + \mathbf{G} \mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{D}^{11} \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{Z} \mathbf{G},
\end{aligned}$$

con $\mathbf{G} = (\mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1}$ y $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{Z} \mathbf{G} \mathbf{Z}^t \mathbf{W}$.

Los elementos de la matriz $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1^t, \tilde{\mathbf{Z}}_2^t]^t \mathbf{W} [\mathbf{Z}_1, \tilde{\mathbf{Z}}_2] = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{11} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{G}^{21} & \mathbf{G}^{22} \end{pmatrix}$ son

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{11} &= \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \mathbf{Z}_1 = \text{diag} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d}} \right) = \text{diag} (w_{d\cdot}), \\
\mathbf{G}^{12} &= \mathbf{Z}_1^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 = \text{diag} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d-1}{w_{di}} \right] \right), \quad \mathbf{G}^{21} = (\mathbf{G}^{12})^t, \\
\mathbf{G}^{22} &= \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Z}}_2 = \text{diag} \left(\underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} \left(\underset{1 \leq i \leq m_d-1}{w_{di}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Los elementos de la matriz $\mathbf{G} = (\mathbf{Z}^t \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}$ son

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{11} &= (\mathbf{G}^{11} - \mathbf{G}^{12}(\mathbf{G}^{22})^{-1}\mathbf{G}^{21})^{-1} \\
&= \left(\text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{d\cdot}) - \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di\cdot}] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [w_{di\cdot}] \right) \right)^{-1} \\
&= \left(\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{d\cdot} - \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di\cdot} \right) \right)^{-1} = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1}), \\
\mathbf{G}_{12} &= -\mathbf{G}_{11} \mathbf{G}^{12} (\mathbf{G}^{22})^{-1} = -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1}) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di\cdot}] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \right) \\
&= -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di\cdot}] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \right) = -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t), \\
\mathbf{G}_{22} &= (\mathbf{G}^{22})^{-1} + (\mathbf{G}^{22})^{-1} \mathbf{G}^{21} \mathbf{G}_{11} \mathbf{G}^{12} (\mathbf{G}^{22})^{-1} = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \right) \\
&+ \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [w_{di\cdot}^{-1}] w_{dm_d}^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [w_{di\cdot}] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \right) \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di\cdot}^{-1}) \right) + \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t).
\end{aligned}$$

Para obtener una expresión computacionalmente eficiente de la matriz $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{Z} \mathbf{G} \mathbf{Z}^t \mathbf{W}$ se realizan algunos cálculos previos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} \mathbf{Z} \mathbf{G} \mathbf{Z}^t \mathbf{W} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d) [\mathbf{Z}_1, \tilde{\mathbf{Z}}_2] \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^t \\ \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \end{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d) \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d) (\mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_{11} \mathbf{Z}_1^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{G}_{12} \tilde{\mathbf{Z}}_2^t + \tilde{\mathbf{Z}}_2 \mathbf{G}_{21} \mathbf{Z}_1^t + \tilde{\mathbf{Z}}_2 \mathbf{G}_{22} \tilde{\mathbf{Z}}_2^t) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d) \\
&= \mathbf{Z}_{11} + \mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{21} + \mathbf{Z}_{22}.
\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{11} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d} w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{W}_d \right) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \mathbf{w}_{n_d} \mathbf{w}_{n_d}^t \right), \\
\mathbf{Z}_{12} &= -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\mathbf{W}_d \mathbf{1}_{n_d} w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \mathbf{W}_d \right) \\
&= -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \mathbf{w}_{n_d} \mathbf{1}_{m_d-1}^t \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{w}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \right) \\
&= -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \mathbf{w}_{n_d} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{w}_{n_{di}}^t], \mathbf{0} \right] \right) \\
&= -\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{w}_{n_{di}}], \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{w}_{n_{di}}^t], \mathbf{0} \right] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{22} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\mathbf{W}_d \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}), \mathbf{0} \right]^t \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di}^{-1}) \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \mathbf{W}_d \right) \\
&+ \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\mathbf{W}_d \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}), \mathbf{0} \right]^t w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \mathbf{W}_d \right) \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{w}_{n_{di}}), \mathbf{0} \right]^t \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di}^{-1}) \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{w}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \right) \\
&+ \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{w}_{n_{di}}), \mathbf{0} \right]^t \mathbf{1}_{m_d-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{w}_{n_{di}}^t), \mathbf{0} \right] \right) \\
&= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left(w_{di}^{-1} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right), \mathbf{0} \right) \\
&+ \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{w}_{n_{di}}], \mathbf{0} \right]^t \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{w}_{n_{di}}^t], \mathbf{0} \right] \right).
\end{aligned}$$

Para calcular la forma cuadrática multivariante $\mathbf{X}^t \mathbf{P}_2 \mathbf{X}$, se realiza la siguiente descomposición en sumandos

$$\mathbf{X}^t \mathbf{P}_2 \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{11} \mathbf{X} - 2\mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{12} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{22} \mathbf{X},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X} &= \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{W}_d) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{X}_d] = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di}, \\
\mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{11} \mathbf{X} &= \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \mathbf{w}_{n_d} \mathbf{w}_{n_d}^t \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{X}_d] \\
&= \sum_{d=1}^D w_{dm_d}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right), \\
\mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{12} \mathbf{X} &= - \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{w}_{n_{di}}], \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{w}_{n_{di}}^t], \mathbf{0} \right] \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{X}_d] \\
&= - \sum_{d=1}^D w_{dm_d}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right), \\
\mathbf{X}^t \mathbf{Z}_{22} \mathbf{X} &= \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left(w_{di}^{-1} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right), \mathbf{0} \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{X}_d] \\
&+ \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t [\mathbf{X}_d^t] \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(w_{dm_d}^{-1} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{w}_{n_{di}}], \mathbf{0} \right]^t \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t [\mathbf{w}_{n_{di}}^t], \mathbf{0} \right] \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\mathbf{X}_d] \\
&= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d-1} w_{di}^{-1} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} + \sum_{d=1}^D w_{dm_d}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right).
\end{aligned}$$

Para obtener una expresión computacionalmente eficiente de la matriz $\mathbf{GZ}^t \mathbf{W} \mathbf{X}$, que forma

parte de D^{12} y D^{22} , se realizan algunos cálculos previos.

$$GZ^tWX = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^t \\ \tilde{Z}_2^t \end{pmatrix} WX = \begin{pmatrix} R_{11} + R_{12} \\ R_{21} + R_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} R_{11} &= G_{11}Z_1^tWX = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1}) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d}^t) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [W_d X_d] = \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[w_{dm_d}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di} \right], \\ R_{12} &= G_{12}\tilde{Z}_2^tWX = - \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\begin{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [W_d X_d] \\ &= - \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [\mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di}] \right] = - \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[w_{dm_d}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di} \right], \\ R_{21} &= G_{21}Z_1^tWX = - \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1}) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d}^t) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [W_d X_d] \\ &= - \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1} \mathbf{w}_{n_d}^t X_d \right] = - \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[w_{dm_d}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di} \right] \right], \\ R_{22} &= G_{22}\tilde{Z}_2^tWX = \left[\text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (w_{di}^{-1}) \right) + \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (w_{dm_d}^{-1} \mathbf{1}_{m_d-1} \mathbf{1}_{m_d-1}^t) \right] \\ &\quad \cdot \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\begin{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d-1} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t), & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} [W_d X_d] \\ &= \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} [w_{di}^{-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di}] \right] + \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[w_{dm_d}^{-1} \sum_{i=1}^{m_d-1} \mathbf{w}_{n_{di}}^t X_{di} \right] \right]. \end{aligned}$$

El cálculo de la matriz

$$A = (X^{(3)t}WX^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} \\ D^{21} & D^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}$$

se hace de la siguiente forma:

$$D^{11} = (X^t P_2 X)^{-1} = (X^t W X - X^t Z_{11} X - 2X^t Z_{12} X - X^t Z_{22} X)^{-1},$$

$$D^{21} = -GZ^tWXD^{11} = [A^{21}, A^{31}]^t, \quad D^{12} = (D^{21})^t = [A^{12}, A^{13}],$$

$$A^{21} = -(G_{11}Z_1^t + G_{12}\tilde{Z}_2^t)WXD^{11} = -(R_{11} + R_{12})D^{11},$$

$$A^{31} = -(G_{21}Z_1^t + G_{22}\tilde{Z}_2^t)WXD^{11} = -(R_{21} + R_{22})D^{11},$$

La matriz D^{22} admite la descomposición

$$D^{22} = G + GZ^tWXD^{11}X^tWZG = \begin{pmatrix} A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{33} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{22} &= \mathbf{G}_{11} + (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12})\mathbf{D}^{11}(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12})^t, & \mathbf{A}^{23} &= \mathbf{G}_{12} + (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12})\mathbf{D}^{11}(\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22})^t, \\ \mathbf{A}^{32} &= \mathbf{G}_{21} + (\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22})\mathbf{D}^{11}(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12})^t, & \mathbf{A}^{33} &= \mathbf{G}_{22} + (\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22})\mathbf{D}^{11}(\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22})^t. \end{aligned}$$

Finalmente, se calcula la forma cuadrática $\mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^t \mathbf{M}_3 \mathbf{y} &= \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{W} [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1, \tilde{\mathbf{Z}}_2] \mathbf{A} [\mathbf{X}^t, \mathbf{Z}_1^t, \tilde{\mathbf{Z}}_2^t]^t \mathbf{W} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{W} \left[\mathbf{X} \mathbf{D}^{11} \mathbf{X}^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{A}^{22} \mathbf{Z}_1^t + \tilde{\mathbf{Z}}_2 \mathbf{A}^{33} \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbf{X} \mathbf{A}^{12} \mathbf{Z}_1^t + 2\mathbf{X} \mathbf{A}^{13} \tilde{\mathbf{Z}}_2^t + 2\mathbf{Z}_1 \mathbf{A}^{23} \tilde{\mathbf{Z}}_2^t \right] \mathbf{W} \mathbf{y} \\ &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \left[\left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{D}^{11} \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \mathbf{A}^{22} \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1}^t \left[\mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right] \mathbf{A}^{33} \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[\mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{A}^{12} \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{A}^{13} \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[\mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{col}_{1 \leq d \leq D}^t \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \mathbf{A}^{23} \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d-1} \left[\mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

2.7. Experimento de simulación para el ajuste del modelo

En esta sección se describen dos experimentos de simulación Monte Carlo diseñados para comparar los métodos de ajuste Henderson 3, máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual (REML).

Para los métodos ML y REML, el criterio de parada del algoritmo de Fisher-Scoring queda determinado por dos parámetros mutuamente excluyentes. El algoritmo se detiene cuando:

- el número de la iteración actual es mayor que el número máximo de iteraciones fijado a 500,
- para cada uno de los estimadores, la diferencia en valor absoluto, del valor de la estimación en una iteración y la anterior es menor que $\epsilon = 0,00001$.

2.7.1. Simulación de muestras. Cálculo de medidas de eficiencia

Las muestras se simulan de la siguiente forma:

- Simulación de la variable explicativa: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, n_{di}$, generar

$$x_{dij} = (b_{di} - a_{di})U_{dij} + a_{di} \quad \text{con} \quad U_{dij} = \frac{j}{n_{di} + 1}, \quad j = 1, \dots, n_{di}.$$

Se toma $a_{di} = 1$, $b_{di} = 1 + \frac{1}{m_d} (m_d(d-1) + i)$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

- Pesos: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, n_{di}$, hacer $w_{dij} = 1/x_{dij}^\ell$, $\ell = 0, 1/2, 1$, (3 posibilidades).

- Simulación de los efectos aleatorios y errores: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, n_{di}$, generar

$$u_{1,d} \sim N(0, \sigma_1^2), \quad u_{2,di} \sim N(0, \sigma_2^2), \quad e_{dij} \sim N(0, \sigma_0^2), \quad \text{con} \quad \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_0^2 = 1.$$

- Simulación de la variable objetivo: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, n_{di}$, generar

$$y_{dij} = \beta x_{dij} + u_{1,d} + u_{2,di} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}, \quad \text{con} \quad \beta = 1.$$

Los pasos del experimentos de simulación son:

1. Simulación de la variable explicativa y los pesos
2. Repetir $K = 10000$ veces ($k = 1, \dots, K$)
 - 2.1. Generar una muestra aleatoria de tamaño $n = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{m_d} n_{di}$ formada a partir de la simulación de la variable objetivo, de los efectos fijos, de los efectos aleatorios y de los errores.
 - 2.2. Calcular $\hat{\beta}_{(k)}$, $\hat{\sigma}_{0,(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{1,(k)}^2$ y $\hat{\sigma}_{2,(k)}^2$ usando los métodos Henderson 3 (H3), máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual con parametrización alternativa (REML).
3. Salida del error cuadrático medio de $\hat{\beta}_{(k)}$, $\hat{\sigma}_{0,(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{1,(k)}^2$ y $\hat{\sigma}_{2,(k)}^2$:

$$EMSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\beta}_{(k)} - \beta)^2, \quad EMSE(\hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{0,(k)}^2 - \sigma_0^2)^2,$$

$$EMSE(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{1,(k)}^2 - \sigma_1^2)^2, \quad EMSE(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{2,(k)}^2 - \sigma_2^2)^2.$$

4. Salida del sesgo de $\hat{\beta}_{(k)}$, $\hat{\sigma}_{0,(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{1,(k)}^2$ y $\hat{\sigma}_{2,(k)}^2$:

$$B(\hat{\beta}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\beta}_{(k)} - \beta), \quad B(\hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{0,(k)}^2 - \sigma_0^2),$$

$$B(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{1,(k)}^2 - \sigma_1^2), \quad B(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{2,(k)}^2 - \sigma_2^2).$$

Para la obtención de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$, se ha elaborado software en el estándar de C++, con los algoritmos correspondientes a los ajustes del modelo (2.1), mediante los métodos Henderson 3 (H3), máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual (REML). También se ha desarrollado software en C++ correspondiente a estos experimentos de simulación.

2.7.2. Experimento 1

El primer experimento de simulación consiste en hacer varias pruebas del experimento del apartado 2.7.1, manteniendo constante el número de niveles y subniveles de los factores aleatorios y variando los tamaños muestrales en los subniveles. Para ello se toman:

- el número de niveles $D = 30$,
- el número de subniveles $m_d = 5$ dentro de cada nivel $d = 1, \dots, D$ y
- el tamaño muestral dentro de cada subnivel $n_{di} = cte$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, variando en cada una de las pruebas.

Se realizan diez pruebas del experimento, para diez grupos de tamaños muestrales, de acuerdo con la tabla 2.7.1.

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_{di}^{(g)}$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$n_d^{(g)}$	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
$n^{(g)}$	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000

Tabla 2.7.1: Grupos de tamaños muestrales. Experimento 1.

Para los métodos de ajuste H3, ML y REML se obtienen los resultados gráficos que se presentan en las figuras 2.1 - 2.10. Las tablas con los valores numéricos se encuentran en el apéndice C.

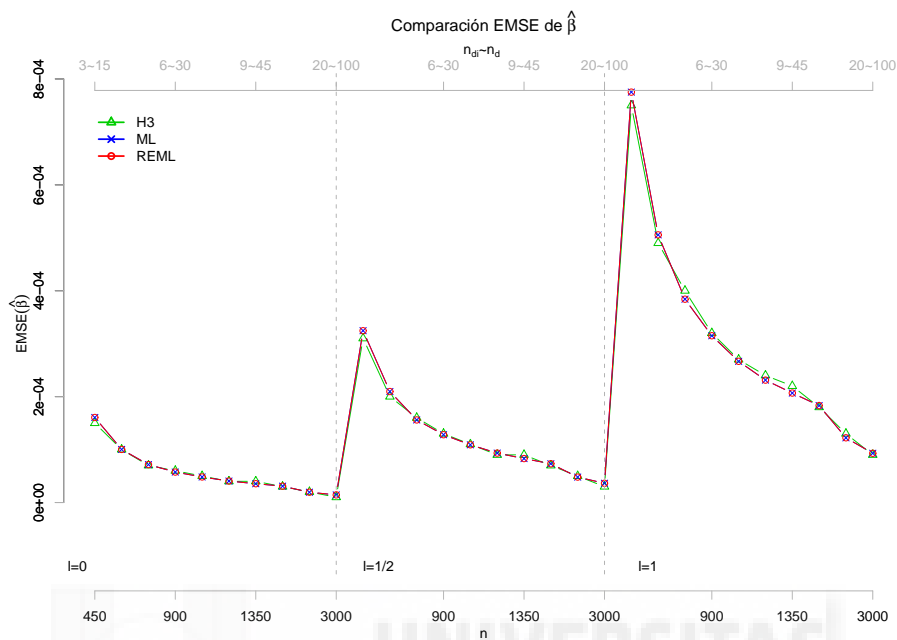


Figura 2.1: Error cuadrático medio de $\hat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

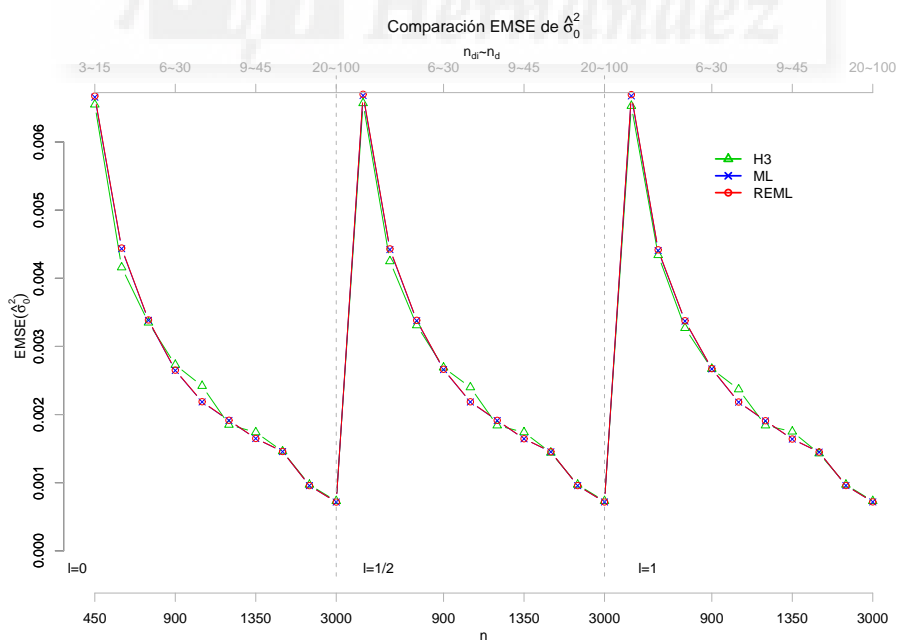


Figura 2.2: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

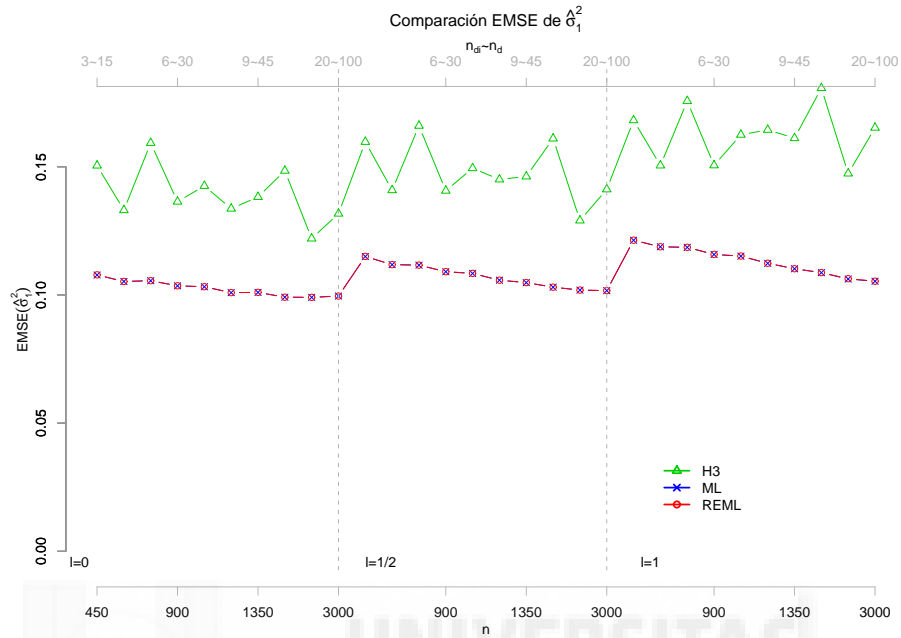


Figura 2.3: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

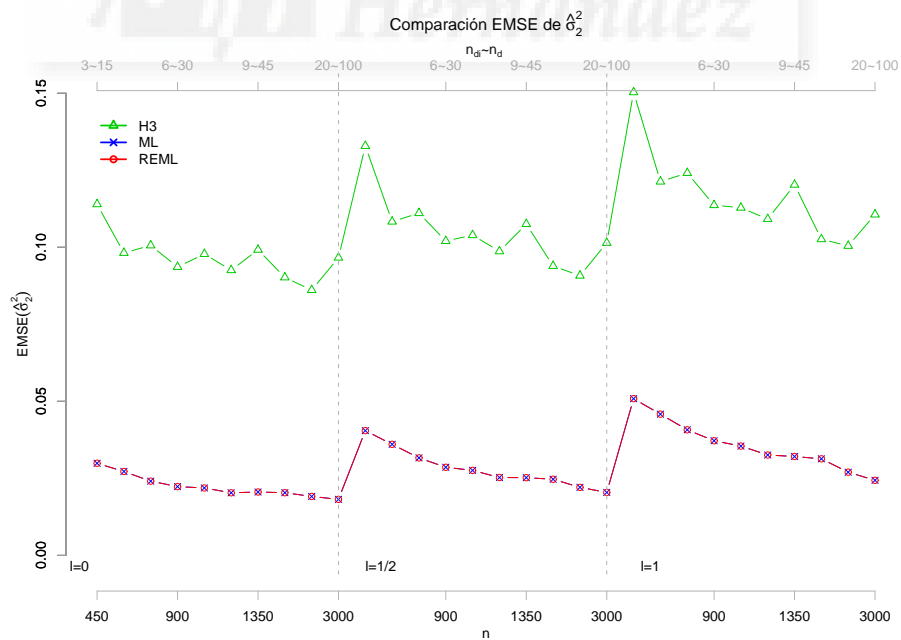


Figura 2.4: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

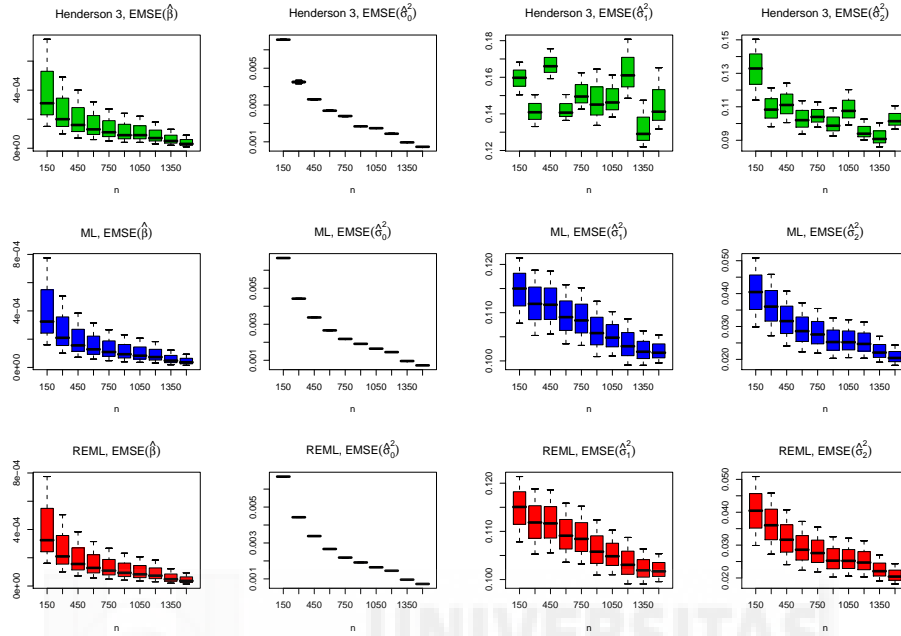


Figura 2.5: Variabilidad del error cuadrático medio de los estimadores

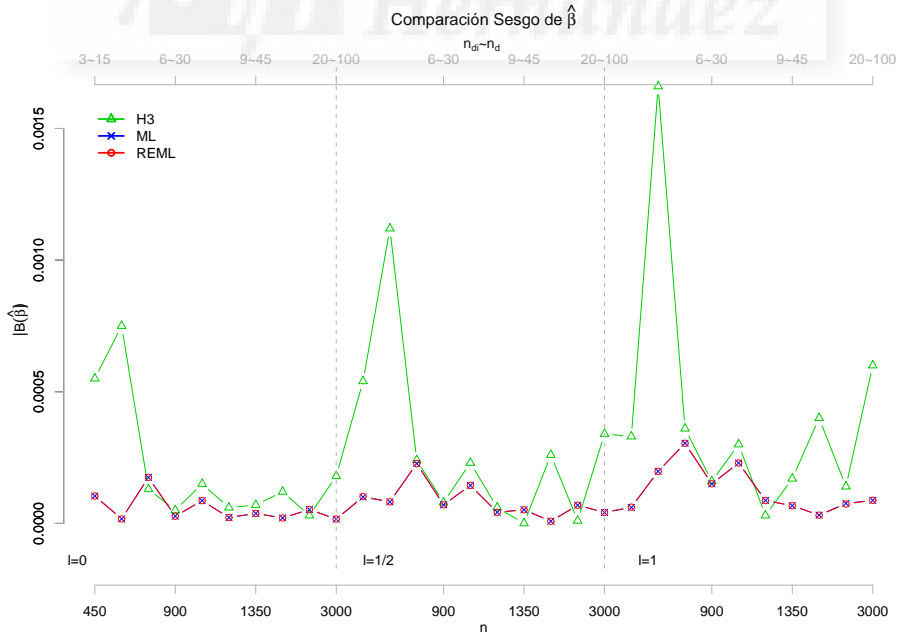


Figura 2.6: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

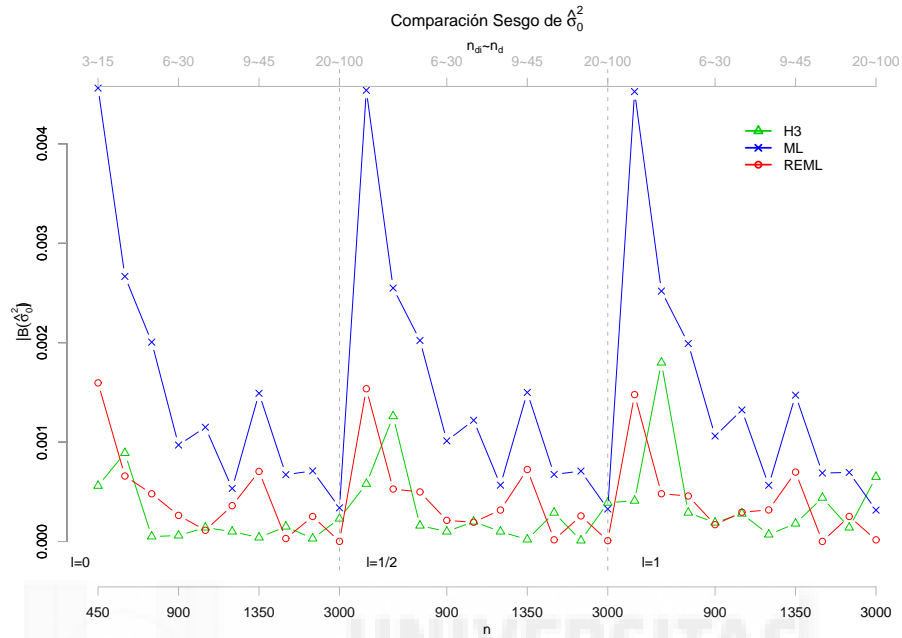


Figura 2.7: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

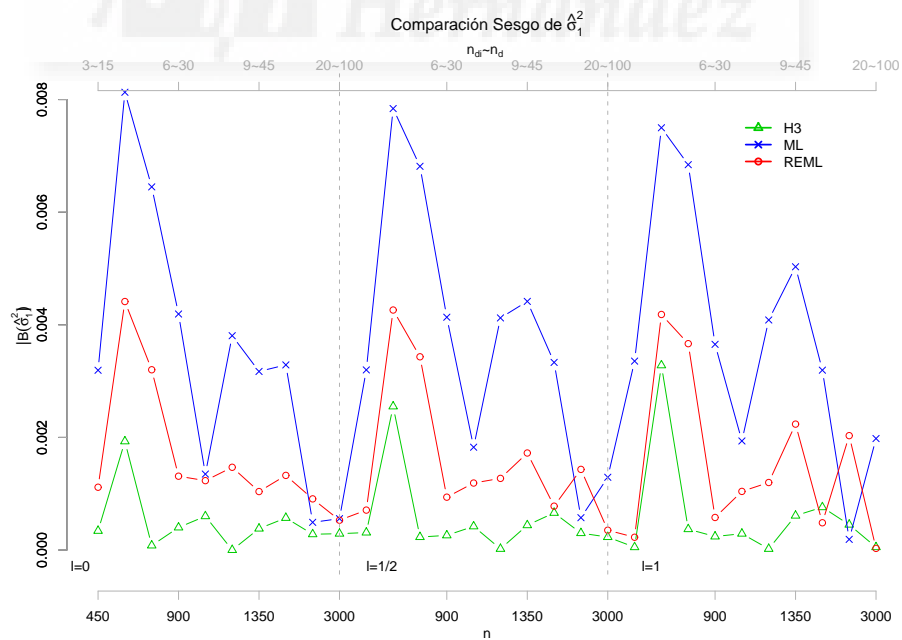


Figura 2.8: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

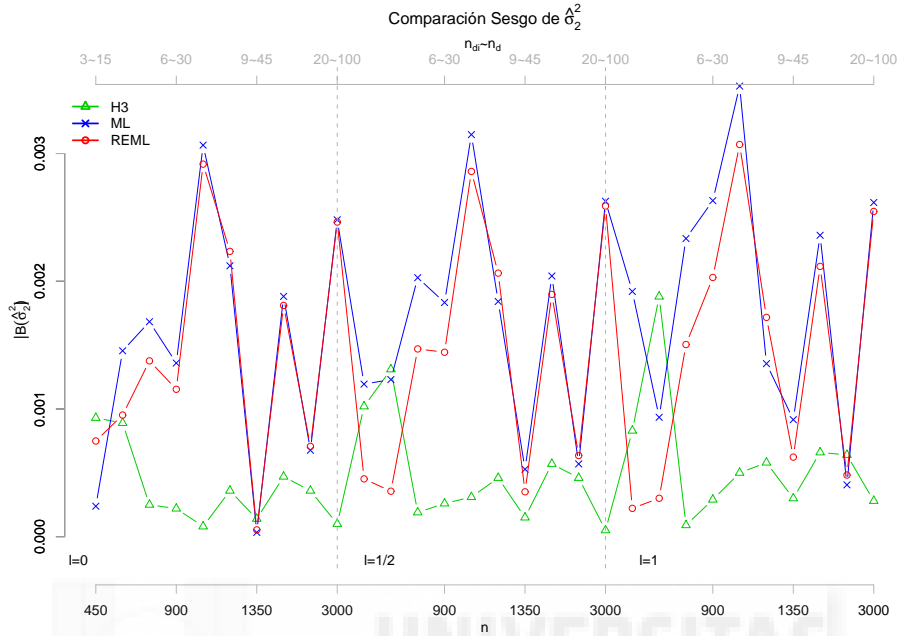


Figura 2.9: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$



Figura 2.10: Sesgo de estimadores para $\ell = 0, 1/2, 1$ en el experimento 1

2.7.3. Experimento 2

El segundo experimento de simulación consiste en la realización de varias pruebas del experimento del apartado 2.7.1, haciendo variar el número de niveles del primer factor aleatorio ($D = \{22, 30, 38, 45, 52, 60, 68, 75, 112, 150\}$) y manteniendo constante tanto el número de subniveles dentro de éste ($m_d = 5$ para $d = 1, \dots, D$) como los tamaños muestrales en los subniveles ($n_{11} = \dots = n_{Dm_D} = 4$). Para ello se realizan diez pruebas del experimento, para diez diferentes grupos de niveles del primer factor aleatorio. Los valores de los tamaños muestrales se presentan en la tabla 2.7.2.

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D^{(g)}$	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
$n_{di}^{(g)}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$n_d^{(g)}$	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
$n^{(g)}$	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000

Tabla 2.7.2: Grupos de tamaños muestrales. Experimento 2.

Para los métodos de ajuste H3, ML y REML se obtienen los resultados gráficos que se presentan en las figuras 2.11 - 2.20. Las tablas con los valores numéricos se encuentran en el apéndice C.

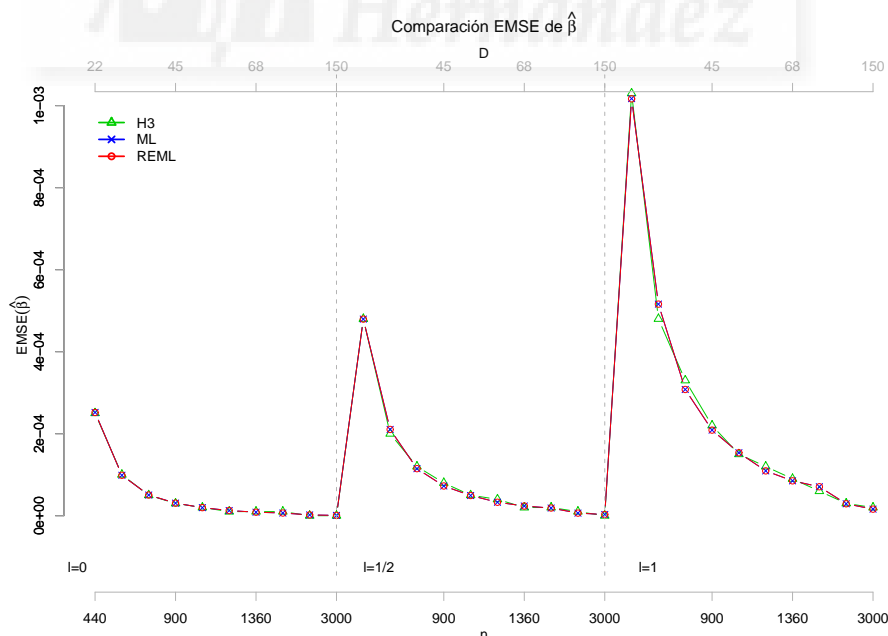


Figura 2.11: Error cuadrático medio de $\hat{\beta}$ para $l = 0, 1/2, 1$

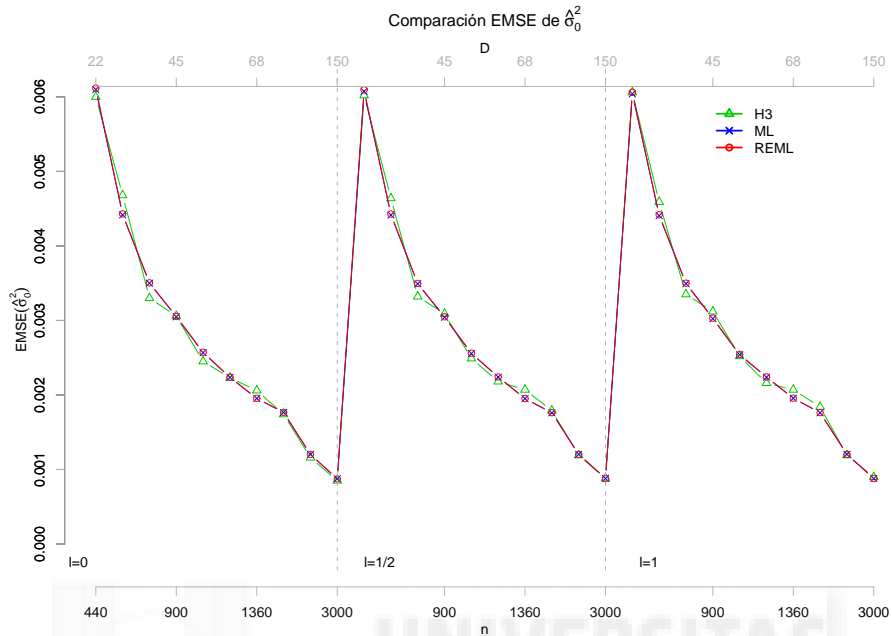


Figura 2.12: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

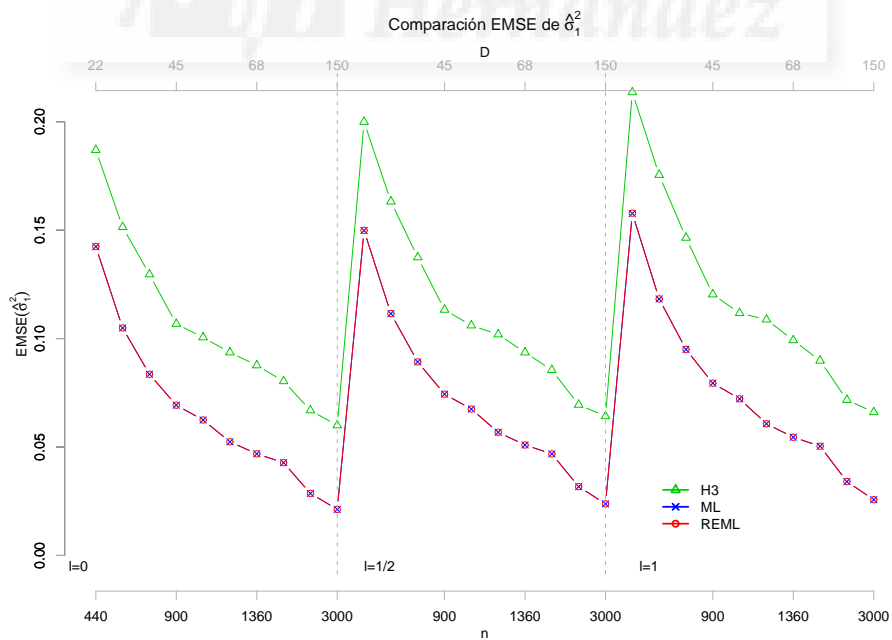


Figura 2.13: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

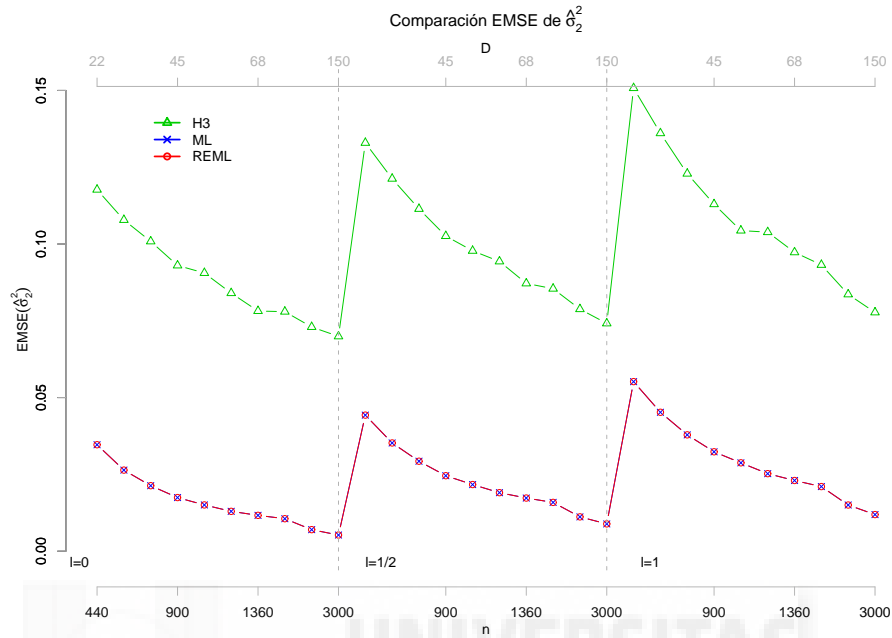


Figura 2.14: Error cuadrático medio de $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

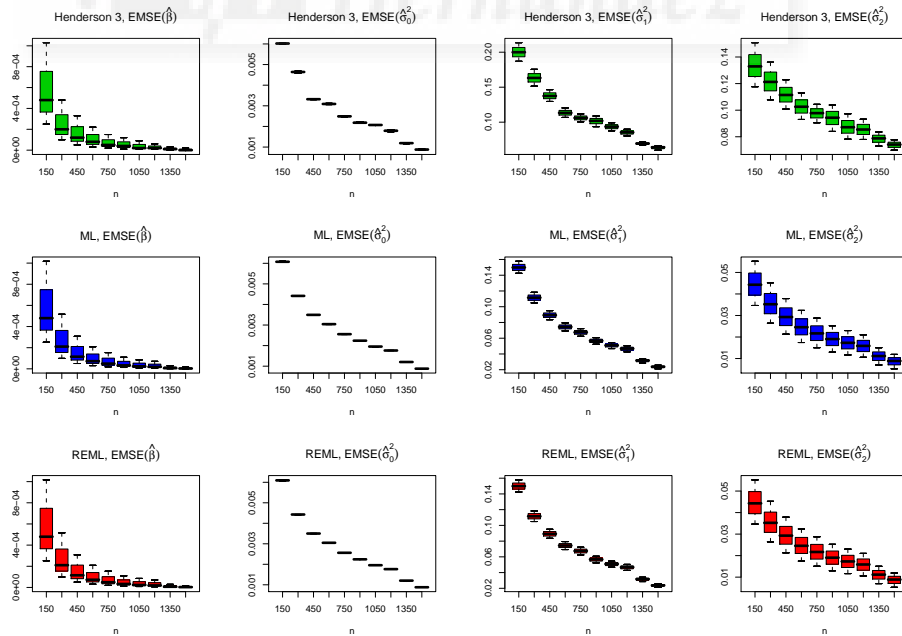


Figura 2.15: Variabilidad del error cuadrático medio de los estimadores

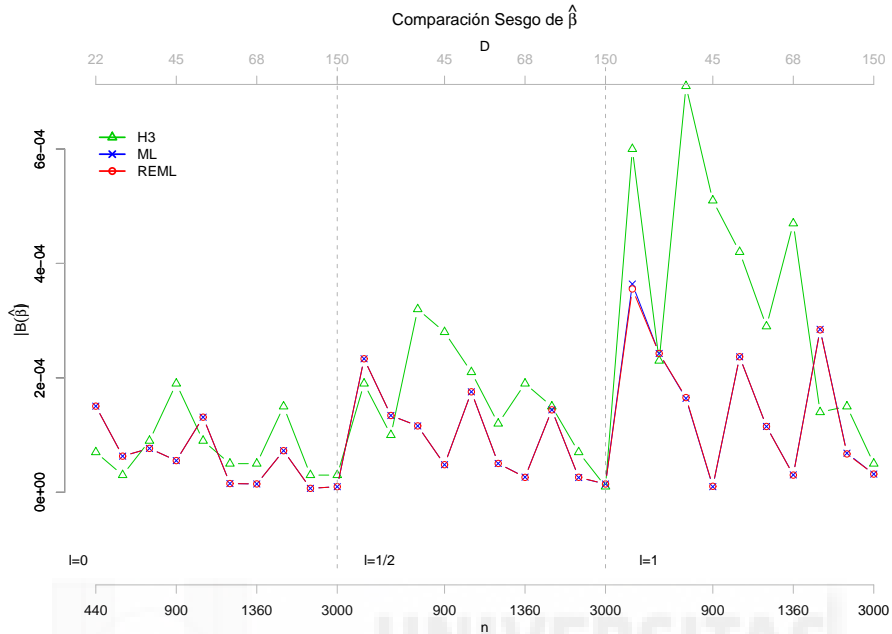


Figura 2.16: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

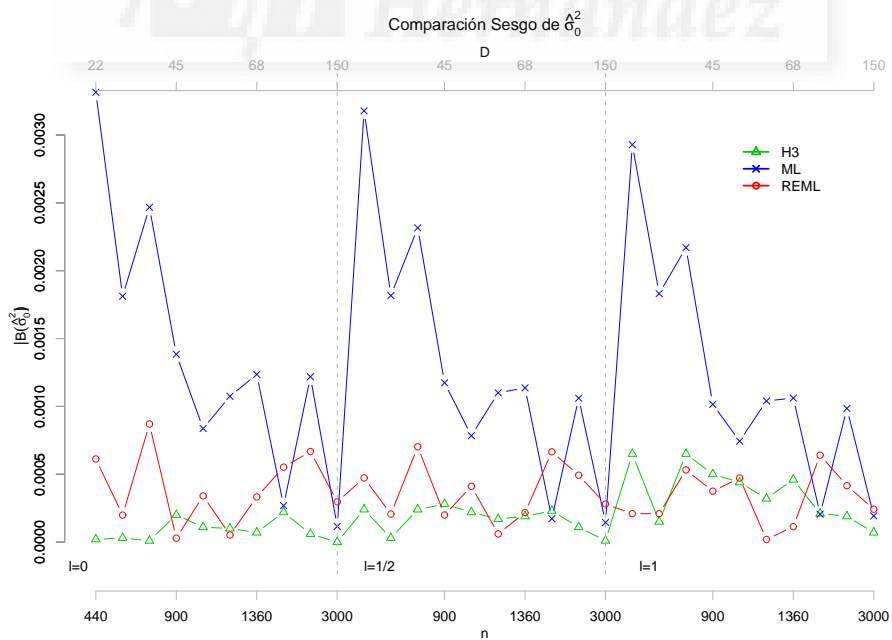


Figura 2.17: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

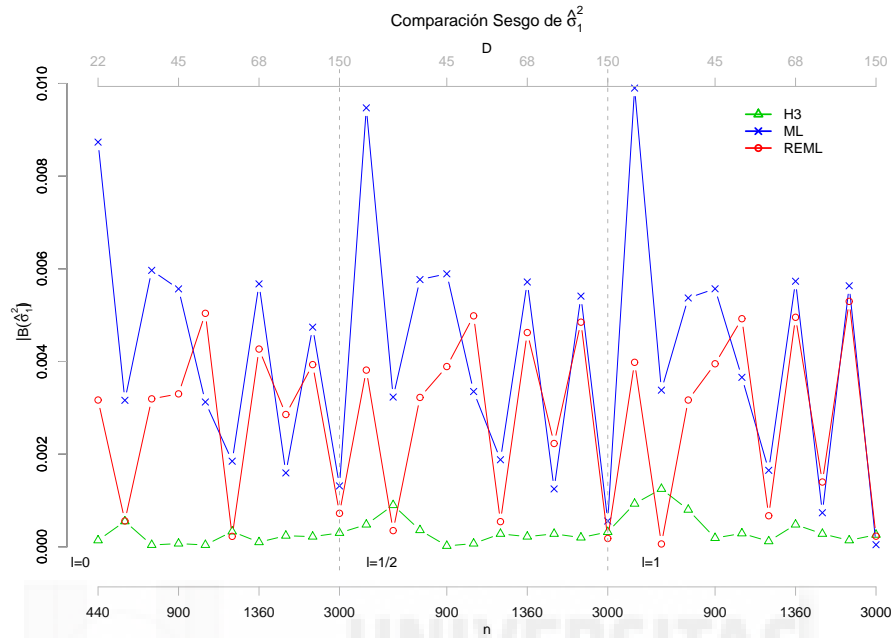


Figura 2.18: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

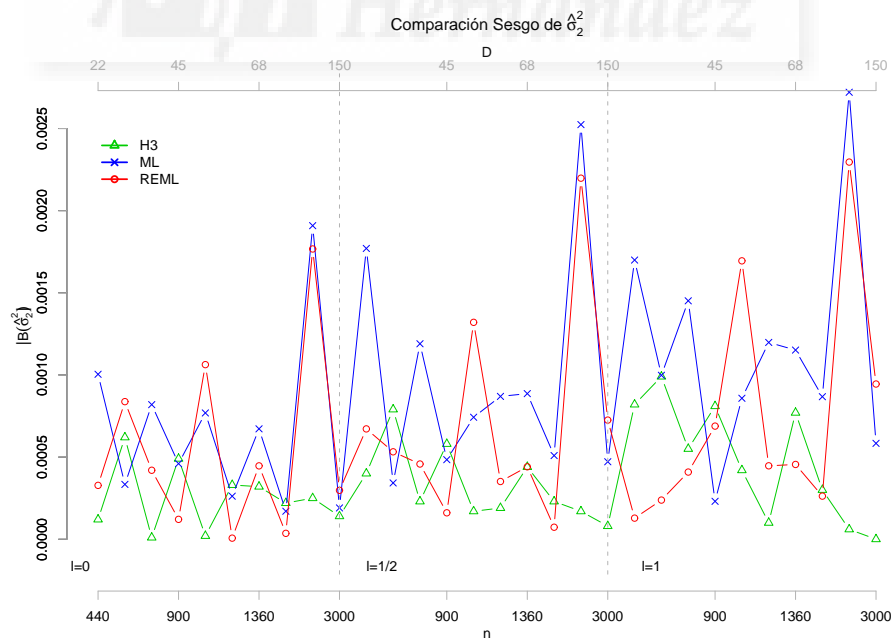


Figura 2.19: Sesgo en valor absoluto de $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$

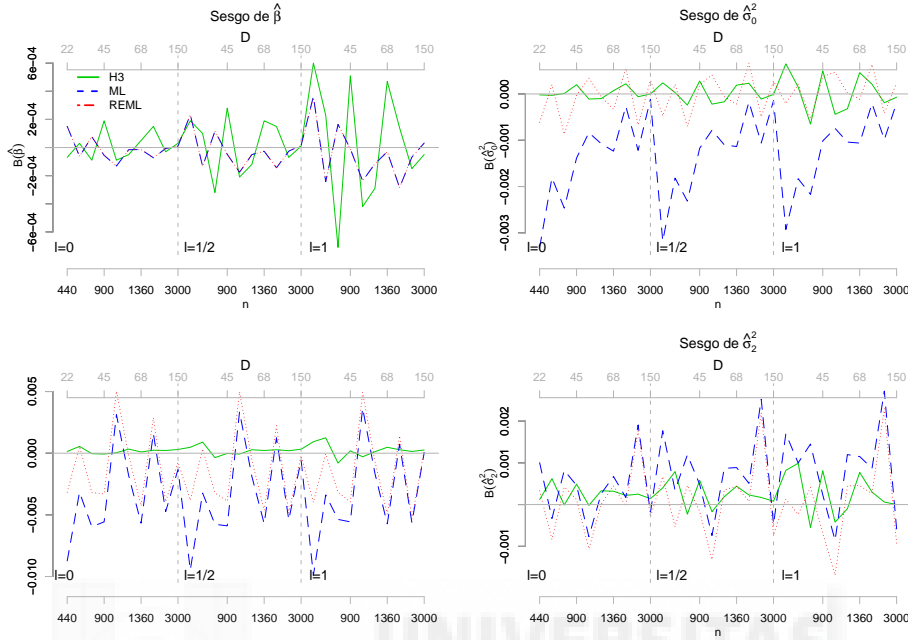


Figura 2.20: Sesgo de estimadores para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2

2.7.4. Conclusiones

En los experimentos de simulación, los estimadores ML y REML se han comportado mejor que los estimadores H3, en lo concerniente al EMSE. Esto queda claramente reflejado en las figuras 2.3 y 2.4, para el experimento 1 y en las figuras 2.13 y 2.14, para el experimento 2.

Entre los dos experimentos de los apartados 2.7.2 y 2.7.3, solamente existen diferencias en cuanto a la reducción asintótica del EMSE para el método H3 (véase 2.13 y 2.14), lo cual no sucede bajo las condiciones del experimento 1 (véase 2.3 y 2.4), donde puede observarse que solamente para los estimadores ML y REML, se produce una reducción asintótica relevante de los EMSE, tanto en presencia como ausencia de homocedasticidad. La existencia de una reducción asintótica de la varianza entre niveles o dominios ($\hat{\sigma}_1^2$) y la varianza entre subniveles o subdominios ($\hat{\sigma}_2^2$), es debido a que en el experimento 2, se aumenta D y se mantienen constantes los tamaños muestrales dentro de los subniveles y por tanto también en los niveles.

Entre los estimadores ML y REML no existen demasiadas diferencias. Si bien los estimadores ML tienen EMSE ligeramente menores que los estimadores REML, no son diferencias a tener en cuenta. Tan solo en el $EMSE(\hat{\beta})$ se puede ver un aumento en la variabilidad por el efecto de la presencia de heterocedasticidad $\ell = \{1/2, 1\}$, como se puede ver en las figuras 2.1 y 2.11. Para tamaños muestrales pequeños en el caso del $EMSE(\hat{\beta})$ y del $EMSE(\hat{\sigma}_2^2)$ existen diferencias entre un fichero con datos homocedásticos y otro con datos heterocedásticos. Mientras que esto no sucede para $EMSE(\hat{\sigma}_0^2)$ y ocurre de forma muy atenuada para $EMSE(\hat{\sigma}_1^2)$. Las diferencias entre el caso homocedástico y los dos heterocedásticos se pueden ver en las figuras 2.5 y 2.15,

para el experimento 1 y el experimento 2, respectivamente. En estas figuras, para cada uno de sus gráficos se presenta la variabilidad del EMSE para cada estimador (columnas) y cada método de estimación (filas) a través de un diagrama box-and-whisker. Para cada uno de los diagramas se presentan diez cajas (una por cada prueba del experimento), donde cada caja representa para ese estimador, método y prueba la variabilidad para cada uno de los tres diferentes valores de ℓ . Así se puede afirmar que para valores muestrales pequeños existen diferencias entre un fichero con datos homocedásticos y otro con datos heterocedásticos.

Con respecto al sesgo los estimadores REML y H3 se han comportado mejor que los estimadores ML. Esto queda claramente reflejado en las figuras 2.7, 2.8 y 2.9. En esta última se observa que el método H3 proporciona estimaciones más insesgadas que los otros dos métodos pero menos precisas, como se muestra en la figura 2.4.

Entre los dos experimentos de los apartados 2.7.2 y 2.7.3, no existen diferencia alguna en cuanto a los métodos de estimación; es decir, las conclusiones que se pueden extraer de un experimento son idénticas para el otro. Solamente existen diferencias en cuanto a la magnitud del sesgo. Bajo las condiciones del experimento 1, se observan valores superiores del sesgo que bajo el experimento 2. Esto indica que el funcionamiento del modelo es más eficiente al aumentar D que al aumentar el valor fijo de n_{di} . El resultado es intuitivo ya que al aumentar D se puede estimar mejor las variabilidades entre dominios y entre subdominios.

Entre los estimadores H3 y REML existen pocas diferencias en el sesgo de $\hat{\sigma}_0^2$. Esto no sucede para $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$, donde se aprecia que la estimación proporcionada por el método H3 es más insesgada que por los otros dos métodos, (véanse las figuras 2.8, 2.9, 2.18 y 2.19). Tampoco se aprecia diferencia entre el sesgo de $\hat{\beta}$ en ML y REML siendo éstos bastante menores que los proporcionados por H3 (véanse las figuras 2.6 y 2.16).

Otro punto a tener en cuenta es, que para tamaños muestrales pequeños, los métodos H3 y REML proporcionan valores similares del sesgo pero de signo contrario. Esto puede verse en la figura 2.10 en los gráficos del sesgo de $\hat{\sigma}_0^2$ y $\hat{\sigma}_1^2$. En esta misma figura se puede observar, que de manera sistemática, el sesgo de los estimadores ML es negativo para $\hat{\sigma}_0^2$ y $\hat{\sigma}_1^2$; es decir, el método ML infraestima estas dos componentes de la varianza.

No se observan diferencias en el sesgo cuando se tratan datos homocedásticos o heterocedásticos a diferencia de lo que ocurre con el EMSE.

Teniendo en cuenta de manera conjunta las dos medidas de eficiencia y los dos experimentos de simulación, se puede decir que el método más competitivo para la estimación del vector de efectos fijos y las componentes de la varianza es la máxima verosimilitud residual (REML), aunque la máxima verosimilitud (ML) proporciona buenos resultados.

A raíz de los resultados obtenidos, en lo sucesivo no se utilizará el método H3 para la estimación de los parámetros del modelo. Pero como se establece en el apartado 1.3 para ML y en el apartado 1.4 para REML, el algoritmo de Fisher-Scoring necesita unos valores iniciales $\theta^{(0)}$ y $\sigma^{(0)}$, respectivamente, para la obtención de los estimadores en la primera iteración. Las estimaciones proporcionadas mediante H3, por su sencillez computacional, hacen de este método un candidato ideal para especificar estos valores de inicio del algoritmo en ML y REML.



Capítulo 3

Predictores BLUP en un modelo lineal mixto con dos factores aleatorios anidados

3.1. Introducción

Sea $\Omega = \{1, \dots, N\}$ una población finita y sea $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^t$ el vector de valores que toma una variable objetivo en las unidades de Ω . Supóngase que se verifica el modelo lineal mixto con D niveles en el primer factor y m_d en el segundo,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_N^{-1/2}\mathbf{e}, \quad (3.1)$$

donde

$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{N \times p}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{1, N \times D} = \text{diag}(\mathbf{1}_{N_d})$, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{2, N \times M} = \text{diag}(\text{diag}(\mathbf{1}_{N_{di}}))$,
 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1, D \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_D)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{2, M \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_2^2 \mathbf{I}_M)$ independientes entre sí y de $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{N \times 1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_N)$, \mathbf{I}_D , \mathbf{I}_M , \mathbf{I}_N , son matrices identidad de ordenes D , $M = \sum_{d=1}^D m_d$ y $N = \sum_{d=1}^D N_d$ respectivamente, $N_d = \sum_{i=1}^{m_d} N_{di}$, $\mathbf{1}_{N_d} = (1, \dots, 1)_{N_d \times 1}^t$, $\mathbf{1}_{N_{di}} = (1, \dots, 1)_{N_{di} \times 1}^t$ y $\mathbf{W}_N = \text{diag}(\text{diag}(\text{diag}(w_{dij})))_{N \times N}$ con $w_{dij} \geq 0$ conocidas, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$.

Obsérvese que el modelo (3.1) puede escribirse alternativamente como en Prasad y Rao (1990); es decir

$$y_{dij} = \mathbf{x}_{dij}\boldsymbol{\beta} + u_{1,d} + u_{2,di} + w_{dij}^{-1/2}e_{dij}, \quad d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d, j = 1, \dots, N_{di}, \quad (3.2)$$

donde y_{dij} es la característica de interés para la unidad j , del subnivel i , dentro del nivel d y \mathbf{x}_{dij} es la fila (d, i, j) de la matriz \mathbf{X} conteniendo las variables auxiliares correspondientes.

Observación 3.1.1. Claramente se puede ver que tanto (3.1) como (3.2) son las versiones poblacionales de (2.1) y (2.2), respectivamente. Este hecho es de gran relevancia, pues todos los

cálculos realizados a partir de (2.1) y (2.2), pueden aplicarse en este capítulo cuando se refiera a valores muestrales.

El objetivo en este capítulo es obtener una predicción lineal insesgada óptima de determinados parámetros poblacionales de tipo lineal asociados a la variable de interés \mathbf{y} , como pueden ser totales o medias poblacionales. A este tipo de predictores se les conoce como BLUP (Best Linear Unbiased Predictors) cuando las componentes de la varianza son conocidas o EBLUP (Empirical Best Linear Unbiased Predictors) en el caso en que sean desconocidas y se tengan que estimar. Este es uno de los principales objetivos en estimación en áreas pequeñas, pues permite la estimación de parámetros poblacionales en áreas d y subáreas di , más pequeñas que las grandes áreas para las cuales fue realizado el diseño de muestreo. Además este tipo de modelos es de gran utilidad, pues a través de ellos, se aporta a la muestra la información auxiliar necesaria para la estimación de los parámetros poblacionales.

Los métodos de ajuste utilizados para la obtención de los estimadores de los parámetros del modelo en este capítulo, son ML y REML con parametrización alternativa, a la vista de las conclusiones de los experimentos de simulación 2.7.2 y 2.7.3. Como semilla de inicio del algoritmo de Fisher-Scoring de los métodos de ajuste, se han utilizado los valores de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ que proporciona el método H3 por su sencillez computacional.

3.2. BLUP y EBLUP de una media poblacional

De la población se selecciona una muestra aleatoria simple, $s \subset \Omega$, de $n \leq N$ unidades. Sea $r = \Omega - s$ el conjunto de unidades que no han sido seleccionadas, de modo que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_s^t, \mathbf{y}_r^t)^t$, donde \mathbf{y}_s es el vector de n unidades observadas e \mathbf{y}_r es el vector de $N - n$ unidades no observadas. En lo sucesivo se usa el subíndice s para denotar la parte observada del modelo (3.1) y el subíndice r para denotar la parte no observada.

Sea $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_s^t, \mathbf{a}_r^t)^t$ un vector de constantes conocidas de dimensión $N \times 1$. Se está interesado en estimar $\eta = \mathbf{a}^t \mathbf{y} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t \mathbf{y}_r$. En el caso en el que el parámetro poblacional de interés sea una media poblacional, para un nivel d cualquiera, se tiene $\eta_d = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}^t, \dots, \mathbf{0}^t, \mathbf{1}_{N_d}^t, \mathbf{0}^t, \dots, \mathbf{0}^t) \mathbf{y}$. Cuando se esté interesado en estimar una media poblacional de un subnivel di cualquiera, se tiene $\eta_{di} = \frac{1}{N_{di}} (\mathbf{0}^t, \dots, \mathbf{0}^t, \mathbf{1}_{N_{di}}^t, \mathbf{0}^t, \dots, \mathbf{0}^t) \mathbf{y}$.

De la aplicación de la ecuación (1.1) del Teorema General de Predicción 1.1.6

$$\hat{\eta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t \left[\mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{V}_{rs} \mathbf{V}_{ss}^{-1} (\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s \hat{\boldsymbol{\beta}}) \right],$$

se obtiene el estimador lineal y predictivamente insesgado que minimiza la varianza del error (BLUP) de determinados parámetros poblacionales de la variable de interés \mathbf{y} , como puede ser la media poblacional. Para obtener este predictor lineal insesgado óptimo (BLUP), es necesario

realizar previamente ciertos cálculos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{rs} &= E [(\mathbf{y}_r - \mathbf{X}_r\boldsymbol{\beta})(\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s\boldsymbol{\beta})^t] \\
&= E \left[(\mathbf{Z}_{1,r}\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_{2,r}\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_r^{-1/2}\mathbf{e}_r)(\mathbf{Z}_{1,s}\mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_{2,s}\mathbf{u}_2 + \mathbf{W}_s^{-1/2}\mathbf{e}_s)^t \right] \\
&= \mathbf{Z}_{1,r}E[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t]\mathbf{Z}_{1,s} + \mathbf{Z}_{2,r}E[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t]\mathbf{Z}_{2,s} = [\mathbf{Z}_{1,r}, \mathbf{Z}_{2,r}] \begin{pmatrix} V(\mathbf{u}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V(\mathbf{u}_2) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,s}^t \\ \mathbf{Z}_{2,s}^t \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{Z}_r\boldsymbol{\Sigma}_u\mathbf{Z}_s^t
\end{aligned}$$

En (2.3) se obtuvo $\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Sigma}_u\mathbf{Z}_s^t\mathbf{V}_{ss}^{-1}(\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s\hat{\boldsymbol{\beta}})$, de este modo

$$\mathbf{V}_{rs}\mathbf{V}_{ss}^{-1}(\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Z}_r\boldsymbol{\Sigma}_u\mathbf{Z}_s^t\mathbf{V}_{ss}^{-1}(\mathbf{y}_s - \mathbf{X}_s\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Z}_r\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{Z}_{1,r}, \mathbf{Z}_{2,r}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{1,r}\hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{Z}_{2,r}\hat{\mathbf{u}}_2$$

y por tanto

$$\hat{\eta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t\mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t \left[\mathbf{X}_r\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}_{1,r}\hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{Z}_{2,r}\hat{\mathbf{u}}_2 \right] \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{1,r} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{N_d - n_d}), & \mathbf{Z}_{2,r} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}) \right), \\
\mathbf{Z}_{1,s} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{n_d}), & \mathbf{Z}_{2,s} &= \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}}) \right), \\
\hat{\mathbf{u}}_1 &= \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\hat{u}_{1,d}] & \text{y} & \hat{\mathbf{u}}_2 = \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\hat{u}_{2,di}] \right],
\end{aligned}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{u}_{1,d}$ y $\hat{u}_{2,di}$ se obtuvieron en (2.6), (2.7) y (2.8), respectivamente. Estos a su vez provienen de la teoría general desarrollada en (1.4) y (1.5). Nótese que $\mathbf{X}_r\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}_{1,r}\hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{Z}_{2,r}\hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{y}}_r$ y por tanto $\hat{\eta}_{opt} = \mathbf{a}_s^t\mathbf{y}_s + \mathbf{a}_r^t\hat{\mathbf{y}}_r$ como cabría esperar.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, al predictor lineal insesgado óptimo $\hat{\eta}_{opt}$ de un determinado parámetro poblacional de la variable de interés, se le conoce como BLUP, cuando las componentes de la varianza $\boldsymbol{\sigma}$ son conocidas. Cuando las componentes de la varianza son desconocidas y por tanto se hace necesaria su estimación, a $\hat{\eta}_{opt}$ se le conoce como EBLUP. En este capítulo los EBLUP se obtienen sustituyendo $\boldsymbol{\sigma}$ en las expresiones de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\mathbf{u}}_1$ y $\hat{\mathbf{u}}_2$, por sus estimaciones obtenidas mediante el ajuste por máxima verosimilitud, o máxima verosimilitud residual. En las aplicaciones a datos reales las componentes de la varianza han de ser estimadas. Por tanto lo usual es calcular el predictor EBLUP.

A lo largo de esta sección se formula, de manera general, el predictor lineal insesgado óptimo que se obtiene a través de la aplicación del teorema 1.1.6. Para su cálculo, no se tiene en cuenta si se desconocen o no las componentes de la varianza. Cuando son conocidas se denotan los predictores, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\mathbf{u}}_1$ y $\hat{\mathbf{u}}_2$ con el superíndice “blup”; en caso contrario con el superíndice “eblup”.

3.2.1. Cálculo de \widehat{Y}_d^{blup} e \widehat{Y}_d^{eblup}

El objetivo en este apartado es obtener la expresión, bajo el modelo (3.1), del BLUP y del EBLUP de la media poblacional $\bar{Y}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}$, o equivalentemente del parámetro lineal

$$\eta = \mathbf{a}^t \mathbf{y}, \quad \text{con} \quad \mathbf{a}^t = \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right),$$

donde $\mathbf{0}_a$ es un vector columna de dimensión a con todos sus elementos iguales a 0.

Para conseguir esto se calculan por separado cada uno de los sumandos de (3.3) como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{n_d}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{y}_{di,s}] \right] \\ &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} y_{dij} = \frac{n_d}{N_d} \bar{y}_d = f_d \bar{y}_d, \\ \mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [\mathbf{X}_{d,r}] \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{N_d} \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t \mathbf{X}_{d,r} \widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \left(\sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right) \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{N_d} (N_d \bar{\mathbf{X}}_d - n_d \bar{\mathbf{x}}_d) \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \bar{\mathbf{X}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}} - f_d \bar{\mathbf{x}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}}, \\ \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_{1,r} \widehat{\mathbf{u}}_1 &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} (\mathbf{1}_{N_d-n_d}) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [\widehat{\mathbf{u}}_{1,d}] \\ &= \frac{1}{N_d} (0, \dots, N_d - n_d, \dots, 0)_{1 \times D} \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [\widehat{\mathbf{u}}_{1,d}] = \frac{1}{N_d} (N_d - n_d) \widehat{u}_{1,d} = (1 - f_d) \widehat{u}_{1,d}, \\ \mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_{2,r} \widehat{\mathbf{u}}_2 &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} \left(\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} (\mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}) \right) \widehat{\mathbf{u}}_2 \\ &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{m_1}^t, \dots, \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [N_{di} - n_{di}], \dots, \mathbf{0}_{m_D}^t \right) \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\widehat{u}_{2,di}] \right] \\ &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} (N_{di} - n_{di}) \widehat{u}_{2,di}, \end{aligned}$$

donde $f_d = \frac{n_d}{N_d}$, $\bar{y}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} y_{dij}$, $\bar{\mathbf{x}}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij}$, $\bar{\mathbf{X}}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij}$ y s_{di} identifica a las unidades de s pertenecientes al subnivel i del nivel d .

Teniendo en cuenta que $f_{di} = \frac{n_{di}}{N_{di}}$, $\frac{f_{di}}{f_d} = \frac{n_{di}/N_{di}}{n_d/N_d} = \frac{n_{di}}{n_d} \frac{N_d}{N_{di}}$, $f_{di} \frac{N_{di}}{N_d} = \frac{n_{di}}{n_d} f_d$, se obtiene

$$\mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_{2,r} \widehat{\mathbf{u}}_2 = \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} \widehat{u}_{2,di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} f_{di} \widehat{u}_{2,di} = \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} \widehat{u}_{2,di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{n_{di}}{n_d} f_d \widehat{u}_{2,di}.$$

Finalmente el BLUP para la media poblacional \bar{Y}_d , que se denota mediante \widehat{Y}_d^{blup} , es

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_d^{blup} &= (1 - f_d) \left[\bar{\mathbf{X}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{blup} + \widehat{u}_{1,d}^{blup} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} \widehat{u}_{2,di}^{blup} \right] \\ &+ f_d \left[\bar{y}_d + (\bar{\mathbf{X}}_d - \bar{\mathbf{x}}_d) \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{blup} + \sum_{i=1}^{m_d} \left(\frac{N_{di}}{N_d} - \frac{n_{di}}{n_d} \right) \widehat{u}_{2,di}^{blup} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{blup}$, $\widehat{u}_{1,d}^{blup}$ y $\widehat{u}_{2,di}^{blup}$ son los valores que se obtuvieron en (2.6), (2.7) y (2.8), respectivamente; es decir,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{blup} = (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{y}_s, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{1,d}^{blup} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{blup} \\ &= \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{blup}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\widehat{u}_{2,di}^{blup} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{blup} - \delta_d (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{blup} \right) \right], \quad (3.7)$$

y además

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{blup} = \mathbf{y}_{di,s} - \mathbf{X}_{di,s} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{blup}, \quad \gamma_{di} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}}}, \quad \delta_d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}.$$

El EBLUP para la media poblacional \bar{Y}_d , que se denota mediante \widehat{Y}_d^{eblup} , es

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_d^{eblup} &= (1 - f_d) \left[\bar{\mathbf{X}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} + \widehat{u}_{1,d}^{eblup} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} \widehat{u}_{2,di}^{eblup} \right] \\ &+ f_d \left[\bar{y}_d + (\bar{\mathbf{X}}_d - \bar{\mathbf{x}}_d) \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} + \sum_{i=1}^{m_d} \left(\frac{N_{di}}{N_d} - \frac{n_{di}}{n_d} \right) \widehat{u}_{2,di}^{eblup} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup}$, $\widehat{u}_{1,d}^{eblup}$ y $\widehat{u}_{2,di}^{eblup}$ se formulan de manera análoga a (2.6), (2.7) y (2.8) respectivamente, pero sustituyendo $\boldsymbol{\sigma}$ por sus estimaciones obtenidas mediante el ajuste por máxima verosimilitud

o máxima verosimilitud residual; es decir,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} = \left(\mathbf{X}_s^t \widehat{\mathbf{V}}_{ss}^{-1} \mathbf{X}_s \right)^{-1} \mathbf{X}_s^t \widehat{\mathbf{V}}_{ss}^{-1} \mathbf{y}_s, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{1,d}^{eblup} &= \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_0^2} \left(1 - \widehat{\delta}_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \widehat{\gamma}_{di}) w_{di} \right) \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \widehat{\gamma}_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{eblup} \\ &= \widehat{\delta}_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \widehat{\gamma}_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{eblup}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\widehat{u}_{2,di}^{eblup} = \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{\widehat{\sigma}_0^2} \left[(1 - \widehat{\gamma}_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{eblup} - \widehat{\delta}_d (1 - \widehat{\gamma}_{di}) w_{di} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \widehat{\gamma}_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{eblup} \right) \right], \quad (3.11)$$

y además

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{di}^{eblup} = \mathbf{y}_{di,s} - \mathbf{X}_{di,s} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup}, \quad \widehat{\gamma}_{di} = \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{\widehat{\sigma}_2^2 + \frac{\widehat{\sigma}_0^2}{w_{di}}}, \quad \widehat{\delta}_d = \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_0^2 + \widehat{\sigma}_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \widehat{\gamma}_{di}) w_{di}}.$$

Cuando la población sea infinita \widehat{Y}_d^{eblup} es un predictor EBLUP de la combinación lineal de efectos fijos y aleatorios $\overline{\mathbf{X}}_d \boldsymbol{\beta} + u_{1,d} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{N_{di}}{N_d} u_{2,di}$, estimador que en algunos textos se llama proyectivo. El segundo término de (3.8) es el ajuste que se realiza por población finita. Obsérvese además que si $n_d = N_d$, entonces $\widehat{Y}_d^{eblup} = \overline{Y}_d$ y es consistente desde el punto de vista de la inferencia en poblaciones finitas.

3.2.2. Cálculo de \widehat{Y}_{di}^{blup} e \widehat{Y}_{di}^{eblup}

El objetivo en este apartado es obtener la expresión, bajo el modelo (3.1), del BLUP y del EBLUP de la media poblacional $\overline{Y}_{di} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}$, o equivalentemente de $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{a}^t \mathbf{y}$ donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^t &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{0}_{N_{d1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d(i-1)}}^t, \mathbf{1}_{N_{di}}^t, \mathbf{0}_{N_{d(i+1)}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{dm_d}}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right) \\ &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \text{col}^t \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}}^t \right]_{1 \leq k \leq m_d}, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right) \end{aligned}$$

y δ_{ik} es la conocida delta de Kronecker, $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$.

Del mismo modo que en el apartado anterior se calculan por separado cada uno de los

sumandos de (3.3).

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_s^t \mathbf{y}_s &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{n_{dk}}^t], \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{y}_{di,s}] \right] \\
&= \frac{1}{N_{di}} \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{n_{dk}}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{y}_{di,s}] = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j \in s_{di}} y_{dij} = \frac{n_{di}}{N_{di}} \bar{y}_{di} = f_{di} \bar{y}_{di}, \\
\mathbf{a}_r^t \mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1 - n_1}^t, \dots, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk} - n_{dk}}^t], \dots, \mathbf{0}_{N_D - n_D}^t \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di,r}] \right] \hat{\boldsymbol{\beta}} \\
&= \frac{1}{N_{di}} \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk} - n_{dk}}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di,r}] \hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{N_{di}} \left(\sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right) \hat{\boldsymbol{\beta}} \\
&= \frac{1}{N_{di}} (N_{di} \bar{\mathbf{X}}_{di} - n_{di} \bar{\mathbf{x}}_{di}) \hat{\boldsymbol{\beta}} = \bar{\mathbf{X}}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}} - f_{di} \bar{\mathbf{x}}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \\
\mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_{1,r} \hat{\mathbf{u}}_1 &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1 - n_1}^t, \dots, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk} - n_{dk}}^t], \dots, \mathbf{0}_{N_D - n_D}^t \right) \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{1}_{N_d - n_d}) \hat{\mathbf{u}}_1 \\
&= \frac{1}{N_{di}} (0, \dots, N_{di} - n_{di}, \dots, 0)_{1 \times D} \text{col}_{1 \leq d \leq D} [\hat{u}_{1,d}] = \frac{N_{di} - n_{di}}{N_{di}} \hat{u}_{1,d} = (1 - f_{di}) \hat{u}_{1,d}, \\
\mathbf{a}_r^t \mathbf{Z}_{2,r} \hat{\mathbf{u}}_2 &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1 - n_1}^t, \dots, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk} - n_{dk}}^t], \dots, \mathbf{0}_{N_D - n_D}^t \right) \\
&\quad \cdot \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}) \right) \hat{\mathbf{u}}_2 \\
&= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{m_1}^t, \dots, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t [\delta_{ik} (N_{dk} - n_{dk})], \dots, \mathbf{0}_{m_D}^t \right) \text{col}_{1 \leq d \leq D} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\hat{u}_{2,di}] \right] \\
&= \frac{1}{N_{di}} (N_{di} - n_{di}) \hat{u}_{2,di} = (1 - f_{di}) \hat{u}_{2,di},
\end{aligned}$$

donde $f_{di} = \frac{n_{di}}{N_{di}}$, $\bar{y}_{di} = \frac{1}{n_{di}} \sum_{j \in s_{di}} y_{dij}$, $\bar{\mathbf{x}}_{di} = \frac{1}{n_{di}} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij}$, $\bar{\mathbf{X}}_{di} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij}$.

Finalmente el BLUP para la media poblacional \bar{Y}_{di} , que se denota mediante \hat{Y}_{di}^{blup} es

$$\hat{Y}_{di}^{blup} = (1 - f_{di}) \left[\bar{\mathbf{X}}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{blup} + \hat{u}_{1,d}^{blup} + \hat{u}_{2,di}^{blup} \right] + f_{di} \left[\bar{y}_{di} + (\bar{\mathbf{X}}_{di} - \bar{\mathbf{x}}_{di}) \hat{\boldsymbol{\beta}}^{blup} \right], \quad (3.12)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{blup}$, $\hat{u}_{1,d}^{blup}$ y $\hat{u}_{2,di}^{blup}$ son los valores expresados en (3.5)–(3.7).

El EBLUP para la media poblacional \bar{Y}_{di} , que se denota mediante \hat{Y}_{di}^{eblup} , es

$$\hat{Y}_{di}^{eblup} = (1 - f_{di}) \left[\bar{\mathbf{X}}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} + \hat{u}_{1,d}^{eblup} + \hat{u}_{2,di}^{eblup} \right] + f_{di} \left[\bar{y}_{di} + (\bar{\mathbf{X}}_{di} - \bar{\mathbf{x}}_{di}) \hat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} \right], \quad (3.13)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup}$, $\hat{u}_{1,d}^{eblup}$ y $\hat{u}_{2,di}^{eblup}$ aparecen formulados en (3.9)–(3.11).

3.3. Experimento de simulación para los EBLUP

En esta sección se describe un experimento de simulación Monte Carlo diseñado para comparar las predicciones lineales insesgadas óptimas de una media poblacional que se obtienen mediante los métodos de ajuste ML y REML.

Para este experimento de simulación, las componentes de la varianza se suponen desconocidas, con lo que se han de estimar y por tanto el predictor a calcular es el EBLUP.

Para los métodos ML y REML, el criterio de parada del algoritmo de Fisher-Scoring queda determinado por dos parámetros mutuamente excluyentes. El algoritmo se detiene cuando:

- el número de la iteración actual es mayor que el número máximo de iteraciones fijado a 500,
- para cada uno de los estimadores, la diferencia en valor absoluto, del valor de la estimación en una iteración y la anterior es menor que $\epsilon = 0,00001$.

3.3.1. Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia

Para la simulación de las muestras y el cálculo de las medidas de eficiencia se tienen que seguir los pasos del siguiente algoritmo de simulación.

1. Generación de los elementos determinísticos de la población

- Simulación de la variable explicativa: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$x_{dij} = (b_{di} - a_{di})U_{dij} + a_{di} \quad \text{con} \quad U_{dij} = \frac{j}{N_{di} + 1}, \quad j = 1, \dots, N_{di}.$$

Se toma $a_{di} = 1$, $b_{di} = 1 + \frac{1}{m_d}(m_d(d-1) + i)$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

- Pesos: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, hacer $w_{dij} = 1/x_{dij}^\ell$, $\ell = 0, 1/2$, (2 posibilidades, homocedasticidad y heterocedasticidad).

2. Repetir $K = 100000$ veces ($k = 1, \dots, K$)

2.1. Generación de los elementos aleatorios de la población

- Simulación de los efectos aleatorios y errores: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$u_{1,d}^{(k)} \sim N(0, \sigma_1^2), \quad u_{2,di}^{(k)} \sim N(0, \sigma_2^2), \quad e_{dij}^{(k)} \sim N(0, \sigma_0^2).$$

- Simulación de la variable objetivo: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$y_{dij}^{(k)} = \beta x_{dij} + u_{1,d}^{(k)} + u_{2,di}^{(k)} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}^{(k)}, \quad \text{con} \quad \beta = 1.$$

- 2.2. Extracción de muestras. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, generar una muestra aleatoria sin reemplazamiento de tamaño n_{di} dentro de cada nivel di del segundo factor aleatorio.
- 2.3. Calcular $\hat{\beta}_{(k)}$, $\hat{\sigma}_{0,(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{1,(k)}^2$ y $\hat{\sigma}_{2,(k)}^2$ usando los métodos de la máxima verosimilitud (ML) y la máxima verosimilitud residual (REML).
- 2.4. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular $\hat{Y}_d^{eblup,(k)}$, $\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)}$, según (3.8) y (3.13) respectivamente.
3. Salida: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular,

$$EMSE_d = EMSE(\hat{Y}_d^{eblup}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\hat{Y}_d^{eblup,(k)} - \bar{Y}_d^{(k)} \right)^2, \quad (3.14)$$

$$EMSE_{di} = EMSE(\hat{Y}_{di}^{eblup}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)} - \bar{Y}_{di}^{(k)} \right)^2, \quad (3.15)$$

$$BIAS_d = BIAS(\hat{Y}_d^{eblup}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\hat{Y}_d^{eblup,(k)} - \bar{Y}_d^{(k)} \right),$$

$$BIAS_{di} = BIAS(\hat{Y}_{di}^{eblup}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)} - \bar{Y}_{di}^{(k)} \right),$$

donde

$$\bar{Y}_d^{(k)} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}, \quad \bar{Y}_{di}^{(k)} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}.$$

Para la obtención de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$, se utiliza el software elaborado en C++ para el experimento de la sección 2.7. También se ha desarrollado software en C++ correspondiente al actual experimento de simulación.

3.3.2. Experimento de simulación y principales resultados

El presente experimento de simulación consiste en hacer varias pruebas del algoritmo del apartado 3.3.1, manteniendo constante los tamaños muestrales, los tamaños poblacionales y el número de niveles y subniveles de los factores aleatorios, y variando los valores de σ_0^2 , σ_1^2 y σ_2^2 . Para ello se toman:

- el número de niveles $D = 30$,
- el número de subniveles $m_d = 5$ dentro de cada nivel $d = 1, \dots, D$,
- el tamaño poblacional y muestral respectivamente, dentro de cada subnivel, $N_{di} = 200$ y $n_{di} = 20$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

Se realizan nueve pruebas del experimento, para las nueve combinaciones posibles de los valores, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = \{0.5, 1, 2\}$, y $\sigma_2^2 = \{0.5, 1, 2\}$, de acuerdo con la tabla 3.3.1:

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_1^{2,(g)}$	0.5	0.5	0.5	1	1	1	2	2	2
$\sigma_2^{2,(g)}$	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2

Tabla 3.3.1: Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación

Las tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación, para los métodos de ajuste REML y ML, pueden encontrarse en el apéndice D. A continuación se presentan resultados gráficos en los que además de representarse las medidas de eficiencia del apartado 3.3.1, se grafican sus diferencias para los métodos de ajuste REML y ML; es decir, se representan las diferencias

$$EMSE_d^{ML} - EMSE_d^{REML}, \quad EMSE_{di}^{ML} - EMSE_{di}^{REML}, \quad (3.16)$$

$$|BIAS_d^{ML}| - |BIAS_d^{REML}| \quad \text{y} \quad |BIAS_{di}^{ML}| - |BIAS_{di}^{REML}|. \quad (3.17)$$

La conveniencia de realizar de este modo estos gráficos, es por la proximidad de los valores de ambos métodos como se aprecia en las figuras D.1 - D.8. Como se puede ver en estas ocho figuras, los dos métodos de ajuste se llegan a solapar en casi todos los casos y no se aprecia cual de los dos métodos es más competitivo.

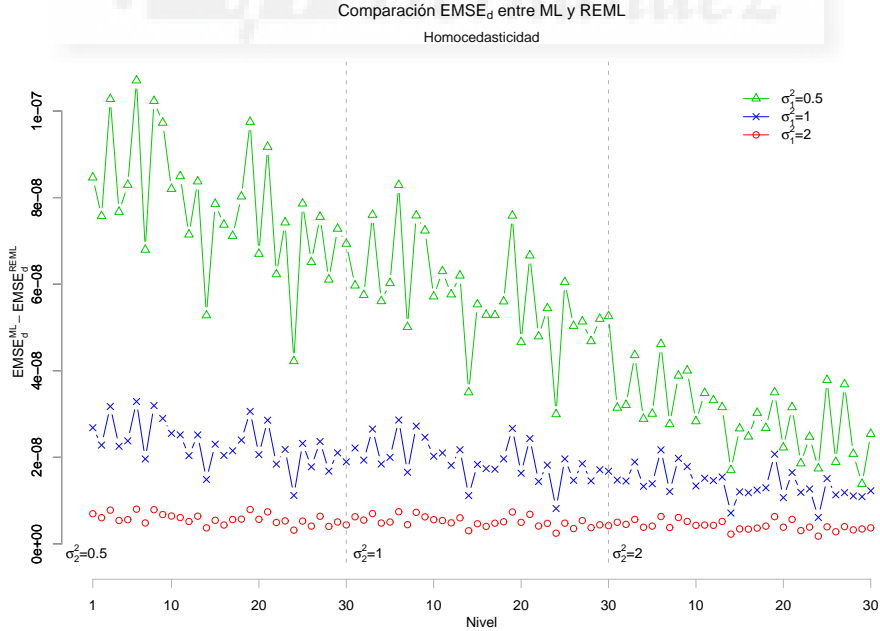


Figura 3.1: Comparación de los $EMSE_d$ con $\ell = 0$

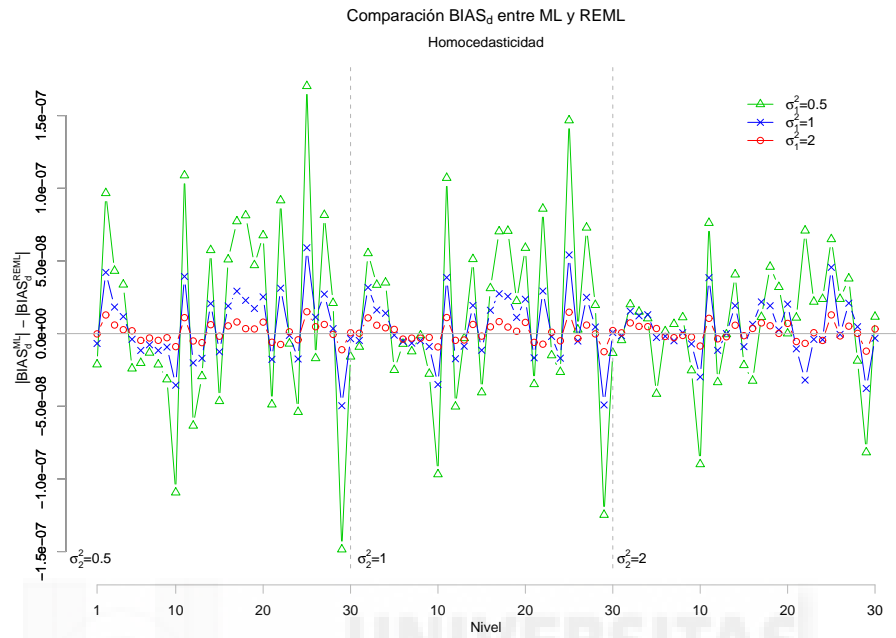


Figura 3.2: Comparación de los $BIAS_d$ en valor absoluto con $\ell = 0$

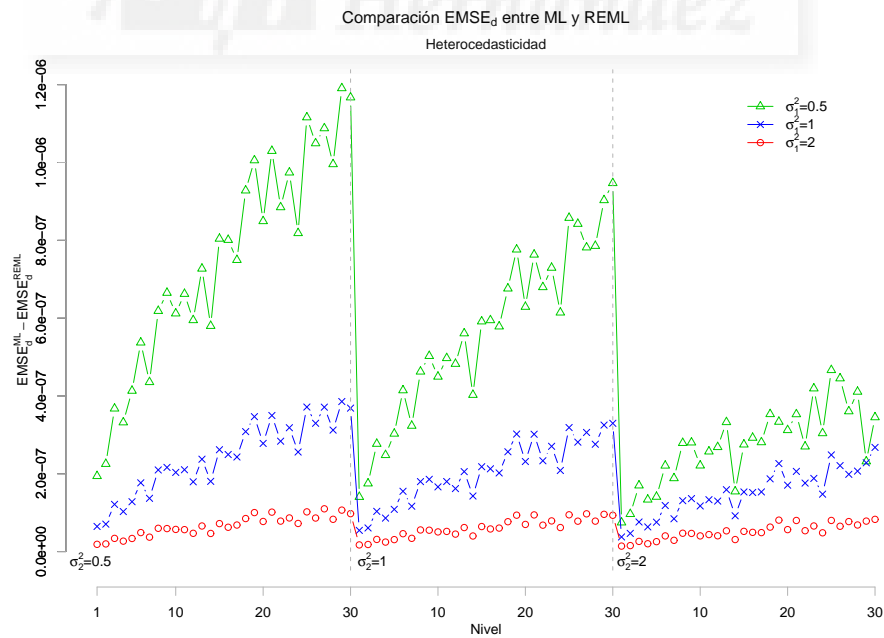


Figura 3.3: Comparación de los $EMSE_d$ con $\ell = 1/2$

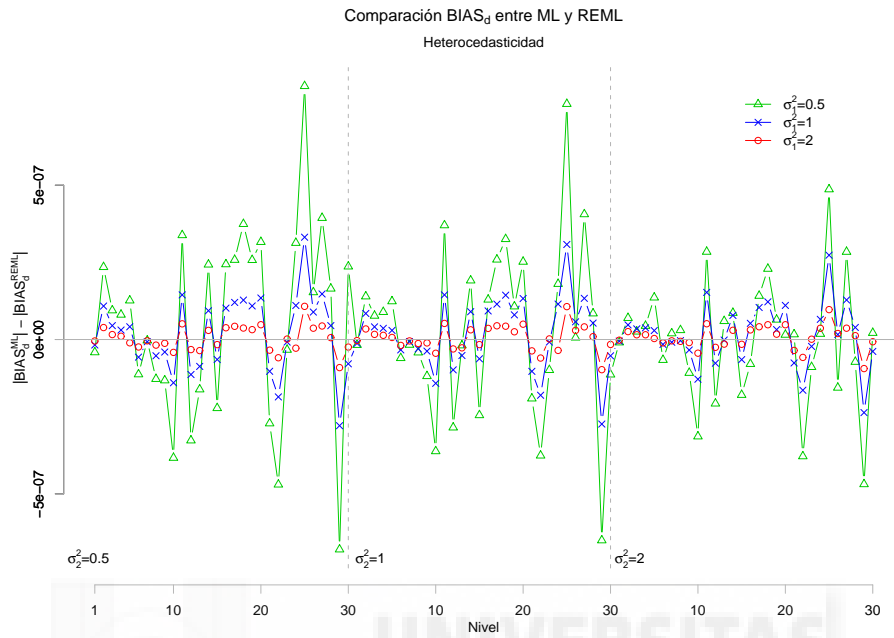


Figura 3.4: Comparación de los $BIA S_d$ en valor absoluto con $\ell = 1/2$

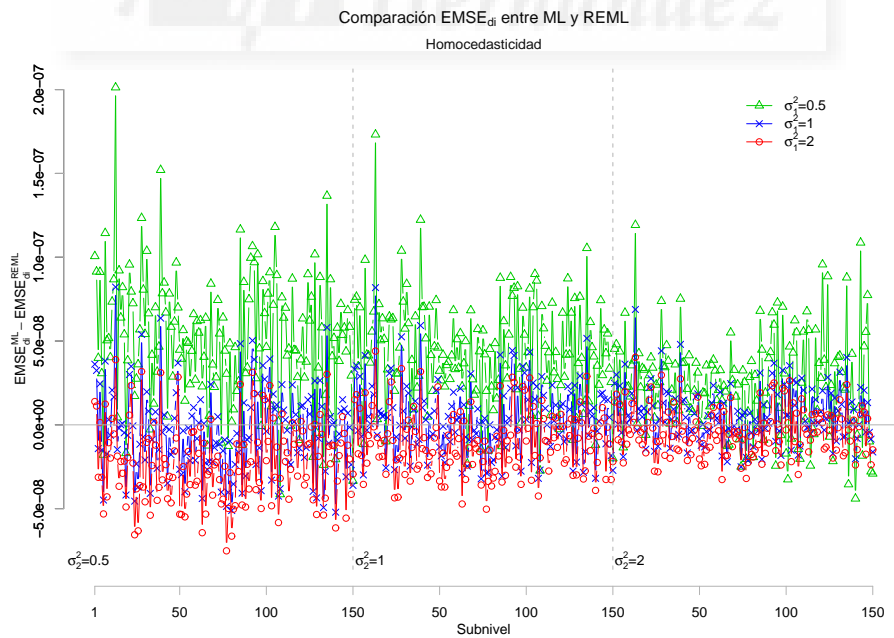


Figura 3.5: Comparación de los $EMSE_{di}$ con $\ell = 0$

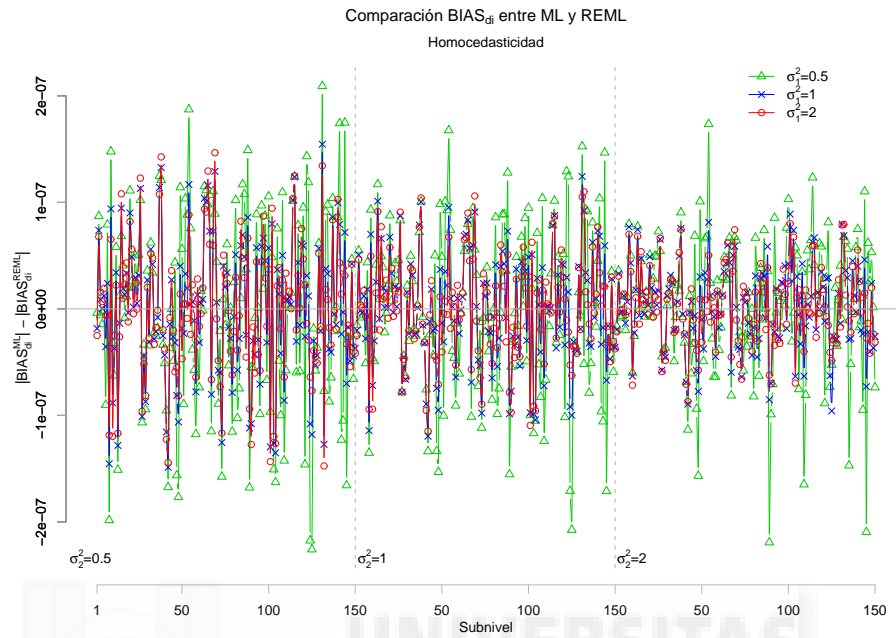


Figura 3.6: Comparación de los $BIAS_{di}$ en valor absoluto con $\ell = 0$

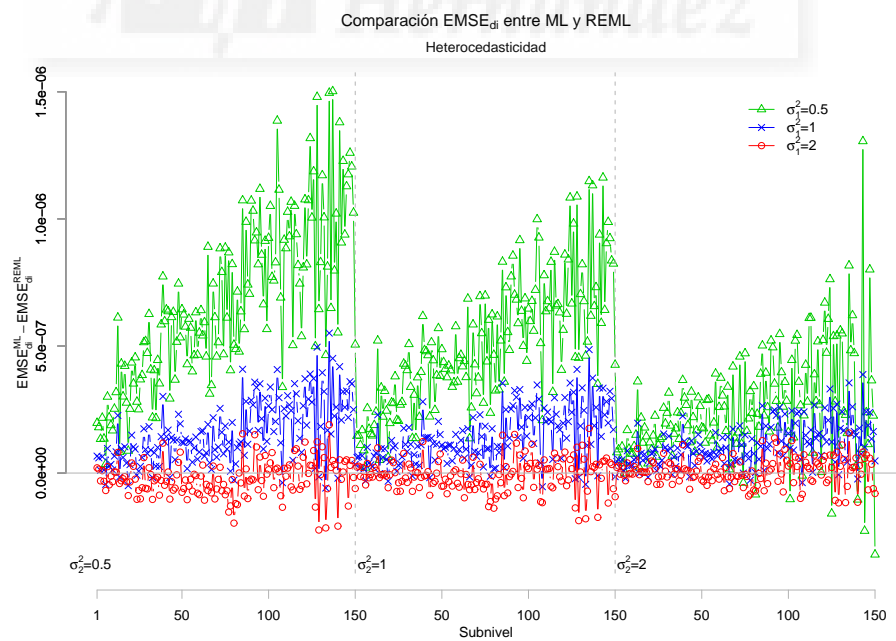


Figura 3.7: Comparación de los $EMSE_{di}$ con $\ell = 1/2$

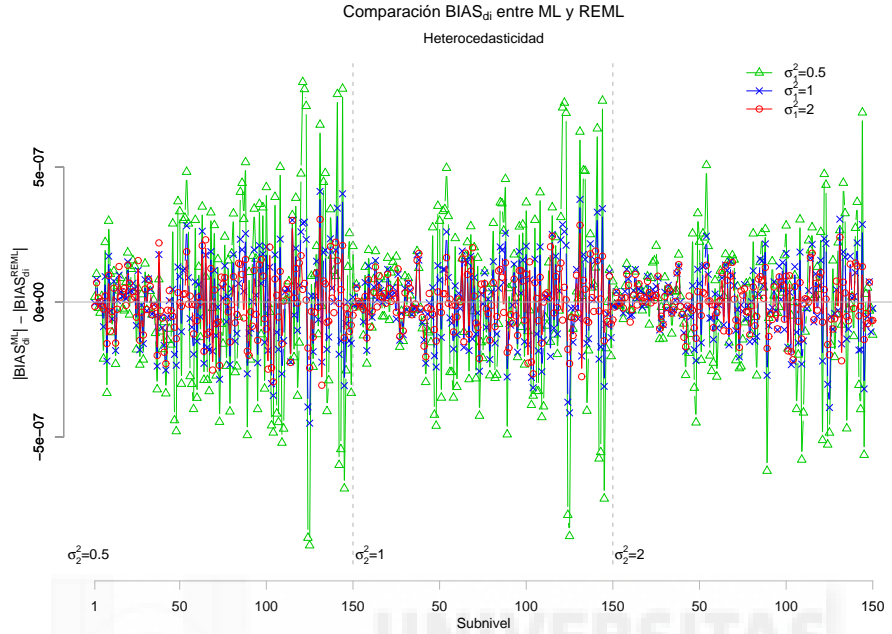


Figura 3.8: Comparación de los $BIAS_{di}$ en valor absoluto con $\ell = 1/2$

3.3.3. Conclusiones

En el presente experimento de simulación, los estimadores EBLUP obtenidos a través del método REML se han comportado mejor que los estimadores ML. Esto se pone claramente de manifiesto mediante el EMSE de los EBLUP para dominios. En las figuras 3.1 - 3.8 se representan gráficos con las diferencias entre las medidas de eficiencia para los dos métodos de estimación ML y REML tal y como se describe en (3.16) y (3.17). De este modo valores positivos denotan un mayor valor de la medida de eficiencia para los estimadores obtenidos mediante ML.

Examinando el $EMSE_d$ de las figuras 3.1 y 3.3, correspondientes a los casos homocedástico y heterocedástico, respectivamente, se concluye que el estimador EBLUP para dominios es más preciso cuando se calcula mediante el método REML (siempre se obtienen valores positivos de las diferencias). En el caso homocedástico a medida que aumenta la varianza entre subdominios (σ_2^2), los métodos REML y ML se aproximan en cuanto a precisión, para valores pequeños de varianza entre dominios (véase la línea correspondiente a $\sigma_1^2 = 0,5$ de la figura 3.1). Cuando la varianza entre dominios es mayor o igual que entre subdominios, entonces las diferencias entre los dos métodos son mínimas. Sin embargo para el caso heterocedástico a medida que aumenta la varianza entre subdominios (σ_2^2), los métodos REML y ML difieren cada vez más en cuanto a precisión, para valores pequeños de varianza entre dominios (véanse las líneas correspondientes a $\sigma_1^2 = 0,5$ y $\sigma_1^2 = 0,5$ de la figura 3.3). Cuando la varianza entre dominios es mayor o igual que entre subdominios, entonces las diferencias entre los dos métodos son mínimas.

En cuanto al sesgo $BIAS_d$ que se representa en las figuras 3.2 y 3.4, correspondiente a los casos homocedástico y heterocedástico, respectivamente, no se puede concluir nada acerca de que método de estimación es preferible para la obtención de los EBLUP para dominios. En unos dominios es mejor REML y en otros ML, pero siempre son más similares cuanto más grande sea la varianza entre dominios (véase la línea correspondiente a $\sigma_1^2 = 2$ de ambas figuras). Tampoco se encuentran diferencias si la estimación se realiza bajo un modelo con datos homocedásticos o heterocedásticos.

En lo que respecta a la obtención de los EBLUP de subdominios, sucede algo similar a lo anterior, pero de manera más moderada. Si se examinan las figuras 3.5 y 3.7, correspondientes a los casos homocedástico y heterocedástico, respectivamente, se observa que la mayor parte de las veces el EBLUP obtenido mediante REML es más preciso. Esta afirmación no queda tan claramente comprobada a la vista de la línea correspondiente a $\sigma_1^2 = 2$ en ambas figuras. Cuando la varianza entre dominios es grande, no se puede concluir cual de los dos métodos de estimación es más preciso. En la figura 3.7 correspondiente al caso heterocedástico se puede advertir que para cada combinación de σ_1^2 y σ_2^2 , a medida que se estiman subdominios correspondientes a los últimos dominios, el método REML resulta más preciso. Esto se debe al modo en que se generaron los elementos determinísticos de la población, dominios con valores concentrados y dispersos para las variables auxiliares. Con cada nuevo subdominio x_{dij} se hace más variable, w_{dij} también y por tanto le sucede lo mismo a y_{dij} . Por tanto se deduce que el método REML es más adecuado bajo un modelo con datos heterocedásticos, o igualmente recomendable que el ML para homocedásticos, en cuanto a la precisión.

Con relación al sesgo de los EBLUP en subdominios, no se observan diferencias entre los métodos REML y ML a tenor de los resultados representados en las figuras 3.6 y 3.8 correspondientes a $BIAS_{di}$, para los casos homocedástico y heterocedástico, respectivamente.

Si se examinan las figuras D.1 - D.8 y las tablas correspondientes a las medidas de eficiencia para la estimación de los EBLUP en dominios y subdominios, tanto en presencia como en ausencia de homocedasticidad, se observan magnitudes notablemente reducidas como para aseverar la perfecta adecuación de este tipo de modelos a la predicción de parámetros poblacionales lineales en áreas pequeñas. Además se pueden dar las siguientes conclusiones. En lo que a sesgo se refiere, observando las figuras D.3, D.4, D.7 y D.8, se deduce que los las estimaciones de los EBLUP para todas las combinaciones de varianzas, dominios y subdominios, son bastante insesgadas. Esta exactitud en las estimaciones es todavía más notable para los casos homocedásticos de acuerdo con los valores máximos y mínimos obtenidos. Examinando la precisión (figuras D.1, D.2, D.5 y D.6), se observa sistemáticamente el crecimiento del $EMSE_d$ con el aumento del índice d de dominios. De nuevo esto es debido al modo en que se generaron los elementos determinísticos de la población, como ya ha sido argumentado. Este hecho se hace más considerable en los casos heterocedásticos. Además en la figura D.5 se observa que a medida que aumenta la varianza entre subdominios, se pierde precisión en las estimaciones de los EBLUP. Esto también se observa en la figura D.1 de manera más atenuada con el aumento de la varianza entre dominios. De estas dos figuras se deduce por tanto que se pierde precisión en la estimación de un tipo de dominios

cuando aumenta la varianza entre ese tipo de dominios.

Como se concluye gracias a los experimentos de la sección 2.7 y por todo lo mencionado anteriormente, se aconseja el uso del método REML, donde además se comprueba la sensibilidad frente a la presencia de heterocedasticidad. Por tanto, en lo sucesivo no se utilizará el método ML para la predicción de parámetros poblacionales mediante la teoría EBLUP.



Capítulo 4

El error cuadrático medio de los EBLUP

4.1. Introducción

Considérese el modelo lineal mixto definido en (3.1). El objetivo en este capítulo es calcular con fórmulas explícitas, el error cuadrático medio de los predictores EBLUP para las medias poblacionales en dominios y subdominios (\widehat{Y}_d e \widehat{Y}_{di}) definidos en el capítulo anterior. Para ello es necesario calcular previamente las funciones $g_1 - g_4$, mediante la teoría presentada en la sección 1.6.

El método de ajuste utilizado para la obtención de los estimadores de los parámetros del modelo en este capítulo, es la máxima verosimilitud residual (REML) con parametrización alternativa, a la vista de las conclusiones del experimento de simulación de la sección 3.3. Como semilla de inicio del algoritmo de Fisher-Scoring del método REML se han utilizado, por su sencillez computacional, los valores de $\widehat{\sigma}$ que proporciona el método H3.

Para mayor detalle sobre los cálculos realizados en este capítulo, véase el apéndice B.

4.2. Error cuadrático medio de \widehat{Y}_d^{eblup}

Para el modelo (3.1) se tiene que $\bar{Y}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}$, o equivalentemente

$$\eta = \mathbf{a}_d^t \mathbf{y}, \quad \text{con} \quad \mathbf{a}_d^t = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t).$$

Sea $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ el vector de componentes de la varianza. El error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_d , formulado en (3.8), es

$$MSE(\widehat{Y}_d^{eblup}) = g_{1,d}(\boldsymbol{\theta}) + g_{2,d}(\boldsymbol{\theta}) + g_{3,d}(\boldsymbol{\theta}) + g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}),$$

donde

$$\begin{aligned}
g_{1,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,d}, \\
g_{2,d}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_{r,d} - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,d}], \\
g_{3,d}(\boldsymbol{\theta}) &\approx \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}, \\
g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_{r,d}^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,d}.
\end{aligned}$$

4.2.1. Cálculo de $g_{1,d}(\boldsymbol{\theta})$

Como $g_{1,d}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,d}$, se procede a su cálculo detallado. Para calcular \mathbf{T}_s , se utiliza la fórmula

$$\mathbf{T}_s = \boldsymbol{\Sigma}_u - \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \boldsymbol{\Sigma}_u,$$

donde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_u &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_s = [\mathbf{Z}_{1,s}, \mathbf{Z}_{2,s}], \quad \mathbf{V}_s^{-1} = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}), \\
\mathbf{V}_{d,s}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di,s} - \frac{\gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t}{w_{di}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right], \\
\delta_d &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}.
\end{aligned}$$

y γ_{di} , $\mathbf{w}_{n_{di}}$, w_{di} fueron definidos en (2.4).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Z}_s \boldsymbol{\Sigma}_u &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{Z}_{1,s}^t \\ \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{2,s}^t \end{bmatrix} \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{Z}_{1,s} & \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{2,s} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{1,s} & \sigma_1^2 \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{2,s} \\ \sigma_1^2 \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{1,s} & \sigma_2^4 \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{2,s} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{1,s} &= \frac{1}{\sigma_1^2} \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right), \\
\mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}^{-1}) \mathbf{Z}_{2,s} &= \frac{1}{\sigma_1^2} \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di}] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{1,s} &= \left(\mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{2,s} \right)^t, \\ \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{2,s} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \text{diag} \left(\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_s &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{1,s} & \sigma_1^2 \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{2,s} \\ \sigma_1^2 \sigma_2^2 \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{1,s} & \sigma_2^4 \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{2,s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y dado que $\sigma_1^2(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})w_{di}) = \sigma_0^2 \delta_d$ y $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2}(1 - \gamma_{di})w_{di} = \gamma_{di}$, los elementos de la diagonal principal de esta matriz son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{11} &= \sigma_1^2 \mathbf{I}_D - \sigma_1^4 \mathbf{Z}_{1,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{1,s} = \sigma_1^2 \text{diag}(1) - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2} \text{diag} \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})w_{di} \right) \\ &= \sigma_1^2 \text{diag} \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})w_{di} \right) = \sigma_0^2 \text{diag}(\delta_d), \\ \mathbf{t}_{22} &= \sigma_2^2 \mathbf{I}_M - \sigma_2^4 \mathbf{Z}_{2,s}^t \text{diag}(\mathbf{V}_{d,s}^{-1})\mathbf{Z}_{2,s} = \sigma_2^2 \text{diag} \left(\text{diag}(1) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma_2^4}{\sigma_0^2} \text{diag} \left(\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})w_{di} \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \right) \\ &= \sigma_2^2 \text{diag} \left(\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \right) + \delta_d \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,r} & \mathbf{Z}_{2,r} \end{bmatrix} \mathbf{T}_s \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,r}^t \\ \mathbf{Z}_{2,r}^t \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \text{diag}(\delta_d \mathbf{1}_{N_d - n_d} \mathbf{1}_{N_d - n_d}^t) \\ &\quad - \sigma_2^2 \text{diag} \left(\delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}^t \mathbf{1}_{N_d - n_d}^t \right) \\ &\quad - \sigma_2^2 \text{diag} \left(\delta_d \mathbf{1}_{N_d - n_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}^t \right) \\ &\quad + \sigma_2^2 \text{diag} \left(\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}} \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}^t \right) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})w_{di}] \mathbf{1}_{N_{di} - n_{di}}^t \end{aligned} \quad (4.1)$$

y como $\mathbf{a}_{r,d}^t = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t)$ entonces $g_{1,d}(\boldsymbol{\theta})$ es

$$g_{1,d}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma_0^2 \delta_d (1-f_d)^2 - 2 \frac{\sigma_2^2}{N_d} \delta_d (1-f_d) \sum_{i=1}^{m_d} (N_{di} - n_{di}) (1-\gamma_{di}) w_{di} + \frac{\sigma_2^2}{N_d^2} \left[\sum_{i=1}^{m_d} (N_{di} - n_{di})^2 (1-\gamma_{di}) + \delta_d \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (N_{di} - n_{di}) (1-\gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

4.2.2. Cálculo de $g_{2,d}(\boldsymbol{\theta})$

Como $g_{2,d}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_{r,d} - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,d}]$, se procede a su cálculo por pasos, tal y como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,r} & \mathbf{Z}_{2,r} \end{bmatrix} \mathbf{T}_s \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,s}^t \\ \mathbf{Z}_{2,s}^t \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\delta_d \mathbf{1}_{N_d-n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t) \\ &- \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1-\gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t \right) \\ &- \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \mathbf{1}_{N_d-n_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right) \\ &+ \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} ((1-\gamma_{di}) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \right) \\ &+ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1-\gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \Big). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{a}_{r,d}^t = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t)$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{W}_n$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s &= \delta_d (1-f_d) \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \\ &- \frac{\delta_d}{N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) \\ &+ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \\ \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,r} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} \triangleq (1-f_d) \overline{\mathbf{X}}_d^*, \end{aligned}$$

donde r_{di} identifica a las unidades de r pertenecientes al subnivel i del nivel d . Por tanto

$$\begin{aligned}
g_{2,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \left[(1-f_d)\overline{\mathbf{X}}_d^* + \left(\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) - (1-f_d) \right) \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right] \cdot \mathbf{Q}_s \cdot \\
&\quad \cdot \left[(1-f_d)\overline{\mathbf{X}}_d^* + \left(\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) - (1-f_d) \right) \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right]^t. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

4.2.3. Cálculo de $g_{3,d}(\boldsymbol{\theta})$

Sea $g_{3,d}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}$ la aproximación (1.38) propuesta por Prasad y Rao (1990). Como este término lleva un número muy elevado de cálculos en la expresión $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$, estos se han realizado en el apéndice B donde pueden verse más detalladamente.

Se puede observar que

$$\begin{aligned}
g_{3,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{01} & q_{11} & q_{12} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} E \left[(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{01} & q_{11} & q_{12} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} \\ F_{\sigma_1^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ F_{\sigma_2^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} \end{pmatrix}^{-1} \right\}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

donde los elementos $F_{\sigma_i^2 \sigma_j^2}$ son los elementos de la matriz de información de Fisher calculada en el algoritmo de Fisher-Scoring del método de ajuste y los elementos q_{ij} pueden encontrarse en el apéndice B.

Nótese que para el método de ajuste REML con parametrización alternativa no se dispone de la matriz de información de Fisher $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$, pues se tiene la matriz $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi})$ donde $\boldsymbol{\varphi} = (\sigma^2 = \sigma_0^2, \varphi_1 = \sigma_1^2/\sigma_0^2, \varphi_2 = \sigma_2^2/\sigma_0^2)^t$. El teorema 4.2.1 muestra la relación existente entre las matrices de información de Fisher asociadas a $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\varphi}$.

Teorema 4.2.1. Si $\boldsymbol{\varrho} = h(\boldsymbol{\beta})$ con $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \dots, \varrho_M)^t$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)^t$ entonces $\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{M}_\beta^t \mathbf{F}(\boldsymbol{\varrho}) \mathbf{M}_\beta$ donde \mathbf{M}_β es la matriz $\mathbf{M}_\beta = \left(\frac{\partial h_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right)_{\substack{t=1, \dots, M, \\ j=1, \dots, N}}$

Demostración: Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(x)}{\partial \beta_j} = \sum_{s=1}^M \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(x)}{\partial \varrho_s} \frac{\partial h_s(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \quad j = 1, \dots, N$$

Así pues, para cualesquiera $i, j = 1, \dots, N$ y para $X \stackrel{d}{=} f_{\boldsymbol{\varrho}}(\cdot)$, se verifica

$$E \left[\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \beta_j} \right] = \sum_{s,t=1}^M \frac{\partial h_s(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i} \frac{\partial h_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} E \left[\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \varrho_s} \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \varrho_t} \right]$$

Por tanto la matriz

$$\left(E \left[\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \beta_j} \right] \right)_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,N}}$$

es igual a

$$\left(\frac{\partial h_s(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i} \right)_{\substack{i=1,\dots,N \\ s=1,\dots,M}} \left(E \left[\frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \varrho_s} \frac{\partial \log f_{\boldsymbol{\varrho}}(X)}{\partial \varrho_t} \right] \right)_{\substack{s=1,\dots,M \\ t=1,\dots,M}} \left(\frac{\partial h_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right)_{\substack{t=1,\dots,M \\ j=1,\dots,N}}$$

Así pues, en notación matricial, se ha demostrado que

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{F}(\boldsymbol{\varrho}) \mathbf{M}_{\boldsymbol{\beta}}$$

□

Para la aplicación del anterior teorema al caso REML con parametrización alternativa, se hace $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}^t \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}$ donde $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\partial h_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right)_{\substack{t=0,1,2 \\ j=0,1,2}}$. Como $h_0(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2$, $h_1(\boldsymbol{\theta}) = \varphi_1$, $h_2(\boldsymbol{\theta}) = \varphi_2$, las derivadas parciales respecto a $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t$ son

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_0^2} = 1 & \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_1^2} = 0 & \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_2^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_2^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_1^2} = 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}, \end{array}$$

y por tanto

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} & -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\sigma^2 \sigma^2} & F_{\sigma^2 \varphi_1} & F_{\sigma^2 \varphi_2} \\ F_{\varphi_1 \sigma^2} & F_{\varphi_1 \varphi_1} & F_{\varphi_1 \varphi_2} \\ F_{\varphi_2 \sigma^2} & F_{\varphi_2 \varphi_1} & F_{\varphi_2 \varphi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} & \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 \\ -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} & 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} \end{pmatrix}$$

4.2.4. Cálculo de $g_{4,d}(\boldsymbol{\theta})$

El la teoría de la sección 1.6, se puede ver que $g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_{r,d}^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,d}$, donde $\boldsymbol{\Sigma}_{er} = \sigma_0^2 \mathbf{W}_{N-n}^{-1}$ y $\mathbf{W}_{N-n}^{-1} = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\mathbf{W}_{N_d-n_d}^{-1} \right) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{N_{di}-n_{di}}^{-1} \right) \right) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\text{diag}_{j \in r_{di}} \left(\frac{1}{w_{dij}} \right) \right) \right)$.

Como $\mathbf{a}_{r,d}^t = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t)$, no es difícil comprobar que el elemento d -ésimo del vector $\boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,d}$ es $\frac{\sigma_0^2}{N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\text{diag} \left(\frac{1}{w_{dij}} \right) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} \right]$ y por tanto

$$\begin{aligned} g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} (\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\text{diag} \left(\frac{1}{w_{dij}} \right) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} \right] \\ &= \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \text{diag}_{j \in r_{di}} \left(\frac{1}{w_{dij}} \right) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} = \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \frac{1}{w_{dij}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.3. Error cuadrático medio de \widehat{Y}_{di}^{eblup}

Para el modelo (3.1) se tiene que $\bar{Y}_{di} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}$, o equivalentemente $\eta = \mathbf{a}_{di}^t \mathbf{y}$, con

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{di}^t &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{0}_{N_{d1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d(i-1)}}^t, \mathbf{1}_{N_{di}}^t, \mathbf{0}_{N_{d(i+1)}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{dm_d}}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right) \\ &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right), \end{aligned}$$

donde δ_{ik} es la conocida delta de Kronecker, $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$

Sea $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ el vector de componentes de la varianza. El error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_{di} , formulado en (3.13), es

$$MSE(\widehat{Y}_{di}^{eblup}) = g_{1,di}(\boldsymbol{\theta}) + g_{2,di}(\boldsymbol{\theta}) + g_{3,di}(\boldsymbol{\theta}) + g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}),$$

donde

$$\begin{aligned} g_{1,di}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,di}, \\ g_{2,di}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s] \mathbf{Q}_s [\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_{r,di} - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,di}], \\ g_{3,di}(\boldsymbol{\theta}) &\approx \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}, \\ g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{a}_{r,di}^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,di}. \end{aligned}$$

Nótese que la única diferencia existente entre el $MSE(\widehat{Y}_d^{eblup})$ y el $MSE(\widehat{Y}_{di}^{eblup})$ radica en el vector \mathbf{a}_r seleccionado. Por tanto todos los cálculos previos necesarios para la obtención de $g_{l,di}(\boldsymbol{\theta})$, con $l = 1, \dots, 4$, pueden verse a lo largo de la sección anterior.

4.3.1. Cálculo de $g_{1,di}(\boldsymbol{\theta})$

Siendo $\mathbf{a}_{r,di}^t = \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}-n_{dk}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right)$, δ_{ik} la delta de Kronecker y $\mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t$ lo calculado en (4.1), entonces $g_{1,di}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,di}$ se puede expresar mediante

$$\begin{aligned} g_{1,di}(\boldsymbol{\theta}) &= \sigma_0^2 \delta_d (1 - f_{di})^2 - 2\sigma_2^2 \delta_d (1 - f_{di})^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})^2 (1 + \delta_d \gamma_{di} w_{di}) \\ &= (1 - f_{di})^2 \left[\sigma_0^2 \delta_d - 2\sigma_2^2 \delta_d (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) (1 + \delta_d \gamma_{di} w_{di}) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3.2. Cálculo de $g_{2,di}(\boldsymbol{\theta})$

Como $g_{2,di}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r - \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s \right] \mathbf{Q}_s \left[\mathbf{X}_r^t \mathbf{a}_{r,di} - \mathbf{X}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_r^t \mathbf{a}_{r,di} \right]$ y además $\mathbf{a}_{r,di}^t = \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}-n_{dk}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \mathbf{T}_s \mathbf{Z}_s^t \boldsymbol{\Sigma}_{es}^{-1} \mathbf{X}_s &= \delta_d (1 - f_{di}) \left[(1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) - (1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s}, \\ \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r &= \frac{1}{N_{di}} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,r} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} \triangleq (1 - f_{di}) \overline{\mathbf{X}}_{di}^*. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g_{2,di}(\boldsymbol{\theta}) &= \left[(1 - f_{di}) \overline{\mathbf{X}}_{di}^* - \delta_d (1 - f_{di}) (1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} - \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right] \cdot \mathbf{Q}_s \cdot \\ &\quad \cdot \left[(1 - f_{di}) \overline{\mathbf{X}}_{di}^* - \delta_d (1 - f_{di}) (1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} - \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right]^t \\ &= (1 - f_{di})^2 \left[\overline{\mathbf{X}}_{di}^* - \delta_d (1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right] \\ &\quad \cdot \mathbf{Q}_s \cdot \left[\overline{\mathbf{X}}_{di}^* - \delta_d (1 - \gamma_{di}) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right) - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,s} \right]^t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3.3. Cálculo de $g_{3,di}(\boldsymbol{\theta})$

Sea $g_{3,di}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr} \left\{ (\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t E \left[(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\}$ la aproximación (1.38) propuesta por Prasad y Rao (1990). Como este término lleva un número muy elevado de cálculos en la expresión $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$, estos se han realizado en el apéndice B donde pueden verse más detalladamente.

Se puede observar que

$$\begin{aligned} g_{3,di}(\boldsymbol{\theta}) &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{01} & q_{11} & q_{12} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} E \left[(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^t \right] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{01} & q_{11} & q_{12} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} \\ F_{\sigma_1^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ F_{\sigma_2^2 \sigma_0^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_1^2} & F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} \end{pmatrix}^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde los elementos $F_{\sigma_i^2 \sigma_j^2}$ son los elementos de la matriz de información de Fisher calculada en el algoritmo de Fisher-Scoring del método de ajuste y los elementos q_{ij} pueden encontrarse en el apéndice B.

Nótese de nuevo que para el ajuste mediante el método REML con parametrización alternativa, no se dispone de la matriz de información de Fisher $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$, pues se tiene la matriz $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi})$ donde $\boldsymbol{\varphi} = (\sigma^2 = \sigma_0^2, \varphi_1 = \sigma_1^2/\sigma_0^2, \varphi_2 = \sigma_2^2/\sigma_0^2)^t$. De nuevo el teorema 4.2.1 muestra la relación existente entre las matrices de información de Fisher asociadas a $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\varphi}$. Para ello hay que aplicar $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_\theta^t \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{M}_\theta$ donde $\mathbf{M}_\theta = \left(\frac{\partial h_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right)_{\substack{t=0,1,2, \\ j=0,1,2}}$, al igual que sucede en la sección anterior.

Por tanto

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} & -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\sigma^2 \sigma^2} & F_{\sigma^2 \varphi_1} & F_{\sigma^2 \varphi_2} \\ F_{\varphi_1 \sigma^2} & F_{\varphi_1 \varphi_1} & F_{\varphi_1 \varphi_2} \\ F_{\varphi_2 \sigma^2} & F_{\varphi_2 \varphi_1} & F_{\varphi_2 \varphi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} & \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 \\ -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} & 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} \end{pmatrix}.$$

4.3.4. Cálculo de $g_{4,di}(\boldsymbol{\theta})$

En la teoría desarrollada en la sección 1.6, se puede ver que $g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_{r,di}^t \boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,di}$, donde $\mathbf{a}_{r,di}^t = \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq k \leq m_d}^t \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}-n_{dk}} \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right)$.

Teniendo esto en cuenta, no es difícil comprobar que el elemento (d,i) -ésimo del vector $\boldsymbol{\Sigma}_{er} \mathbf{a}_{r,di}$ es $\frac{\sigma_0^2}{N_{di}} \mathbf{W}_{N_{di}-n_{di}}^{-1} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}$ y por tanto

$$g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \mathbf{W}_{N_{di}-n_{di}}^{-1} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \sum_{j \in r_{di}} \frac{1}{w_{dij}}. \quad (4.9)$$

4.4. Estimación del error cuadrático medio de los estimadores EBLUP

Como ya se puso de manifiesto en la sección 1.6, en las aplicaciones se necesita un estimador de $MSE(\widehat{\bar{Y}}^{eblup})$ para tener una medida de la variabilidad de $\widehat{\bar{Y}}^{eblup}$. En la ecuación (1.44) se formula la expresión de la estimación del error cuadrático medio,

$$\widehat{MSE}(\widehat{\eta}) = mse(\widehat{\eta}) = g_1(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_3(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_4(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$$

que en lo sucesivo se llamará estimador P-R de los EBLUP o estimador P-R, haciendo referencia al trabajo de Prasad y Rao (1990).

4.4.1. Estimación del error cuadrático medio de $\widehat{\bar{Y}}_d^{eblup}$

Llevando esto al cálculo de la estimación del error cuadrático medio de $\widehat{\bar{Y}}_d^{eblup}$ se tiene,

$$mse(\widehat{\bar{Y}}_d^{eblup}) = g_{1,d}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_{2,d}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_{3,d}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_{4,d}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (4.10)$$

donde el cálculo de $g_{l,d}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ consiste en calcular los $g_{l,d}(\boldsymbol{\theta})$ formulados en la sección 4.2, sustituyendo $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\sigma}_0^2, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2)$ obtenidos mediante el algoritmo de ajuste REML, con $l = 1, \dots, 4$.

4.4.2. Estimación del error cuadrático medio de $\widehat{\bar{Y}}_{di}^{eblup}$

Llevando esto al cálculo de la estimación del error cuadrático medio de $\widehat{\bar{Y}}_{di}^{eblup}$ se tiene,

$$mse(\widehat{\bar{Y}}_{di}^{eblup}) = g_{1,di}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_{2,di}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + 2g_{3,di}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + g_{4,di}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (4.11)$$

donde el cálculo de $g_{l,di}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ consiste en calcular los $g_{l,di}(\boldsymbol{\theta})$ formulados en la sección 4.3, sustituyendo $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\sigma}_0^2, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2)$ obtenidos mediante el algoritmo de ajuste REML, con $l = 1, \dots, 4$.

4.5. Experimento de simulación para el ECM de los EBLUP

En esta sección se describe un experimento de simulación diseñado para comprobar la correcta adecuación de las estimaciones de los errores cuadráticos medios de los EBLUP obtenidas en (4.10) y (4.11) respectivamente. Para ello se han establecido tres medidas de eficiencia empíricas para el $mse(\widehat{\bar{Y}}_d^{eblup})$ y el $mse(\widehat{\bar{Y}}_{di}^{eblup})$: error cuadrático medio (E_d y E_{di}), sesgo (B_d y B_{di}) y probabilidad de cobertura (C_d y C_{di}) para valores nominales del 95 % y del 99 %.

Este experimento de simulación se ha realizado utilizando el método de ajuste REML. El criterio de parada del algoritmo de Fisher-Scoring queda determinado por dos parámetros mutuamente excluyentes. El algoritmo se detiene cuando:

- el número de la iteración actual es mayor que el número máximo de iteraciones fijado a 500,
- para cada uno de los estimadores, la diferencia en valor absoluto, del valor de la estimación en una iteración y la anterior es menor que $\epsilon = 0,00001$.

4.5.1. Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia

Para la simulación de las muestras y el cálculo de las medidas de eficiencia se tienen que seguir los pasos del siguiente algoritmo de simulación.

1. Generación de los elementos determinísticos de la población

- Simulación de la variable explicativa: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$x_{dij} = (b_{di} - a_{di})U_{dij} + a_{di} \quad \text{con } U_{dij} = \frac{j}{N_{di} + 1}, \quad j = 1, \dots, N_{di}.$$

Se toma $a_{di} = 1$, $b_{di} = 1 + \frac{1}{m_d} (m_d(d-1) + i)$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

- Pesos: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, hacer $w_{dij} = 1/x_{dij}^\ell$, $\ell = 0, 1/2$, (2 posibilidades, homocedasticidad y heterocedasticidad).

2. Repetir $K = 100000$ veces ($k = 1, \dots, K$)

2.1. Generación de los elementos aleatorios de la población

- Simulación de los efectos aleatorios y errores: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$u_{1,d}^{(k)} \sim N(0, \sigma_1^2), \quad u_{2,di}^{(k)} \sim N(0, \sigma_2^2), \quad e_{dij}^{(k)} \sim N(0, \sigma_0^2).$$

- Simulación de la variable objetivo: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$y_{dij}^{(k)} = \beta x_{dij} + u_{1,d}^{(k)} + u_{2,di}^{(k)} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}^{(k)}, \quad \text{con } \beta = 1.$$

2.2. Extracción de muestras. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, generar una muestra aleatoria sin reemplazamiento de tamaño n_{di} dentro de cada nivel di del segundo factor aleatorio.

2.3. Calcular $\hat{\beta}^{(k)}$, $\hat{\sigma}_{0,(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{1,(k)}^2$ y $\hat{\sigma}_{2,(k)}^2$ usando el método de la máxima verosimilitud residual (REML).

2.4. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular

- $\hat{Y}_d^{eblup,(k)}$ y $\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)}$ como se propuso en (3.8) y (3.13) respectivamente,
- $mse(\hat{Y}_d^{eblup,(k)})$ y $mse(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)})$ según (4.10) y (4.11) respectivamente,

- $\xi_d^{(k)}$ y $\xi_{di}^{(k)}$ del siguiente modo

$$\xi_d^{(k)} = I \left(\bar{Y}_d^{(k)} \in \left[\hat{Y}_d^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse(\hat{Y}_d^{eblup,(k)})} \right] \right), \quad (4.12)$$

$$\xi_{di}^{(k)} = I \left(\bar{Y}_{di}^{(k)} \in \left[\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)})} \right] \right), \quad (4.13)$$

con $\alpha = 0,05, 0,01$, (2 posibilidades, $z_{0,975} = 1,959964$ y $z_{0,995} = 2,575829$) y donde

$$\bar{Y}_d^{(k)} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}, \quad \bar{Y}_{di}^{(k)} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}.$$

2.5. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ leer los valores $EMSE_d$ y $EMSE_{di}$ ya calculados en (3.14) y (3.15) respectivamente.

3. Salida: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular,

$$E_d = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\hat{Y}_d^{eblup,(k)}) - EMSE_d \right)^2, \quad E_{di} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)}) - EMSE_{di} \right)^2,$$

$$B_d = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\hat{Y}_d^{eblup,(k)}) - EMSE_d \right), \quad B_{di} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)}) - EMSE_{di} \right),$$

$$C_d = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_d^{(k)}, \quad C_{di} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_{di}^{(k)}.$$

4.5.2. Experimento de simulación y principales resultados

El presente experimento de simulación consiste en hacer varias pruebas del algoritmo del apartado 4.5.1, manteniendo constante los tamaños muestrales, los tamaños poblacionales y el numero de niveles y subniveles de los factores aleatorios, variando los valores de σ_0^2 , σ_1^2 y σ_2^2 . Para ello se toman:

- el número de niveles $D = 30$,
- el número de subniveles $m_d = 5$ dentro de cada nivel $d = 1, \dots, D$,
- el tamaño poblacional dentro de cada subnivel, $N_{di} = 200$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ y
- el tamaño muestral dentro de cada subnivel, $n_{di} = 20$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

Se realizan nueve pruebas del experimento, para las nueve combinaciones posibles de los valores, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = \{0.5, 1, 2\}$, y $\sigma_2^2 = \{0.5, 1, 2\}$, de acuerdo con la tabla 4.5.1:

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_1^{2,(g)}$	0.5	0.5	0.5	1	1	1	2	2	2
$\sigma_2^{2,(g)}$	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2

Tabla 4.5.1: Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación

En el apéndice E pueden encontrarse las tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación. A continuación se presentan resultados gráficos en los que se representan las medidas de eficiencia empíricas del apartado 4.5.1, error cuadrático medio, sesgo y probabilidad de cobertura para intervalos de confianza al 95 % y 99 %.

En estas figuras, que contienen cuatro gráficos, se representan diagramas box-and-whisker de cada una de las medidas de eficiencia (filas) bajo la ausencia o presencia de heterocedasticidad, $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$ (columnas). Para cada uno de los diagramas se presentan nueve cajas (una por cada prueba g del experimento), donde cada caja representa para esa medida de eficiencia, valor de ℓ y combinación g de σ_1^2 y σ_2^2 , la variabilidad para los 30 diferentes valores del dominio o 150 si se trata de los subdominios. En cada caja se ha añadido un punto amarillo representando la media de ese grupo.

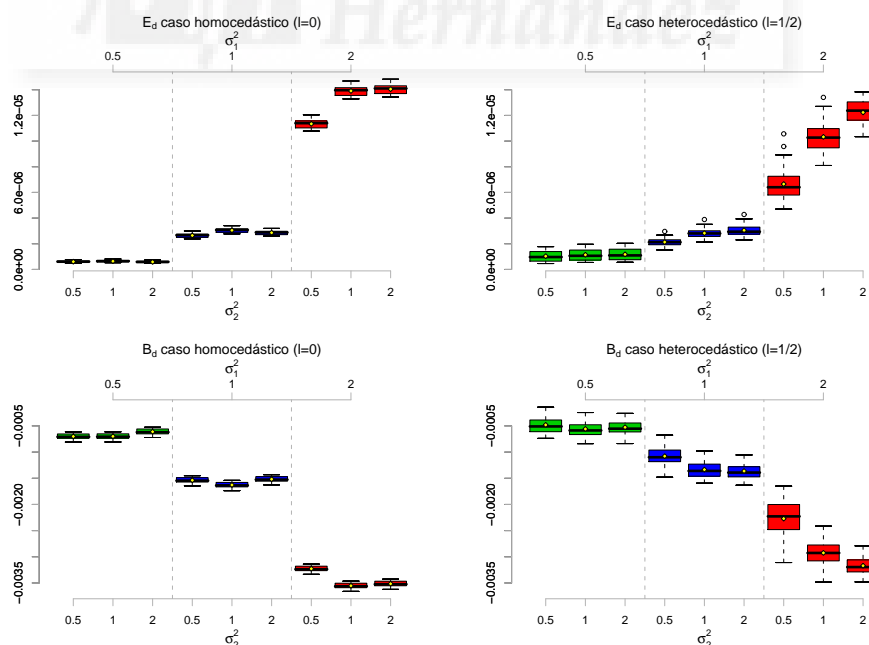


Figura 4.1: E_d y B_d para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

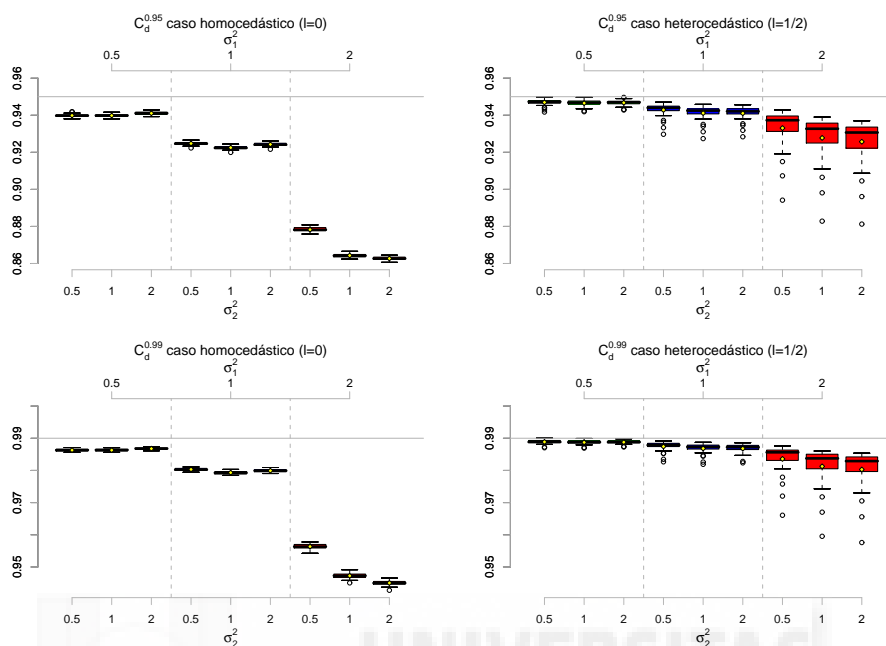


Figura 4.2: $C_d^{95\%}$ y $C_d^{99\%}$ para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

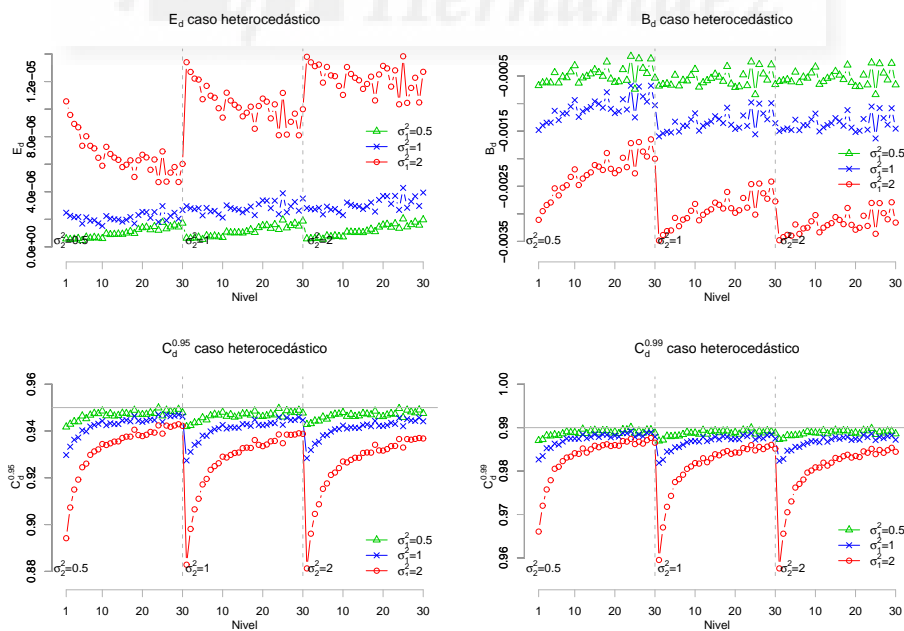


Figura 4.3: Medidas de eficiencia en dominios con $\ell = 1/2$

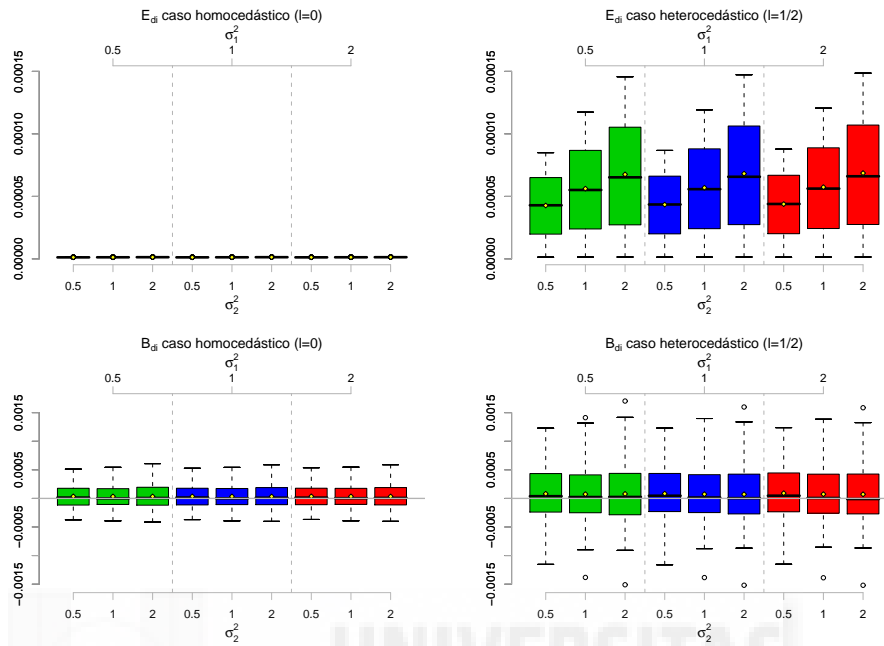


Figura 4.4: E_{di} y B_{di} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

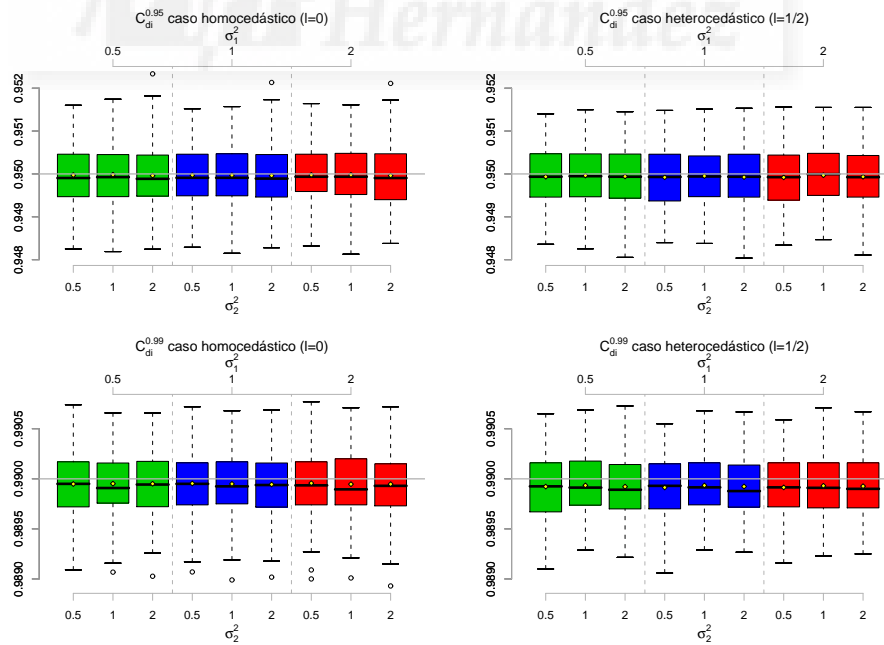


Figura 4.5: $C_{di}^{95\%}$ y $C_{di}^{99\%}$ para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

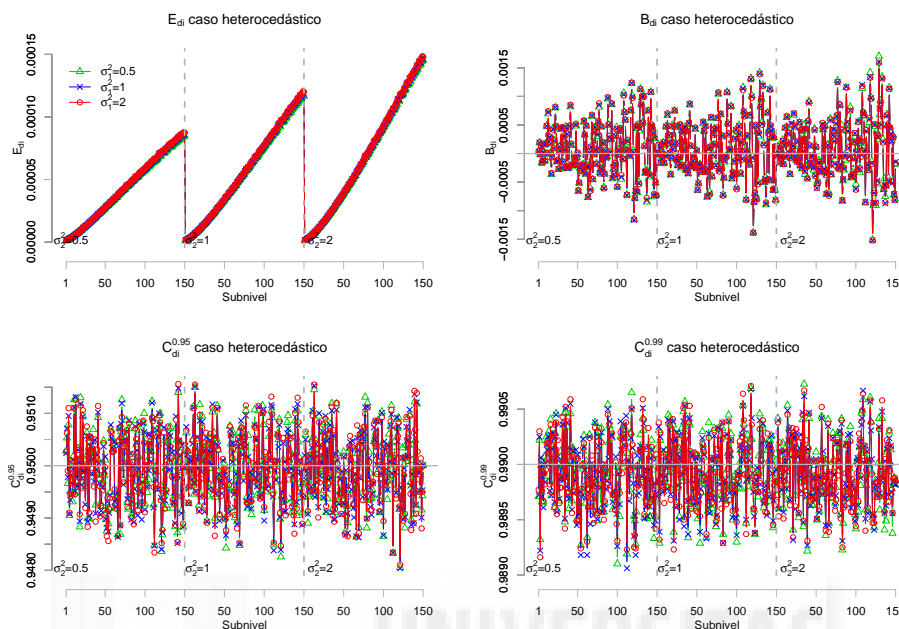


Figura 4.6: Medidas de eficiencia en subdominios con $\ell = 1/2$

4.5.3. Conclusiones

En el presente experimento de simulación, se han realizado varias pruebas con diferentes medidas de eficiencia empírica, con el fin de poner a prueba los estimadores del error cuadrático medio de los EBLUP (estimadores P-R) desarrollados a lo largo del presente capítulo. Dos de estas medidas, error cuadrático medio (E_d y E_{di}) y sesgo (B_d y B_{di}), cuantifican las discrepancias entre los estimadores P-R y el error cuadrático medio empírico de los EBLUP obtenido en el experimento de simulación de la sección 3.3. Con la tercera medida de eficiencia, probabilidad de cobertura (C_d y C_{di}), se comprueba la fiabilidad de los intervalos de confianza para los EBLUP, realizados mediante el estimador P-R. Para establecer conclusiones de estas tres medidas, se analizan por separado los resultados obtenidos para dominios (o niveles del primer factor aleatorio del modelo) y subdominios (o subniveles del segundo factor aleatorio dentro de cada nivel del primero).

Examinando los resultados obtenidos para dominios, figuras 4.1, 4.2 y 4.3, se puede decir que de manera general los estimadores P-R infraestiman el error cuadrático medio del estimador EBLUP. Esto se pone claramente de manifiesto en los diagramas para B_d (segunda fila de la figura 4.1), pues se observan sesgos sistemáticamente negativos, tanto en ausencia como presencia de heterocedasticidad. Estos sesgos son moderadamente reducidos en cuanto a magnitud y aumentan (negativamente) a medida que se aumenta σ_1^2 ; es decir, cuanto más grande sea la varianza entre dominios, la estimación que se obtenga del error cuadrático medio de los EBLUP

será más pequeña que la que se debería obtener. Para datos homocedásticos el sesgo es poco variable dentro de cada grupo, a la vista de la longitud de cada caja. Para el caso heterocedástico el sesgo se hace más variable y además se puede observar una ligera reducción respecto al caso homocedástico.

Todo esto concuerda con los valores de las probabilidades de cobertura derivados del experimento (véase 4.2). Aquí se puede observar que no se llega a alcanzar en momento alguno el valor del nivel de confianza con el que se calculó el intervalo. Si con el aumento de σ_1^2 se obtienen valores más pequeños del estimador P-R, entonces los intervalos de confianza serán más reducidos de lo esperado y por tanto en muchas menos ocasiones el verdadero valor del parámetro poblacional estará contenido en ellos. Cuando la estimación se realiza bajo un modelo con datos heterocedásticos, las probabilidades de cobertura se acercan más al valor del nivel de confianza con el que se calculó el intervalo. El razonamiento de que este hecho ocurra es el siguiente. En primer lugar hay que tener en cuenta que en presencia de heterocedasticidad, la variable de interés y_{dij} es mucho más variable, entonces el error cuadrático medio de los EBLUP se hace más elevado y también su estimación obtenida mediante el estimador P-R. Y en segundo lugar hay que recordar que en presencia de heterocedasticidad se observó cierta reducción en el sesgo. Con todo esto cabe pensar que se pueden obtener estimaciones del error cuadrático medio más elevadas, por tanto intervalos de confianza más amplios, en los que el verdadero valor del parámetro estará contenido en ellos en más ocasiones que en el caso homocedástico.

En cuanto al error cuadrático medio empírico de los estimadores del error cuadrático medio de los EBLUP cabe destacar su inapreciable magnitud y el considerable aumento que surge a medida que se aumenta la varianza entre dominios. La diferencia entre el error cuadrático medio de los estimadores P-R en el caso homocedástico y el heterocedástico reside en que en este último caso en cada grupo existe más variabilidad.

En la figura 4.3 puede verse para el caso heterocedástico en que sentido se mueven las variabilidades observadas en las medidas de eficiencia de las figuras 4.1 y 4.2. Ante la presencia de heterocedasticidad, al aumentar el índice d del dominio, x_{dij} se hace más variable, w_{dij} también y por tanto a y_{dij} le sucede lo mismo. Teniendo esto en cuenta y la justificación que se argumentó en párrafos anteriores, se puede explicar la reducción del sesgo que se observa para cada grupo de la línea correspondiente a $\sigma_1^2 = 2$. Este descenso en el sesgo se hace menos notable cuando se aumenta la varianza entre subdominios. También se puede observar en esta figura el aumento de la probabilidad de cobertura causado por el descenso del sesgo.

En lo que respecta a los resultados obtenidos para subdominios, figuras 4.4, 4.5 y 4.6, se puede decir que de manera general los estimadores P-R estiman adecuadamente el error cuadrático medio del estimador EBLUP. Esto se pone claramente de manifiesto en los diagramas para B_{di} (segunda fila de la figura 4.4), pues se observa cierta insesgadez tanto en ausencia como presencia de heterocedasticidad además de permanecer constante para cambios de varianza. De todos modos la insesgadez observada es más variable que la obtenida en dominios; es decir, se pueden considerar insesgados en cada una de las pruebas pero el estimador P-R para el caso

heterocedástico en unos subdominios infraestima en otros sobreestima mientras que para el caso homocedástico lo hace de manera menos apreciable.

Al igual que en el análisis para dominios, las conclusiones del estudio del sesgo sirven para explicar el estudio de las probabilidades de cobertura. Debido a que se aprecia cierta insesgadez, por el razonamiento ya explicado, se puede observar que se llega a alcanzar el valor del nivel de confianza con el que se calculó el intervalo con una exactitud asombrosa observando la magnitud de los valores. En presencia de heterocedasticidad y debido a la variabilidad del sesgo, las probabilidades de cobertura quedan ínfimamente por debajo del valor del nivel de confianza.

En cuanto al error cuadrático medio empírico del estimador P-R cabe destacar la clara diferencia entre el caso homocedástico y el heterocedástico. Bajo presencia de homocedasticidad se observan valores con magnitudes muy similares a las obtenidas en dominios. Sin embargo cuando se dispone de datos heterocedásticos, los E_{di} aumentan muy considerablemente hasta el punto de tener la misma escala que el sesgo, mucha variabilidad y además creciente con la varianza entre subdominios (σ_2^2) como se puede observar en la figura 4.6.

A pesar de que los estimadores P-R son sesgados para la estimación del error cuadrático medio de los EBLUP para dominios, se pueden considerar con una fiabilidad moderada a la vista de los valores obtenidos de las probabilidades de cobertura, pues se observan valores bastante aproximados al valor de la confianza del intervalo para el que se calculan. De todos modos se recomienda buscar otro estimador del error cuadrático medio de los EBLUP, que corrija el sesgo negativo que poseen los estimadores P-R.

Capítulo 5

El error cuadrático medio Bootstrap

5.1. Introducción

Considérese el modelo lineal mixto definido en (3.1). El objetivo en este capítulo es obtener estimaciones del error cuadrático medio del EBLUP de \widehat{Y}_d e \widehat{Y}_{di} mediante técnicas de remuestreo bootstrap. Para ello se analiza el comportamiento del procedimiento bootstrap mediante dos estimadores a través de un experimento de simulación y que además sirve para poder compararlos con los estimadores P-R desarrollados y estudiados en el capítulo anterior. Los métodos de remuestreo representan una solución alternativa al sesgo producido por los estimadores P-R.

El método de ajuste utilizado para la obtención de los estimadores de los parámetros del modelo en este capítulo, es la máxima verosimilitud residual (REML) con parametrización alternativa, a la vista de las conclusiones del experimento de simulación de la sección 3.3. Como semilla de inicio del algoritmo de Fisher-Scoring del método REML se han utilizado los valores de $\widehat{\sigma}$ que proporciona el método H3 por su sencillez computacional. Se ha implementado el bootstrap paramétrico introducido por González-Manteiga et al. (2008), para estimar errores cuadráticos medios de EBLUPs basados en modelos lineales mixtos con un efecto aleatorio en dominios.

5.2. Procedimiento Bootstrap

Sea Ω una población generada bajo las condiciones del modelo (3.1), y η un parámetro poblacional de tipo lineal asociado a la variable de interés \mathbf{y} . Sea s una muestra extraída de Ω usando cierto diseño muestral. En los siguientes pasos se describe un procedimiento bootstrap diseñado para estimar el error cuadrático medio de un predictor lineal óptimo $\widehat{\eta}_{eblup}$.

Paso 1. Cálculo de los estimadores $\widehat{\beta}^{eblup}$ y $\widehat{\theta} = (\widehat{\sigma}_0^2, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2)$,

Paso 2. Creación de la población bootstrap Ω^* de manera análoga a (3.2):

- Generación de los efectos aleatorios bootstrap. Generar D copias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza $\hat{\sigma}_1^2$, para disponer del vector de componentes $u_{1,d}^*$ para $d = 1, \dots, D$. Generar M copias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza $\hat{\sigma}_2^2$, para disponer del vector de componentes $u_{2,di}^*$ para $d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d$.
- Generar los errores bootstrap del modelo, como N copias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza $\hat{\sigma}_0^2$, para disponer del vector de componentes e_{dij}^* para $d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d, j = 1, \dots, N_{di}$.
- Con los elementos x_{dij} de Ω , construir la variable objetivo bootstrap \mathbf{y}^* como

$$y_{dij}^* = \mathbf{x}_{dij} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{eblup} + u_{1,d}^* + u_{2,di}^* + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}^* \quad (5.1)$$

para $d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d, j = 1, \dots, N_{di}$.

Para la población bootstrap Ω^* , se define análogamente a η en Ω el parámetro $\eta^* = \mathbf{a}^t \mathbf{y}^*$. Sea s^* una muestra extraída de Ω^* usando el mismo subconjunto de índices que en la muestra s inicial. Se denota mediante $\hat{\eta}_{eblup}^*$ al predictor EBLUP de η^* calculado a partir de la muestra s^* , del mismo modo que $\hat{\eta}_{eblup}$ se obtiene de s .

Bajo el modelo (5.1), el error cuadrático medio bootstrap de $\hat{\eta}_{eblup}^*$ denotado por $MSE^*(\hat{\eta}_{eblup}^*)$, puede ser utilizado para el cálculo del error cuadrático medio de $\hat{\eta}_{eblup}$. Dos versiones del error cuadrático medio bootstrap son:

$$MSE_1^*(\hat{\eta}_{eblup}^*) = E_* \left[(\hat{\eta}_{eblup}^* - \eta^*)^2 \right], \quad (5.2)$$

$$MSE_2^*(\hat{\eta}_{eblup}^*) = 2 \left[g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] - E_* \left[g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) \right] + E_* \left[(\hat{\tau}_{eblup}^* - \hat{\tau}_{blup}^*)^2 \right], \quad (5.3)$$

donde E_* denota la esperanza bajo la distribución bootstrap. Es conocido que $g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ es un estimador asintóticamente sesgado de $g_1(\boldsymbol{\theta})$ y además cuando D es pequeña $g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ también son sesgados. Es por esto que al error cuadrático medio bootstrap $MSE_2^*(\hat{\eta}_{eblup}^*)$ se le añade la corrección del sesgo bootstrap $E_*[g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)]$. En las aplicaciones se procede como sigue,

Paso 3. Dado el modelo bootstrap (5.1), generar B poblaciones bootstrap $\Omega^{*(b)}$, independientes e idénticamente distribuidas de tamaño N y calcular los parámetros $\eta^{*(b)}$ para $b = 1, \dots, B$.

Paso 4. Para cada población $\Omega^{*(b)}$, tomar una muestra s^* con el mismo subconjunto de índices que s , ajustar el modelo y calcular los estimadores EBLUP y BLUP de los parámetros bootstrap $\hat{\eta}_{eblup}^{*(b)}$ y $\hat{\eta}_{blup}^{*(b)}$ para $b = 1, \dots, B$.

Paso 5. Aproximando via Monte Carlo en (5.2) y (5.3), se obtienen los estimadores bootstrap del error cuadrático medio,

$$mse_1^*(\widehat{\eta}_{eblup}^*) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left(\widehat{\eta}_{eblup}^{*(b)} - \eta^{*(b)} \right)^2, \quad (5.4)$$

$$mse_2^*(\widehat{\eta}_{eblup}^*) = 2 \left[g_1(\widehat{\theta}) + g_2(\widehat{\theta}) + g_4(\widehat{\theta}) \right] - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left[g_1(\widehat{\theta}^{*(b)}) + g_2(\widehat{\theta}^{*(b)}) + g_4(\widehat{\theta}^{*(b)}) \right] \\ + \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left(\widehat{\eta}_{eblup}^{*(b)} - \widehat{\eta}_{blup}^{*(b)} \right)^2, \quad (5.5)$$

5.3. Experimento de simulación para el ECM Bootstrap

En esta sección se describe un experimento de simulación diseñado para el funcionamiento de los estimadores bootstrap de los errores cuadráticos medios de los EBLUP obtenidos en (5.4) y (5.5) y compararlos con los estimadores P-R obtenidos mediante el experimento del apartado 4.5. Para ello se han establecido tres medidas de eficiencia empíricas para mse_d^{*1} , mse_{di}^{*1} , mse_d^{*2} y mse_{di}^{*2} : error cuadrático medio (E_d^{*1} , E_d^{*2} , E_{di}^{*1} y E_{di}^{*2}), sesgo (B_d^{*1} , B_d^{*2} , B_{di}^{*1} y B_{di}^{*2}) y probabilidad de cobertura (C_d^{*1} , C_d^{*2} , C_{di}^{*1} y C_{di}^{*2}).

Este experimento de simulación se ha realizado utilizando el método de ajuste REML. El criterio de parada del algoritmo de Fisher-Scoring queda determinado por dos parámetros mutuamente excluyentes. El algoritmo se detiene cuando:

- el número de la iteración actual es mayor que el número máximo de iteraciones fijado a 500,
- para cada uno de los estimadores, la diferencia en valor absoluto, del valor de la estimación en una iteración y la anterior es menor que $\epsilon = 0,00001$.

5.3.1. Algoritmo de simulación. Cálculo de medidas de eficiencia

Para el cálculo de las medidas de eficiencia del estimador bootstrap del error cuadrático medio de los EBLUP, se tienen que seguir los pasos del siguiente algoritmo de simulación, aplicando el procedimiento de la sección 5.2.

1. Generación de los elementos determinísticos de la población

- Simulación de la variable explicativa: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$x_{dij} = (b_{di} - a_{di})U_{dij} + a_{di} \quad \text{con} \quad U_{dij} = \frac{j}{N_{di} + 1}, \quad j = 1, \dots, N_{di}.$$

Se toma $a_{di} = 1$, $b_{di} = 1 + \frac{1}{m_d} (m_d(d-1) + i)$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

- Pesos: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, hacer $w_{dij} = 1/x_{dij}^\ell$, $\ell = 0, 1/2$, (2 posibilidades, homocedasticidad y heterocedasticidad).

2. Repetir $K = 1000$ veces ($k = 1, \dots, K$)

2.1. Generación de los elementos aleatorios de la población

- Simulación de los efectos aleatorios y errores: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$u_{1,d}^{(k)} \sim N(0, \sigma_1^2), \quad u_{2,di}^{(k)} \sim N(0, \sigma_2^2), \quad e_{dij}^{(k)} \sim N(0, \sigma_0^2).$$

- Simulación de la variable objetivo: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$y_{dij}^{(k)} = \beta x_{dij} + u_{1,d}^{(k)} + u_{2,di}^{(k)} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}^{(k)}, \quad \text{con } \beta = 1.$$

- Cálculo de los valores poblacionales: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, calcular

$$\bar{Y}_d^{(k)} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}, \quad \bar{Y}_{di}^{(k)} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{(k)}.$$

2.2. Extracción de muestras. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, generar una muestra aleatoria sin reemplazamiento de tamaño n_{di} dentro de cada nivel di del segundo factor aleatorio.

2.3. Calcular $\hat{\beta}^{eblup,(k)}$ y $\hat{\sigma}^{(k)} = (\hat{\sigma}_0^{2(k)}, \hat{\sigma}_1^{2(k)}, \hat{\sigma}_2^{2(k)})^t$ usando el método de la máxima verosimilitud residual (REML).

2.4. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular

- $\hat{Y}_d^{eblup,(k)}$ y $\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)}$ mediante (3.8) y (3.13) respectivamente.
- $mse(\hat{Y}_d^{eblup,(k)})$ y $mse(\hat{Y}_{di}^{eblup,(k)})$ según (4.10) y (4.11) respectivamente. Para esto es necesario disponer de $g_{l,d}(\hat{\sigma}^{(k)})$ y $g_{l,di}(\hat{\sigma}^{(k)})$ con $l = 1, \dots, 4$,
- $\xi_d^{(k)}$ y $\xi_{di}^{(k)}$ según (4.12) y (4.13).

2.5. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ leer los valores $EMSE_d$ y $EMSE_{di}$ calculados en el experimento de simulación de la sección 3.3. Véase (3.14) y (3.15) respectivamente.

2.6. Repetir $B = 1000$ veces ($b = 1, \dots, B$)

a) Generación de los elementos aleatorios de la población bootstrap

- Simulación de los efectos aleatorios y errores bootstrap: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$u_{1,d}^{*(kb)} \sim N(0, \hat{\sigma}_1^{2(k)}), \quad u_{2,di}^{*(kb)} \sim N(0, \hat{\sigma}_2^{2(k)}), \quad e_{dij}^{*(kb)} \sim N(0, \hat{\sigma}_0^{2(k)}).$$

- Simulación de la variable objetivo bootstrap: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, generar

$$y_{dij}^{*(kb)} = \widehat{\beta}^{eblup,(k)} x_{dij} + u_{1,d}^{*(kb)} + u_{2,di}^{*(kb)} + w_{dij}^{-1/2} e_{dij}^{*(kb)}.$$

- Cálculo de los valores poblacionales bootstrap: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$, calcular

$$\bar{Y}_d^{*(kb)} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{*(kb)}, \quad \bar{Y}_{di}^{*(kb)} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} y_{dij}^{*(kb)}.$$

- b) Extracción de muestras bootstrap. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, extraer una muestra aleatoria de tamaño n_{di} de la población bootstrap, seleccionando los mismos índices (d, i, j) que en la extracción del paso 2.2.
- c) Calcular $\widehat{\beta}^{eblup,*(kb)}$, $\widehat{\beta}^{blup,*(kb)}$ y $\widehat{\sigma}^{*(kb)} = (\widehat{\sigma}_0^{2,*(kb)}, \widehat{\sigma}_1^{2,*(kb)}, \widehat{\sigma}_2^{2,*(kb)})^t$ usando el método de la máxima verosimilitud residual (REML).
- d) Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular
- $\widehat{Y}_d^{blup,*(kb)}$, $\widehat{Y}_{di}^{blup,*(kb)}$ con (3.4), (3.12) y $\widehat{Y}_d^{eblup,*(kb)}$, $\widehat{Y}_{di}^{eblup,*(kb)}$ mediante (3.8) y (3.13) respectivamente.
 - $g_{l,d}(\widehat{\sigma}^{*(kb)})$, $g_{l,di}(\widehat{\sigma}^{*(kb)})$ con $l = 1, 2, 4$ según la teoría desarrollada en el capítulo 4.
- e) Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular

$$\begin{aligned} \psi_{E,d}^{*(kb)} &= \widehat{Y}_d^{eblup,*(kb)} - \bar{Y}_d^{*(kb)}, & \psi_{E,di}^{*(kb)} &= \widehat{Y}_{di}^{eblup,*(kb)} - \bar{Y}_{di}^{*(kb)}, \\ \psi_{EB,d}^{*(kb)} &= \widehat{Y}_d^{eblup,*(kb)} - \widehat{Y}_d^{blup,*(kb)}, & \psi_{EB,di}^{*(kb)} &= \widehat{Y}_{di}^{eblup,*(kb)} - \widehat{Y}_{di}^{blup,*(kb)}. \end{aligned}$$

2.7. Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular

- $mse_d^{*1,(k)}$, $mse_{di}^{*1,(k)}$, $mse_d^{*2,(k)}$ y $mse_{di}^{*2,(k)}$ del modo siguiente

$$\begin{aligned} mse_d^{*1,(k)} &= \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi_{E,d}^{*(kb)} \psi_{E,d}^{*(kb)}, & mse_{di}^{*1,(k)} &= \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi_{E,d}^{*(kb)} \psi_{E,d}^{*(kb)}, \\ mse_d^{*2,(k)} &= 2 \left[g_{1,d}(\widehat{\sigma}^{(k)}) + g_{2,d}(\widehat{\sigma}^{(k)}) + g_{4,d}(\widehat{\sigma}^{(k)}) \right] \\ &- \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left[g_{1,d}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) + g_{2,d}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) + g_{4,d}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) \right] \\ &+ \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi_{EB,d}^{*(kb)} \psi_{EB,d}^{*(kb)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
mse_{di}^{*2,(k)} &= 2 \left[g_{1,di}(\widehat{\sigma}^{(k)}) + g_{2,di}(\widehat{\sigma}^{(k)}) + g_{4,di}(\widehat{\sigma}^{(k)}) \right] \\
&- \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left[g_{1,di}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) + g_{2,di}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) + g_{4,di}(\widehat{\sigma}^{*(kb)}) \right] \\
&+ \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi_{EB,di}^{*(kb)} \psi_{EB,di}^{*(kb)},
\end{aligned}$$

- $\xi_d^{*1,(k)}$, $\xi_{di}^{*1,(k)}$, $\xi_d^{*2,(k)}$ y $\xi_{di}^{*2,(k)}$ del modo siguiente

$$\begin{aligned}
\xi_d^{*1,(k)} &= I \left(\bar{Y}_d^{(k)} \in \left[\widehat{Y}_d^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse_d^{*1,(k)}} \right] \right), \\
\xi_{di}^{*1,(k)} &= I \left(\bar{Y}_{di}^{(k)} \in \left[\widehat{Y}_{di}^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse_{di}^{*1,(k)}} \right] \right), \\
\xi_d^{*2,(k)} &= I \left(\bar{Y}_d^{(k)} \in \left[\widehat{Y}_d^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse_d^{*2,(k)}} \right] \right), \\
\xi_{di}^{*2,(k)} &= I \left(\bar{Y}_{di}^{(k)} \in \left[\widehat{Y}_{di}^{eblup,(k)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{mse_{di}^{*2,(k)}} \right] \right).
\end{aligned}$$

3. Salida: Para $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$ calcular,

$$\begin{aligned}
E_d &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\widehat{Y}_d^{eblup,(k)}) - EMSE_d \right)^2, & E_{di} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\widehat{Y}_{di}^{eblup,(k)}) - EMSE_{di} \right)^2, \\
E_d^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_d^{*1,(k)} - EMSE_d \right)^2, & E_{di}^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_{di}^{*1,(k)} - EMSE_{di} \right)^2, \\
E_d^{*2} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_d^{*2,(k)} - EMSE_d \right)^2, & E_{di}^{*2} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_{di}^{*2,(k)} - EMSE_{di} \right)^2, \\
B_d &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\widehat{Y}_d^{eblup,(k)}) - EMSE_d \right), & B_{di} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse(\widehat{Y}_{di}^{eblup,(k)}) - EMSE_{di} \right), \\
B_d^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_d^{*1,(k)} - EMSE_d \right), & B_{di}^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_{di}^{*1,(k)} - EMSE_{di} \right), \\
B_d^{*2} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_d^{*2,(k)} - EMSE_d \right), & B_{di}^{*2} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(mse_{di}^{*2,(k)} - EMSE_{di} \right), \\
C_d &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_d^k, & C_{di} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_{di}^k, \\
C_d^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_d^{*1,(k)}, & C_{di}^{*1} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_{di}^{*1,(k)},
\end{aligned}$$

$$C_d^{*2} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_d^{*2,(k)}, \quad C_{di}^{*2} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_{di}^{*2,(k)}.$$

5.3.2. Experimento de simulación y principales resultados

El presente experimento de simulación consiste en hacer varias pruebas del algoritmo del apartado 5.3.1, manteniendo constante los tamaños muestrales, los tamaños poblacionales y el número de niveles y subniveles de los factores aleatorios, variando los valores de σ_0^2 , σ_1^2 y σ_2^2 . Para ello se toman:

- el número de niveles $D = 30$,
- el número de subniveles $m_d = 5$ dentro de cada nivel $d = 1, \dots, D$,
- el tamaño poblacional dentro de cada subnivel, $N_{di} = 200$, $d = 1 \dots, D$, $i = 1 \dots, m_d$, y
- el tamaño muestral dentro de cada subnivel, $n_{di} = 20$, $d = 1 \dots, D$, $i = 1 \dots, m_d$.

Se realizan nueve pruebas del experimento, para las nueve combinaciones posibles de los valores, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = \{0.5, 1, 2\}$, y $\sigma_2^2 = \{0.5, 1, 2\}$, de acuerdo con la tabla 5.3.1:

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_1^{2,(g)}$	0.5	0.5	0.5	1	1	1	2	2	2
$\sigma_2^{2,(g)}$	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2

Tabla 5.3.1: Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación

En el apéndice F se encuentran las tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación. A continuación se presentan resultados gráficos en los que se representan las medidas de eficiencia empíricas del apartado 5.3.1, error cuadrático medio, sesgo y probabilidad de cobertura para intervalos de confianza al 95 % y 99 %.

En estas figuras, que contienen cuatro gráficos, se representan diagramas de cada uno de los tipos de medidas de eficiencia (filas) bajo la ausencia o presencia de heterocedasticidad, $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$ (columnas). Para cada uno de los diagramas se presentan tres líneas, una para cada valor de la medida de eficiencia del estimador correspondiente del error cuadrático medio de los EBLUP, $mse(\hat{Y})$, $mse^{*1}(\hat{Y})$ y $mse^{*2}(\hat{Y})$.

Con el único objetivo de ilustrar la adecuación de las estimaciones bootstrap frente a los estimadores P-R, se han graficado solamente los casos del experimento de simulación correspondientes a $\sigma_1^2 = 1$. De este modo se evita un innecesario número de gráficos que no aportan información adicional relevante. En el apéndice F se puede encontrar toda la casuística de la tabla 5.3.1.

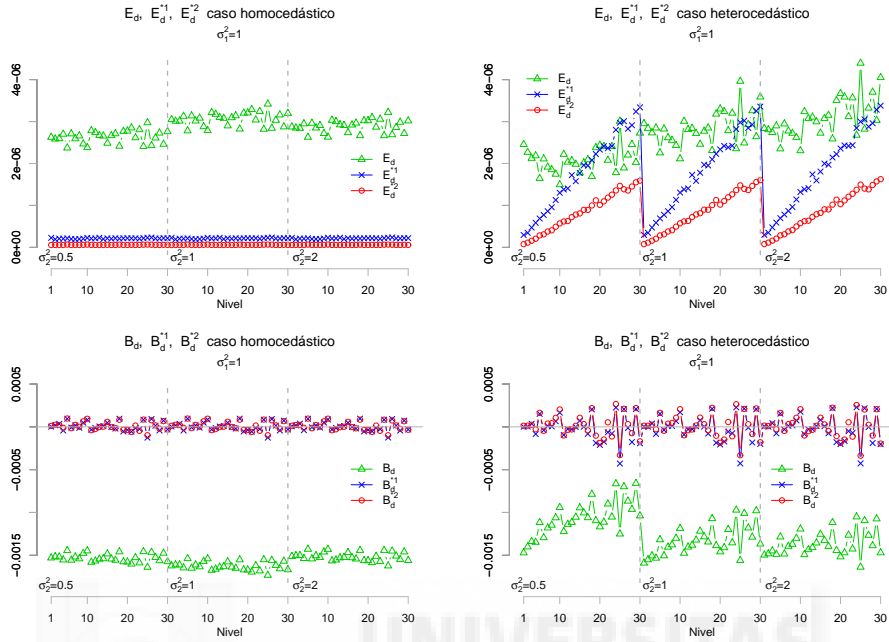


Figura 5.1: $E_d, E_d^{*1}, E_d^{*2}, B_d, B_d^{*1}$ y B_d^{*2} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

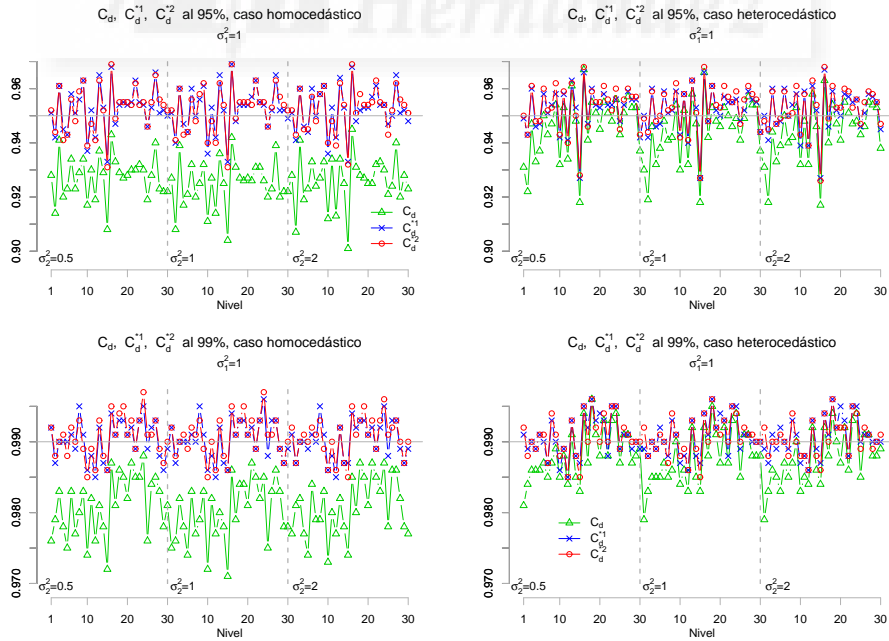


Figura 5.2: C_d, C_d^{*1} y C_d^{*2} al 95% y 99%, para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

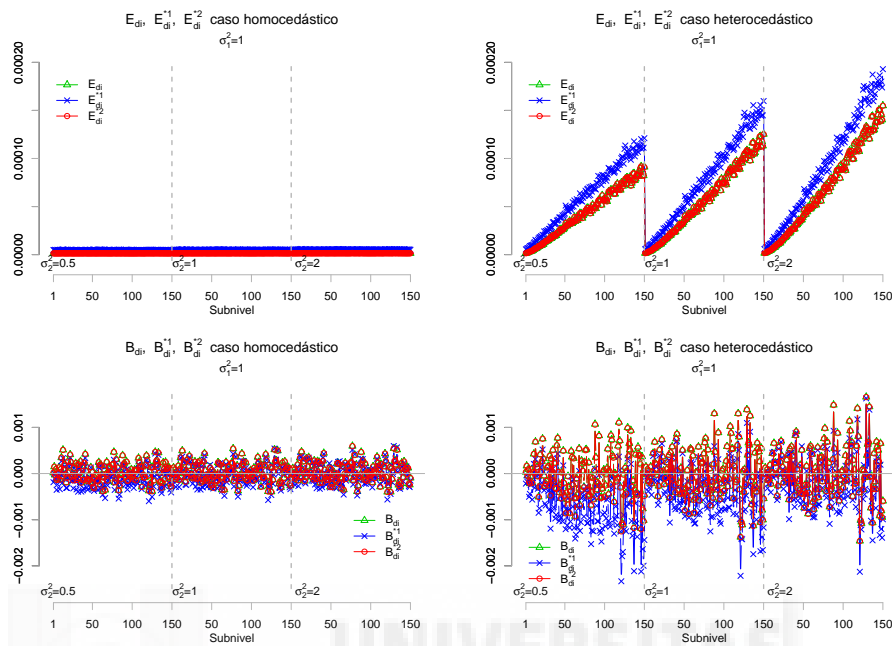


Figura 5.3: $E_{di}, E_{di}^{*1}, E_{di}^{*2}, B_{di}, B_{di}^{*1}$ y B_{di}^{*2} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

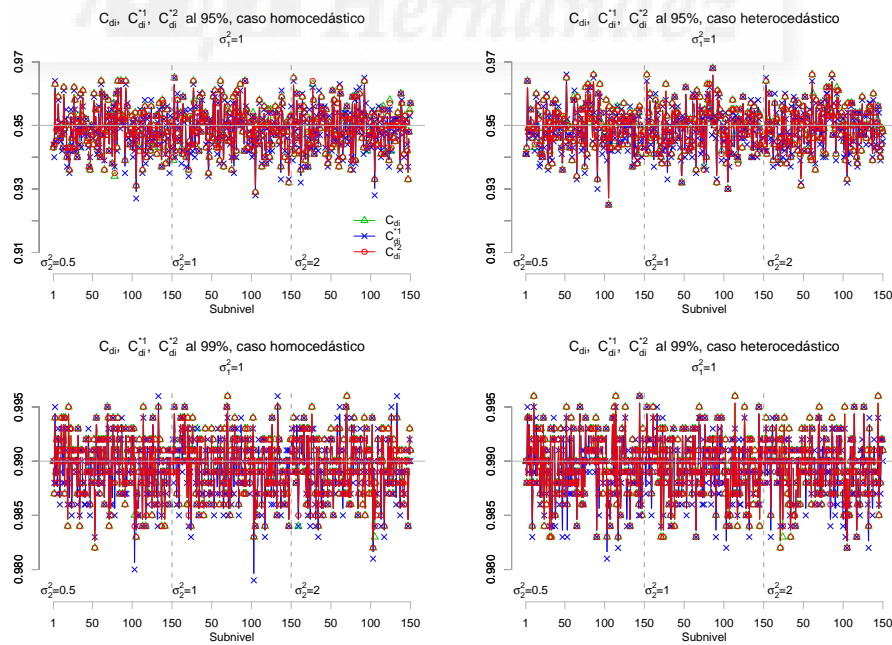


Figura 5.4: C_{di}, C_{di}^{*1} y C_{di}^{*2} al 95% y 99%, para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$

5.3.3. Conclusiones

En el presente experimento de simulación, se han realizado varias pruebas con diferentes medidas de eficiencia empírica, con el fin de analizar el comportamiento los estimadores bootstrap del error cuadrático medio de los EBLUP, desarrollados a lo largo del presente capítulo y compararlos con los estimadores P-R del capítulo anterior. Dos de estas medidas, error cuadrático medio y sesgo, cuantifican las discrepancias entre los estimadores del error cuadrático medio de los EBLUP (estimadores bootstrap y P-R) y el error cuadrático medio empírico de los EBLUP obtenido en el experimento de simulación de la sección 3.3. Con la tercera medida de eficiencia, probabilidad de cobertura, se comprueba la fiabilidad de los intervalos de confianza para los EBLUP, realizados mediante los estimadores bootstrap del error cuadrático medio (mse^{*1} y mse^{*2}) y el estimador P-R (mse). Para establecer conclusiones de estas tres medidas, se analizan por separado los resultados obtenidos para dominios (o niveles del primer factor aleatorio del modelo) y subdominios (o subniveles del segundo factor aleatorio dentro de cada nivel del primero).

Examinando los resultados obtenidos para dominios, figuras 5.1 y 5.2, se puede decir de manera general que los estimadores bootstrap del error cuadrático medio de los EBLUP mejoran las estimaciones proporcionadas por los estimadores P-R, tanto en ausencia como en presencia de heterocedasticidad. Esto se pone claramente de manifiesto en los diagramas para el sesgo (segunda fila de la figura 5.1, trazos azul y rojo), pues se observa una reducción notable del sesgo mediante cualquiera de las dos versiones bootstrap, tanto en el caso homocedástico como el heterocedástico. Estos estimadores bootstrap no solo producen una reducción del sesgo, sino que además se comprueba que son claramente insesgados, pues cubren la línea horizontal de sesgo cero. Como ya se conoce de los resultados del experimento 4.5, se vuelve a poner de manifiesto que los estimadores P-R infraestiman el error cuadrático medio del estimador EBLUP, línea verde de los mismos diagramas.

En cuanto al error cuadrático medio empírico de los estimadores del error cuadrático medio de los EBLUP (primera fila de la figura 5.1) cabe destacar la inapreciable magnitud de esta medida empírica en los estimadores bootstrap y la considerable reducción que se ha producido con respecto al estimador P-R. Entre los dos estimadores bootstrap se encuentra más precisión en el segundo de ellos, mse^{*2} (véanse las líneas rojas en los diagramas de esta figura). La diferencia entre el error cuadrático medio de los estimadores bootstrap en el caso homocedástico y el heterocedástico, reside en que en este último caso se produce un aumento con cada dominio debido al modo en que se generaron los elementos determinísticos de la población.

Las probabilidades de cobertura graficadas en la figura 5.2, son causa y confirmación de lo que se concluye de los diagramas del sesgo. Se observa un claro ajuste al valor del nivel de confianza con el que se calculó el intervalo correspondiente para los estimadores bootstrap, apreciándose una ligera mejoría del estimador mse^{*2} . Para el estimador P-R sucede lo mismo que en el experimento 4.5, no llega a alcanzar la probabilidad deseada, quedándose bastante por debajo de los estimadores bootstrap.

En lo que respecta a los resultados obtenidos para subdominios, figuras 5.3 y 5.4, se puede decir que de manera general el estimador P-R y la segunda versión del bootstrap mse^{*2} estiman adecuadamente el error cuadrático medio del estimador EBLUP. Esto se pone claramente de manifiesto en los diagramas para el error cuadrático medio empírico y el sesgo empírico (véase la figura 5.3). Se observa insesgadez en estos dos estimadores, mientras que el estimador bootstrap mse^{*1} infraestima muy ligeramente bajo un modelo con datos heterocedásticos e inapreciablemente en el caso homocedástico.

En cuanto al error cuadrático medio empírico de los estimadores del error cuadrático medio de los EBLUP de subdominios (primera fila de la figura 5.3), solo cabe destacar la amplia diferencia entre el caso homocedástico y el heterocedástico. Bajo presencia de homocedasticidad se observan valores con magnitudes cercanas a las obtenidas en dominios, tanto para el estimador P-R mse como para el estimador bootstrap mse^{*2} . En el caso heterocedástico también son muy próximos los valores de la medida entre estos dos estimadores, pero aumenta de manera muy considerable debido al modo en que se generaron los elementos determinísticos de la población.

Con respecto a las probabilidades de cobertura graficadas en la figura 5.4 se observa un claro ajuste al valor del nivel de confianza con el que se calculó el intervalo correspondiente para todos los estimadores, aunque en los dos casos de nivel de confianza al 99 % se nota cierta pérdida en la primera versión del estimador bootstrap mse^{*1} .

Globalmente se puede decir que los estimadores bootstrap mejoran la estimación del error cuadrático medio de los EBLUP que hacen los estimadores P-R. Mejoran la precisión y producen estimaciones insesgadas. Se concluye recomendando la segunda versión del estimador bootstrap con corrección del sesgo mse^{*2} . También hay que destacar que los estimadores bootstrap pueden llegar a ser muy sensibles bajo presencia de heterocedasticidad, aunque incluso en este caso son más fiables que el estimador P-R. Estos comentarios son especialmente relevantes en el caso de dominios d . Sin embargo, para subdominios d_i los estimadores mse y mse^{*2} son igualmente aconsejables, si bien este último requiere de ciertos esfuerzos computacionales. En ese sentido conviene actuar con parsimonia y se recomienda el uso del estimador P-R mse cuando el dominio de interés es el subdominio y el tamaño muestral global es grande. Esta última es precisamente la situación encontrada en los dos casos prácticos tratados en el capítulo 6.



Capítulo 6

Aplicación a dos casos reales

6.1. Introducción

El objetivo en este capítulo es obtener una predicción lineal insesgada óptima (EBLUP) de determinados parámetros poblacionales de la variable de interés y y sus errores cuadráticos medios, para dos conjuntos de datos provenientes de dos encuestas socioeconómicas que realiza el Instituto Nacional de Estadística (INE). Estas encuestas son la Encuesta de Población Activa (EPA) y la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (ECPF). Para cada uno de los casos se estiman diferentes parámetros poblacionales, totales para el primero y medias para el segundo, con el fin de probar la correcta adecuación de la teoría desarrollada. Además con estos dos casos se ilustrará la utilidad del segundo factor aleatorio (anidado en el primero) del modelo lineal mixto definido en (3.1). En el caso de la EPA el segundo factor aleatorio sintetiza la estructura espacial (geográfica) de la variable objetivo, mientras que en el caso de la ECPF modeliza el comportamiento temporal.

Los cálculos realizados para la obtención de los EBLUP y de sus errores cuadráticos medios tienen su justificación en la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, así como en los experimentos computacionales llevados a cabo en las secciones 2.7, 3.3 y 4.5.

El método de ajuste utilizado para la obtención de los estimadores de los parámetros del modelo en este capítulo es el de la máxima verosimilitud residual (REML), a la vista de las conclusiones del experimento de simulación de la sección 3.3. Como semilla de inicio del algoritmo de Fisher-Scoring del método REML se han utilizado los valores de $\hat{\sigma}$ que proporciona el método 3 de Henderson. En los experimentos de simulación 2.7.2 y 2.7.3 se observó que estos valores no proporcionan las mejores estimaciones. Sin embargo, dan un punto de partida adecuado para el algoritmo de ajuste ya que están próximos a la solución del método REML. Además esta semilla se calcula mediante fórmulas explícitas que se evalúan con rapidez (no hay algoritmo iterativo) y en consecuencia verifican las propiedades deseables de cercanía a la solución óptima y de velocidad de cómputo.

En las dos aplicaciones a datos reales presentadas en esta sección, la estimación del error cuadrático medio del estimador EBLUP del total o de la media del subdominio di , se ha hecho

utilizando el estimador P-R de fórmula explícita. Esto se debe a un doble motivo. Por una parte, de las conclusiones obtenidas en los experimentos de simulación del capítulo 5, se deduce que los estimadores mse_{di} y mse_{di}^{*2} tienen un comportamiento igualmente eficiente. Por otro lado, la utilización del procedimiento bootstrap del apartado 5.2, requiere el conocimiento de los valores de la variable \mathbf{x} en todas las unidades de la población. Ello impide su aplicación en el presente capítulo. Un bootstrap paramétrico alternativo que estimara el error cuadrático medio del EBLUP de una combinación lineal de efectos fijos y aleatorios podría emplearse. Esta posibilidad se contempla en las futuras líneas de trabajo especificadas en el capítulo 7.

6.2. Consideraciones previas

Para la correcta adecuación de la teoría desarrollada (así como de los programas en C++ implementados) a la obtención de resultados en datos provenientes de encuestas por muestreo en poblaciones finitas, es necesario dar expresiones alternativas de algunos de los cálculos realizados en capítulos anteriores. Para ello se formulan y demuestran las proposiciones de esta sección. En las proposiciones 6.2.1 y 6.2.2 se enuncia un procedimiento alternativo para el cálculo de ciertas componentes de g_2 , mientras que en las proposiciones 6.2.3 y 6.2.5 se hace lo propio para g_4 .

Proposición 6.2.1. *El sumando $\mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r = (1 - f_d) \bar{\mathbf{X}}_d^*$ de la componente $g_{2,d}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_d puede escribirse alternativamente como*

$$\mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r = \bar{\mathbf{X}}_d - f_d \bar{\mathbf{x}}_d$$

Demostración: Recuérdese que

$$\mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,r} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} = (1 - f_d) \bar{\mathbf{X}}_d^*$$

donde $\mathbf{a}_{r,d}^t = \frac{1}{N_d} (\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t)$.

Desarrollando a partir de $\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{X}_r &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} = \frac{1}{N_d} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} + \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right] \\ &= \frac{1}{N_d} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right] = \bar{\mathbf{X}}_d - \frac{n_d}{N_d} \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} = \bar{\mathbf{X}}_d - \frac{n_d}{N_d} \bar{\mathbf{x}}_d \\ &= \bar{\mathbf{X}}_d - f_d \bar{\mathbf{x}}_d. \end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.2. *El sumando $\mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r = (1 - f_{di}) \overline{\mathbf{X}}_{di}^*$ de la componente $g_{2,di}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \overline{Y}_{di} puede escribirse alternativamente como*

$$\mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r = \overline{\mathbf{X}}_{di} - f_{di} \overline{\mathbf{x}}_{di}$$

Demostración: Recuérdese que

$$\mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r = \frac{1}{N_{di}} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}^t \mathbf{X}_{di,r} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} = (1 - f_{di}) \overline{\mathbf{X}}_{di}^*$$

donde $\mathbf{a}_{r,di}^t = \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{1 \leq k \leq m_d}^{\text{col } t} \left[\delta_{ik} \mathbf{1}_{N_{dk}-n_{dk}} \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right)$.

Desarrollando a partir de $\frac{1}{N_{di}} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{X}_r &= \frac{1}{N_{di}} \sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} = \frac{1}{N_{di}} \left[\sum_{j \in r_{di}} \mathbf{x}_{dij} + \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right] = \frac{1}{N_{di}} \left[\sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij} - \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} \right] \\ &= \overline{\mathbf{X}}_{di} - \frac{n_{di}}{N_{di}} \frac{1}{n_{di}} \sum_{j \in s_{di}} \mathbf{x}_{dij} = \overline{\mathbf{X}}_{di} - \frac{n_{di}}{N_{di}} \overline{\mathbf{x}}_{di} = \overline{\mathbf{X}}_{di} - f_{di} \overline{\mathbf{x}}_{di}. \end{aligned}$$

□

La distribución de probabilidad del diseño muestral (mecanismo aleatorio de extracción de muestras) tiene un papel relevante en la inferencia estadística para poblaciones finitas. Los pesos de diseño (inversas de probabilidades de inclusión $\tilde{w}_{dij} = 1/\pi_{dij}$) se pueden introducir en el modelo para disminuir el sesgo de los estimadores EBLUP respecto de la distribución del diseño. En esta sección se considera que los pesos de heterocedasticidad del modelo, w_{dij} , están relacionados con los pesos del diseño. La hipótesis más sencilla es:

$$(W1) \quad w_{dij} = \tilde{w}_{dij}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d, \quad j = 1, \dots, N_{di}.$$

Proposición 6.2.3. *Si se verifica W1, entonces la componente $g_{4,d}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \overline{Y}_d puede escribirse alternativamente como*

$$g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \left[E_\pi [n_d] - \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right],$$

donde E_π denota esperanza respecto del diseño muestral.

Demostración: Para el elemento (d, i, j) de la población se define

$$\vartheta_{dij}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } (d, i, j) \notin s, \\ 1 & \text{si } (d, i, j) \in s. \end{cases}$$

Entonces $\vartheta_{dij}(s) \stackrel{d}{=} \text{Bernoulli}(\pi_{dij})$ bajo la distribución del diseño muestral. Además, se verifica que $\sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \vartheta_{dij}(s) = n_d$. Tomando esperanza respecto de la distribución del diseño en el resultado anterior se obtiene

$$E_{\pi} [n_d] = E_{\pi} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \vartheta_{dij}(s) \right] = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} E_{\pi} [\vartheta_{dij}(s)] = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \pi_{dij} = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \frac{1}{w_{dij}}.$$

Por tanto

$$g_{4,d}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in r_{di}} \frac{1}{w_{dij}} = \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \frac{1}{w_{dij}} - \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right] = \frac{\sigma_0^2}{N_d^2} \left[E_{\pi} [n_d] - \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right].$$

□

Corolario 6.2.4. *Supóngase que W1 es cierta y que $w_{dij} = 1$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$. Entonces la componente $g_{4,d}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_d es nula.*

Demostración: Inmediata. □

Proposición 6.2.5. *Si se verifica W1, entonces la componente $g_{4,di}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_{di} puede escribirse alternativamente como*

$$g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \left[E_{\pi} [n_{di}] - \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right]$$

Demostración: Las variables $\vartheta_{dij}(s)$ definidas en la proposición 6.2.3 verifican que $\sum_{j=1}^{N_{di}} \vartheta_{dij}(s) = n_{di}$. Tomando esperanza respecto de la distribución del diseño se tiene que

$$E_{\pi} [n_{di}] = E_{\pi} \left[\sum_{j=1}^{N_{di}} \vartheta_{dij}(s) \right] = \sum_{j=1}^{N_{di}} E_{\pi} [\vartheta_{dij}(s)] = \sum_{j=1}^{N_{di}} \pi_{dij} = \sum_{j=1}^{N_{di}} \frac{1}{w_{dij}}.$$

Por tanto

$$g_{4,di}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \sum_{j \in r_{di}} \frac{1}{w_{dij}} = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \left[\sum_{j=1}^{N_{di}} \frac{1}{w_{dij}} - \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right] = \frac{\sigma_0^2}{N_{di}^2} \left[E_{\pi} [n_{di}] - \sum_{j \in s_{di}} \frac{1}{w_{dij}} \right].$$

□

Corolario 6.2.6. *Supóngase que W1 es cierta y que $w_{dij} = 1$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$, $j = 1, \dots, N_{di}$. Entonces la componente $g_{4,di}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente al error cuadrático medio del estimador EBLUP de \bar{Y}_{di} es nula.*

Demostración: Inmediata. □

6.3. Otros estimadores a comparar

Para comprobar la eficiencia y calidad de los estimadores de los errores cuadráticos medios de los EBLUP's, propuestos en el capítulo 4, se han considerado dos estimadores no dinámicos a efectos de comparación. Estos dos estimadores surgen de la adaptación y aplicación de los modelos de estimación en áreas pequeñas desarrollados en el subproyecto WP4 del proyecto EURAREA, en el que ha participado España (INE y UMH), a fin de producir estimaciones de errores cuadráticos medios con datos del mundo real.

El proyecto EURAREA (Enhancing Small Area Estimation Techniques to Meet European Needs) fue desarrollado con el 5º Programa Marco de I + D de la Unión Europea, y en él participó España junto con otros seis países europeos (Reino Unido, Finlandia, Noruega, Suecia, Polonia e Italia). El proyecto estuvo coordinado por la Oficina Nacional de Estadística del Reino Unido (ONS). La ONS fue la encargada de elaborar un software en SAS para implementar los estimadores estándar de medias de áreas pequeñas, con uso de esquemas de muestreo similares a los aplicados en las encuestas oficiales en el mundo real.

Para más información véase la página web:

http://www.statistics.gov.uk/methods_quality/eurarea/.

A partir de este software elaborado en SAS por la ONS, se han calculado los dos estimadores con los que se compararán los propuestos en esta tesis. Estos estimadores son:

- 1. Estimador directo:** Se trata de un estimador basado únicamente en la muestra y su diseño. Su formulación es

$$\widehat{Y}_{di}^{dir} = \frac{1}{\widehat{N}_{di}} \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij} y_{dij}, \quad \text{donde} \quad \widehat{N}_{di} = \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij}.$$

Para obtener el estimador a un nivel de área superior

$$\widehat{Y}_d^{dir} = \frac{1}{\widehat{N}_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij} y_{dij}, \quad \text{donde} \quad \widehat{N}_d = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij}.$$

Los correspondientes estimadores directos de totales son

$$\widehat{Y}_{di}^{dir} = \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij} y_{dij}, \quad \widehat{Y}_d^{dir} = \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j \in s_{di}} \tilde{w}_{dij} y_{dij}.$$

- 2. Estimador EBLUPA:** Se trata de un estimador basado en un modelo de regresión con dos niveles, para datos individuales y efectos aleatorios en los dominios. Para el dominio (d, i) el modelo A es

$$y_{dij} = \mathbf{x}_{dij} \boldsymbol{\beta} + u_{di} + e_{dij}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d, \quad j = 1, \dots, n_{di},$$

donde $u_{di} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$ y $e_{dij} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ son independientes. El modelo se ajusta mediante el algoritmo de Fisher-Scoring que calcula los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de regresión y de las componentes de la varianza. La expresión del estimador EBLUPA de la media del dominio (d, i) es

$$\widehat{Y}_{di}^{eblupa} = \widehat{\gamma}_{di} \left(\bar{y}_{di} - \bar{\mathbf{x}}_{di} \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) + \bar{\mathbf{X}}_{di} \widehat{\boldsymbol{\beta}},$$

donde $\widehat{\gamma}_{di} = \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\widehat{\sigma}_u^2 + \frac{\widehat{\sigma}_e^2}{n_{di}}}$, $\bar{y}_{di} = \frac{1}{n_{di}} \sum_{j=1}^{n_{di}} y_{dij}$, $\bar{\mathbf{x}}_{di} = \frac{1}{n_{di}} \sum_{j=1}^{n_{di}} \mathbf{x}_{dij}$ y $\bar{\mathbf{X}}_{di} = \frac{1}{N_{di}} \sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij}$.

El estimador EBLUPA del total del dominio (d, i) es

$$\widehat{Y}_{di}^{eblupa} = N_{di} \widehat{Y}_{di}^{eblupa}.$$

Para el dominio d el modelo A es

$$y_{dij} = \mathbf{x}_{dij} \boldsymbol{\beta} + u_d + e_{dij}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, m_d, \quad j = 1, \dots, n_{di},$$

donde $u_d \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$ y $e_{dij} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ son independientes. El modelo se ajusta mediante el algoritmo de Fisher-Scoring que calcula los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de regresión y de las componentes de la varianza. Sea $\widehat{\gamma}_d = \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\widehat{\sigma}_u^2 + \frac{\widehat{\sigma}_e^2}{n_d}}$.

La expresión del estimador EBLUPA de la media del dominio d es

$$\widehat{Y}_d^{eblupa} = \widehat{\gamma}_d \left(\bar{y}_d - \bar{\mathbf{x}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) + \bar{\mathbf{X}}_d \widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

donde $\bar{y}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{n_{di}} y_{dij}$, $\bar{\mathbf{x}}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{n_{di}} \mathbf{x}_{dij}$ y $\bar{\mathbf{X}}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{N_{di}} \mathbf{x}_{dij}$. El estimador EBLUPA del total del dominio d es

$$\widehat{Y}_d^{eblupa} = N_d \widehat{Y}_d^{eblupa}.$$

Observación 6.3.1. *El modelo de tres niveles, estudiado en capítulos anteriores, produce estimaciones EBLUP \widehat{Y}_{di}^{eblup} de los totales de los dominios (d, i) consistentes con las estimaciones EBLUP \widehat{Y}_d^{eblup} de los totales de los dominios d . Es decir, se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{m_d} \widehat{Y}_{di}^{eblup} = \widehat{Y}_d^{eblup}.$$

Esta propiedad de consistencia con la estimación en el nivel de agregación superior la verifica el estimador directo pero no la verifica el estimador EBLUPA. Ugarte et al. (2009) presentan una modificación del estimador EBLUPA que verifica la restricción de consistencia. En el caso del estimador EBLUP basado en el modelo de tres niveles tal modificación no es necesaria.

Estimación del error cuadrático medio:

La estimación del error cuadrático medio del estimador EBLUP se hace según el desarrollo teórico y formulación realizados en el capítulo 4. Para la estimación de los errores cuadráticos medios en los estimadores directo y EBLUPA se tiene

$$mse_{ons}(\hat{Y}_d^{dir}) = \hat{N}_{di}^2 mse_{ons}(\hat{Y}_d^{dir}) \quad \text{y} \quad mse_{ons}(\hat{Y}_d^{eblupa}) = N_{di}^2 mse_{ons}(\hat{Y}_d^{eblupa}),$$

donde $mse_{ons}(\hat{Y}_d^{dir})$ y $mse_{ons}(\hat{Y}_d^{eblupa})$ son las estimaciones del error cuadrático medio que proporciona el software SAS de la ONS para el estimador directo y EBLUPA de la media, respectivamente. Para más detalles consúltese el manual de referencia en la página web del proyecto EURAREA.

6.4. Encuesta de Población Activa. EPA**6.4.1. Introducción**

La Encuesta de Población Activa (EPA), es una encuesta de tipo continuo dirigida a investigar características socioeconómicas de la población, que viene siendo realizada por el INE desde 1964. El diseño de la encuesta se enmarca en el de la Encuesta General de Población (EGP). La EPA tiene como objetivo principal el conocimiento de la actividad económica del país, en lo relativo al componente humano. Está orientada a dar información de las principales categorías poblacionales en relación con el mercado de trabajo así como a obtener clasificaciones de estas categorías según distintas variables.

La encuesta está diseñada para dar resultados detallados a nivel nacional. Para las Comunidades Autónomas y las provincias se ofrece información sobre las principales características al nivel de desagregación que permiten los coeficientes de variación de los estimadores. Como definición de población económicamente activa se ha tomado la aceptada por la Oficina Internacional de Trabajo (OIT), según la cual se considera ésta como el conjunto de personas, que en un período de referencia dado, suministran mano de obra para la producción de bienes y servicios económicos o que están disponibles y hacen gestiones para incorporarse a dicha producción.

El diseño muestral de la Encuesta de Población Activa (EPA) es bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa. Las unidades de primera etapa son las secciones censales. Para su selección se agrupan en estratos de acuerdo con la provincia y tipo de municipio (según importancia demográfica) a que pertenecen. Dentro de cada estrato las secciones se seleccionan con probabilidad proporcional al número de viviendas principales, según los datos del último Censo o Padrón. Las unidades de segunda etapa son las viviendas familiares principales y alojamientos fijos. Dentro de cada sección seleccionada en primera etapa, se selecciona un número fijo (aproximadamente 18 en la actualidad) de viviendas mediante la aplicación de un muestreo sistemático con arranque aleatorio.

Dentro de las unidades de segunda etapa no se realiza submuestreo alguno, recogiendo información de todas las personas que tengan su residencia habitual en las mismas. En lo relativo a la medición del paro interesan únicamente las personas con edad mayor o igual que 16 años, pues es la definición de población activa de la OIT.

6.4.2. Especificaciones de los datos

El objetivo de este apartado es el de proporcionar una metodología adecuada a la EPA que sea utilizable por el INE. Al mismo tiempo se pretende ilustrar la metodología con una aplicación realista, que justifique la necesidad de la investigación realizada en esta tesis doctoral. Por tales motivos se han seleccionado dos objetivos concretos:

- ✓ obtener predictores lineales insesgados óptimos del parámetro poblacional “total de parados”,
- ✓ obtener los errores cuadráticos medios de los EBLUP del punto anterior.

El universo de interés es la comunidad autónoma de Canarias en el año 2003. El ajuste de los modelos se hace sobre el universo completo considerando conjuntamente las muestras asociadas a las distintas comarcas dentro de las provincias que conforman el universo. Los dominios de estimación son las diferentes comarcas de las dos provincias de Canarias diferenciando hombres y mujeres. Es decir, \mathbf{Z}_1 es la matriz del diseño correspondiente a la provincia cruzada con el sexo, mientras que \mathbf{Z}_2 es la matriz del diseño correspondiente a las comarcas dentro de cada una de las provincias-sexo. Se asume la homocedasticidad del error; es decir, se supone que los pesos de heterocedasticidad son todos iguales a uno. En la formulación del modelo para el estimador EBLUP esto equivale a hacer la especificación $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_n$.

Se dispone de la encuesta correspondiente al segundo trimestre del 2003 (2003/02) con las variables presentadas en la tabla 6.4.1.

Nombre	Descripción	Valores	Tipo
<i>PARADO</i>	Estado ante el paro	1: Parado, 0: No parado	Variable de interés
<i>GSED</i>	Grupo Sexo-Edad-Demandante	1 – 12	Variable explicativa
<i>W</i>	Factor de elevación	\mathbb{R}^+	Pesos
<i>Dom₁</i>	Provincia-Sexo	1: Las Palmas, Hombres 2: Las Palmas, Mujeres 3: Tenerife, Hombres 4: Tenerife, Mujeres	Dominio de nivel 1
<i>Dom₂</i>	Comarca en provincia <i>d</i>	1 – 12 si $d = 1, 2$ 1 – 15 si $d = 3, 4$	Dominio de nivel 2

Tabla 6.4.1: Descripción del fichero de datos de la EPA.

La variable explicativa *GSED* es una variable categórica cuyos valores se describen en la tabla 6.4.2. La categorías de *GSED* se definen a partir de los cruces de los valores de las siguientes variables:

- Sexo: hace referencia al sexo del individuo. Valores: hombre, mujer.
- Edad: hace referencia a la edad de individuo en años, agrupando esta cantidad en tres intervalos de edad. Valores: 16 – 24, 25 – 54, ≥ 55 .
- INEM: hace referencia a la situación del individuo como inscrito en el registro de demandantes de empleo en el INEM. Valores: Sí, No.

GSED	Edad	Sexo	INEM
1	16 – 24	Hombre	Sí
2	25 – 54	Hombre	Sí
3	≥ 55	Hombre	Sí
4	16 – 24	Mujer	Sí
5	25 – 54	Mujer	Sí
6	≥ 55	Mujer	Sí
7	16 – 24	Hombre	No
8	25 – 54	Hombre	No
9	≥ 55	Hombre	No
10	16 – 24	Mujer	No
11	25 – 54	Mujer	No
12	≥ 55	Mujer	No

Tabla 6.4.2: Variable explicativa *GSED*.

Como breve descriptiva de los datos hay que hacer notar lo siguiente:

- Universo. En el momento de la extracción de la muestra evaluada el universo de interés constaba de 1.567.655 individuos repartidos en las 27 comarcas canarias (54 dominios).
- Muestra. Se seleccionaron 7.728 individuos de la población para formar la muestra según el diseño de muestreo ya explicado.
- Excepciones. En dos comarcas de la provincia de Tenerife (tanto en el caso de hombres como de mujeres), no se obtuvieron valores muestrales debido a que no fue seleccionada, según el diseño muestral, ninguna vivienda principal en las secciones censales pertenecientes a dichas comarcas.

Observación 6.4.1. *En un caso práctico como éste, debido al reducido número de dominios, se podría haber ajustado un modelo con un factor fijo en dominios y un único factor aleatorio en subdominios (comarcas).*

6.4.3. Resultados

Para cada uno de los tres estimadores considerados se calculan sus valores y dos medidas de eficiencia que permiten efectuar comparaciones entre ellos y establecer conclusiones. Las siglas *ons* se utilizan para hacer referencia al software de EURAREA desarrollado por la Office for National Statistics (ONS) del Reino Unido. En concreto se calcula:

- El valor del estimador del total: \hat{Y}_{di}^{dir} , \hat{Y}_{di}^{eblupa} y \hat{Y}_{di}^{eblup} , con $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.
- La raíz cuadrada del estimador del error cuadrático medio absoluto:

$$\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{di}^{dir})}, \quad \sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{di}^{eblupa})} \quad \text{y} \quad \sqrt{mse(\hat{Y}_{di}^{eblup})},$$

con $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

- La raíz cuadrada en % del estimador del error cuadrático medio relativo (coeficiente de variación):

$$cv_{ons,di}^{dir} = \frac{100\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{di}^{dir})}}{\hat{Y}_{di}^{dir}}, \quad cv_{ons,di}^{eblupa} = \frac{100\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{di}^{eblupa})}}{\hat{Y}_{di}^{eblupa}}$$

y

$$cv_{di}^{eblup} = \frac{100\sqrt{mse(\hat{Y}_{di}^{eblup})}}{\hat{Y}_{di}^{eblup}},$$

con $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

A continuación se presentan los resultados gráficos correspondientes a las anteriores medidas. Las tablas con los valores numéricos pueden encontrarse seguidamente:

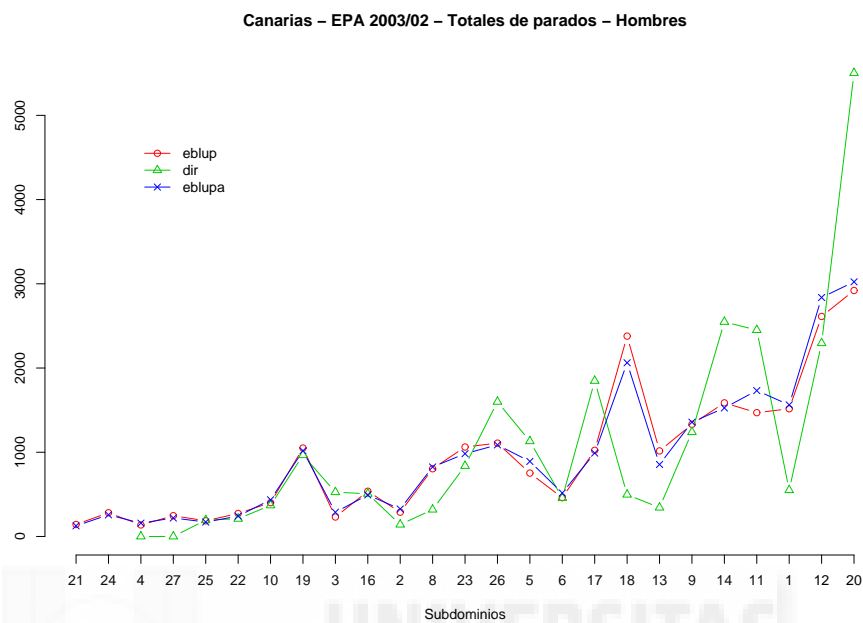


Figura 6.1: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-hombres

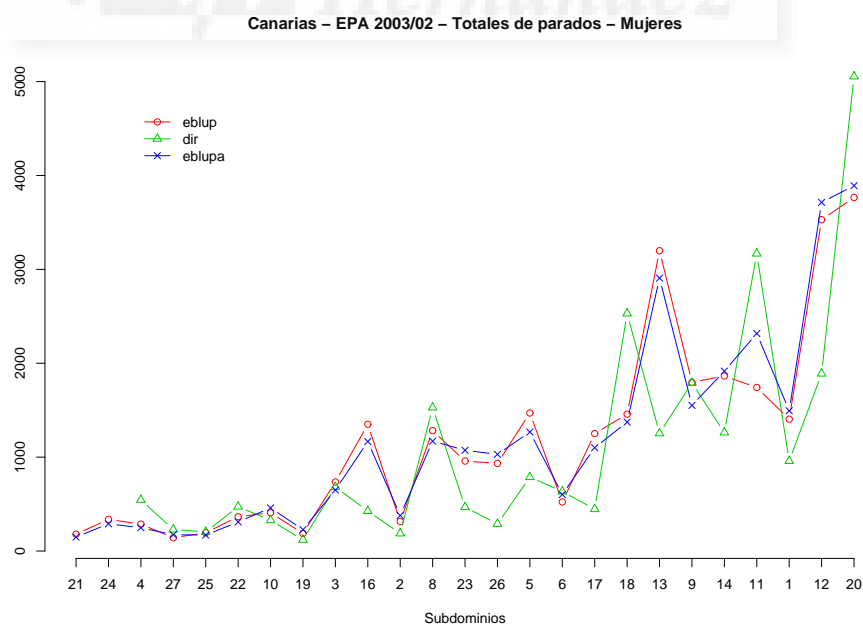


Figura 6.2: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-mujeres

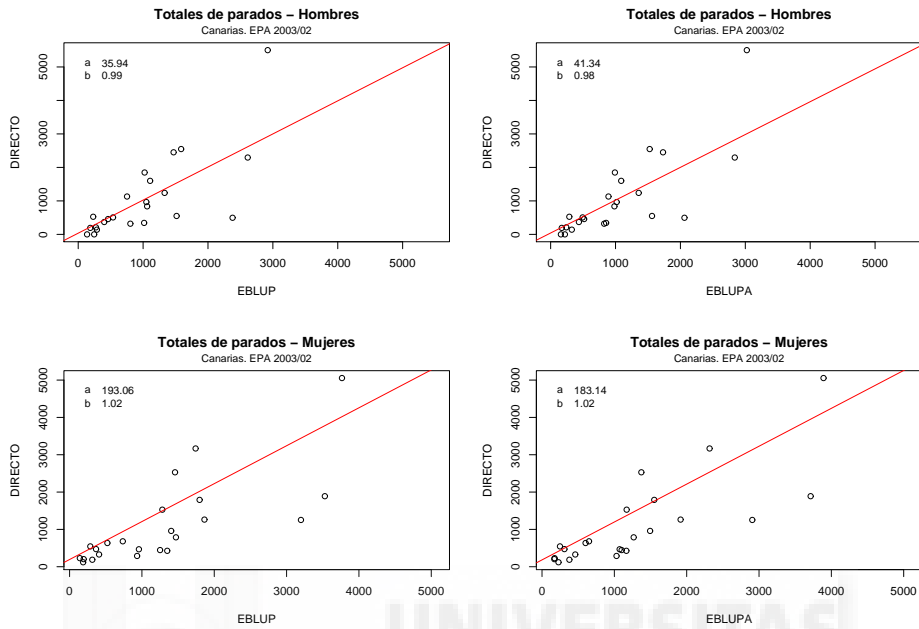


Figura 6.3: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados

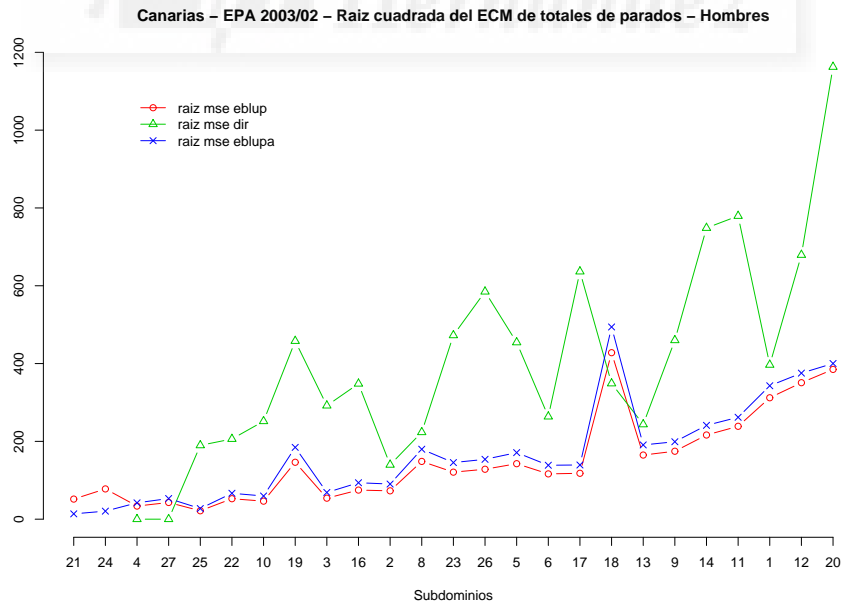


Figura 6.4: Raíz cuadrada del error cuadrático medio de estimadores de totales de parados-hombres

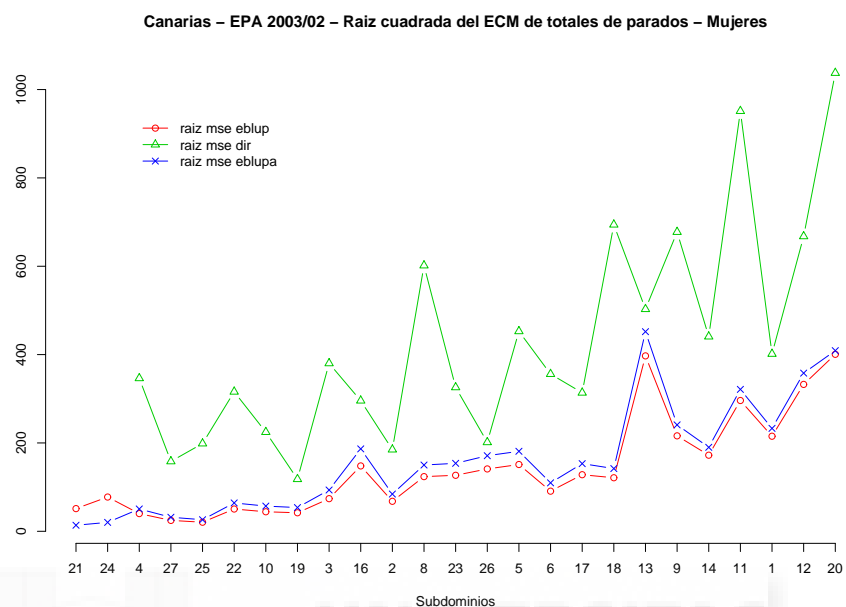


Figura 6.5: Raíz cuadrada del error cuadrático medio de estimadores de totales de parados-mujeres

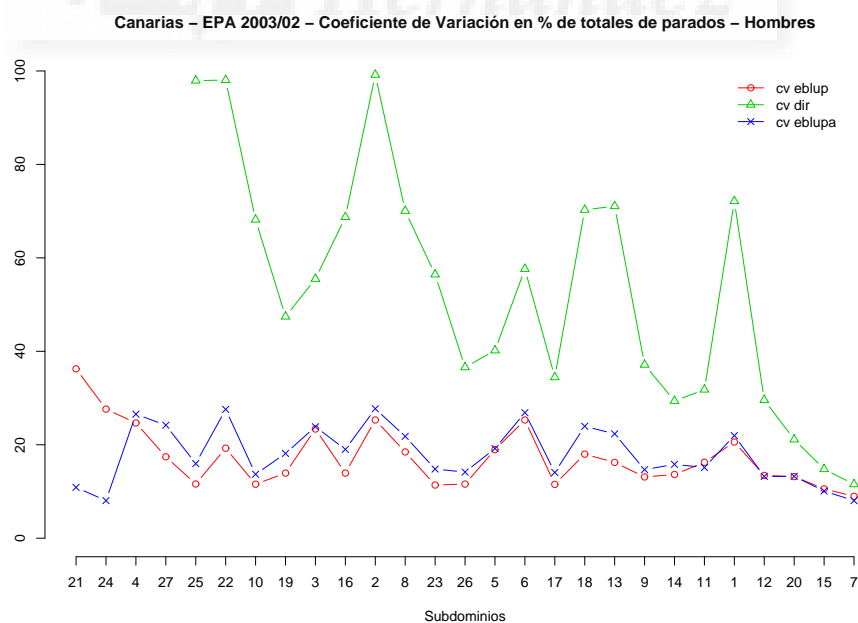


Figura 6.6: Coeficiente de variación en % de estimadores de totales de parados-hombres

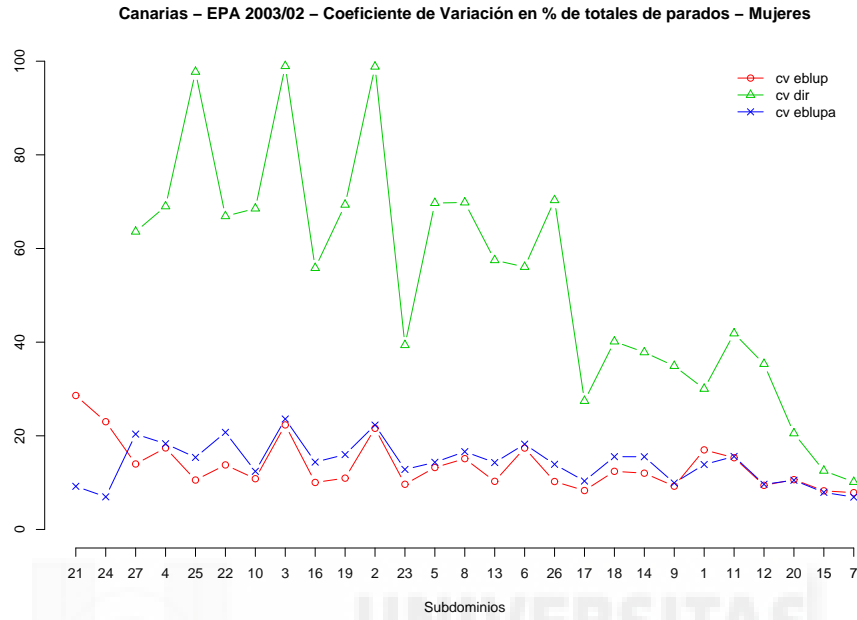


Figura 6.7: Coeficiente de variación en % de estimadores de totales de parados-mujeres

Dom_2	n_{di}	\hat{Y}_{di}^{dir}	\hat{Y}_{di}^{eblupa}	\hat{Y}_{di}^{eblup}	$cv_{ons,di}^{dir}$	$cv_{ons,di}^{eblupa}$	cv_{di}^{eblup}
21	0		126	143		10.88	36.25
24	0		257	282		8.04	27.63
4	12	0	158	137		26.55	24.67
27	13	0	220	246		24.19	17.43
25	19	194	171	186	97.93	15.97	11.61
22	20	210	241	273	98.05	27.57	19.26
10	35	369	435	401	68.17	13.69	11.55
19	37	966	1017	1050	47.42	18.15	13.93
3	41	526	288	231	55.50	23.86	23.38
16	44	507	493	537	68.72	19.01	13.93
2	60	141	326	288	99.17	27.71	25.31
8	73	319	825	804	70.05	21.79	18.47
23	73	837	983	1062	56.44	14.81	11.38
26	75	1599	1087	1108	36.58	14.15	11.58
5	80	1131	891	753	40.18	19.20	18.95
6	85	458	516	460	57.63	26.86	25.29
17	86	1848	990	1023	34.45	14.07	11.53
18	97	496	2062	2379	70.27	23.96	17.99
13	99	343	855	1016	71.07	22.33	16.23
9	115	1239	1357	1332	37.12	14.67	13.12
14	126	2548	1526	1586	29.38	15.81	13.64
11	143	2451	1732	1470	31.80	15.12	16.24
1	144	550	1562	1516	72.14	21.95	20.59
12	167	2295	2837	2612	29.59	13.23	13.43
20	193	5502	3023	2920	21.13	13.24	13.18
15	726	9261	9490	10011	14.78	10.10	10.57
7	1149	13544	14342	14262	11.55	8.04	8.96

Tabla 6.4.3: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-hombres y coeficientes de variación en %.

Dom_2	n_{di}	\hat{Y}_{di}^{dir}	\hat{Y}_{di}^{eblupa}	\hat{Y}_{di}^{eblup}	$cv_{ons,di}^{dir}$	$cv_{ons,di}^{eblupa}$	cv_{di}^{eblup}
21	0		148	180		9.21	28.60
24	0		290	337		6.97	23.01
27	15	545	248	286	63.59	20.36	13.99
4	18	229	173	142	69.00	18.31	17.41
25	19	203	170	194	97.73	15.39	10.55
22	20	472	310	366	66.90	20.73	13.78
10	34	328	460	408	68.53	12.42	10.84
3	41	119	228	188	98.95	23.59	22.33
16	41	681	650	735	55.83	14.39	10.04
19	43	426	1166	1350	69.34	16.00	10.96
2	61	187	378	314	98.83	22.29	21.60
23	71	1528	1170	1282	39.37	12.82	9.65
5	74	467	1073	958	69.71	14.34	13.23
8	76	289	1030	934	69.83	16.61	15.12
13	77	787	1267	1470	57.50	14.29	10.28
6	78	635	602	522	56.06	18.22	17.39
26	79	446	1100	1251	70.32	13.92	10.24
17	95	2530	1373	1458	27.44	10.34	8.31
18	111	1253	2907	3198	40.14	15.55	12.41
14	132	1791	1552	1797	37.83	15.53	12.02
9	143	1263	1916	1864	34.91	9.92	9.24
1	152	3168	2316	1742	30.03	13.87	17.00
11	156	959	1494	1405	41.86	15.59	15.32
12	160	1889	3713	3529	35.34	9.64	9.42
20	214	5054	3891	3766	20.53	10.51	10.64
15	859	11802	12258	12951	12.54	7.92	8.25
7	1247	15637	16611	16248	10.14	6.91	7.86

Tabla 6.4.4: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-mujeres y coeficientes de variación en %.

Conclusiones

Para poder tener en cuenta si el tamaño muestral en cada uno de los dominios influye en los resultados, estos han sido ordenados por tamaño de manera creciente. Todos los estimadores muestran un comportamiento aproximadamente similar. Este hecho puede verse en las figuras 6.1 y 6.2.

Para la estimación del total de parados, las líneas de regresión de cada uno de los estimadores frente al estimador directo son muy próximas a la recta $y = cte + x$; es decir, muestran un comportamiento aceptablemente próximo al del estimador directo. Esta propiedad puede interpretarse como de inesgidez asintótica respecto de la distribución del diseño muestral. Tanto para hombres como para mujeres véase la figura 6.3, filas primera y segunda respectivamente. En esta figura se ha incluido para cada uno de los diagramas de dispersión los valores de la cons-

tante y la pendiente de la recta de regresión de cada uno de los estimadores frente al estimador directo.

Del estudio de los errores cuadráticos medios estimados, se puede deducir que el estimador más competitivo para la estimación del total de parados es el estimador EBLUP (véanse las figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7). En concreto, se puede observar en las figuras 6.6 y 6.7 que de manera general el estimador EBLUP tiene menor variabilidad que los otros dos.

En algunos dominios el número de individuos en paro observados en la muestra ha sido nulo. Entonces el estimador directo del total de parados toma el valor cero, su coeficiente de variación se hace infinito y por tanto no se representa gráficamente. En cambio los otros dos estimadores, sí presentan valores en estos casos, pues al estar basados en modelos, son capaces de dar estimaciones tanto en dominios sin muestra, como en muestras donde la variable objeto de estudio toma en todos sus registros el valor cero.

En las figuras 6.1 a 6.5 no se han graficado las dos comarcas con tamaños muestrales más grandes. Los valores de la estimación del total de parados en estas dos comarcas y de la raíz cuadrada del error cuadrático medio estimado, son muy superiores al resto y esto conllevaría una distorsión del gráfico. Para el caso del coeficiente de variación sí se han graficado estas comarcas. Obsérvese que al ser esta una medida relativa, el gráfico no queda afectado al no existir distorsiones.

6.5. Encuesta Continua de Presupuestos Familiares. ECPF

6.5.1. Introducción

Las Encuestas de Presupuestos Familiares son unas de las operaciones estadísticas con más tradición en el ámbito de la estadística oficial. Ya a mediados del siglo XIX aparecen los primeros estudios sobre el gasto familiar en Europa. En su origen estas encuestas no abarcaban todo el ámbito poblacional, centrándose en el estudio de objetivos y poblaciones muy concretos.

En la década 1920-1930, en la India surgen las primeras aplicaciones de estas encuestas para el cálculo de ponderaciones de los Índices de Precios de Consumo, práctica que perdura hasta nuestros días. Desde entonces, las encuestas de presupuestos familiares han ido ampliando su ámbito y sus contenidos, para cobrar especial auge en los últimos cincuenta años como consecuencia de la importancia dada al desarrollo de las estadísticas económicas y de los sistemas de Contabilidad Nacional. Este tipo de encuestas se han convertido con el tiempo en encuestas de objetivos múltiples, saliendo del ámbito de las estadísticas de objetivos puramente económicos, para tener una importancia fundamental en el sistema de estadísticas sociales.

En España el INE realiza la primera encuesta de presupuestos familiares en el año 1958, siguiendo luego las de los años 1964-65, 1973-74, 1980-81 y 1990-91 como encuestas estructurales.

Las encuestas de objetivo coyuntural, se inician desde el 2º trimestre de 1977 al 4º de 1983 con la Encuesta Permanente de Consumo (EPC), y a partir del 1^{er} trimestre de 1985 hasta el 2º trimestre de 1997 se realiza la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (ECPF), y a partir de esta fecha hasta final de 2005 con pequeñas modificaciones. A partir del año 2006 la encuesta cambia de metodología por nuevas exigencias y recomendaciones de la oficina de estadística de la Unión Europea (EUROSTAT), entre otros foros internacionales.

El estudio de los presupuestos familiares exige la consideración, como unidades de análisis, del conjunto de personas que ocupan en común una vivienda familiar principal o parte de ella, y consumen y/o comparten alimentos u otros bienes con cargo a un presupuesto común, esto es, los hogares. Por lo tanto, son objeto de investigación todos los individuos que residen en viviendas familiares principales, estudiándose dichos individuos a través de los hogares que forman.

El diseño muestral de la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (ECPF) es bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa, seleccionando una muestra independiente dentro de cada comunidad autónoma. Las unidades de primera etapa son las secciones censales en que se encuentra dividido el territorio nacional en el momento de la encuesta. Las unidades de segunda etapa son las viviendas familiares principales pertenecientes a las secciones seleccionadas. En ellas no se realiza submuestreo alguno, investigando a todos los hogares que residen en las mismas. La población investigada en la muestra, a la cual van referidos todos los datos y sus tabulaciones, es el conjunto de hogares que residen en viviendas familiares principales. El ámbito geográfico de la investigación lo constituye todo el territorio nacional. El ámbito temporal se corresponde con cada ciclo trimestral (teniendo en cuenta que esta metodología se ha llevado a cabo desde el tercer trimestre de 1997 hasta el último de 2005).

6.5.2. Especificaciones de los datos

Para asegurarnos que la metodología desarrollada es de utilidad para la Estadística Pública Española y con la ambición de ilustrar de una manera realista la aplicación y necesidad de la investigación realizada en esta tesis doctoral, se proponen los siguientes dos objetivos en esta sección:

- ✓ obtener predictores lineales insesgados óptimos del parámetro poblacional “gasto total anual medio del hogar” tomando como referencia el cuarto trimestre,
- ✓ obtener los errores cuadráticos medios de los EBLUP del punto anterior.

El universo de interés es España en el año 2006. El ajuste de modelos se hace sobre el universo completo considerando conjuntamente las muestras asociadas a los distintos trimestres. El dominio de estimación para el que se desarrolla la aplicación es el cruce del periodo trimestral con la comunidad autónoma. Es decir, \mathbf{Z}_1 es la matriz del diseño correspondiente a la comunidad autónoma, mientras que \mathbf{Z}_2 es la matriz del diseño correspondiente al trimestre del año dentro de cada una de las comunidades autónomas. Se asume la homocedasticidad del error; es decir,

se supone que los pesos de heterocedasticidad son todos iguales a uno. En la formulación del modelo para el estimador EBLUP esto equivale a hacer la especificación $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_n$.

Recuérdese que en el caso anterior, presentado en la sección 6.4, la estimación se realiza en un entorno únicamente geográfico, mientras que ahora la estimación además de tener componente geográfica (comunidades autónomas) tiene componente temporal (trimestres del año). En definitiva, se dan estimaciones para el periodo 2006/04 utilizando datos de los periodos 2006/01, 2006/02, 2006/03 y, por supuesto, del propio 2006/04. Para ello se usan las encuestas correspondientes a todos los trimestres del año 2006 con las variables que se presentan en la tabla 6.5.1.

Nombre	Descripción	Valores	Tipo
<i>Gasto</i>	Gasto total anual del hogar	Numérico en euros	Variable de interés
<i>MIEMBROSM</i>	Clasificación del hogar	1 – 8	Variable explicativa
<i>NUMOCUP</i>	N.º de ocupados en el hogar	1 – 6	Variable explicativa
<i>W</i>	Factor de elevación temporal	\mathbb{R}^+	Pesos
<i>Dom₁</i>	Comunidad Autónoma (c.a.)	1 – 18	Dominio de nivel 1
<i>Dom₂</i>	Trimestre en la c.a. <i>d</i>	1 – 4 $\forall d$	Dominio de nivel 2

Tabla 6.5.1: Descripción del fichero de datos de la ECPF.

Los valores de la variable explicativa *MIEMBROSM* se describen en la tabla 6.5.2.

MIEMBROSM	Descripción
1	persona sola de menos de 65 años
2	persona sola de 65 años o más
3	dos personas de 65 años o más
4	resto de dos personas
5	con tres miembros
6	con cuatro miembros
7	con cinco miembros
8	con seis o más miembros

Tabla 6.5.2: Variable explicativa *MIEMBROSM*.

Los valores de la variable explicativa *NUMOCUP* se describen en la tabla 6.5.3.

NUMOCUP	Descripción
1	el número de ocupados en el hogar es 1
2	el número de ocupados en el hogar es 2
3	el número de ocupados en el hogar es 3
4	el número de ocupados en el hogar es 4
5	el número de ocupados en el hogar es 5
6	el número de ocupados en el hogar es 6 o más

Tabla 6.5.3: Variable explicativa *NUMOCUP*.

Como breve descriptiva de los datos hay que hacer notar lo siguiente:

- Universo. En el momento de la extracción de la muestra evaluada, el universo de interés constaba de 63.422.272 hogares. Para cada uno de los 4 trimestres la población era de 15.602.359, 15.811.953, 15.975.652 y 16.032.308 hogares, respectivamente.
- Muestra. Se seleccionaron 19.435 hogares de la población para formar la muestra según el diseño de muestreo ya explicado. Para cada uno de los 4 trimestres la muestra era de 4.589, 5.366, 4.260 y 5.220 hogares, respectivamente.
- Excepciones. Para la realización de la ECPF las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla se han unido como si se tratase de una única comunidad autónoma.
- Longitudinalidad. No se hace un tratamiento longitudinal de los hogares que se repiten en las muestras, ya que el INE no proporciona el identificador del hogar por razones de confidencialidad.

6.5.3. Resultados

Para cada uno de los tres estimadores considerados se calculan sus valores y se proponen dos medidas de eficiencia para la comparación entre ellos y el establecimiento de conclusiones. Las siglas *ons* se utilizan para hacer referencia al software de EURAREA desarrollado por la Office for National Statistics (ONS) del Reino Unido. En concreto se calcula:

- El valor del estimador de la media: \hat{Y}_{d4}^{dir} , \hat{Y}_{d4}^{eblupa} y \hat{Y}_{d4}^{eblup} , con $d = 1, \dots, D = 18$.
- La raíz cuadrada del estimador del error cuadrático medio absoluto:

$$\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{d4}^{dir})}, \quad \sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{d4}^{eblupa})} \quad \text{y} \quad \sqrt{mse(\hat{Y}_{d4}^{eblup})}, \quad \text{con } d = 1, \dots, D = 18.$$

- La raíz cuadrada en % del estimador del error cuadrático medio relativo (coeficiente de variación):

$$cv_{ons,d4}^{dir} = \frac{100\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{d4}^{dir})}}{\hat{Y}_{d4}^{dir}}, \quad cv_{ons,d4}^{eblupa} = \frac{100\sqrt{mse_{ons}(\hat{Y}_{d4}^{eblupa})}}{\hat{Y}_{d4}^{eblupa}}$$

y

$$cv_{d4}^{eblup} = \frac{100\sqrt{mse(\hat{Y}_{d4}^{eblup})}}{\hat{Y}_{d4}^{eblup}}, \quad \text{con } d = 1, \dots, D = 18.$$

A continuación se presentan los resultados gráficos correspondientes a las medidas anteriores. Las tablas con los valores numéricos pueden encontrarse seguidamente:

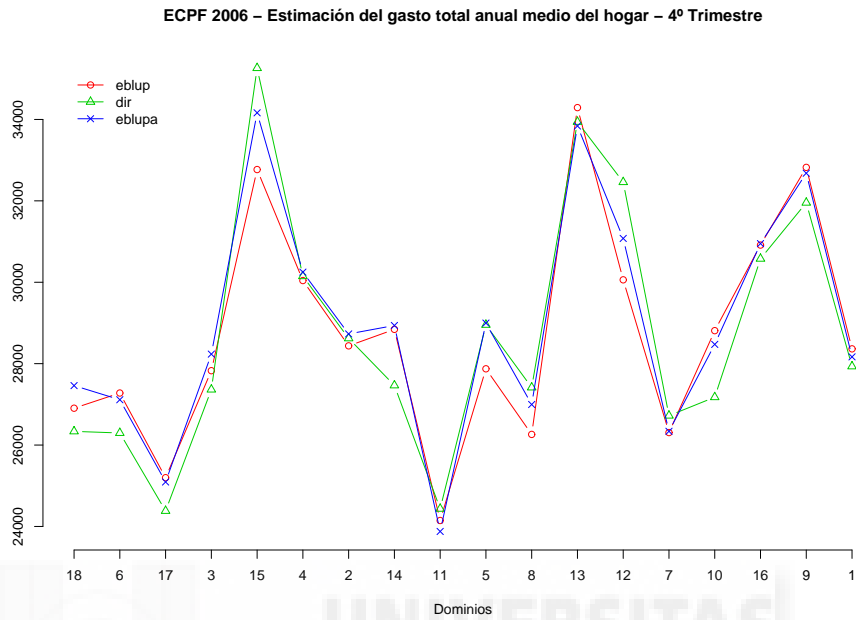


Figura 6.8: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP del gasto total anual medio del hogar

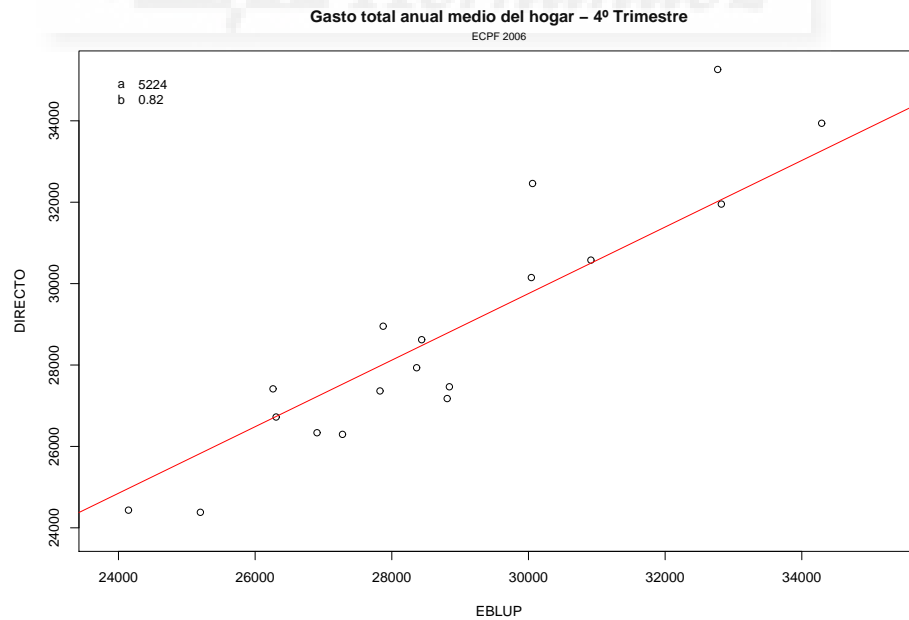


Figura 6.9: Estimadores directo y EBLUP del gasto total anual medio del hogar

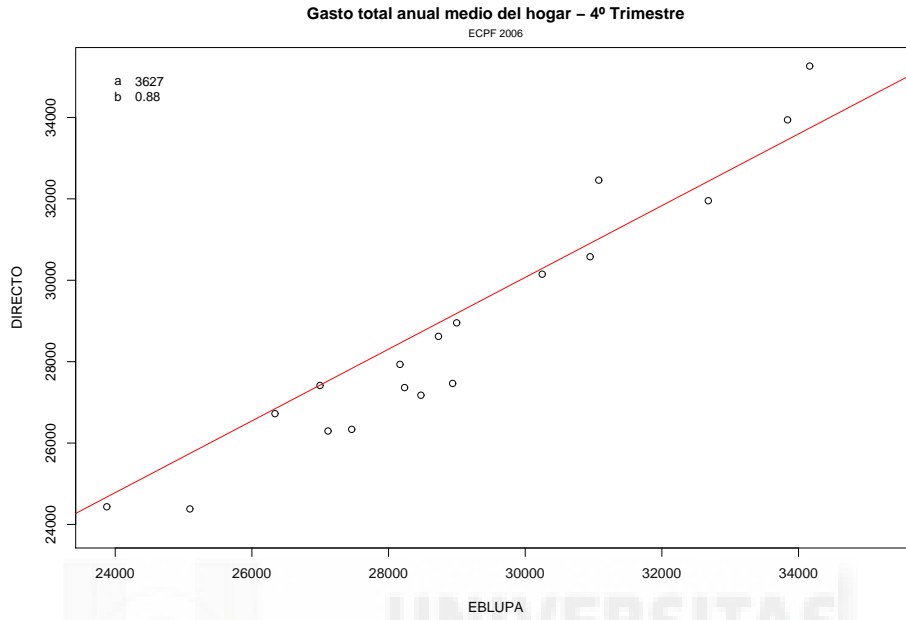


Figura 6.10: Estimadores directo y EBLUPA del gasto total anual medio del hogar

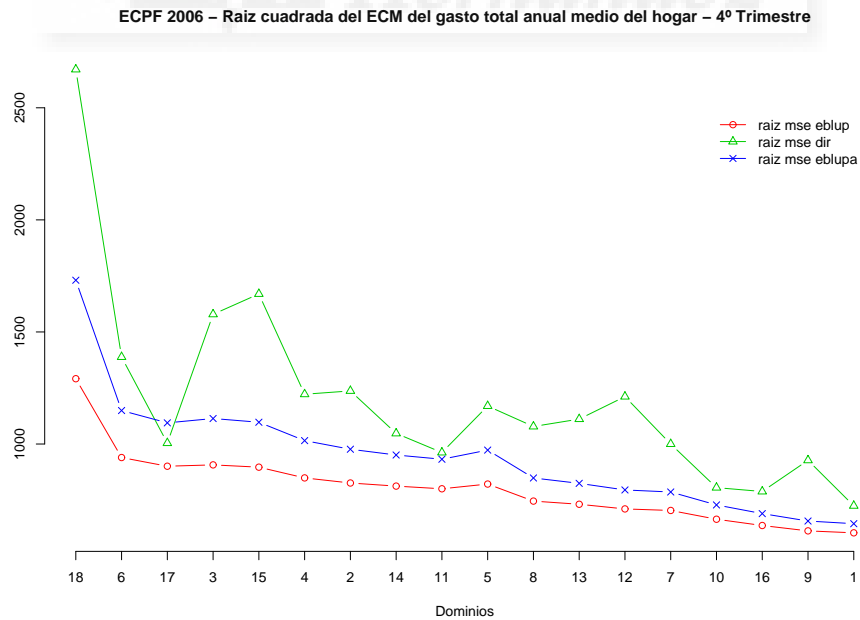


Figura 6.11: Raíz cuadrada del ECM de estimadores del gasto total anual medio del hogar

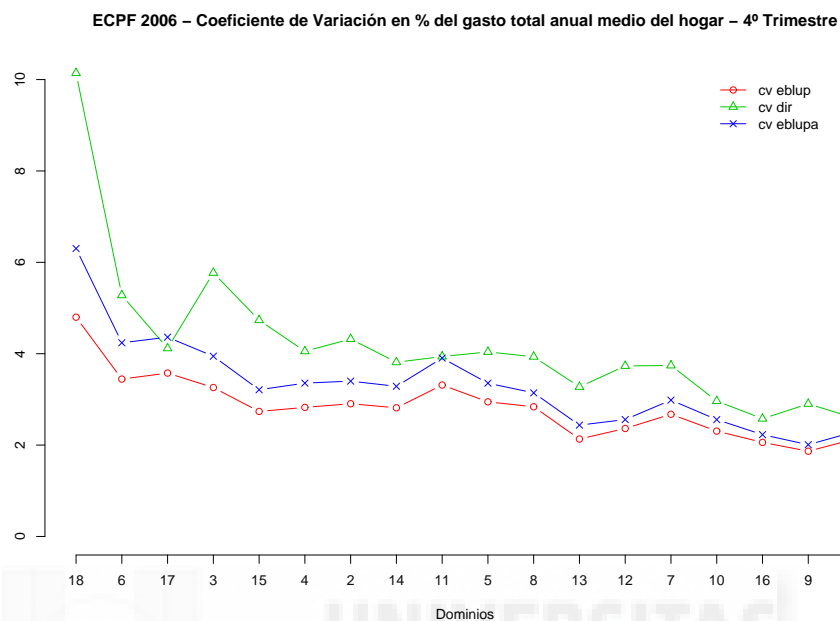


Figura 6.12: Coeficiente de variación en % de estimadores del gasto total anual medio del hogar

Dom_1	n_{d4}	n_d	\hat{Y}_{d4}^{dir}	\hat{Y}_{d4}^{eblupa}	\hat{Y}_{d4}^{eblup}	$cv_{ons,d4}^{dir}$	$cv_{ons,d4}^{eblupa}$	cv_{d4}^{eblup}
18	51	209	26336	27461	26906	10.14	6.30	4.80
6	154	531	26297	27114	27278	5.28	4.24	3.44
17	173	623	24382	25093	25198	4.12	4.36	3.58
3	166	649	27363	28234	27827	5.77	3.94	3.26
15	172	676	35262	34163	32769	4.73	3.21	2.74
4	206	793	30149	30248	30042	4.05	3.36	2.83
2	225	850	28622	28730	28437	4.32	3.40	2.91
14	239	874	27466	28938	28843	3.81	3.29	2.82
11	250	902	24434	23877	24146	3.94	3.90	3.31
5	227	907	28953	28997	27873	4.04	3.36	2.95
8	308	1160	27414	26997	26262	3.93	3.14	2.84
13	328	1172	33940	33839	34291	3.27	2.44	2.13
12	355	1311	32460	31077	30060	3.73	2.56	2.36
7	364	1376	26722	26338	26307	3.74	2.98	2.67
10	429	1564	27176	28474	28811	2.96	2.56	2.31
16	482	1783	30578	30949	30914	2.58	2.23	2.06
9	535	1949	31954	32679	32822	2.90	2.01	1.87
1	556	2106	27933	28167	28364	2.59	2.29	2.13

Tabla 6.5.4: Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP del gasto total anual medio del hogar y coeficientes de variación en %. 4º trimestre.

Conclusiones

Para poder tener en cuenta si el tamaño muestral en cada uno de los dominios influye en los resultados, estos han sido ordenados por tamaño de manera creciente. Puede observarse en la figura 6.8 que, a medida que el tamaño muestral de la comarca aumenta, todos los estimadores muestran un comportamiento aproximadamente similar.

Para la estimación del gasto medio, las líneas de regresión de cada uno de los estimadores frente al estimador directo son muy próximas a la recta $y = cte + x$; es decir, muestran un comportamiento aceptablemente próximo al del estimador directo. Esta propiedad puede interpretarse como de insesgadez asintótica respecto de la distribución del diseño muestral. Este hecho puede verse en las figuras 6.9 y 6.10. En estas figuras se ha incluido para cada uno de los diagramas de dispersión los valores de la constante y la pendiente de la recta de regresión de cada uno de los estimadores frente al estimador directo.

Del estudio de las estimaciones de errores cuadráticos medios absolutos y relativos (raíz cuadrada del error cuadrático medio y coeficiente de variación), se puede deducir que el estimador más competitivo para la estimación del gasto medio es el estimador EBLUP (véanse las figuras 6.11 y 6.12). En concreto se puede observar la figura 6.12 donde se manifiesta de manera sistemática que el estimador EBLUP tiene menor variabilidad que los otros dos.

El estimador directo usa solamente la información del área y periodo considerados. Es un estimador básicamente centrado respecto de la distribución del diseño muestral pero con una varianza grande en problemas de áreas pequeñas. Al graficar las estimaciones de errores cuadráticos medios absolutos y relativos ha quedado patente la alta varianza del estimador directo, como se puede ver en las figuras 6.11 y 6.12, respectivamente.

El estimador EBLUPA utiliza información de todo el universo en el último periodo. Este estimador, a costa de aumentar ligeramente el sesgo, disminuye sustancialmente la varianza. Es un estimador basado en un modelo de unidad lineal mixto y estático que utiliza información auxiliar de sección cruzada. Las estimaciones EBLUPA son más suaves a lo largo de las áreas pequeñas del último periodo que las del estimador directo. Sin embargo el estimador EBLUPA no garantiza un efecto de suavizado a lo largo del tiempo.

El estimador EBLUP se basa en un modelo que tiene un efecto aleatorio de área con componentes independientes e idénticamente distribuidas y un efecto de tiempo. El efecto de tiempo está anidado en el efecto de área. Con respecto a la covarianza entre las observaciones la diferencia básica es que el modelo del estimador EBLUP asume que las observaciones de un mismo periodo en distintos dominios son incorreladas. Esta es la misma hipótesis que asume el modelo en el que se basa el estimador EBLUPA.

La información temporal tiene un gran poder explicativo. Por tal motivo aquellos estimadores que la utilizan son siempre candidatos para ser utilizados en encuestas continuas. Estos estimadores producen un efecto de suavizado entre áreas pequeñas y entre periodos de tiempo.

Capítulo 7

Conclusiones generales y futuras líneas de investigación

7.1. Conclusiones generales

En la presente memoria se extienden las conclusiones de los resultados obtenidos en tres direcciones principales:

Ajuste del modelo. Se consideran los métodos Henderson 3 (H3), máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual (REML). Se dan algoritmos de cálculo y se analizan los errores cuadráticos medios y sesgos mediante estudios de simulación. Se concluye aconsejando principalmente el uso del método REML y en menor medida el ML.

Predicciones EBLUP. Considerando los métodos máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud residual (REML), se proporcionan fórmulas explícitas para el cálculo de predictores lineales insesgados y óptimos de determinados parámetros poblacionales de tipo lineal. Se dan algoritmos de cálculo y se analizan empíricamente los errores cuadráticos medios y sesgos mediante estudios de simulación. Se concluye aconsejando el uso del método REML.

Estimaciones del error cuadrático medio de los EBLUP. Se proporcionan dos tipos de procedimientos para estimar el error cuadrático medio de los EBLUP, los estimadores de fórmula explícita (estimadores P-R) y los estimadores por remuestreo bootstrap. Se concluye recomendando un estimador basado en remuestreo bootstrap paramétrico con corrección de sesgo para el caso de dominios. En cambio, si los parámetros de interés vienen referidos a subdominios, se recomienda también el estimador P-R.

Aplicaciones a datos reales. Se realizan dos aplicaciones con datos reales de la EPA y de la ECPF con objeto de ilustrar la aplicabilidad del modelo a tres niveles. En el caso de la EPA, el modelo recoge la estructura geográfica anidada de la población. En el caso de la ECPF el modelo es temporal. En ambos casos se compara el estimador EBLUP con el

directo y con el EBLUPA basado en un modelo con dos niveles. Se muestra la superioridad del estimador introducido en la memoria.

7.2. Futuras líneas de investigación

En un futuro próximo el doctorando participará en el proyecto europeo SAMPLE (Small Area Methods for Poverty and Living Condition Estimates), en el que abordará las siguientes líneas de investigación:

Modelos lineales mixtos (LMM) de carácter temporal. Los modelos y estimadores clásicos toman información prestada de variables auxiliares (las variables explicativas del modelo) y de áreas vecinas. Otra fuente de información aparece cuando las variables del modelo se han medido en distintas ocasiones anteriores. Los estimadores obtenidos en encuestas sucesivas utilizando modelos estáticos están generalmente correlacionados, aun cuando se seleccionen muestras independientes en las diferentes ocasiones. Esto se debe a las correlaciones de las características de interés de un área pequeña a lo largo del tiempo. En tales casos, la modelización temporal permite una ganancia sustancial de precisión en las estimaciones.

Modelos lineales mixtos (LMM) de carácter espacio-temporal. Este tipo de modelos espacio-temporales incorporan la autocorrelación espacial de los residuos en el ajuste de los modelos en las regiones estudiadas y toman información de distintas mediciones a lo largo del tiempo. Los modelos clásicos suponen que los efectos aleatorios de las áreas pequeñas son independientes. En la práctica es a menudo razonable suponer que los efectos asociados a “áreas vecinas” están correlacionados proporcionalmente a una medida de distancia (no necesariamente geográfica), con correlaciones decreciendo a cero a medida que la distancia aumenta y con información útil de mediciones anteriores. Tales modelos son muy comunes en estadística espacial, pero aun no han sido ampliamente utilizados en estimación en áreas pequeñas.

Modelos lineales generalizados mixtos (GLMM). Modelos y estimadores como los utilizados a lo largo de esta tesis asumen la hipótesis de normalidad en los efectos y errores aleatorios. Se pretende poder estudiar en un futuro un abanico más amplio de modelos en cuanto a la restricción en las hipótesis que permitan recoger correlaciones temporales o espacio-temporales. De este modo se pueden abordar problemas más amplios que necesitan mayor flexibilidad. La teoría de modelos lineales generalizados mixtos con efectos aleatorios a varios niveles, está aun en proceso de desarrollo. La introducción de correlaciones de tipo espacial o temporal permite una mayor flexibilidad y riqueza en el proceso de modelización. Dentro de estos modelos, el modelo multinomial logit es uno de los que mayor interés práctico tiene, pues se utiliza para la descripción y estimación de totales y proporciones de clases. La utilización de este tipo de modelos tiene gran interés en estadística pública.

Aplicación de técnicas bootstrap o jackknife a casos reales. Los procedimientos de remuestreo bootstrap detallados en esta tesis doctoral no pueden aplicarse siempre a casos reales, pues es necesario disponer de los valores de las variables auxiliares para todas las unidades de la población. Este requisito puede ser muy difícil de cumplir en estimaciones por muestreo, pues normalmente se dispone de esta información pero a un nivel de agregación superior. En un futuro próximo se pretende plantear algún procedimiento de remuestreo bootstrap o jackknife que evite los inconvenientes citados anteriormente. Asimismo se tiene previsto introducir y estudiar procedimientos de remuestreo respecto de la distribución del diseño muestral. Este problema se abordará teniendo como referencia alguna de las encuestas que realiza el Instituto Nacional de Estadística; como por ejemplo, la Encuesta de Población Activa, la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares o la Encuesta de Condiciones de Vida.

En definitiva, los futuros objetivos son:

1. Plantear y estudiar métodos de estimación en áreas pequeñas usando LMM o GLMM que incluyan correlaciones de tipo temporal. Modelos de área e individuo tanto de regresión lineal como logística con correlaciones temporales.
2. Plantear y estudiar métodos de estimación en áreas pequeñas usando LMM o GLMM que incluyan correlaciones de tipo espacio-temporal. Modelos de área e individuo tanto de regresión lineal como logística con correlaciones espacio-temporales.
3. Determinación y estimación de los errores de predicción de los estimadores de los parámetros de áreas basados en modelos LMM o GLMM de los puntos anteriores.
4. Estimación de errores cuadráticos medios mediante técnicas de remuestreo bootstrap en modelos LMM o GLMM.
5. Estimación de errores cuadráticos medios respecto de la distribución del diseño muestral usando técnicas de remuestreo.
6. Experimentos de simulación para estudiar empíricamente el comportamiento de los algoritmos de ajuste y de la bondad de los distintos estimadores de parámetros de área y de errores cuadráticos medios.
7. Aplicaciones a datos reales.

APÉNDICES



Apéndice A

Cálculos de expresiones en el capítulo 2

A.1. Introducción

En el presente apéndice se muestran los cálculos intermedios que permiten obtener las expresiones descritas en el capítulo 2, en concreto:

- en la sección A.2 se presenta el desarrollo del estimador BLUE de β y el predictor BLUP de u de (2.3) que da lugar a (2.6), (2.7) y (2.8).
- en la sección A.3 se presenta el desarrollo en sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d , para las puntuaciones y los elementos de la matriz de información de Fisher del algoritmo de Fisher-Scoring para el método de la máxima verosimilitud (ML), de la sección 2.3.
- en la sección A.4 se presenta el desarrollo del método de la máxima verosimilitud residual y posteriormente se desarrolla en sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d , para las puntuaciones y los elementos de la matriz de información de Fisher del algoritmo de Fisher-Scoring, tanto en la parametrización habitual, de la sección 2.4, como en la parametrización alternativa (REML), de la sección 2.5.

A.2. Desarrollo de $\hat{\beta}$ y \hat{u}

El estimador BLUE de β expresado en (1.4) o en (2.3) puede desarrollarse como productos matriciales de sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d , para ello es necesario realizar ciertos cálculos previos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} &= \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_d^t] \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} [\mathbf{V}_d^{-1}] \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [\mathbf{X}_d] = \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left(\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_{di}^t] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t}{w_{di}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{X}_{di}] \right) \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}, \\
\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} &= \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_d^t] \underset{1 \leq d \leq D}{\text{diag}} [\mathbf{V}_d^{-1}] \underset{1 \leq d \leq D}{\text{col}} [\mathbf{y}_d] = \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left(\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_{di}^t] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t}{w_{di}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{y}_{di}] \right) \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right\},
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} = \left(\sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \right)^{-1} \left(\sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) \right) \\
&= \left(\sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

El predictor BLUP de \mathbf{u} expresado en (1.5) o en (2.3) puede desarrollarse, al igual que $\boldsymbol{\beta}$, como productos matriciales de sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d ,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_M \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^t \\ \mathbf{Z}_2^t \end{bmatrix}_{1 \leq d \leq D} \text{diag} (\mathbf{V}_d^{-1})_{1 \leq d \leq D} \text{col} [\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}] \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{Z}_1^t \text{diag} (\mathbf{V}_d^{-1})_{1 \leq d \leq D} \text{col} [\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}] \\ \sigma_2^2 \mathbf{Z}_2^t \text{diag} (\mathbf{V}_d^{-1})_{1 \leq d \leq D} \text{col} [\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \text{diag} (\mathbf{1}_{n_d}^t) \text{diag} (\mathbf{V}_d^{-1})_{1 \leq d \leq D} \text{col} [\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}] \\ \sigma_2^2 \text{diag} (\text{diag} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t)) \text{diag} (\mathbf{V}_d^{-1})_{1 \leq d \leq D} \text{col} [\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \text{col} [\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}})] \\ \sigma_2^2 \text{col} [\text{diag} (\mathbf{1}_{n_{di}}^t) \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{col} [\hat{u}_{1,d}] \\ \text{col} [\hat{u}_{2,di}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Realizando cálculos en las expresiones $\hat{u}_{1,d}$ y $\hat{u}_{2,di}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{1,d} &= \sigma_1^2 \text{col} [\mathbf{1}_{n_d}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \text{col} [\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di}] \\
&= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di} - \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di} \right) \right] \\
&= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di}, \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned}$$

$$\hat{u}_{2,di} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di} - \delta_d (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di} \right) \right] \quad d = 1, \dots, D, i = 1, \dots, m_d,$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di} = \mathbf{y}_{di} - \mathbf{X}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

A.3. Cálculos para el ajuste mediante el método ML

Previamente a la obtención de los elementos del vector de puntuaciones y de la matriz de información de Fisher, como sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d es necesario realizar algunos cálculos intermedios.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}) &= \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_{di}^t] \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\boldsymbol{\varsigma}_{di}] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right], \\
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} [\mathbf{W}_{di}^{-1}] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right], \\
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right] \mathbf{1}_{n_d}^t \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t, \\
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\text{diag} \left(\mathbf{W}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right], \\
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{n_d}^t \left[\text{diag} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
&\quad \cdot \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right]^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t], \\
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&= \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di})^2 \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right],
\end{aligned}$$

donde $\varsigma_{di} = \mathbf{y}_{di} - \mathbf{X}_{di} \hat{\boldsymbol{\beta}}$, $d = 1, \dots, D$, $i = 1, \dots, m_d$.

Las expresiones deducidas en (2.12) - (2.22) se han obtenido a partir de los anteriores productos

matriciales como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_\beta &= \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}), \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right], \\
S_{\sigma_0^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}) \\
&= -\frac{1}{2\sigma_0^2} \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \left[\text{diag} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di}^t] \left[\text{diag} \left(\mathbf{W}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_{di}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} - \gamma_{di}) - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \boldsymbol{\varsigma}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \right. \\
&\quad - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\varsigma}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \\
S_{\sigma_1^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}) \\
&= -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\varsigma}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right]^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\sigma_2^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \boldsymbol{\beta}) \\
&= -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di})^2 \boldsymbol{\zeta}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\zeta}_{di} \right) \right. \\
&\quad - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} \boldsymbol{\zeta}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \boldsymbol{\zeta}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \boldsymbol{\zeta}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right], \\
\mathbf{F}_{\beta\beta} &= \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left(\mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di\cdot}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
F_{\sigma_0^2 \sigma_0^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \left[\text{diag} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di\cdot}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad \left. \left. \cdot \left[\text{diag} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di\cdot}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} + \gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)) - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di\cdot} + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} \right)^2 \right], \\
F_{\sigma_0^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \} \\
&= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\sigma_0^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} \\
&= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di\cdot}^2 \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di\cdot} \right) \right], \\
F_{\sigma_1^2 \sigma_1^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \} = \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \left[1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t \right\} \\
&= \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \delta_d^2 \mathbf{1}_{n_d}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \mathbf{1}_{n_d}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \\
&= \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right]^2, \\
F_{\sigma_1^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_d} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} \\
&= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot} \right)^2 \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^2 \right], \\
F_{\sigma_2^2 \sigma_2^2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} \\
&= \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^3 \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di\cdot})^2 \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

A.4. Cálculos para el ajuste mediante el método REML

Sean $\mathbf{y}_1^\circ = \mathbf{K}_1 \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2^\circ = \mathbf{K}_2 \mathbf{y}$, con $\mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Entonces

$$E[\mathbf{y}_1^\circ] = E[\mathbf{K}_1 \mathbf{y}] = E[\mathbf{K}_1 (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{e})] = \mathbf{0}.$$

Se impone la condición de que \mathbf{y}_1° sea independiente de \mathbf{y}_2° . Entonces

$$E[\mathbf{y}_1^\circ \mathbf{y}_2^{\circ t}] = \mathbf{K}_1 E[\mathbf{y} \mathbf{y}^t] \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_2^t = \mathbf{0}.$$

Se propone

$$\mathbf{y}_1^\circ = \Sigma_e^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1} \mathbf{y}) = \mathbf{K}_1 \mathbf{y},$$

donde

$$\mathbf{K}_1 = \Sigma_e^{-1} - \Sigma_e^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1}.$$

Además, se elige $\mathbf{K}_2 = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$. Dado que $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2^t$, se verifica que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}_1^\circ] &= E[\mathbf{K}_1 \mathbf{y}] = (\Sigma_e^{-1} - \Sigma_e^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \Sigma_e^{-1}) \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \\ E[\mathbf{y}_2^\circ] &= E[\mathbf{K}_2 \mathbf{y}] = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \\ V[\mathbf{y}_1^\circ] &= E[\mathbf{y}_1^\circ \mathbf{y}_1^{\circ t}] = \mathbf{K}_1 E[\mathbf{y} \mathbf{y}^t] \mathbf{K}_1^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_1, \\ V[\mathbf{y}_2^\circ] &= \mathbf{K}_2 V[\mathbf{y}] \mathbf{K}_2^t = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \\ E[\mathbf{y}_1^\circ \mathbf{y}_2^{\circ t}] &= \mathbf{K}_1 E[\mathbf{y} \mathbf{y}^t] \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{K}_2^t = \mathbf{K}_1 \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

El número de columnas linealmente independiente de \mathbf{K}_1 es $n - rg(\mathbf{X})$, entonces se puede seleccionar una submatriz \mathbf{K} de \mathbf{K}_1 , de orden $n \times n - rg(\mathbf{X})$, verificando $\mathbf{K}^t \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Se definen los vectores $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^t \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2^\circ$. Se tiene que

$$\mathbf{y}_1 \sim N_{n-rg(\mathbf{X})}(\mathbf{0}, \mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}), \quad \mathbf{y}_2 \sim N_n(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}, \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}) \quad \text{son independientes.}$$

A.4.1. Cálculos para REML mediante parametrización habitual

Sea $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, la función de verosimilitud de \mathbf{y}_1 es

$$f_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}_1) = (2\pi)^{-(n-rg(\mathbf{X}))/2} |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}_1 \right\}.$$

Puesto que $\mathbf{P} = \mathbf{K} (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t$ y $p = rg(\mathbf{X})$, la función de log-verosimilitud es

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} (n - p) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t \mathbf{P} \mathbf{y}_1.$$

Las expresiones deducidas en (2.23) - (2.31) se han obtenido a partir del cálculo de los

siguientes productos matriciales, teniendo en cuenta que $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \delta_d = 1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^2} s_1 &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr}\{\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1}\} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t}{w_{di}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{W}_{di}^{-1}) \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\text{tr} \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t}{w_{di}} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{tr} \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{W}_{di}^{-1}) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} - \gamma_{di}) - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right\}.
\end{aligned}$$

Para obtener s_2 además de otras expresiones es necesario calcular con anterioridad $\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1}$ y expresarlo como sumas de elementos correspondientes a un mismo subnivel di dentro de cada nivel d

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\}, \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr}\{s_2 \mathbf{Q}\} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr}\{\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1}\} = \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \mathbf{Q} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \mathbf{Q} \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{s}_3 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{y}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{s}_4 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{s}_5^t &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right], \\
\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{s}_5 &= \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{s}_6 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

Para obtener s_7 es necesario calcular por partes y con anterioridad $\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}$ y $\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d$, además de la traspuesta de este último,

$$\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} = \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right] = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di},$$

$$\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di},$$

$$\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}},$$

$$\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} = \frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1^2} s_7 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \frac{\delta_d^2}{\sigma_1^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Para la obtención de s_8 hay que calcular previamente $\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}$

$$\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] = \frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}},$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1^4} s_8 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1^4} \mathbf{s}_9 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\sigma_1^4} \mathbf{s}_{10} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

Para obtener s_{11} es necesario calcular $\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}}$ y posteriormente su traza,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right\}, \\
\frac{1}{\sigma_0^2} s_{11} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr}\{\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}}\} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr}\{\mathbf{s}_{12} \mathbf{Q}\} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr}\{\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}}\} = \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \right\} \\
&\quad \cdot \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \mathbf{Q} \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr}\{\mathbf{s}_{12}\mathbf{Q}\} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \mathbf{Q} \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{s}_{13} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{y}_d) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di}^2 \cdot \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{y}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right] \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{s}_{14} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di}^2 \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{s}_{15} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&- \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{X}_{di}] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\} \\
\frac{1}{\sigma_0^4} f_1 &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (n_{di} + \gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)) - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right)^2 \right\} . \\
\frac{1}{\sigma_0^6} \mathbf{f}_2 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{I}_{n_{di}} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di} \cdot} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di} \cdot} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&- \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{X}_{di}] \left. \right\} ,
\end{aligned}$$

y después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^6} \mathbf{f}_2 &\triangleq \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} (\gamma_{di}^2 - 3\gamma_{di} + 3) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \left. \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{f}_3 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}] \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} + \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{f}_4 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right. \\
&- 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Para la obtención de f_5 hay que calcular previamente $\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\ &\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\ &\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\ &\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \\ &\quad \cdot \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}, \end{aligned}$$

Multiplicando este resultado por \mathbf{Q} y $\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}$ obtenido con anterioridad se consigue f_5

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0^4 \sigma_1^2} f_5 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) = \frac{1}{\sigma_0^4 \sigma_1^2} \sum_{d=1}^D \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\ &\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\ &\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\ &\quad + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \cdot \mathbf{Q} \\ &\quad \cdot \left. \left[\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1^4} f_6 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\ &= \frac{1}{\sigma_1^4} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} f_7 &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr}\{\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}}\} = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} + \frac{\gamma_{di}(\gamma_{di} - 2)}{w_{di.}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\cdot \left. \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t + \gamma_{di}(\gamma_{di} - 2) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) \right. \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di.} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di.} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di.}^2 \right. \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di.})^2 \right) \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^6} f_8 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di.} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{(\gamma_{di} - 2) \gamma_{di}}{w_{di.}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&+ \left. \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di.} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \left. \right\},
\end{aligned}$$

y después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^6} \mathbf{f}_8 &= \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \\
&\cdot \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\} . \\
\frac{1}{\sigma_0^4} \mathbf{f}_9 &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&- \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 \right) \left. \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 \right) \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1^4} f_{10} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) = \sum_{d=1}^D \left(\frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2. \\
\frac{1}{\sigma_1^6} f_{11} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d^3}{\sigma_1^6} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_1^4} f_{12} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}] \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4} \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_1^4 \sigma_0^2} f_{13} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q} \mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d}{\sigma_1^2 \sigma_0^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} [(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \left. \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d^2}{\sigma_1^4 \sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \mathbf{Q} \left[\left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Para obtener f_{14} es necesario calcular $\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}}$ y posteriormente su traza,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di}^2 \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad + \delta_d^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 \right) \\
&\quad \cdot \left. \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^4} f_{14} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} \\
&= \frac{1}{\sigma_0^4} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^3 + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 \right)^2 \right\}. \\
\frac{1}{\sigma_0^6} f_{15} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di}^2 \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad + \delta_d^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \left(\sum_{i=1}^{m_d} ((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot)^2 \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di} \cdot} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left. \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\},
\end{aligned}$$

y después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_0^6} \mathbf{f}_{15} &\triangleq \frac{1}{\sigma_0^6} \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&- \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\left. - \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

A.4.2. Cálculos para REML mediante parametrización alternativa

Sea $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma^2, \varphi_1, \varphi_2)$, la función de verosimilitud de \mathbf{y}_1 es

$$f_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}_1) = (2\pi)^{-(n-rg(\mathbf{X}))/2} |\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}_1^t (\mathbf{K}^t \mathbf{V} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y}_1 \right\}.$$

Puesto que $\mathbf{V} = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{P} = \mathbf{K} (\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^t$ y $p = rg(\mathbf{X})$, la función de log-verosimilitud es

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}(n-p) \log 2\pi - \frac{1}{2}(n-p) \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K}| - \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{P} \mathbf{y}.$$

Para la obtención de $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_D^{-1})$ se utiliza la expresión desarrollada en (2.34), teniendo en cuenta que

$$\frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2 w_{di}} = \frac{\sigma_2^2 / \sigma^2}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} w_{di}} = \frac{w_{di} \sigma_2^2}{w_{di} \sigma^2 \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} w_{di} \right)} = \frac{w_{di} \sigma_2^2}{w_{di} (\sigma^2 + \sigma_2^2 w_{di})} = \frac{\sigma_2^2}{w_{di} (\frac{\sigma^2}{w_{di}} + \sigma_2^2)} = \frac{\gamma_{di}}{w_{di}}$$

y que

$$1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} = 1 - \frac{\sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}{\sigma^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}} = \frac{\delta_d}{\varphi_1},$$

las expresiones deducidas en (2.35) - (2.41), se han obtenido a partir del cálculo de los siguientes productos matriciales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} &= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \\
&= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right\} \\
&= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(1 - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) = \frac{\delta_d}{\varphi_1} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} , \\
\mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d &= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \left\{ \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \\
&= \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&\quad \cdot \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&= \frac{\delta_d}{\varphi_1} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} , \\
\frac{1}{\varphi_1} s_{1,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D \left(\mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} - \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d \mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \right) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d}{\varphi_1} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \frac{\delta_d^2}{\varphi_1^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \mathbf{Q}^{(p)} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \right] . \\
\mathbf{y}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} &= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \frac{\delta_d}{\varphi_1} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] = \frac{\delta_d}{\varphi_1} \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_1^2} s_{2,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d) \\
&= \frac{1}{\varphi_1^2} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^2} s_{3,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \frac{1}{\varphi_1^2} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
s_{4,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \left[\operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^2} s_{5,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \frac{1}{\varphi_1^2} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} &= \left\{ \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&= \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&= \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{6,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} = \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right]. \\
\text{tr} \{ \mathbf{s}_{7,p} \mathbf{Q}^{(p)} \} &\triangleq \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{X}_d) \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} \left[(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right] \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right] \\
&\quad \cdot \left. \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{X}_{di}] \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \text{tr} \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{X}_{di}^t] \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right] \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \mathbf{Q}^{(p)} \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \mathbf{Q}^{(p)} \right\}. \\
s_{8,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \Sigma_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \Sigma_d^{-1} \mathbf{y}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} [\mathbf{y}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} \left[(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right] \\
&\quad \cdot \left[\underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}^t} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right] \\
&\quad \cdot \left. \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{y}_{di}] \right\},
\end{aligned}$$

y después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
s_{8,p} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right]. \\
s_{9,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left. \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{X}_{di}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right\}. \\
s_{10,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{11,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{y}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{y}_d) = \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{y}_{di}] \right\} \\
&= \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{y}_{di}^t] \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} \right) \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{y}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{y}_{di} - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{y}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right)^2 \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^2} f_{1,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) = \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^2}{\varphi_1^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^3} \mathbf{f}_{2,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^3}{\varphi_1^3} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^2} \mathbf{f}_{3,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \frac{1}{\varphi_1^2} \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]. \\
\frac{1}{\varphi_1^2} f_{4,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d}) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left(\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\
&\quad \cdot \left. \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\mathbf{1}_{n_{di}}] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - 2\delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right] = \sum_{d=1}^D \left[\frac{\delta_d^2}{\varphi_1^2} \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_1^2} \mathbf{f}_{5,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d}{\varphi_1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [1 - \gamma_{di}] \mathbf{w}_{n_{di}} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [1 - \gamma_{di}]^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d}{\varphi_1} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left\{ \frac{\delta_d^2}{\varphi_1^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] \right\} . \\
\mathbf{f}_{6,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \cdot \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot]^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{7,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D \text{tr} \{ \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \} \\
&= \text{tr} \left\{ \sum_{d=1}^D \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right] \right\} \\
&= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - 2\delta_d \sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \right]. \\
f_{8,p} &\triangleq \sum_{d=1}^D (\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{J}_{n_{di}} \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d) = \sum_{d=1}^D \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \right. \\
&\quad \cdot \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad \cdot \left[\text{diag} \left((1 - \gamma_{di})^2 \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&\quad \left. \left. + \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t \left[(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} \left[\mathbf{X}_{di} \right] \right\}, \\
f_{8,p_1} &= \sum_{d=1}^D \left[\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^3 w_{di}^2 \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{8,p_2} &= \sum_{d=1}^D \left[\delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right. \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^3 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&+ \delta_d^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \\
&\left. - \delta_d^3 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \left((1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right].
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{f}_{8,p} = \mathbf{f}_{8,p_1} + \mathbf{f}_{8,p_2},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d &= \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\mathbf{X}_{di}^t] \left\{ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{diag}} \left[\mathbf{W}_{di} - \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\mathbf{X}_{di}]. \\
&= \sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \\
&\quad - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right), \\
\mathbf{Q}^{(p)} &= \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{X}_d^t \boldsymbol{\Sigma}_d^{-1} \mathbf{X}_d \right)^{-1} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m_d} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{W}_{di} \mathbf{X}_{di} - \sum_{i=1}^{m_d} \frac{\gamma_{di}}{w_{di}} \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right. \\
&\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{X}_{di}^t \mathbf{w}_{n_{di}} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \mathbf{X}_{di} \right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Apéndice B

Cálculos de expresiones en el capítulo 4

B.1. Introducción

En el presente apéndice se muestran los cálculos intermedios que dan lugar a expresiones descritas en el capítulo 4, en concreto:

- en la sección B.2 se presentan algunas definiciones necesarias para el desarrollo de expresiones
- en la sección B.3 se presenta el desarrollo de la matriz $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ para el cálculo de $g_{3,d}(\boldsymbol{\theta})$.
- en la sección B.4 se presenta el desarrollo de la matriz $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ para el cálculo de $g_{3,di}(\boldsymbol{\theta})$.

B.2. Definiciones

Se dan las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}\gamma_{di} &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}}}, \quad \delta_d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}, \quad \eta_d \triangleq \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}, \\ \xi_d &\triangleq \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) - (1 - f_d), \\ \lambda_d &\triangleq \eta_d \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) + \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right), \\ \rho_d &\triangleq -\xi_d \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) - \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}),\end{aligned}$$

B.3. Cálculo de derivadas de b en d

Para la estimación de $\mathbf{a}_d^t \mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{a}_d^t = \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right),$$

se verifica que $\mathbf{b}^t = \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_r \Sigma_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} = \mathbf{b}_1^t + \mathbf{b}_2^t$, donde

$$\mathbf{b}_1^t = \sigma_1^2 \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_{1,r} \mathbf{Z}_{1,s}^t \mathbf{V}_s^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2^t = \sigma_2^2 \mathbf{a}_{r,d}^t \mathbf{Z}_{2,r} \mathbf{Z}_{2,s}^t \mathbf{V}_s^{-1}.$$

Por una parte

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^t &= \frac{1}{N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right) \\ &\cdot \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \mathbf{1}_{N_d-n_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right) = \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_{1d}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1d}^t &= \frac{1}{N_d} \delta_d \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t \mathbf{1}_{N_d-n_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &= \frac{\delta_d (N_d - n_d)}{N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] = \delta_d (1 - f_d) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2^t &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \left(\mathbf{0}_{N_1-n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}-n_{d-1}}^t, \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}-n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D-n_D}^t \right) \\ &\cdot \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) - \delta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}] \right) \\ &\cdot \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] = \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_{2d}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{2d}^t &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \left[\mathbf{1}_{N_d-n_d}^t \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} \left((1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \mathbf{1}_{N_d-n_d}^t \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{N_{di}-n_{di}}] \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\ &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \left[\text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \end{aligned}$$

La expresión de \mathbf{b}^t es

$$\mathbf{b}^t = \mathbf{b}_1^t + \mathbf{b}_2^t = \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_d^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right)$$

donde $\mathbf{b}_d^t = \mathbf{b}_{1d}^t + \mathbf{b}_{2d}^t$; es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d^t &= \delta_d(1-f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_d} \left[\operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})w_{di} \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_2^2(1-\gamma_{di})w_{di} = \gamma_{di}\sigma_0^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d^t &= \delta_d(1-f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] + \frac{1}{N_d} \left(\operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}}{w_{di}} (N_{di}-n_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right) \\ &= \left[(1-f_d) - \frac{1}{N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \right] \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &\quad + \frac{1}{N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}(N_{di}-n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right]. \end{aligned}$$

La matriz $\nabla \mathbf{b}^t$ tiene la estructura

$$\nabla \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_0^2} & \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_1^2} & \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_2^2} & \mathbf{0}^t & \dots & \mathbf{0}^t \end{pmatrix}$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_0^2 son

$$\frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{\gamma_{di}^2}{\sigma_2^2 w_{di}} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di}(1-\gamma_{di}), \quad \frac{\partial(1-\gamma_{di})}{\partial \sigma_0^2} = \frac{\gamma_{di}^2}{\sigma_2^2 w_{di}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di}(1-\gamma_{di}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_0^2} &= -\frac{\sigma_1^2}{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di})^2} \left[1 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} \frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right] \\ &= -\frac{\delta_d}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di}} \left[1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right] \\ &= -\delta_d^2 \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right] = -\delta_d^2 \eta_d. \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_d^t con respecto de σ_0^2 se descompone en tres partes

$$\frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_0^2} = \mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t + \mathbf{C}_d^t.$$

La primera parte es

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ \delta_d (1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&= -\delta_d^2 \eta_d (1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] + \delta_d (1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&= \delta_d (1 - f_d) \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] - \delta_d \eta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\}.
\end{aligned}$$

La segunda parte es

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ \frac{1}{N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di} (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right]
\end{aligned}$$

La tercera parte es

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ -\frac{\delta_d}{N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2 \eta_d}{N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad + \frac{\delta_d}{\sigma_0^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\
&\quad - \frac{\delta_d}{\sigma_0^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t],
\end{aligned}$$

o de forma más simplificada

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_d^t &= \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \left[\eta_d \delta_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) + \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&= \frac{\delta_d}{N_d} \left[\lambda_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right].
\end{aligned}$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_1^2 son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_1^2} &= 0, \quad \frac{\partial (1 - \gamma_{di})}{\partial \sigma_1^2} = 0, \\
\frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_1^2} &= \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} - \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di}}{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di})^2} = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di})^2} \\
&= \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^4} \delta_d^2.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ \frac{1}{N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right\} = 0,$$

el cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_d^t con respecto de σ_1^2 se descompone en dos partes

$$\frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_1^2} = \mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t.$$

La primera parte es

$$\mathbf{D}_d^t = \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ \delta_d(1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} = \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 (1 - f_d)}{\sigma_1^4} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t].$$

La segunda parte es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ -\frac{\delta_d}{N_d} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\ &= -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4 N_d} \left[\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right] \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t]. \end{aligned}$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_2^2 son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_2^2} &= \frac{\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} - \sigma_2^2}{\left(\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \right)^2} = \frac{\frac{\sigma_0^2}{w_{di}}}{\left(\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \right)^2} = \frac{1 - \gamma_{di}}{\sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}}} = \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})}{\sigma_2^2}, \\ \frac{\partial(1 - \gamma_{di})}{\partial \sigma_2^2} &= -\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})}{\sigma_2^2}, \\ \frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_2^2} &= -\frac{\sigma_1^2 \left[-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di} \right]}{\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2} = \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di}. \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_d^t con respecto de σ_2^2 se descompone en tres partes

$$\frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_2^2} = \mathbf{F}_d^t + \mathbf{G}_d^t + \mathbf{H}_d^t.$$

La primera parte es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \left\{ \delta_d(1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\ &= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) (1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &\quad - \delta_d(1 - f_d) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{1}{\sigma_2^2} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right], \end{aligned}$$

o de forma más simplificada

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^t &= \frac{\delta_d^2(1-f_d)}{\sigma_2^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &\quad - \frac{\delta_d(1-f_d)}{\sigma_2^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t]. \end{aligned}$$

La segunda parte es

$$\mathbf{G}_d^t = \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \left\{ \frac{1}{N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}}{w_{di}} (N_{di} - n_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \right\} = \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right].$$

La tercera parte es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \left\{ -\frac{\delta_d}{N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\ &= -\frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &\quad - \frac{\delta_d}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \\ &\quad + \frac{\delta_d}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t]. \end{aligned}$$

La matriz de covarianzas de \mathbf{y}_s es

$$\mathbf{V}_s = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right),$$

con lo cual

$$(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t = \left(\frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_i^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_j^2} \right)_{i,j=0,1,2},$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_0^2} = \mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t + \mathbf{C}_d^t, \quad \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_1^2} = \mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t, \quad \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\partial \sigma_2^2} = \mathbf{F}_d^t + \mathbf{G}_d^t + \mathbf{H}_d^t.$$

La forma cuadrática que ocupa la celda ($i=0, j=0$) de la matriz $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_0^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t + \mathbf{C}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d + \mathbf{C}_d) \\ &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d + 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d + 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d + 2\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d \\ &= s_{00}^{aa} + s_{00}^{bb} + s_{00}^{cc} + s_{00}^{ab} + s_{00}^{ac} + s_{00}^{bc}. \end{aligned}$$

Los vectores $\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$, $\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ y $\mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ se calculan de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \delta_d(1-f_d) \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] - \delta_d \eta_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\ &\cdot \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \delta_d(1-f_d) \left\{ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\ &+ \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\ &\left. \left. + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= -\frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\ &\cdot \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di}) \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\ &\left. + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})\mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})}{w_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\delta_d}{N_d} \left[\lambda_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right] \\ &\cdot \left[\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right] \\ &= \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \sigma_1^2 \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \lambda_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\ &+ \sigma_0^2 \lambda_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1-\gamma_{di})\mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \\ &- \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\ &\left. - \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di}-n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})\mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right\}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \lambda_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_0^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] - \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{aa} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{A}_d$ de q_{00} es

$$s_{00}^{aa} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \delta_d (1 - f_d) \left[\frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] - \delta_d \eta_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right].$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{00}^{aa} &= \delta_d^2 (1 - f_d)^2 \left\{ \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] - \frac{2\delta_d \eta_d}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\ &+ \left. \left. \delta_d^2 \eta_d^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{ab} = 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d$ de q_{00} es

$$\begin{aligned} s_{00}^{ab} &= -2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\ &= -2 \frac{\delta_d (1 - f_d)}{\sigma_0^2 N_d} \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right. \\ &- \left. \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{ac} = 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d$ de q_{00} es

$$\begin{aligned}
s_{00}^{ac} &= 2 \frac{\delta_d}{N_d} \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \left\{ \lambda_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \\
&= 2 \frac{\delta_d^2}{N_d} (1 - f_d) \left\{ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&\quad - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \lambda_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \\
&\quad - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) + \lambda_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right) \\
&\quad - \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) + \sigma_2^2 \lambda_d \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) + \sigma_0^2 \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right) \right] \left. \right\} \\
&= 2 \frac{\delta_d^2}{N_d} (1 - f_d) \left\{ \frac{\lambda_d}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \right. \\
&\quad + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \left. \right] - \frac{1}{\sigma_0^4} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \\
&\quad \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right) + \sigma_0^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right) \right] \\
&\quad - \lambda_d \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \\
&\quad + \frac{\delta_d \eta_d}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \left. \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{bb} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d$ de q_{00} es

$$\begin{aligned} s_{00}^{bb} &= \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \left(-\frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_0^4 N_d^2} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \frac{1}{w_{di}} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})]^2 \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{bc} = 2\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d$ de q_{00} es

$$s_{00}^{bc} = 2\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \lambda_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\}.$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{00}^{bc} &= -\frac{2\delta_d}{\sigma_0^2 N_d^2} \left\{ \sigma_1^2 \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\quad - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \\ &\quad + \sigma_2^2 \lambda_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} \right) + \sigma_0^2 \lambda_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right) \right\}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} s_{00}^{bc} &= \frac{2\delta_d}{\sigma_0^2 N_d^2} \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right. \\ &\quad - \lambda_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{cc} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d$ de q_{00} es

$$s_{00}^{cc} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \lambda_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\}.$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{00}^{cc} &= \frac{\delta_d^2}{N_d^2} \left\{ \lambda_d^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\ &\quad - \frac{\lambda_d}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\ &\quad - \lambda_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] + \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] \right\}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} s_{00}^{cc} &= \frac{\delta_d^2}{N_d^2} \left\{ \lambda_d^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\ &\quad - \frac{2\lambda_d}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] + \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] \right\}. \end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(i = 0, j = 1)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned} q_{01} &= \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_1^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t + \mathbf{C}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d) \\ &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d \\ &= s_{01}^{ad} + s_{01}^{ae} + s_{01}^{bd} + s_{01}^{be} + s_{01}^{cd} + s_{01}^{ce}. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d = -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] ,$$

con lo cual el sumando $s_{01}^{a,de} = s_{01}^{ad} + s_{01}^{ae} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d)$ de q_{01} es

$$\begin{aligned} s_{01}^{a,de} &= -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^3 \xi_d (1 - f_d)}{\sigma_1^4} \left\{ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &+ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \\ &\left. - \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\} , \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} s_{01}^{a,de} &= -\frac{\delta_d^3 \xi_d (1 - f_d)}{\sigma_1^4} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &+ \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \\ &\left. - \sigma_0^2 \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\} . \end{aligned}$$

El sumando $s_{01}^{b,de} = s_{01}^{bd} + s_{01}^{be} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d)$ de q_{01} es

$$\begin{aligned} s_{01}^{b,de} &= \frac{\delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4 N_d} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right\} . \end{aligned}$$

El sumando $s_{01}^{c,de} = s_{01}^{cd} + s_{01}^{ce} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d)$ de q_{01} es

$$\begin{aligned} s_{01}^{c,de} &= -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^3 \xi_d}{\sigma_1^4 N_d} \left\{ \lambda_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\ &- \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &\left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\} . \end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda ($i = 0, j = 2$) de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned}
 q_{02} &= \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_2^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t + \mathbf{C}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{F}_d + \mathbf{G}_d + \mathbf{H}_d) \\
 &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d \\
 &+ \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d \\
 &= s_{02}^{af} + s_{02}^{ag} + s_{02}^{ah} + s_{02}^{bf} + s_{02}^{bg} + s_{02}^{bh} + s_{02}^{cf} + s_{02}^{cg} + s_{02}^{ch} .
 \end{aligned}$$

Se verifica que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d &= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) (1 - f_d) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
 &- \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
 &- \frac{\delta_d}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
 &- \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - f_d) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
 &+ \frac{\delta_d}{\sigma_2^2 N_d} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] ,
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d = \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} .$$

El sumando $s_{02}^{a,fh} = s_{02}^{af} + s_{02}^{ah} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d)$ de q_{02} es

$$\begin{aligned}
 s_{02}^{a,fh} &= \delta_d (1 - f_d) \left\{ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
 &+ \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] - \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\
 &+ \left. \left. \sigma_2^2 \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \sigma_0^2 \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\} \\
 &\cdot \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \underset{1 \leq i \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{02}^{a, fh} &= \frac{\delta_d^2(1-f_d)}{\sigma_2^2} \left\{ \frac{\rho_d \sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \right. \\
&+ \frac{\xi_d \sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right)^2 + \frac{\rho_d \sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \frac{\xi_d \sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 \\
&+ \rho_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 w_{di} + \xi_d \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})]^2 w_{di} - \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \rho_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right)^2 \right. \\
&+ \sigma_1^2 \xi_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) + \sigma_2^2 \rho_d \sum_{i=1}^{m_d} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \xi_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \rho_d \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})^2 w_{di} + \sigma_0^2 \xi_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2(1-f_d)}{\sigma_2^2} \left\{ \frac{\rho_d}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 w_{di} \right] + \frac{\xi_d}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right)^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})]^2 w_{di} \right] - \delta_d \rho_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right)^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})^2 w_{di} \right] - \delta_d \xi_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \right. \right. \\
&\cdot \left. \left. \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1-\gamma_{di})w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{a, g} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{ds} \mathbf{G}_d$ de q_{02} es

$$\begin{aligned}
s_{02}^{a, g} &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{ds} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\
&= \frac{\delta_d(1-f_d)}{\sigma_2^2 N_d} \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di}) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})]^2 (N_{di}-n_{di})w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1-\gamma_{di})]^2 (N_{di}-n_{di}) \right] \right. \\
&- \left. \delta_d \eta_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1-\gamma_{di})w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})(N_{di}-n_{di}) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 (N_{di}-n_{di})w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1-\gamma_{di})^2 (N_{di}-n_{di}) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{b, fh} = s_{02}^{bf} + s_{02}^{bh} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d)$ de q_{02} es

$$\begin{aligned} s_{02}^{b, fh} &= -\frac{1}{\sigma_0^2 N_d} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\ &+ \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \\ &\cdot \left. \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} s_{02}^{b, fh} &= -\frac{\delta_d}{\sigma_0^2 \sigma_2^2 N_d} \left\{ \sigma_1^2 \rho_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &+ \sigma_1^2 \xi_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \\ &+ \sigma_2^2 \rho_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_2^2 \xi_d \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} \\ &+ \left. \sigma_0^2 \rho_d \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) + \sigma_0^2 \xi_d \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right\} \\ &= -\frac{\delta_d}{\sigma_0^2 \sigma_2^2 N_d} \left\{ \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \\ &+ \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\ &+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{b, g} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d$ de q_{02} es

$$\begin{aligned} s_{02}^{b, g} &= \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma_0^2 \sigma_2^2 N_d^2} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})]^2 \right. \\ &+ \left. \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \frac{1}{w_{di}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})]^2 \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{c,fh} = s_{02}^{cf} + s_{02}^{ch} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d)$ de q_{02} es

$$\begin{aligned}
s_{02}^{c,fh} &= \frac{\delta_d}{N_d} \left\{ \lambda_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_0^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] - \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\} \\
&\cdot \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\},
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
s_{02}^{c,fh} &= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2 N_d} \left\{ \lambda_d \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\
&+ \left. \lambda_d \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] - \rho_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \\
&\cdot \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right. \\
&+ \left. \left. \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] - \xi_d \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \\
&\cdot \left. \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2 N_d} \left\{ \lambda_d \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\
&+ \left[\lambda_d \xi_d - \frac{\rho_d}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \right] \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] - \frac{\xi_d}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \\
&\cdot \left. \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{c,g} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d$ de q_{02} es

$$\begin{aligned}
s_{02}^{c,g} &= \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\
&= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2 N_d^2} \left\{ \lambda_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(N_{di} - n_{di}) \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(i = 1, j = 1)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$q_{11} = \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_1^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_1^2} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d) = s_{11}^{de,de} .$$

El vector $(\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s}$ se calcula de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} &= -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}^t] \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right) \\
&= -\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \cdot \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right. \\
&\quad \left. + \sigma_0^2 \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] ,
\end{aligned}$$

El sumando $s_{11}^{de,de} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d)$ de q_{11} es

$$\begin{aligned}
s_{11}^{de,de} &= (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} \left(-\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4} \right) \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \\
&= \left(\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \xi_d}{\sigma_1^4} \right)^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] .
\end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(i = 1, j = 2)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned}
q_{12} &= \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_1^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_2^2} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{F}_d + \mathbf{G}_d + \mathbf{H}_d) \\
&= \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d + \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d \\
&= s_{12}^{df} + s_{12}^{dg} + s_{12}^{dh} + s_{12}^{ef} + s_{12}^{eg} + s_{12}^{eh} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{12}^{de, fh} = s_{12}^{df} + s_{12}^{dh} + s_{12}^{ef} + s_{12}^{eh} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d)$ de q_{12} es

$$\begin{aligned}
s_{12}^{de, fh} &= (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \\
&= -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^4 \sigma_2^2} \delta_d^3 \xi_d \left\{ \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\
&+ \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right. \\
&\left. \left. + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{12}^{de, g} = s_{12}^{dg} + s_{12}^{eg} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}\mathbf{G}_d$ de q_{12} es

$$\begin{aligned}
s_{12}^{de, g} &= (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\
&= -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^4 \sigma_2^2 N_d} \delta_d^2 \xi_d \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \\
&+ \left. \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right\}.
\end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(i = 2, j = 2)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t)\mathbf{V}_s(\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned}
q_{22} &= \frac{\partial \mathbf{b}_d^t}{\sigma_2^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_2^2} = (\mathbf{F}_d^t + \mathbf{G}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{F}_d + \mathbf{G}_d + \mathbf{H}_d) \\
&= \mathbf{F}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{F}_d + \mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + \mathbf{H}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d + 2\mathbf{F}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d + 2\mathbf{F}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d + 2\mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{H}_d \\
&= s_{22}^{ff} + s_{22}^{gg} + s_{22}^{hh} + s_{22}^{fg} + s_{22}^{fh} + s_{22}^{gh}.
\end{aligned}$$

Los vectores $(\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}$, y $\mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ se calculan de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] + \xi_d \operatorname{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})\mathbf{w}_{n_{di}}^t] \right\} \\
&\cdot \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \operatorname{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right. \\
&+ \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\
&\left. \left. + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \mathbf{1}_{n_{di}}^t] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}}^t \right] \\
&\cdot \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq i \leq m_d} (\mathbf{1}_{n_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\
&+ \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \mathbf{1}_{n_{di}}^t] \\
&\left. + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq i \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{1}_{n_{di}}^t \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{fh, fh} = s_{22}^{ff} + s_{22}^{hh} + s_{22}^{fh} = (\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}(\mathbf{F}_d + \mathbf{H}_d)$ de q_{22} es

$$\begin{aligned}
s_{22}^{fh, fh} &= (\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} \left\{ \rho_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [(1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] + \xi_d \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \mathbf{w}_{n_{di}}] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^4} \left\{ \rho_d^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \right. \\
&+ 2\rho_d \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} [(1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 \right. \\
&+ \left. \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 w_{di} \right] \\
&\left. + \xi_d^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 w_{di} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{fh,g} = s_{22}^{fg} + s_{22}^{gh} = (\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s}\mathbf{G}_d$ de q_{22} es

$$\begin{aligned}
s_{22}^{fh,g} &= 2(\mathbf{F}_d^t + \mathbf{H}_d^t)\mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\
&= 2 \frac{\delta_d}{\sigma_2^4 N_d} \left\{ \rho_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \xi_d \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right) \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (N_{di} - n_{di}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{gg} = \mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{G}_d$ de q_{22} es

$$\begin{aligned}
s_{22}^{gg} &= \mathbf{G}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \text{col}_{1 \leq i \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(N_{di} - n_{di})}{w_{di}} \mathbf{w}_{n_{di}} \right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_2^2 N_d} \right)^2 \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{i=1}^{m_d} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{m_d} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})]^2 \right. \\
&\quad \left. + \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{m_d} \frac{1}{w_{di}} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di})]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

B.4. Cálculo de derivadas de b en di

Sea $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Para la estimación de $\mathbf{a}_{di}^t \mathbf{y}$, donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{di}^t &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \mathbf{0}_{N_{d1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d(i-1)}}^t, \mathbf{1}_{N_{di}}^t, \mathbf{0}_{N_{d(i+1)}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{dm_d}}^t, \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right) \\
&= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D}^t \right),
\end{aligned}$$

se verifica que $\mathbf{b}^t = \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_r \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{Z}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} = \mathbf{b}_1^t + \mathbf{b}_2^t$, donde

$$\mathbf{b}_1^t = \sigma_1^2 \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_{1,r} \mathbf{Z}_{1,s}^t \mathbf{V}_s^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2^t = \sigma_2^2 \mathbf{a}_{r,di}^t \mathbf{Z}_{2,r} \mathbf{Z}_{2,s}^t \mathbf{V}_s^{-1}.$$

Por una parte

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1^t &= \frac{1}{N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1 - n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1} - n_{d-1}}^t, \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1} - n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D - n_D}^t \right) \\
&\quad \cdot \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\delta_d \mathbf{1}_{N_d - n_d} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right) \\
&= \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_{1di}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right),
\end{aligned}$$

donde \mathbf{b}_{1di}^t es el siguiente vector $1 \times n_d$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{1di}^t &= \frac{\delta_d}{N_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}}^t \right] \mathbf{1}_{N_d - n_d} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &= \frac{\delta_d (N_{di} - n_{di})}{N_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] = \delta_d (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right].\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2^t &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_{di}} \left(\mathbf{0}_{N_1 - n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_{d-1} - n_{d-1}}^t, \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}}^t \right], \mathbf{0}_{N_{d+1} - n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{N_D - n_D}^t \right) \\ &\quad \cdot \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\operatorname{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left((1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right) \right) \\ &\quad - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}} \right] \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &= \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_{2di}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right),\end{aligned}$$

donde \mathbf{b}_{2di}^t es el siguiente vector $1 \times n_d$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{2di}^t &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_{di}} \left\{ \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}}^t \right] \operatorname{diag}_{1 \leq d \leq D} \left((1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_d \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}} \right] \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \mathbf{1}_{N_{dj} - n_{dj}} \right] \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \\ &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_{di}} \left\{ \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} (1 - \gamma_{dj}) (N_{dj} - n_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. - \delta_d (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) w_{di} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}.\end{aligned}$$

La expresión de \mathbf{b}^t es

$$\mathbf{b}^t = \mathbf{b}_1^t + \mathbf{b}_2^t = \left(\mathbf{0}_{n_1}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t, \mathbf{b}_{di}^t, \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t, \dots, \mathbf{0}_{n_D}^t \right),$$

donde $\mathbf{b}_{di}^t = \mathbf{b}_{1di}^t + \mathbf{b}_{2di}^t$; es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{di}^t &= \delta_d (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2 N_{di}} \left\{ \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} (1 - \gamma_{dj}) (N_{dj} - n_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. - \delta_d (1 - \gamma_{di}) (N_{di} - n_{di}) w_{di} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} = \gamma_{di} \sigma_0^2$, se obtiene

$$\mathbf{b}_{di}^t = \frac{\gamma_{di} (1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] + \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right].$$

La matriz $\nabla \mathbf{b}^t$ tiene la estructura

$$\nabla \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_1}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_0^2} & \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_D}^t \\ \mathbf{0}_{n_1}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_1^2} & \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_D}^t \\ \mathbf{0}_{n_1}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_{d-1}}^t & \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_2^2} & \mathbf{0}_{n_{d+1}}^t & \cdots & \mathbf{0}_{n_D}^t \end{pmatrix}.$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_0^2 son

$$\frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}), \quad \frac{\partial(1 - \gamma_{di})}{\partial \sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di}(1 - \gamma_{di}), \quad \frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_0^2} = -\delta_d^2 \eta_d.$$

El cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_{di}^t con respecto de σ_0^2 se descompone en dos partes

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_0^2} = \mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t.$$

La primera parte es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ \delta_d(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \\ &= -\delta_d^2 \eta_d (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &\quad + \frac{\delta_d}{\sigma_0^2} (1 - f_{di}) \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &\quad + \frac{\delta_d}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &= \delta_d(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \gamma_{di} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] - \delta_d \eta_d \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^t &= \delta_d(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\frac{\gamma_{dj}}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

La segunda parte es

$$\mathbf{B}_d^t = \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ \frac{\gamma_{di}(1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right].$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_1^2 son

$$\frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_1^2} = 0, \quad \frac{\partial(1 - \gamma_{di})}{\partial \sigma_1^2} = 0, \quad \frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_1^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^4} \delta_d^2.$$

El cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_{di}^t con respecto de σ_1^2 es

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_1^2} = \mathbf{C}_d^t,$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \\ &= \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right], \\ \mathbf{0}_{n_d}^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ \frac{\gamma_{di} (1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

Algunas derivadas parciales respecto de σ_2^2 son

$$\frac{\partial \gamma_{di}}{\partial \sigma_2^2} = \frac{(1 - \gamma_{di}) \gamma_{di}}{\sigma_2^2}, \quad \frac{\partial (1 - \gamma_{di})}{\partial \sigma_2^2} = -\frac{(1 - \gamma_{di}) \gamma_{di}}{\sigma_2^2}, \quad \frac{\partial \delta_d}{\partial \sigma_2^2} = \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj}.$$

El cálculo de la derivada parcial de \mathbf{b}_{di}^t con respecto de σ_2^2 se descompone en dos partes

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_2^2} = \mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t.$$

La primera parte es

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_d^t &= \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \left\{ \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \\ &= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &\quad - \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - f_{di}) \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &\quad - \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\ &= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

La segunda parte es

$$\mathbf{E}_d^t = \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \left\{ \frac{\gamma_{di} (1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} = \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right].$$

La matriz de covarianzas de \mathbf{y}_s es

$$\mathbf{V}_s = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} (\mathbf{V}_{d,s}) = \text{diag}_{1 \leq d \leq D} \left(\sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left(\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right),$$

con lo cual

$$(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t = \left(\frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_i^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_j^2} \right)_{i,j=0,1,2},$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_0^2} = \mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t, \quad \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_1^2} = \mathbf{C}_d^t, \quad \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\partial \sigma_2^2} = \mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t.$$

La forma cuadrática que ocupa la celda (0,0) de la matriz $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_0^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d) = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d + 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d \\ &= s_{00}^{aa} + s_{00}^{bb} + s_{00}^{ab}. \end{aligned}$$

Los vectores $\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ y $\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ se calculan de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma_0^2} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left(\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right\} \\ &= \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \cdot \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \cdot \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right] \right\}, \\ \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= -\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})}{\sigma_0^2 w_{di}} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left(\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right\} \\ &= -\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})}{\sigma_0^2} \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right\}. \end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{aa} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{A}_d$ de q_{00} es

$$\begin{aligned} s_{00}^{aa} &= \delta_d (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \text{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}} \right] + \text{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[\frac{\gamma_{dj}}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
s_{00}^{aa} &= [\delta_d(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right)^2 \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 \right. \right. \\
&+ \left. \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] + \frac{2}{\sigma_0^2} \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \\
&+ \left. \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] + \frac{1}{\sigma_0^4} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})]^2 w_{dj} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{ab} = 2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d$ de q_{00} es

$$s_{00}^{ab} = -2\mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] ,$$

realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
s_{00}^{ab} &= -2 \frac{\delta_d}{\sigma_0^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \sigma_2^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (1 - f_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (1 - f_{di}) \right] \\
&+ \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_2^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (1 - f_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})]^2 (1 - f_{di}) \right] \right\} \\
&= -2 \frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_0^2} [(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sigma_0^2 (1 - \gamma_{di}) \right] + \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{00}^{bb} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{B}_d$ de q_{00} es

$$s_{00}^{bb} = -\mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] ,$$

realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
s_{00}^{bb} &= \frac{1}{\sigma_0^4} \left\{ \sigma_1^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 + \sigma_2^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 + \sigma_0^2 \frac{[\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2}{w_{di}} \right\} \\
&= \left(\frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{\sigma_0^2} \right)^2 \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \right] .
\end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(0, 1)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$q_{01} = \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}}{\sigma_1^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d = s_{01}^{ac} + s_{01}^{bc} .$$

El sumando $s_{01}^{ac} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d$ de q_{01} es

$$s_{01}^{ac} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] .$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{01}^{ac} &= \frac{\sigma_0^2 \delta_d^3}{\sigma_1^4} [(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right]^2 \right. \\ &+ \left. \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right\} \\ &+ \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \\ &+ \left. \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \left. \right\} . \end{aligned}$$

El sumando $s_{01}^{bc} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d$ de q_{01} es

$$s_{01}^{bc} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] .$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{01}^{bc} &= - \left(\frac{\delta_d}{\sigma_1^2} \right)^2 (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \sigma_1^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \\ &+ \left. \sigma_2^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (1 - f_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})^2 (1 - f_{di}) \right\} \\ &= - \gamma_{di} \left(\frac{\delta_d}{\sigma_1^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \right)^2 \left\{ \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1 - \gamma_{di}) \right\} . \end{aligned}$$

La forma cuadrática que ocupa la celda $(i = 0, j = 2)$ de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$\begin{aligned} q_{02} &= \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_0^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}}{\sigma_2^2} = (\mathbf{A}_d^t + \mathbf{B}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d) \\ &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d = s_{02}^{ad} + s_{02}^{ae} + s_{02}^{bd} + s_{02}^{be} . \end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{ad} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d$ de q_{02} es

$$\begin{aligned}
s_{02}^{ad} &= \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right]_{1 \leq j \leq m_d} \text{col} [(1 - \gamma_{dj})\mathbf{w}_{n_{dj}}] \right. \\
&\quad \left. - \text{col}_{1 \leq j \leq m_d} [\gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})\mathbf{w}_{n_{dj}}] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} (1 - f_{di})^2 (1 - \gamma_{di})^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left(\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
&\quad - \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right) \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})]^2 w_{dj} \right] \right\} \\
&= \frac{\delta_d^2}{\sigma_2^2} [(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
&\quad + \left[\frac{\delta_d}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_0^2} \left(\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right) \right] \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right) + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj}(1 - \gamma_{dj})]^2 w_{dj} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{ae} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d$ de q_{02} es

$$s_{02}^{ae} = \mathbf{A}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di}(1-\gamma_{di})(1-f_{di})}{w_{di}} \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] .$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{02}^{ae} &= \frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_2^2} (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \sum_{j=1}^{m_d} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_2^2 (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) w_{di} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_0^2 (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) \right] \right\} , \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} s_{02}^{ae} &= \frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_2^2} [(1-\gamma_{di})(1-f_{di})]^2 \left\{ \left(\frac{\gamma_{di}}{\sigma_0^2} - \delta_d \eta_d \right) \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1-\gamma_{di}) w_{di} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_0^2 (1-\gamma_{di}) \right] + \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1-\gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1-\gamma_{di}) \right] \right\} . \end{aligned}$$

El sumando $s_{02}^{bd} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d$ de q_{02} es

$$\begin{aligned} s_{02}^{bd} &= \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} [(1-\gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{col}_{1 \leq j \leq m_d} [\gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] \right\} . \end{aligned}$$

Realizando cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{02}^{bd} &= -\frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_0^2 \sigma_2^2} (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[\sigma_1^2 (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \sum_{j=1}^{m_d} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) \right] \\ &\quad - \left[\sigma_1^2 (1-\gamma_{di})(1-f_{di}) \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1-\gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) w_{di} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1-\gamma_{di})^2 (1-f_{di}) \right] \right\} , \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$s_{02}^{bd} = -\frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_0^2 \sigma_2^2} [(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})]^2 \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \cdot \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1 - \gamma_{di}) \right] - \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \right] \right\}.$$

El sumando $s_{02}^{be} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d$ de q_{02} es

$$s_{02}^{be} = \mathbf{B}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}].$$

Realizando cálculos se obtiene

$$s_{02}^{be} = -\frac{1}{\sigma_0^2 \sigma_2^2} \left\{ \sigma_1^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})]^2 + \sigma_2^2 [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})]^2 + \sigma_0^2 \frac{[\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})]^2}{w_{di}} \right\} = -\frac{1}{\sigma_0^2 \sigma_2^2} [\gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di})]^2 \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \right].$$

La forma cuadrática que ocupa la celda (1, 1) de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$q_{11} = \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_1^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}}{\sigma_1^2} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{C}_d = s_{11}^{cc}.$$

Se verifica que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t] \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{diag}} (\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t) \right. \\ &+ \left. \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right\} = \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \\ &+ \left. \sigma_2^2 \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t] + \sigma_0^2 \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}^t} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{n_{dj}}^t] \right\}. \end{aligned}$$

El único sumando s_{11}^{cc} de q_{11} es

$$s_{11}^{cc} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] = \left[\frac{\sigma_0^2 \delta_d^2}{\sigma_1^4} (1 - \gamma_{di}) (1 - f_{di}) \right]^2 \cdot \left\{ \sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right\}.$$

La forma cuadrática que ocupa la celda (1, 2) de $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$q_{12} = \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_1^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_{di}}{\sigma_2^2} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d) = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d = s_{12}^{cd} + s_{12}^{ce}.$$

El sumando $s_{12}^{cd} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d$ de q_{12} es

$$s_{12}^{cd} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] \right. \\ \left. - \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}] \right\},$$

o equivalentemente

$$s_{12}^{cd} = \frac{\sigma_0^2 \delta_d^3}{\sigma_1^4 \sigma_2^2} [(1 - f_{di})(1 - \gamma_{di})]^2 \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \right. \\ \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\ - \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 \right. \\ \left. + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \left. \right\}.$$

El sumando $s_{12}^{ce} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d$ de q_{12} es

$$s_{12}^{ce} = \mathbf{C}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] \\ = \frac{\sigma_0^2 \delta_d^2 \gamma_{di}}{\sigma_1^4 \sigma_2^2} (1 - f_{di})^2 (1 - \gamma_{di})^2 \left\{ \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1 - \gamma_{di}) \right\}.$$

La forma cuadrática que ocupa la celda (2, 2) de la matriz $(\nabla \mathbf{b}^t) \mathbf{V}_s (\nabla \mathbf{b}^t)^t$ es

$$q_{22} = \frac{\partial \mathbf{b}_{di}^t}{\sigma_2^2} \mathbf{V}_{d,s} \frac{\partial \mathbf{b}_d}{\sigma_2^2} = (\mathbf{D}_d^t + \mathbf{E}_d^t) \mathbf{V}_{d,s} (\mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d) = \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d + \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d + 2 \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d \\ = s_{22}^{dd} + s_{22}^{ee} + s_{22}^{de}.$$

Los vectores $\mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ y $\mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s}$ se calculan de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. - \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \right\} \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left(\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right\} \\
&= \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \cdot \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right. \\
&\quad \left. + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right] \\
&\quad \left. - \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \mathbf{1}_{n_d}^t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \cdot \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] + \sigma_0^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right] \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} &= \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}^t \right] \\
&\quad \cdot \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d} \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{diag}_{1 \leq j \leq m_d} \left(\mathbf{1}_{n_{dj}} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right) + \sigma_0^2 \mathbf{W}_d^{-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_2^2} \gamma_{di} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \sigma_1^2 \mathbf{1}_{n_d}^t + \sigma_2^2 \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] + \sigma_0^2 \frac{1}{w_{di}} \text{col}_{1 \leq j \leq m_d}^t \left[\delta_{ij} \mathbf{1}_{n_{dj}}^t \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{dd} = \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{D}_d$ de q_{22} es

$$\begin{aligned}
s_{22}^{dd} &= \mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - \gamma_{di})(1 - f_{di}) \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \text{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[(1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \text{col}_{1 \leq j \leq m_d} \left[\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) \mathbf{w}_{n_{dj}} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
s_{22}^{dd} = & \left[\frac{\delta_d}{\sigma_2^2} (1 - f_{di})(1 - \gamma_{di}) \right]^2 \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right]^2 \right. \\
& \cdot \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
& - 2 \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) \right. \\
& \left. + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} [(1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})^2 w_{dj} \right] \\
& \left. + \left[\sigma_1^2 \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right)^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj}]^2 + \sigma_0^2 \sum_{j=1}^{m_d} [\gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj})]^2 w_{dj} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{de} = 2\mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d$ de q_{22} es

$$s_{22}^{de} = 2\mathbf{D}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] ,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
s_{22}^{de} = & 2 \frac{\delta_d \gamma_{di}}{\sigma_2^4} [(1 - f_{di})(1 - \gamma_{di})]^2 \left\{ \left[\delta_d \left(\sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} \right) - \gamma_{di} \right] \right. \\
& \cdot \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 (1 - \gamma_{di}) \right] \\
& \left. - \left[\sigma_1^2 \sum_{j=1}^{m_d} \gamma_{dj} (1 - \gamma_{dj}) w_{dj} + \sigma_2^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) w_{di} + \sigma_0^2 \gamma_{di} (1 - \gamma_{di}) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

El sumando $s_{22}^{ee} = \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \mathbf{E}_d$ de q_{22} es

$$s_{22}^{ee} = \mathbf{E}_d^t \mathbf{V}_{d,s} \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\gamma_{di}(1 - \gamma_{di})(1 - f_{di})}{w_{di}} \underset{1 \leq j \leq m_d}{\text{col}} [\delta_{ij} \mathbf{w}_{n_{dj}}] ,$$

o equivalentemente

$$s_{22}^{ee} = \left[\frac{\gamma_{di}}{\sigma_2^2} (1 - f_{di})(1 - \gamma_{di}) \right]^2 \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{\sigma_0^2}{w_{di}} \right\} .$$

Apéndice C

Resultados de los experimentos de simulación del capítulo 2

C.1. Introducción

En el presente apéndice se presentan tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización de los experimentos de simulación descritos en el apartado 2.7, en concreto:

- en la sección C.2 se muestran las tablas de resultados correspondientes al experimento 2.7.2 elaborado en el capítulo 2,
- en la sección C.3 se muestran las tablas de resultados correspondientes al experimento 2.7.3 elaborado en el capítulo 2.

El error cuadrático medio empírico y el sesgo empírico se han multiplicado por 10^5 para poder apreciar las magnitudes. La probabilidad de cobertura se ha expresado en %.

C.2. Tablas numéricas del experimento 1

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	15	10	7	6	5	4	4	3	2	1
	σ_0^2	655	416	335	273	242	185	174	146	97	73
	σ_1^2	15049	13310	15931	13641	14255	13369	13824	14848	12202	13174
	σ_2^2	11397	9816	10059	9361	9781	9256	9917	9021	8610	9663
ML	β	16	10	7	6	5	4	4	3	2	1
	σ_0^2	666	443	338	265	219	191	165	146	96	72
	σ_1^2	10779	10527	10556	10357	10320	10091	10101	9913	9907	9958
	σ_2^2	2988	2722	2408	2231	2187	2030	2056	2033	1912	1817
REML	β	16	10	7	6	5	4	4	3	2	1
	σ_0^2	667	444	339	265	219	192	165	146	96	72
	σ_1^2	10786	10528	10557	10358	10323	10092	10102	9914	9908	9959
	σ_2^2	2988	2722	2408	2231	2187	2030	2056	2033	1912	1817

Tabla C.2.1: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$.

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	31	20	16	13	11	9	9	7	5	3
	σ_0^2	657	425	331	269	240	184	174	144	97	73
	σ_1^2	15973	14089	16603	14069	14948	14508	14624	16105	12906	14121
	σ_2^2	13288	10832	11108	10202	10393	9869	10754	9393	9077	10140
ML	β	33	21	16	13	11	9	8	7	5	4
	σ_0^2	668	442	338	266	218	191	164	145	96	72
	σ_1^2	11505	11183	11164	10907	10840	10576	10482	10304	10190	10169
	σ_2^2	4085	3604	3164	2859	2757	2527	2521	2470	2207	2042
REML	β	32	21	16	13	11	9	8	7	5	4
	σ_0^2	764	443	338	266	219	191	165	145	96	72
	σ_1^2	11506	11184	11166	10910	10844	10578	10484	10306	10192	10171
	σ_2^2	4056	3604	3163	2859	2757	2527	2521	2469	2207	2042

Tabla C.2.2: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$.

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	75	49	40	32	27	24	22	18	13	9
	σ_0^2	653	434	327	267	237	184	175	143	97	73
	σ_1^2	16818	15053	17566	15058	16253	16444	16121	18074	14740	16527
	σ_2^2	15031	12131	12410	11367	11283	10915	12029	10261	10045	11062
ML	β	78	51	38	31	27	23	21	18	12	9
	σ_0^2	684	441	337	267	218	191	164	145	96	72
	σ_1^2	12142	11880	11859	11580	11515	11235	11023	10871	10641	10536
	σ_2^2	5096	4583	4075	3719	3547	3257	3208	3133	2700	2435
REML	β	78	51	38	31	27	23	21	18	12	9
	σ_0^2	670	442	338	267	218	191	164	145	96	72
	σ_1^2	12148	11881	11861	11584	11520	11238	11025	10873	10644	10538
	σ_2^2	5088	4583	4074	3719	3547	3257	3208	3133	2700	2435

Tabla C.2.3: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$.

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	55	75	-13	5	-15	-6	-7	12	-3	-18
	σ_0^2	56	89	-5	6	-14	-10	-4	15	-3	-23
	σ_1^2	34	193	-8	40	60	0	38	57	28	29
	σ_2^2	93	89	25	22	-8	36	14	47	36	10
ML	β	10	-2	17	3	-9	-2	4	2	5	2
	σ_0^2	-456	-267	-201	-97	-115	-53	-149	-67	-71	-34
	σ_1^2	-319	-813	-645	-419	-135	-381	-317	-329	-49	-56
	σ_2^2	24	146	168	136	307	-212	3	188	-68	248
REML	β	10	-2	17	3	-9	-2	4	2	5	2
	σ_0^2	-160	-66	-48	26	-11	36	-70	3	-25	0
	σ_1^2	112	-441	-320	-131	123	-147	-104	-133	91	53
	σ_2^2	-75	95	138	115	292	-223	-5	181	-71	246

Tabla C.2.4: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$.

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	54	112	-24	8	-23	-6	0	26	1	-34
	σ_0^2	58	126	-16	10	-20	-10	2	29	1	-39
	σ_1^2	31	255	-23	26	42	-2	44	66	30	23
	σ_2^2	102	131	19	26	-31	46	15	57	46	-5
ML	β	10	-8	23	7	-14	-4	5	1	7	4
	σ_0^2	-454	-255	-202	-101	-122	-57	-150	-67	-71	-33
	σ_1^2	-302	-784	-681	-413	-183	-412	-442	-333	-57	-129
	σ_2^2	79	123	203	183	315	-184	53	204	-57	263
REML	β	10	-8	23	7	-14	-4	5	1	7	4
	σ_0^2	-123	-53	-50	21	-19	32	-72	2	-26	1
	σ_1^2	70	-426	-343	-94	119	-127	-172	-78	143	35
	σ_2^2	-55	36	147	144	286	-206	35	190	-64	259

Tabla C.2.5: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$.

	n	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	2250	3000
	n_d	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
	n_{di}	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
H3	β	33	166	-36	16	-30	-3	17	40	14	-60
	σ_0^2	41	180	-29	19	-28	-7	18	44	14	-65
	σ_1^2	5	328	-37	24	29	-2	61	76	45	5
	σ_2^2	83	188	9	29	-50	58	30	66	64	-28
ML	β	5	-20	30	15	-23	-9	7	-3	7	9
	σ_0^2	-440	-252	-199	-106	-132	-57	-147	-69	-70	-32
	σ_1^2	-345	-750	-684	-365	-194	-409	-503	-319	-39	-198
	σ_2^2	186	93	233	263	353	-135	92	236	-35	262
REML	β	6	-20	30	15	-23	-9	7	-3	7	9
	σ_0^2	-148	-48	-46	17	-29	32	-70	0	-25	2
	σ_1^2	13	-418	-366	-58	104	-120	-224	-48	193	3
	σ_2^2	-18	-30	150	203	307	-172	62	212	-47	255

Tabla C.2.6: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$.

C.3. Tablas numéricas del experimento 2

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	25	10	5	3	2	1	1	1	0	0
	σ_0^2	600	468	330	306	245	223	206	174	116	85
	σ_1^2	18698	15143	12960	10677	10054	9362	8765	8035	6690	5999
	σ_2^2	11768	10783	10085	9301	9056	8401	7818	7797	7298	6993
ML	β	25	10	5	3	2	1	1	1	0	0
	σ_0^2	610	442	350	305	257	224	195	176	120	87
	σ_1^2	14249	10488	8354	6930	6244	5239	4687	4275	2860	2122
	σ_2^2	3466	2639	2131	1744	1505	1297	1166	1056	700	525
REML	β	25	10	5	3	2	1	1	1	0	0
	σ_0^2	612	443	350	305	257	224	196	177	120	88
	σ_1^2	14254	10493	8355	6930	6247	5240	4686	4276	2860	2122
	σ_2^2	3466	2639	2131	1744	1505	1297	1166	1056	700	525

Tabla C.3.1: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$.

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	48	20	12	8	5	4	2	2	1	0
	σ_0^2	602	464	332	309	249	218	207	179	119	88
	σ_1^2	19993	16321	13747	11329	10606	10191	9361	8550	6946	6421
	σ_2^2	13293	12125	11143	10259	9778	9433	8717	8545	7879	7415
ML	β	48	21	11	7	5	3	2	2	1	0
	σ_0^2	607	442	349	304	256	224	195	176	120	88
	σ_1^2	15009	11151	8924	7438	6748	5679	5094	4683	3172	2380
	σ_2^2	4432	3523	2928	2456	2168	1904	1729	1588	1116	887
REML	β	48	21	11	7	5	3	2	2	1	0
	σ_0^2	609	443	350	305	256	224	230	176	134	88
	σ_1^2	15016	11156	8924	7438	6751	5680	5095	4684	3172	2380
	σ_2^2	4432	3523	2928	2456	2168	1904	1749	1588	1126	887

Tabla C.3.2: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$.

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	103	48	33	22	15	12	9	6	3	2
	σ_0^2	606	459	335	312	252	216	207	184	119	90
	σ_1^2	21360	17549	14649	12037	11175	10878	9922	8982	7168	6606
	σ_2^2	15076	13607	12290	11296	10437	10386	9730	9320	8360	7773
ML	β	102	52	31	21	15	11	9	7	3	2
	σ_0^2	1333	441	349	315	254	224	196	176	120	88
	σ_1^2	15857	11827	9501	7944	7219	6072	5450	5036	3405	2570
	σ_2^2	5628	4522	3786	3245	2876	2524	2300	2103	1503	1191
REML	β	102	52	31	21	15	11	9	7	3	2
	σ_0^2	606	442	360	303	254	224	207	180	127	88
	σ_1^2	15837	11832	9502	7944	7221	6072	5460	5037	3405	2570
	σ_2^2	5525	4522	3796	3235	2876	2524	2305	2112	1522	1191

Tabla C.3.3: EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$.

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	-7	3	-9	19	-9	-5	5	15	-3	3
	σ_0^2	-2	-3	1	20	-11	-10	7	22	-6	0
	σ_1^2	14	55	-4	-7	4	33	10	24	22	30
	σ_2^2	12	62	-1	49	-2	33	32	22	25	14
ML	β	15	-6	8	-6	-13	-2	-1	-7	-1	1
	σ_0^2	-332	-181	-247	-138	-84	-107	-124	-27	-122	-12
	σ_1^2	-883	-316	-597	-557	313	-185	-568	160	-474	-131
	σ_2^2	104	-33	82	46	-77	26	67	17	191	-19
REML	β	15	-6	8	-6	-13	-2	-1	-7	-1	1
	σ_0^2	-62	20	-87	-3	34	-5	-33	55	-67	30
	σ_1^2	-327	56	-319	-330	504	-23	-427	286	-393	-72
	σ_2^2	36	-84	42	12	-106	1	45	-4	177	-30

Tabla C.3.4: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$.

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	19	10	-32	28	-21	-12	19	15	-7	1
	σ_0^2	24	3	-24	28	-22	-17	19	23	-11	-1
	σ_1^2	48	90	-36	-2	-7	28	22	28	20	32
	σ_2^2	40	79	-23	58	-17	19	44	23	17	8
ML	β	23	-13	12	-5	-18	-5	-3	-14	-3	1
	σ_0^2	-317	-182	-232	-117	-78	-110	-114	-17	-106	-14
	σ_1^2	-977	-323	-577	-589	335	-188	-572	125	-541	-56
	σ_2^2	185	34	119	48	-74	87	89	51	252	-47
REML	β	23	-13	12	-5	-18	-5	-3	-14	-3	1
	σ_0^2	-47	21	-70	20	41	-6	5	67	-37	28
	σ_1^2	-411	35	-322	-389	499	-54	-457	223	-483	-18
	σ_2^2	75	-53	46	-16	-132	35	24	7	210	-73

Tabla C.3.5: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$.

	D	22	30	38	45	52	60	68	75	112	150
	n	440	600	760	900	1040	1200	1360	1500	2240	3000
	n_d	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	n_{di}	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H3	β	60	23	-71	51	-42	-29	47	14	-15	-5
	σ_0^2	65	15	-65	50	-44	-32	46	21	-19	-7
	σ_1^2	93	125	-80	19	-29	12	48	28	14	26
	σ_2^2	82	99	-55	81	-42	-10	77	30	6	0
ML	β	33	-24	16	-1	-24	-12	-3	-28	-7	3
	σ_0^2	-49	-183	-217	-90	-74	-104	-106	-21	-98	-19
	σ_1^2	-989	-338	-537	-556	366	-165	-573	74	-563	5
	σ_2^2	77	100	145	13	-86	120	115	87	272	-58
REML	β	34	-24	17	-1	-24	-12	-3	-28	-7	3
	σ_0^2	-21	21	-43	37	47	2	-1	70	-30	24
	σ_1^2	-458	-6	-316	-395	492	-67	-505	140	-528	23
	σ_2^2	30	-24	31	-69	-169	45	39	16	210	-94

Tabla C.3.6: Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$.



Apéndice D

Resultados del experimento de simulación del capítulo 3

D.1. Introducción

En el presente apéndice se presentan tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación descrito en el apartado 3.3, en concreto:

- en la sección D.2 se muestran algunos de los resultados gráficos obtenidos de la realización del experimento 3.3
- en la sección D.3 se muestran las tablas de resultados correspondientes al experimento 3.3 para el ajuste por máxima verosimilitud residual (REML),
- en la sección D.4 se muestran las tablas de resultados correspondientes al experimento 3.3 para el ajuste por máxima verosimilitud (ML),

El error cuadrático medio empírico y el sesgo empírico se han multiplicado por 10^3 , para poder apreciar las magnitudes.

D.2. Resultados gráficos

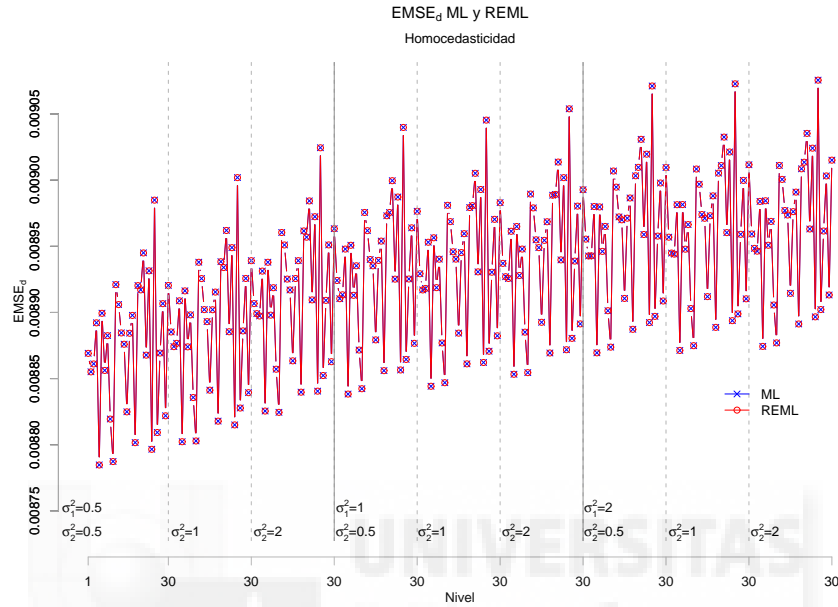


Figura D.1: $EMSE_d$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)

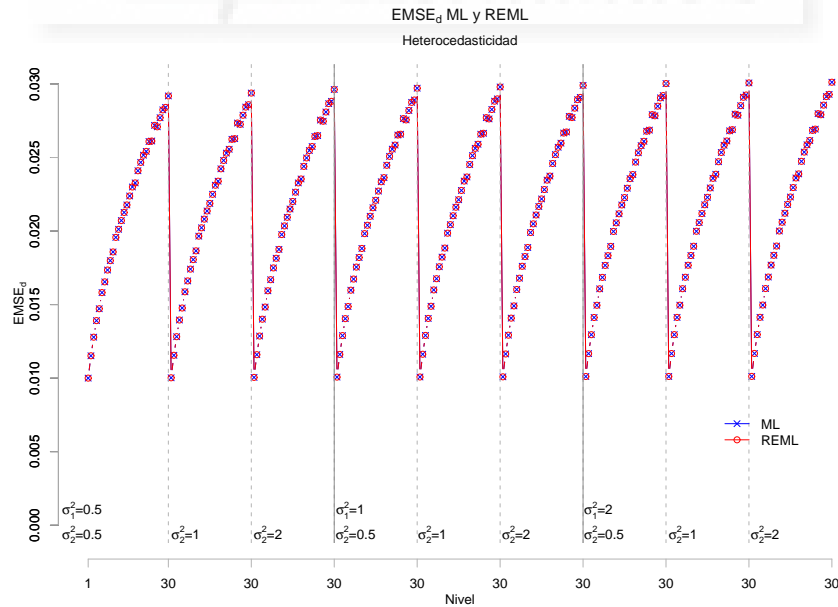


Figura D.2: $EMSE_d$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)

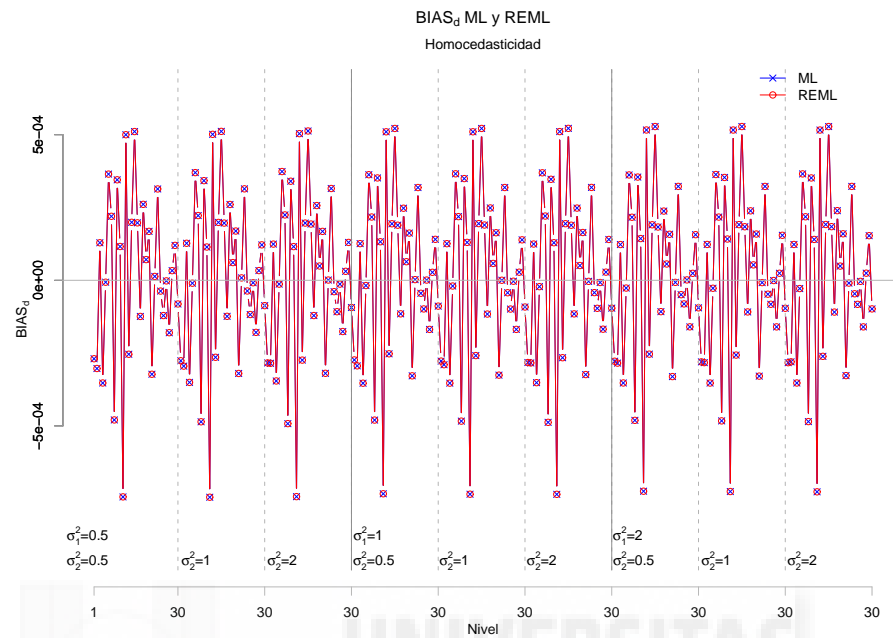


Figura D.3: $BIAS_d$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)

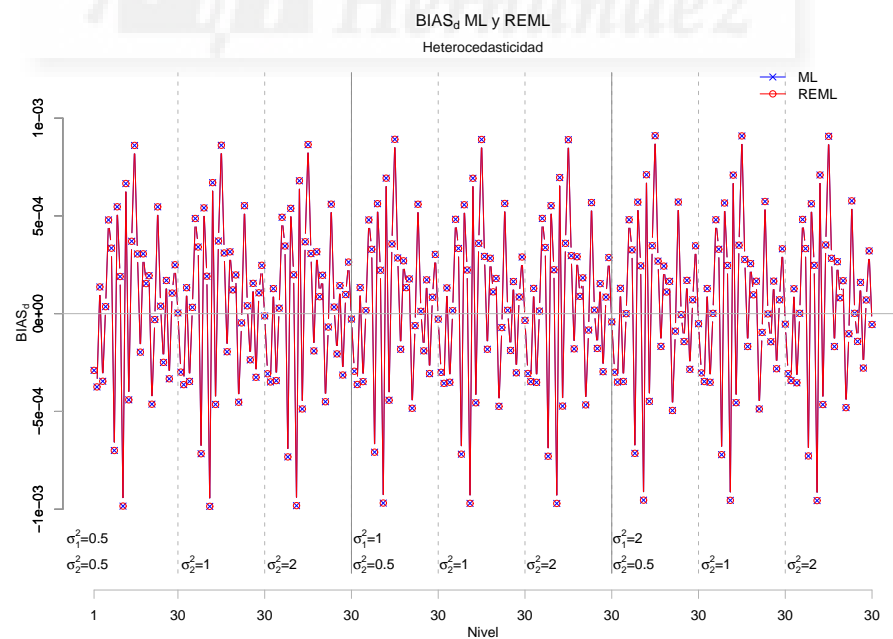


Figura D.4: $BIAS_d$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)



Figura D.5: $EMSE_{di}$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)

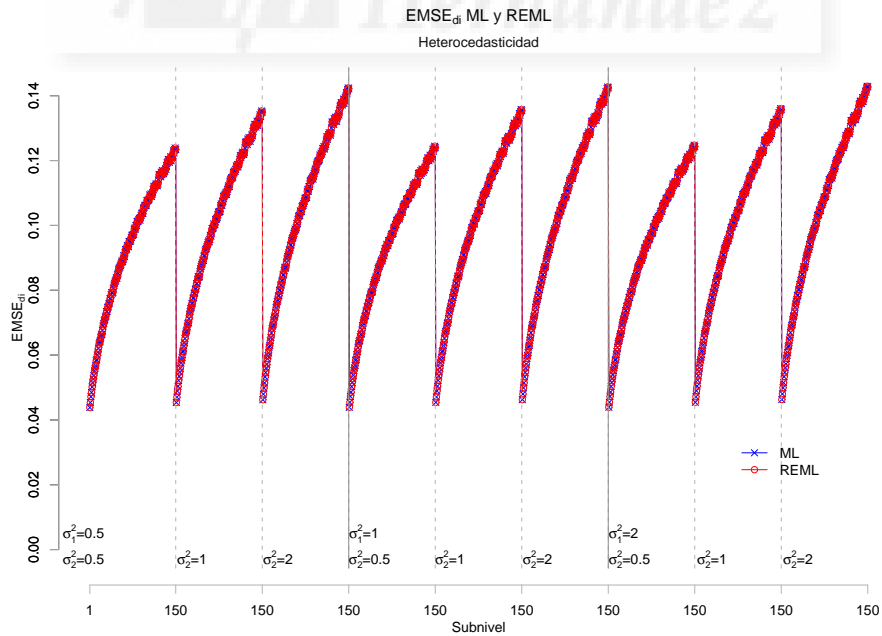


Figura D.6: $EMSE_{di}$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)

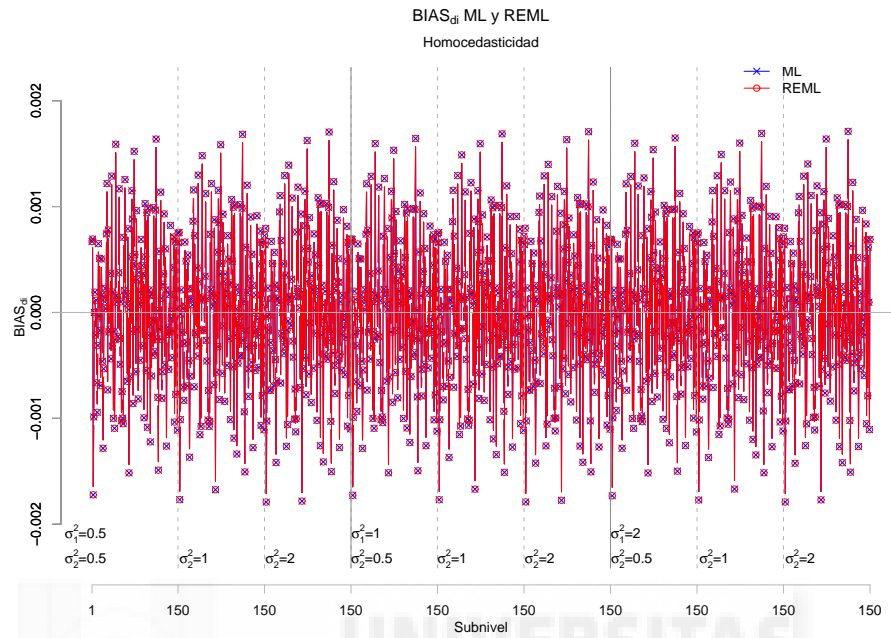


Figura D.7: B_{di} para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)

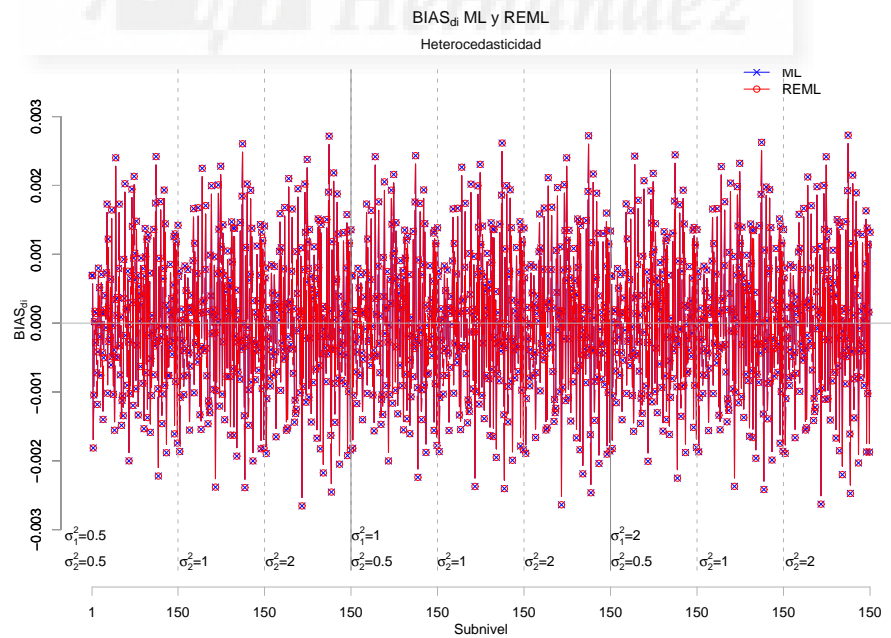


Figura D.8: B_{di} para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)

D.3. Tablas numéricas del experimento para ajuste REML

Para el método de ajuste REML se obtienen los siguientes resultados:

D.3.1. Caso homocedástico, $\ell = 0$

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.87	-0.269	5	1	41.8	-0.532
2	8.86	-0.303	5	2	41.6	0.133
3	8.86	0.129	5	3	41.7	0.103
4	8.89	-0.353	5	4	42	0.228
5	8.78	-0.0065	5	5	42	0.0362
6	8.9	0.365	10	1	42	-0.228
7	8.86	0.22	10	2	42.1	0.375
8	8.88	-0.48	10	3	41.9	1.17
9	8.82	0.345	10	4	42.2	-0.246
10	8.79	0.116	10	5	41.9	-0.49
11	8.92	-0.744	15	1	41.8	0.883
12	8.91	0.5	15	2	41.8	-0.86
13	8.88	-0.254	15	3	42	0.464
14	8.88	0.199	15	4	42	1.52
15	8.82	0.511	15	5	41.8	0.545
16	8.88	0.197	20	1	42	0.944
17	8.9	-0.124	20	2	42	-1.08
18	8.8	0.261	20	3	42	0.984
19	8.92	0.0712	20	4	41.9	-0.216
20	8.92	0.168	20	5	42.1	0.213
21	8.94	-0.323	25	1	42.4	0.134
22	8.87	0.0133	25	2	42.3	-0.811
23	8.93	0.314	25	3	42.2	-0.56
24	8.8	-0.037	25	4	41.9	0.266
25	8.98	-0.121	25	5	42.4	0.365
26	8.81	-0.00199	30	1	42.1	-0.774
27	8.87	-0.18	30	2	41.9	0.695
28	8.91	0.0332	30	3	42.2	0.0345
29	8.82	0.12	30	4	42.3	-1.11
30	8.92	-0.0813	30	5	42.1	0.75

Tabla D.3.1: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.89	-0.276	5	1	43.2	-0.602
2	8.87	-0.295	5	2	43	0.132
3	8.88	0.127	5	3	43.1	0.122
4	8.91	-0.35	5	4	43.4	0.226
5	8.8	-0.01	5	5	43.4	0.0717
6	8.92	0.37	10	1	43.4	-0.171
7	8.87	0.222	10	2	43.5	0.342
8	8.9	-0.486	10	3	43.3	1.12
9	8.84	0.342	10	4	43.6	-0.264
10	8.8	0.114	10	5	43.3	-0.459
11	8.94	-0.745	15	1	43.2	0.849
12	8.93	0.501	15	2	43.2	-0.823
13	8.9	-0.264	15	3	43.3	0.366
14	8.89	0.199	15	4	43.3	1.58
15	8.84	0.511	15	5	43.2	0.58
16	8.9	0.197	20	1	43.4	0.994
17	8.92	-0.124	20	2	43.4	-1.19
18	8.82	0.261	20	3	43.4	1.02
19	8.94	0.0609	20	4	43.3	-0.216
20	8.93	0.169	20	5	43.4	0.239
21	8.96	-0.32	25	1	43.8	0.187
22	8.89	0.0083	25	2	43.7	-0.793
23	8.95	0.314	25	3	43.6	-0.533
24	8.82	-0.0367	25	4	43.3	0.229
25	9	-0.118	25	5	43.8	0.322
26	8.83	-0.00832	30	1	43.5	-0.785
27	8.89	-0.179	30	2	43.3	0.66
28	8.93	0.0333	30	3	43.6	0.0732
29	8.84	0.122	30	4	43.7	-1.11
30	8.94	-0.0871	30	5	43.5	0.724

Tabla D.3.2: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.91	-0.284	5	1	44	-0.648
2	8.9	-0.285	5	2	43.8	0.126
3	8.9	0.124	5	3	43.9	0.135
4	8.93	-0.346	5	4	44.1	0.223
5	8.83	-0.0146	5	5	44.2	0.0905
6	8.94	0.374	10	1	44.2	-0.123
7	8.9	0.225	10	2	44.3	0.314
8	8.92	-0.492	10	3	44	1.08
9	8.86	0.34	10	4	44.4	-0.271
10	8.82	0.116	10	5	44	-0.422
11	8.96	-0.743	15	1	44	0.82
12	8.95	0.505	15	2	44	-0.778
13	8.93	-0.275	15	3	44.1	0.292
14	8.92	0.196	15	4	44.1	1.62
15	8.86	0.513	15	5	43.9	0.605
16	8.93	0.194	20	1	44.1	1.02
17	8.94	-0.121	20	2	44.2	-1.26
18	8.84	0.257	20	3	44.2	1.03
19	8.96	0.0497	20	4	44.1	-0.212
20	8.96	0.169	20	5	44.2	0.258
21	8.98	-0.319	25	1	44.6	0.228
22	8.91	0.000241	25	2	44.4	-0.767
23	8.97	0.316	25	3	44.4	-0.501
24	8.84	-0.039	25	4	44	0.206
25	9.02	-0.108	25	5	44.6	0.293
26	8.85	-0.013	30	1	44.2	-0.785
27	8.91	-0.176	30	2	44.1	0.621
28	8.95	0.0321	30	3	44.4	0.0987
29	8.86	0.13	30	4	44.4	-1.1
30	8.96	-0.0942	30	5	44.3	0.695

Tabla D.3.3: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.92	-0.273	5	1	41.9	-0.544
2	8.91	-0.294	5	2	41.6	0.121
3	8.91	0.126	5	3	41.8	0.091
4	8.95	-0.353	5	4	42.1	0.217
5	8.84	-0.018	5	5	42.1	0.0247
6	8.95	0.363	10	1	42.1	-0.211
7	8.91	0.217	10	2	42.2	0.392
8	8.94	-0.48	10	3	41.9	1.18
9	8.87	0.352	10	4	42.2	-0.229
10	8.84	0.132	10	5	42	-0.473
11	8.98	-0.733	15	1	41.9	0.893
12	8.96	0.51	15	2	41.9	-0.848
13	8.94	-0.252	15	3	42	0.474
14	8.94	0.194	15	4	42	1.53
15	8.88	0.522	15	5	41.8	0.556
16	8.94	0.189	20	1	42.1	0.939
17	8.95	-0.115	20	2	42.1	-1.09
18	8.86	0.248	20	3	42	0.978
19	8.97	0.0639	20	4	42	-0.22
20	8.98	0.162	20	5	42.1	0.205
21	9	-0.328	25	1	42.4	0.158
22	8.93	0.00236	25	2	42.3	-0.788
23	8.99	0.319	25	3	42.3	-0.538
24	8.86	-0.0446	25	4	41.9	0.289
25	9.04	-0.0983	25	5	42.4	0.388
26	8.86	0.000883	30	1	42.1	-0.78
27	8.93	-0.169	30	2	42	0.688
28	8.96	0.0275	30	3	42.3	0.0285
29	8.88	0.141	30	4	42.4	-1.12
30	8.98	-0.0887	30	5	42.2	0.742

Tabla D.3.4: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.93	-0.277	5	1	43.3	-0.612
2	8.92	-0.29	5	2	43	0.123
3	8.92	0.126	5	3	43.2	0.112
4	8.95	-0.353	5	4	43.4	0.217
5	8.84	-0.0196	5	5	43.4	0.0621
6	8.96	0.366	10	1	43.5	-0.155
7	8.92	0.219	10	2	43.6	0.358
8	8.94	-0.484	10	3	43.3	1.14
9	8.88	0.349	10	4	43.7	-0.248
10	8.85	0.13	10	5	43.4	-0.443
11	8.98	-0.735	15	1	43.3	0.859
12	8.97	0.51	15	2	43.3	-0.812
13	8.95	-0.258	15	3	43.4	0.376
14	8.94	0.195	15	4	43.4	1.59
15	8.88	0.522	15	5	43.2	0.591
16	8.95	0.19	20	1	43.4	0.989
17	8.96	-0.116	20	2	43.5	-1.19
18	8.86	0.249	20	3	43.4	1.01
19	8.98	0.058	20	4	43.4	-0.22
20	8.98	0.163	20	5	43.5	0.232
21	9.01	-0.326	25	1	43.8	0.207
22	8.93	0.000238	25	2	43.7	-0.774
23	8.99	0.319	25	3	43.6	-0.515
24	8.86	-0.0427	25	4	43.3	0.248
25	9.05	-0.0987	25	5	43.8	0.341
26	8.87	-0.00315	30	1	43.5	-0.788
27	8.93	-0.169	30	2	43.3	0.655
28	8.97	0.0279	30	3	43.7	0.0697
29	8.88	0.139	30	4	43.7	-1.11
30	8.98	-0.0917	30	5	43.6	0.719

Tabla D.3.5: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.94	-0.282	5	1	44	-0.656
2	8.93	-0.284	5	2	43.8	0.119
3	8.93	0.125	5	3	43.9	0.127
4	8.96	-0.351	5	4	44.2	0.216
5	8.85	-0.0219	5	5	44.2	0.0832
6	8.96	0.369	10	1	44.2	-0.11
7	8.93	0.221	10	2	44.3	0.327
8	8.95	-0.488	10	3	44.1	1.09
9	8.89	0.347	10	4	44.5	-0.257
10	8.85	0.129	10	5	44.1	-0.409
11	8.99	-0.735	15	1	44	0.829
12	8.98	0.511	15	2	44	-0.768
13	8.95	-0.266	15	3	44.1	0.301
14	8.95	0.194	15	4	44.1	1.63
15	8.89	0.522	15	5	43.9	0.614
16	8.95	0.189	20	1	44.2	1.02
17	8.97	-0.115	20	2	44.2	-1.26
18	8.87	0.248	20	3	44.2	1.03
19	8.99	0.0508	20	4	44.1	-0.216
20	8.99	0.164	20	5	44.2	0.252
21	9.01	-0.324	25	1	44.6	0.24
22	8.94	-0.00355	25	2	44.5	-0.755
23	9	0.319	25	3	44.4	-0.49
24	8.87	-0.0423	25	4	44.1	0.218
25	9.05	-0.0962	25	5	44.6	0.305
26	8.88	-0.00753	30	1	44.2	-0.785
27	8.94	-0.168	30	2	44.1	0.62
28	8.98	0.028	30	3	44.4	0.0979
29	8.89	0.14	30	4	44.5	-1.1
30	8.99	-0.0956	30	5	44.3	0.693

Tabla D.3.6: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.278	5	1	41.9	-0.553
2	8.94	-0.284	5	2	41.7	0.113
3	8.94	0.123	5	3	41.8	0.0824
4	8.98	-0.353	5	4	42.1	0.209
5	8.87	-0.0266	5	5	42.1	0.0162
6	8.98	0.362	10	1	42.1	-0.201
7	8.95	0.217	10	2	42.2	0.403
8	8.97	-0.481	10	3	41.9	1.19
9	8.9	0.355	10	4	42.3	-0.218
10	8.87	0.143	10	5	42	-0.462
11	9.01	-0.724	15	1	41.9	0.9
12	8.99	0.516	15	2	41.9	-0.841
13	8.97	-0.254	15	3	42	0.481
14	8.97	0.191	15	4	42	1.54
15	8.91	0.528	15	5	41.9	0.563
16	8.97	0.183	20	1	42.1	0.936
17	8.99	-0.108	20	2	42.1	-1.1
18	8.89	0.238	20	3	42.1	0.974
19	9	0.0561	20	4	42	-0.223
20	9.01	0.158	20	5	42.2	0.2
21	9.03	-0.331	25	1	42.5	0.176
22	8.96	-0.00706	25	2	42.4	-0.771
23	9.02	0.323	25	3	42.3	-0.522
24	8.89	-0.0494	25	4	42	0.307
25	9.07	-0.081	25	5	42.5	0.405
26	8.9	0.00135	30	1	42.2	-0.785
27	8.96	-0.16	30	2	42	0.682
28	9	0.0241	30	3	42.3	0.0238
29	8.91	0.157	30	4	42.4	-1.13
30	9.01	-0.0945	30	5	42.2	0.736

Tabla D.3.7: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.28	5	1	43.3	-0.62
2	8.94	-0.283	5	2	43.1	0.115
3	8.94	0.123	5	3	43.2	0.105
4	8.98	-0.353	5	4	43.5	0.21
5	8.87	-0.0272	5	5	43.5	0.0545
6	8.98	0.363	10	1	43.5	-0.143
7	8.95	0.217	10	2	43.6	0.37
8	8.97	-0.483	10	3	43.3	1.15
9	8.9	0.353	10	4	43.7	-0.236
10	8.87	0.142	10	5	43.4	-0.431
11	9.01	-0.725	15	1	43.3	0.865
12	9	0.516	15	2	43.3	-0.805
13	8.97	-0.257	15	3	43.4	0.382
14	8.97	0.191	15	4	43.4	1.6
15	8.91	0.528	15	5	43.2	0.597
16	8.97	0.184	20	1	43.5	0.985
17	8.99	-0.109	20	2	43.5	-1.2
18	8.89	0.239	20	3	43.5	1.01
19	9.01	0.053	20	4	43.4	-0.223
20	9.01	0.159	20	5	43.5	0.226
21	9.03	-0.329	25	1	43.9	0.224
22	8.96	-0.00789	25	2	43.8	-0.758
23	9.02	0.322	25	3	43.7	-0.5
24	8.89	-0.0476	25	4	43.3	0.265
25	9.07	-0.0823	25	5	43.9	0.358
26	8.9	-0.000766	30	1	43.5	-0.792
27	8.96	-0.16	30	2	43.4	0.651
28	9	0.0243	30	3	43.7	0.0663
29	8.91	0.155	30	4	43.8	-1.12
30	9.01	-0.096	30	5	43.6	0.714

Tabla D.3.8: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.283	5	1	44.1	-0.662
2	8.95	-0.28	5	2	43.8	0.113
3	8.95	0.123	5	3	43.9	0.121
4	8.98	-0.353	5	4	44.2	0.21
5	8.87	-0.0283	5	5	44.2	0.0768
6	8.98	0.365	10	1	44.2	-0.0989
7	8.95	0.218	10	2	44.3	0.339
8	8.97	-0.485	10	3	44.1	1.11
9	8.91	0.352	10	4	44.5	-0.246
10	8.88	0.14	10	5	44.1	-0.398
11	9.01	-0.726	15	1	44	0.836
12	9	0.516	15	2	44.1	-0.762
13	8.98	-0.261	15	3	44.1	0.307
14	8.97	0.192	15	4	44.1	1.64
15	8.91	0.528	15	5	44	0.621
16	8.98	0.184	20	1	44.2	1.01
17	8.99	-0.109	20	2	44.2	-1.27
18	8.89	0.239	20	3	44.2	1.02
19	9.01	0.0489	20	4	44.2	-0.219
20	9.01	-0.16	20	5	44.3	0.247
21	9.04	-0.327	25	1	44.6	0.254
22	8.96	-0.00948	25	2	44.5	-0.741
23	9.02	0.323	25	3	44.4	-0.477
24	8.9	-0.0462	25	4	44.1	0.232
25	9.08	-0.0826	25	5	44.6	0.319
26	8.9	-0.00358	30	1	44.3	-0.787
27	8.96	-0.16	30	2	44.1	0.617
28	9	0.0245	30	3	44.5	0.0961
29	8.91	0.153	30	4	44.5	-1.11
30	9.02	-0.0982	30	5	44.4	0.69

Tabla D.3.9: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$
(valores multiplicados por 10^3) caso REML

D.3.2. Caso heterocedástico, $\ell = 1/2$

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10	-0.29	5	1	66.2	-0.504
2	11.5	-0.375	5	2	66.4	0.151
3	12.8	0.137	5	3	67.6	0.193
4	13.9	-0.346	5	4	69	0.402
5	14.7	0.0357	5	5	69.7	-0.0641
6	15.8	0.479	10	1	83.1	-0.495
7	16.5	0.335	10	2	83.9	0.795
8	17.3	-0.7	10	3	83.7	1.73
9	18	0.547	10	4	84.8	-0.328
10	18.6	0.19	10	5	85.3	-0.751
11	19.6	-0.984	15	1	95.1	1.41
12	20.1	0.666	15	2	95.5	-1.2
13	20.7	-0.441	15	3	96.3	0.946
14	21.3	0.37	15	4	97	2.13
15	21.8	0.861	15	5	96.9	1.01
16	22.4	0.305	20	1	106	1.22
17	23	-0.197	20	2	106	-1.37
18	23.3	0.306	20	3	106	1.28
19	24.1	0.154	20	4	106	-0.177
20	24.7	0.194	20	5	108	0.0232
21	25.2	-0.463	25	1	116	-0.198
22	25.4	-0.0303	25	2	116	-1.46
23	26.1	0.546	25	3	116	-1.03
24	26.1	0.0381	25	4	115	0.645
25	27.2	-0.249	25	5	116	0.794
26	27.1	0.17	30	1	123	-0.848
27	27.7	-0.333	30	2	122	1.18
28	28.2	0.105	30	3	123	0.00303
29	28.4	0.25	30	4	124	-1.74
30	29.2	0.00343	30	5	123	1.42

Tabla D.3.10: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10	-0.299	5	1	69.7	-0.626
2	11.6	-0.363	5	2	70	0.156
3	12.8	0.133	5	3	71.2	0.22
4	14	-0.346	5	4	72.6	0.406
5	14.8	0.0319	5	5	73.4	0.00438
6	15.9	0.487	10	1	88.4	-0.401
7	16.6	0.341	10	2	89.3	0.781
8	17.4	-0.716	10	3	89.2	1.71
9	18.1	0.541	10	4	90.5	-0.366
10	18.7	0.191	10	5	90.8	-0.764
11	19.7	-0.985	15	1	102	1.36
12	20.2	0.67	15	2	103	-1.21
13	20.8	-0.464	15	3	103	0.759
14	21.4	0.371	15	4	104	2.28
15	21.9	0.861	15	5	104	1.11
16	22.5	0.31	20	1	114	1.38
17	23.1	-0.194	20	2	115	-1.63
18	23.4	0.316	20	3	115	1.38
19	24.2	0.122	20	4	115	-0.191
20	24.8	0.198	20	5	116	0.0491
21	25.3	-0.453	25	1	126	-0.0623
22	25.6	-0.0473	25	2	126	-1.48
23	26.2	0.552	25	3	126	-0.968
24	26.3	0.0398	25	4	125	0.623
25	27.3	-0.236	25	5	127	0.71
26	27.3	0.155	30	1	134	-0.95
27	27.9	-0.325	30	2	134	1.2
28	28.4	0.106	30	3	135	0.0966
29	28.6	0.248	30	4	135	-1.82
30	29.4	-0.0123	30	5	135	1.41

Tabla D.3.11: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.308	5	1	71.7	-0.706
2	11.6	-0.35	5	2	72.1	0.15
3	12.9	0.128	5	3	73.2	0.238
4	14	-0.342	5	4	74.6	0.403
5	14.8	0.0256	5	5	75.6	0.0424
6	15.9	0.493	10	1	91.5	-0.312
7	16.7	0.347	10	2	92.5	0.752
8	17.5	-0.732	10	3	92.4	1.66
9	18.1	0.537	10	4	93.9	-0.378
10	18.8	0.198	10	5	94	-0.729
11	19.8	-0.982	15	1	106	1.32
12	20.3	0.682	15	2	107	-1.15
13	20.9	-0.489	15	3	107	0.596
14	21.5	0.367	15	4	108	2.38
15	22	0.864	15	5	108	1.18
16	22.6	0.31	20	1	120	1.49
17	23.3	-0.189	20	2	120	-1.82
18	23.5	0.316	20	3	120	1.44
19	24.4	0.0882	20	4	120	-0.192
20	25	0.199	20	5	122	0.081
21	25.5	-0.45	25	1	132	0.0482
22	25.7	-0.0711	25	2	132	-1.44
23	26.4	0.56	25	3	132	-0.876
24	26.5	0.0333	25	4	131	0.599
25	27.5	-0.207	25	5	133	0.637
26	27.5	0.144	30	1	141	-0.996
27	28.1	-0.314	30	2	141	1.16
28	28.7	0.101	30	3	142	0.176
29	28.8	0.264	30	4	142	-1.85
30	29.6	-0.0315	30	5	142	1.35

Tabla D.3.12: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.295	5	1	66.4	-0.524
2	11.6	-0.362	5	2	66.6	0.131
3	12.9	0.133	5	3	67.7	0.173
4	14	-0.348	5	4	69.1	0.382
5	14.9	0.0153	5	5	69.9	-0.086
6	16	0.479	10	1	83.4	-0.464
7	16.7	0.329	10	2	84.1	0.827
8	17.5	-0.708	10	3	83.9	1.76
9	18.2	0.562	10	4	85.1	-0.295
10	18.8	0.222	10	5	85.5	-0.72
11	19.8	-0.969	15	1	95.4	1.44
12	20.4	0.693	15	2	95.8	-1.16
13	21	-0.443	15	3	96.6	0.979
14	21.6	0.357	15	4	97.3	2.16
15	22.1	0.892	15	5	97.2	1.05
16	22.7	0.285	20	1	106	1.21
17	23.4	-0.182	20	2	107	-1.39
18	23.6	0.27	20	3	106	1.26
19	24.5	0.133	20	4	107	-0.192
20	25.1	0.178	20	5	108	0.00176
21	25.6	-0.484	25	1	116	-0.136
22	25.8	-0.0615	25	2	116	-1.4
23	26.5	0.56	25	3	116	-0.969
24	26.6	0.012	25	4	115	0.705
25	27.6	-0.19	25	5	117	0.849
26	27.6	0.173	30	1	124	-0.881
27	28.2	-0.307	30	2	123	1.16
28	28.7	0.084	30	3	124	-0.0238
29	28.9	0.303	30	4	124	-1.78
30	29.7	-0.0281	30	5	124	1.39

Tabla D.3.13: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.3	5	1	69.8	-0.642
2	11.6	-0.356	5	2	70.1	0.14
3	12.9	0.132	5	3	71.3	0.202
4	14.1	-0.351	5	4	72.7	0.389
5	14.9	0.015	5	5	73.6	-0.014
6	16	0.483	10	1	88.6	-0.371
7	16.8	0.334	10	2	89.5	0.812
8	17.6	-0.719	10	3	89.3	1.74
9	18.2	0.557	10	4	90.7	-0.333
10	18.8	0.223	10	5	91	-0.733
11	19.9	-0.97	15	1	102	1.39
12	20.4	0.692	15	2	103	-1.18
13	21	-0.456	15	3	104	0.79
14	21.6	0.36	15	4	104	2.31
15	22.1	0.891	15	5	104	1.14
16	22.8	0.293	20	1	115	1.37
17	23.4	-0.182	20	2	115	-1.65
18	23.7	0.283	20	3	115	1.36
19	24.5	0.111	20	4	115	-0.206
20	25.1	0.18	20	5	117	0.0267
21	25.6	-0.474	25	1	126	-0.0127
22	25.9	-0.0712	25	2	126	-1.43
23	26.6	0.564	25	3	126	-0.92
24	26.6	0.017	25	4	125	0.673
25	27.7	-0.188	25	5	127	0.754
26	27.6	0.164	30	1	135	-0.974
27	28.3	-0.303	30	2	134	1.18
28	28.8	0.0851	30	3	135	0.079
29	29	0.29	30	4	136	-1.84
30	29.8	-0.0345	30	5	135	1.38

Tabla D.3.14: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.306	5	1	71.8	-0.718
2	11.6	-0.348	5	2	72.1	0.138
3	12.9	0.129	5	3	73.3	0.225
4	14.1	-0.351	5	4	74.7	0.391
5	14.9	0.013	5	5	75.7	0.0284
6	16	0.487	10	1	91.7	-0.287
7	16.8	0.338	10	2	92.6	0.779
8	17.6	-0.729	10	3	92.5	1.68
9	18.3	0.552	10	4	94	-0.35
10	18.9	0.224	10	5	94.1	-0.704
11	19.9	-0.971	15	1	106	1.35
12	20.5	0.696	15	2	107	-1.13
13	21.1	-0.473	15	3	108	0.622
14	21.7	0.36	15	4	109	2.4
15	22.2	0.89	15	5	108	1.2
16	22.8	0.297	20	1	120	1.48
17	23.5	-0.18	20	2	120	-1.84
18	23.7	0.291	20	3	120	1.42
19	24.6	0.0884	20	4	120	-0.205
20	25.2	0.183	20	5	122	0.0612
21	25.7	-0.467	25	1	132	0.077
22	26	-0.0838	25	2	132	-1.41
23	26.7	0.568	25	3	132	-0.847
24	26.7	0.0177	25	4	131	0.629
25	27.8	-0.178	25	5	133	0.664
26	27.7	0.154	30	1	141	-1.01
27	28.4	-0.297	30	2	141	1.15
28	28.9	0.0844	30	3	142	0.169
29	29.1	0.287	30	4	143	-1.86
30	29.9	-0.0422	30	5	142	1.34

Tabla D.3.15: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.299	5	1	66.5	-0.539
2	11.7	-0.35	5	2	66.7	0.117
3	13	0.13	5	3	67.8	0.157
4	14.1	-0.347	5	4	69.2	0.367
5	15	-8.19e-05	5	5	70	-0.102
6	16.1	0.48	10	1	83.5	-0.442
7	16.8	0.326	10	2	84.2	0.85
8	17.7	-0.714	10	3	84	1.78
9	18.3	0.57	10	4	85.2	-0.273
10	19	0.244	10	5	85.6	-0.698
11	20	-0.954	15	1	95.6	1.45
12	20.6	0.71	15	2	95.9	-1.14
13	21.2	-0.449	15	3	96.8	0.999
14	21.8	0.348	15	4	97.5	2.17
15	22.3	0.91	15	5	97.4	1.07
16	22.9	0.269	20	1	107	1.2
17	23.6	-0.168	20	2	107	-1.4
18	23.8	0.243	20	3	107	1.25
19	24.7	0.111	20	4	107	-0.203
20	25.3	0.165	20	5	108	-0.0152
21	25.8	-0.495	25	1	116	-0.0851
22	26.1	-0.0895	25	2	116	-1.35
23	26.8	0.571	25	3	117	-0.921
24	26.9	-0.00509	25	4	116	0.754
25	27.9	-0.143	25	5	117	0.893
26	27.8	0.17	30	1	124	-0.905
27	28.5	-0.285	30	2	123	1.14
28	29.1	0.071	30	3	124	-0.0433
29	29.2	0.347	30	4	125	-1.8
30	30	-0.0517	30	5	124	1.36

Tabla D.3.16: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.303	5	1	69.9	-0.655
2	11.7	-0.347	5	2	70.2	0.127
3	13	0.128	5	3	71.3	0.189
4	14.1	-0.351	5	4	72.8	0.375
5	15	0.00152	5	5	73.7	-0.0285
6	16.1	0.48	10	1	88.8	-0.348
7	16.9	0.329	10	2	89.6	0.836
8	17.7	-0.721	10	3	89.4	1.76
9	18.3	0.566	10	4	90.8	-0.309
10	19	0.247	10	5	91.1	-0.71
11	20	-0.955	15	1	102	1.41
12	20.6	0.709	15	2	103	-1.16
13	21.2	-0.455	15	3	104	0.81
14	21.8	0.35	15	4	105	2.32
15	22.3	0.909	15	5	104	1.16
16	22.9	0.277	20	1	115	1.36
17	23.6	-0.168	20	2	115	-1.66
18	23.9	0.256	20	3	115	1.35
19	24.7	0.0962	20	4	116	-0.218
20	25.3	0.166	20	5	117	0.00785
21	25.8	-0.487	25	1	126	0.0344
22	26.1	-0.096	25	2	126	-1.39
23	26.8	0.574	25	3	126	-0.875
24	26.9	-0.00135	25	4	126	0.718
25	27.9	-0.144	25	5	127	0.795
26	27.9	0.166	30	1	135	-0.994
27	28.5	-0.282	30	2	134	1.16
28	29.1	0.0707	30	3	135	0.0641
29	29.2	0.332	30	4	136	-1.86
30	30.1	-0.0538	30	5	136	1.36

Tabla D.3.17: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.307	5	1	71.8	-0.729
2	11.7	-0.342	5	2	72.2	0.128
3	13	0.127	5	3	73.3	0.213
4	14.1	-0.354	5	4	74.8	0.38
5	15	0.00163	5	5	75.7	0.016
6	16.1	0.482	10	1	91.8	-0.265
7	16.9	0.333	10	2	92.7	0.801
8	17.7	-0.728	10	3	92.6	1.71
9	18.4	0.562	10	4	94.1	-0.326
10	19	0.247	10	5	94.2	-0.681
11	20	-0.956	15	1	107	1.36
12	20.6	0.709	15	2	107	-1.11
13	21.2	-0.465	15	3	108	0.64
14	21.8	0.351	15	4	109	2.42
15	22.3	0.907	15	5	109	1.22
16	23	0.283	20	1	120	1.47
17	23.6	-0.168	20	2	120	-1.85
18	23.9	0.266	20	3	120	1.4
19	24.7	0.081	20	4	121	-0.217
20	25.4	0.168	20	5	122	0.0423
21	25.9	-0.481	25	1	132	0.114
22	26.2	-0.103	25	2	132	-1.38
23	26.8	0.577	25	3	132	-0.81
24	26.9	0.00179	25	4	132	0.666
25	28	-0.142	25	5	133	0.696
26	27.9	0.16	30	1	141	-1.02
27	28.6	-0.278	30	2	141	1.14
28	29.1	0.0701	30	3	142	0.16
29	29.3	0.321	30	4	143	-1.87
30	30.1	-0.0556	30	5	143	1.32

Tabla D.3.18: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML

D.4. Tablas numéricas del experimento para ajuste ML

Para el método de ajuste ML se obtienen los siguientes resultados:

D.4.1. Caso homocedástico, $\ell = 0$

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.87	-0.269	5	1	41.8	-0.532
2	8.86	-0.303	5	2	41.6	0.133
3	8.86	0.129	5	3	41.7	0.103
4	8.89	-0.353	5	4	42	0.228
5	8.78	-0.00648	5	5	42	0.0362
6	8.9	0.365	10	1	42	-0.228
7	8.86	0.22	10	2	42.1	0.375
8	8.88	-0.48	10	3	41.9	1.17
9	8.82	0.345	10	4	42.2	-0.246
10	8.79	0.116	10	5	41.9	-0.49
11	8.92	-0.744	15	1	41.8	0.883
12	8.91	0.5	15	2	41.8	-0.86
13	8.88	-0.254	15	3	42	0.464
14	8.88	0.199	15	4	42	1.52
15	8.82	0.511	15	5	41.8	0.545
16	8.88	0.197	20	1	42	0.944
17	8.9	-0.124	20	2	42	-1.08
18	8.8	0.261	20	3	42	0.984
19	8.92	0.0712	20	4	41.9	-0.216
20	8.92	0.168	20	5	42.1	0.213
21	8.95	-0.323	25	1	42.4	0.133
22	8.87	0.0134	25	2	42.3	-0.811
23	8.93	0.314	25	3	42.2	-0.56
24	8.8	-0.0369	25	4	41.9	0.266
25	8.98	-0.121	25	5	42.4	0.365
26	8.81	-0.00198	30	1	42.1	-0.774
27	8.87	-0.18	30	2	41.9	0.695
28	8.91	0.0332	30	3	42.2	0.0346
29	8.82	0.12	30	4	42.3	-1.11
30	8.92	-0.0813	30	5	42.1	0.75

Tabla D.4.1: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.89	-0.276	5	1	43.2	-0.603
2	8.87	-0.295	5	2	43	0.132
3	8.88	0.127	5	3	43.1	0.122
4	8.91	-0.35	5	4	43.4	0.226
5	8.8	-0.01	5	5	43.4	0.0717
6	8.92	0.37	10	1	43.4	-0.171
7	8.87	0.222	10	2	43.5	0.342
8	8.9	-0.486	10	3	43.3	1.12
9	8.84	0.342	10	4	43.6	-0.264
10	8.8	0.114	10	5	43.3	-0.459
11	8.94	-0.745	15	1	43.2	0.849
12	8.93	0.501	15	2	43.2	-0.822
13	8.9	-0.264	15	3	43.3	0.366
14	8.89	0.199	15	4	43.3	1.58
15	8.84	0.511	15	5	43.2	0.58
16	8.9	0.197	20	1	43.4	0.994
17	8.92	-0.124	20	2	43.4	-1.19
18	8.82	0.261	20	3	43.4	1.02
19	8.94	0.0609	20	4	43.3	-0.216
20	8.93	0.169	20	5	43.4	0.239
21	8.96	-0.32	25	1	43.8	0.187
22	8.89	0.00838	25	2	43.7	-0.793
23	8.95	0.314	25	3	43.6	-0.533
24	8.82	-0.0367	25	4	43.3	0.229
25	9	-0.118	25	5	43.8	0.322
26	8.83	-0.00833	30	1	43.5	-0.785
27	8.89	-0.179	30	2	43.3	0.66
28	8.93	0.0333	30	3	43.6	0.0733
29	8.84	0.122	30	4	43.7	-1.11
30	8.94	-0.0871	30	5	43.5	0.724

Tabla D.4.2: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.91	-0.284	5	1	44	-0.648
2	8.9	-0.285	5	2	43.8	0.126
3	8.9	0.124	5	3	43.9	0.135
4	8.93	-0.346	5	4	44.1	0.223
5	8.83	-0.0146	5	5	44.2	0.0905
6	8.94	0.374	10	1	44.2	-0.123
7	8.9	0.225	10	2	44.3	0.314
8	8.92	-0.492	10	3	44	1.08
9	8.86	0.34	10	4	44.4	-0.271
10	8.82	0.115	10	5	44	-0.422
11	8.96	-0.743	15	1	44	0.82
12	8.95	0.505	15	2	44	-0.778
13	8.93	-0.275	15	3	44.1	0.292
14	8.92	0.197	15	4	44.1	1.62
15	8.86	0.513	15	5	43.9	0.605
16	8.93	0.194	20	1	44.1	1.02
17	8.94	-0.121	20	2	44.2	-1.26
18	8.84	0.257	20	3	44.2	1.03
19	8.96	0.0497	20	4	44.1	-0.212
20	8.96	0.169	20	5	44.2	0.258
21	8.98	-0.319	25	1	44.6	0.228
22	8.91	0.000296	25	2	44.4	-0.767
23	8.97	0.316	25	3	44.4	-0.501
24	8.84	-0.039	25	4	44	0.206
25	9.02	-0.108	25	5	44.6	0.293
26	8.85	-0.0131	30	1	44.2	-0.785
27	8.91	-0.176	30	2	44.1	0.621
28	8.95	0.0321	30	3	44.4	0.0988
29	8.86	0.13	30	4	44.4	-1.1
30	8.96	-0.0942	30	5	44.3	0.695

Tabla D.4.3: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.92	-0.273	5	1	41.9	-0.544
2	8.91	-0.294	5	2	41.6	0.121
3	8.91	0.126	5	3	41.8	0.091
4	8.95	-0.353	5	4	42.1	0.217
5	8.84	-0.018	5	5	42.1	0.0248
6	8.95	0.363	10	1	42.1	-0.211
7	8.91	0.217	10	2	42.2	0.392
8	8.94	-0.48	10	3	41.9	1.18
9	8.87	0.352	10	4	42.2	-0.229
10	8.84	0.132	10	5	42	-0.473
11	8.98	-0.733	15	1	41.9	0.893
12	8.96	0.51	15	2	41.9	-0.848
13	8.94	-0.252	15	3	42	0.474
14	8.94	0.194	15	4	42	1.53
15	8.88	0.522	15	5	41.8	0.556
16	8.94	0.189	20	1	42.1	0.939
17	8.95	-0.115	20	2	42.1	-1.09
18	8.86	0.248	20	3	42	0.978
19	8.97	0.0639	20	4	42	-0.22
20	8.98	0.162	20	5	42.1	0.205
21	9	-0.328	25	1	42.4	0.158
22	8.93	0.0024	25	2	42.3	-0.788
23	8.99	0.319	25	3	42.3	-0.538
24	8.86	-0.0445	25	4	41.9	0.289
25	9.04	-0.0984	25	5	42.4	0.388
26	8.86	0.000896	30	1	42.1	-0.78
27	8.93	-0.169	30	2	42	0.687
28	8.96	0.0275	30	3	42.3	0.0285
29	8.88	0.141	30	4	42.4	-1.12
30	8.98	-0.0887	30	5	42.2	0.742

Tabla D.4.4: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.93	-0.277	5	1	43.3	-0.612
2	8.92	-0.29	5	2	43	0.122
3	8.92	0.126	5	3	43.2	0.112
4	8.95	-0.353	5	4	43.4	0.217
5	8.84	-0.0196	5	5	43.4	0.0621
6	8.96	0.366	10	1	43.5	-0.155
7	8.92	0.219	10	2	43.6	0.358
8	8.94	-0.484	10	3	43.3	1.14
9	8.88	0.349	10	4	43.7	-0.248
10	8.85	0.13	10	5	43.4	-0.443
11	8.98	-0.735	15	1	43.3	0.859
12	8.97	0.51	15	2	43.3	-0.812
13	8.95	-0.258	15	3	43.4	0.376
14	8.94	0.195	15	4	43.4	1.59
15	8.88	0.522	15	5	43.2	0.591
16	8.95	0.19	20	1	43.4	0.989
17	8.96	-0.116	20	2	43.5	-1.19
18	8.86	0.249	20	3	43.4	1.01
19	8.98	0.058	20	4	43.4	-0.22
20	8.98	0.163	20	5	43.5	0.232
21	9.01	-0.326	25	1	43.8	0.207
22	8.93	0.000266	25	2	43.7	-0.774
23	8.99	0.319	25	3	43.6	-0.515
24	8.86	-0.0427	25	4	43.3	0.248
25	9.05	-0.0987	25	5	43.8	0.341
26	8.87	-0.00314	30	1	43.5	-0.788
27	8.93	-0.169	30	2	43.3	0.655
28	8.97	0.0279	30	3	43.7	0.0697
29	8.88	0.139	30	4	43.7	-1.11
30	8.98	-0.0917	30	5	43.6	0.719

Tabla D.4.5: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.94	-0.282	5	1	44	-0.656
2	8.93	-0.284	5	2	43.8	0.119
3	8.93	0.125	5	3	43.9	0.128
4	8.96	-0.351	5	4	44.2	0.216
5	8.85	-0.0219	5	5	44.2	0.0832
6	8.96	0.369	10	1	44.2	-0.11
7	8.93	0.221	10	2	44.3	0.327
8	8.95	-0.488	10	3	44.1	1.09
9	8.89	0.347	10	4	44.5	-0.257
10	8.85	0.129	10	5	44.1	-0.409
11	8.99	-0.735	15	1	44	0.829
12	8.98	0.511	15	2	44	-0.768
13	8.95	-0.266	15	3	44.1	0.301
14	8.95	0.194	15	4	44.1	1.63
15	8.89	0.522	15	5	43.9	0.614
16	8.95	0.189	20	1	44.2	1.02
17	8.97	-0.115	20	2	44.2	-1.26
18	8.87	0.248	20	3	44.2	1.03
19	8.99	0.0508	20	4	44.1	-0.216
20	8.99	0.164	20	5	44.2	0.252
21	9.01	-0.324	25	1	44.6	0.24
22	8.94	-0.00353	25	2	44.5	-0.755
23	9	0.319	25	3	44.4	-0.49
24	8.87	-0.0423	25	4	44.1	0.218
25	9.05	-0.0962	25	5	44.6	0.305
26	8.88	-0.00753	30	1	44.2	-0.785
27	8.94	-0.168	30	2	44.1	0.62
28	8.98	0.028	30	3	44.4	0.0979
29	8.89	0.14	30	4	44.5	-1.1
30	8.99	-0.0956	30	5	44.3	0.693

Tabla D.4.6: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.278	5	1	41.9	-0.553
2	8.94	-0.284	5	2	41.7	0.113
3	8.94	0.123	5	3	41.8	0.0824
4	8.98	-0.353	5	4	42.1	0.209
5	8.87	-0.0266	5	5	42.1	0.0163
6	8.98	0.362	10	1	42.1	-0.201
7	8.95	0.217	10	2	42.2	0.403
8	8.97	-0.481	10	3	41.9	1.19
9	8.9	0.355	10	4	42.3	-0.218
10	8.87	0.143	10	5	42	-0.462
11	9.01	-0.724	15	1	41.9	0.9
12	8.99	0.516	15	2	41.9	-0.841
13	8.97	-0.254	15	3	42	0.481
14	8.97	0.191	15	4	42	1.54
15	8.91	0.528	15	5	41.9	0.563
16	8.97	0.183	20	1	42.1	0.936
17	8.99	-0.108	20	2	42.1	-1.1
18	8.89	0.238	20	3	42.1	0.974
19	9	0.0561	20	4	42	-0.223
20	9.01	0.158	20	5	42.2	0.2
21	9.03	-0.331	25	1	42.5	0.176
22	8.96	-0.00706	25	2	42.4	-0.771
23	9.02	0.323	25	3	42.3	-0.522
24	8.89	-0.0494	25	4	42	0.306
25	9.07	-0.081	25	5	42.5	0.405
26	8.9	0.00136	30	1	42.2	-0.785
27	8.96	-0.16	30	2	42	0.682
28	9	0.0241	30	3	42.3	0.0238
29	8.91	0.157	30	4	42.4	-1.13
30	9.01	-0.0945	30	5	42.2	0.736

Tabla D.4.7: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.28	5	1	43.3	-0.62
2	8.94	-0.283	5	2	43.1	0.115
3	8.94	0.123	5	3	43.2	0.105
4	8.98	-0.353	5	4	43.5	0.21
5	8.87	-0.0273	5	5	43.5	0.0545
6	8.98	0.363	10	1	43.5	-0.143
7	8.95	0.217	10	2	43.6	0.37
8	8.97	-0.483	10	3	43.3	1.15
9	8.9	0.353	10	4	43.7	-0.236
10	8.87	0.142	10	5	43.4	-0.431
11	9.01	-0.725	15	1	43.3	0.865
12	9	0.516	15	2	43.3	-0.805
13	8.97	-0.257	15	3	43.4	0.382
14	8.97	0.191	15	4	43.4	1.6
15	8.91	0.528	15	5	43.2	0.598
16	8.97	0.184	20	1	43.5	0.985
17	8.99	-0.109	20	2	43.5	-1.2
18	8.89	0.239	20	3	43.5	1.01
19	9.01	0.053	20	4	43.4	-0.223
20	9.01	0.159	20	5	43.5	0.226
21	9.03	-0.329	25	1	43.9	0.224
22	8.96	-0.00788	25	2	43.8	-0.758
23	9.02	0.322	25	3	43.7	-0.499
24	8.89	-0.0476	25	4	43.3	0.265
25	9.07	-0.0823	25	5	43.9	0.357
26	8.9	-0.000763	30	1	43.5	-0.792
27	8.96	-0.16	30	2	43.4	0.651
28	9	0.0243	30	3	43.7	0.0664
29	8.91	0.155	30	4	43.8	-1.12
30	9.01	-0.096	30	5	43.6	0.714

Tabla D.4.8: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	8.96	-0.283	5	1	44.1	-0.662
2	8.95	-0.28	5	2	43.8	0.113
3	8.95	0.123	5	3	43.9	0.121
4	8.98	-0.353	5	4	44.2	0.21
5	8.87	-0.0283	5	5	44.2	0.0768
6	8.98	0.365	10	1	44.2	-0.0988
7	8.95	0.218	10	2	44.3	0.339
8	8.97	-0.485	10	3	44.1	1.11
9	8.91	0.352	10	4	44.5	-0.246
10	8.88	0.14	10	5	44.1	-0.398
11	9.01	-0.726	15	1	44	0.836
12	9	0.516	15	2	44.1	-0.762
13	8.98	-0.261	15	3	44.1	0.307
14	8.97	0.192	15	4	44.1	1.64
15	8.91	0.528	15	5	44	0.621
16	8.98	0.184	20	1	44.2	1.01
17	8.99	-0.109	20	2	44.2	-1.27
18	8.89	0.239	20	3	44.2	1.02
19	9.01	0.0489	20	4	44.2	-0.219
20	9.01	-0.16	20	5	44.3	0.247
21	9.04	-0.327	25	1	44.6	0.254
22	8.96	-0.00948	25	2	44.5	-0.741
23	9.02	0.323	25	3	44.4	-0.477
24	8.9	-0.0462	25	4	44.1	0.232
25	9.08	-0.0826	25	5	44.6	0.319
26	8.9	-0.00358	30	1	44.3	-0.787
27	8.96	-0.16	30	2	44.1	0.617
28	9	0.0245	30	3	44.5	0.0961
29	8.91	0.153	30	4	44.5	-1.11
30	9.02	-0.0982	30	5	44.4	0.69

Tabla D.4.9: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

D.4.2. Caso heterocedástico, $\ell = 1/2$

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10	-0.29	5	1	66.2	-0.504
2	11.5	-0.375	5	2	66.4	0.151
3	12.8	0.137	5	3	67.6	0.194
4	13.9	-0.346	5	4	69	0.402
5	14.7	0.0359	5	5	69.7	-0.0639
6	15.8	0.479	10	1	83.1	-0.495
7	16.5	0.335	10	2	83.9	0.794
8	17.3	-0.7	10	3	83.7	1.73
9	18	0.547	10	4	84.8	-0.328
10	18.6	0.19	10	5	85.3	-0.751
11	19.6	-0.984	15	1	95.1	1.41
12	20.1	0.665	15	2	95.5	-1.2
13	20.7	-0.441	15	3	96.3	0.946
14	21.3	0.37	15	4	97	2.13
15	21.8	0.86	15	5	96.9	1.01
16	22.4	0.306	20	1	106	1.22
17	23	-0.197	20	2	106	-1.37
18	23.3	0.306	20	3	106	1.28
19	24.1	0.154	20	4	106	-0.177
20	24.7	0.194	20	5	108	0.0236
21	25.2	-0.463	25	1	116	-0.198
22	25.4	-0.0298	25	2	116	-1.46
23	26.1	0.546	25	3	116	-1.03
24	26.1	0.0384	25	4	115	0.644
25	27.2	-0.25	25	5	116	0.794
26	27.1	0.17	30	1	123	-0.848
27	27.7	-0.334	30	2	122	1.18
28	28.2	0.105	30	3	123	0.00327
29	28.4	0.249	30	4	124	-1.74
30	29.2	0.00367	30	5	123	1.42

Tabla D.4.10: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10	-0.299	5	1	69.7	-0.626
2	11.6	-0.363	5	2	70	0.156
3	12.8	0.133	5	3	71.2	0.22
4	14	-0.346	5	4	72.6	0.406
5	14.8	0.032	5	5	73.4	0.00454
6	15.9	0.487	10	1	88.4	-0.401
7	16.6	0.341	10	2	89.3	0.78
8	17.4	-0.716	10	3	89.2	1.71
9	18.1	0.541	10	4	90.5	-0.367
10	18.7	0.191	10	5	90.8	-0.764
11	19.7	-0.986	15	1	102	1.36
12	20.2	0.67	15	2	103	-1.21
13	20.8	-0.464	15	3	103	0.759
14	21.4	0.372	15	4	104	2.28
15	21.9	0.861	15	5	104	1.11
16	22.5	0.311	20	1	114	1.38
17	23.1	-0.195	20	2	115	-1.63
18	23.4	0.317	20	3	115	1.38
19	24.2	0.122	20	4	115	-0.191
20	24.8	0.198	20	5	116	0.0495
21	25.3	-0.453	25	1	126	-0.063
22	25.6	-0.0469	25	2	126	-1.48
23	26.2	0.552	25	3	126	-0.969
24	26.3	0.04	25	4	125	0.623
25	27.3	-0.237	25	5	127	0.71
26	27.3	0.155	30	1	134	-0.95
27	27.9	-0.326	30	2	134	1.2
28	28.4	0.106	30	3	135	0.0967
29	28.6	0.247	30	4	135	-1.81
30	29.4	-0.0122	30	5	135	1.41

Tabla D.4.11: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.308	5	1	71.7	-0.706
2	11.6	-0.35	5	2	72.1	0.15
3	12.9	0.128	5	3	73.2	0.238
4	14	-0.342	5	4	74.6	0.403
5	14.8	0.0256	5	5	75.6	0.0425
6	15.9	0.493	10	1	91.5	-0.312
7	16.7	0.347	10	2	92.5	0.752
8	17.5	-0.732	10	3	92.4	1.66
9	18.1	0.537	10	4	93.9	-0.378
10	18.8	0.198	10	5	94	-0.73
11	19.8	-0.982	15	1	106	1.32
12	20.3	0.682	15	2	107	-1.15
13	20.9	-0.489	15	3	107	0.595
14	21.5	0.367	15	4	108	2.38
15	22	0.864	15	5	108	1.18
16	22.6	0.31	20	1	120	1.49
17	23.3	-0.189	20	2	120	-1.82
18	23.5	0.316	20	3	120	1.44
19	24.4	0.0883	20	4	120	-0.192
20	25	0.199	20	5	122	0.0813
21	25.5	-0.45	25	1	132	0.0478
22	25.7	-0.0708	25	2	132	-1.44
23	26.4	0.56	25	3	132	-0.877
24	26.5	0.0334	25	4	131	0.598
25	27.5	-0.207	25	5	133	0.637
26	27.5	0.144	30	1	141	-0.996
27	28.1	-0.315	30	2	141	1.16
28	28.7	0.102	30	3	142	0.176
29	28.8	0.264	30	4	142	-1.85
30	29.6	-0.0314	30	5	142	1.35

Tabla D.4.12: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.295	5	1	66.4	-0.524
2	11.6	-0.363	5	2	66.6	0.131
3	12.9	0.133	5	3	67.7	0.173
4	14	-0.348	5	4	69.1	0.382
5	14.9	0.0153	5	5	69.9	-0.0859
6	16	0.479	10	1	83.4	-0.464
7	16.7	0.329	10	2	84.1	0.827
8	17.5	-0.708	10	3	83.9	1.76
9	18.2	0.562	10	4	85.1	-0.295
10	18.8	0.222	10	5	85.5	-0.72
11	19.8	-0.969	15	1	95.4	1.44
12	20.4	0.693	15	2	95.8	-1.16
13	21	-0.443	15	3	96.6	0.979
14	21.6	0.357	15	4	97.3	2.16
15	22.1	0.892	15	5	97.2	1.05
16	22.7	0.285	20	1	106	1.21
17	23.4	-0.182	20	2	107	-1.39
18	23.6	0.27	20	3	106	1.26
19	24.5	0.133	20	4	107	-0.192
20	25.1	0.178	20	5	108	0.00195
21	25.6	-0.484	25	1	116	-0.136
22	25.8	-0.0613	25	2	116	-1.4
23	26.5	0.56	25	3	116	-0.969
24	26.6	0.0121	25	4	115	0.705
25	27.6	-0.191	25	5	117	0.849
26	27.6	0.173	30	1	124	-0.88
27	28.2	-0.307	30	2	123	1.16
28	28.7	0.084	30	3	124	-0.0237
29	28.9	0.303	30	4	124	-1.78
30	29.7	-0.0281	30	5	124	1.39

Tabla D.4.13: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.3	5	1	69.8	-0.642
2	11.6	-0.357	5	2	70.1	0.14
3	12.9	0.132	5	3	71.3	0.202
4	14.1	-0.351	5	4	72.7	0.389
5	14.9	0.0151	5	5	73.6	-0.0139
6	16	0.483	10	1	88.6	-0.371
7	16.8	0.334	10	2	89.5	0.812
8	17.6	-0.719	10	3	89.3	1.74
9	18.2	0.557	10	4	90.7	-0.333
10	18.8	0.223	10	5	91	-0.733
11	19.9	-0.97	15	1	102	1.39
12	20.4	0.692	15	2	103	-1.18
13	21	-0.456	15	3	104	0.79
14	21.6	0.36	15	4	104	2.31
15	22.1	0.891	15	5	104	1.14
16	22.8	0.293	20	1	115	1.37
17	23.4	-0.182	20	2	115	-1.65
18	23.7	0.283	20	3	115	1.36
19	24.5	0.112	20	4	115	-0.205
20	25.1	0.18	20	5	117	0.0269
21	25.6	-0.474	25	1	126	-0.013
22	25.9	-0.071	25	2	126	-1.44
23	26.6	0.564	25	3	126	-0.92
24	26.6	0.0171	25	4	125	0.672
25	27.7	-0.188	25	5	127	0.754
26	27.6	0.164	30	1	135	-0.974
27	28.3	-0.303	30	2	134	1.18
28	28.8	0.0852	30	3	135	0.0791
29	29	0.289	30	4	136	-1.84
30	29.8	-0.0344	30	5	135	1.38

Tabla D.4.14: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.306	5	1	71.8	-0.718
2	11.6	-0.348	5	2	72.1	0.138
3	12.9	0.129	5	3	73.3	0.225
4	14.1	-0.351	5	4	74.7	0.391
5	14.9	0.013	5	5	75.7	0.0284
6	16	0.487	10	1	91.7	-0.287
7	16.8	0.338	10	2	92.6	0.778
8	17.6	-0.729	10	3	92.5	1.68
9	18.3	0.552	10	4	94	-0.35
10	18.9	0.224	10	5	94.1	-0.704
11	19.9	-0.971	15	1	106	1.35
12	20.5	0.696	15	2	107	-1.13
13	21.1	-0.473	15	3	108	0.621
14	21.7	0.36	15	4	109	2.4
15	22.2	0.89	15	5	108	1.2
16	22.8	0.297	20	1	120	1.48
17	23.5	-0.18	20	2	120	-1.84
18	23.7	0.291	20	3	120	1.42
19	24.6	0.0884	20	4	120	-0.205
20	25.2	0.183	20	5	122	0.0613
21	25.7	-0.467	25	1	132	0.0767
22	26	-0.0837	25	2	132	-1.41
23	26.7	0.568	25	3	132	-0.847
24	26.7	0.0178	25	4	131	0.629
25	27.8	-0.178	25	5	133	0.663
26	27.7	0.154	30	1	141	-1.01
27	28.4	-0.297	30	2	141	1.15
28	28.9	0.0845	30	3	142	0.169
29	29.1	0.287	30	4	143	-1.86
30	29.9	-0.0422	30	5	142	1.34

Tabla D.4.15: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.299	5	1	66.5	-0.539
2	11.7	-0.35	5	2	66.7	0.117
3	13	0.13	5	3	67.8	0.157
4	14.1	-0.347	5	4	69.2	0.367
5	15	-7.2e-05	5	5	70	-0.102
6	16.1	0.48	10	1	83.5	-0.442
7	16.8	0.326	10	2	84.2	0.85
8	17.7	-0.714	10	3	84	1.78
9	18.3	0.57	10	4	85.2	-0.273
10	19	0.244	10	5	85.6	-0.698
11	20	-0.954	15	1	95.6	1.45
12	20.6	0.71	15	2	95.9	-1.14
13	21.2	-0.449	15	3	96.8	0.999
14	21.8	0.348	15	4	97.5	2.17
15	22.3	0.91	15	5	97.4	1.07
16	22.9	0.269	20	1	107	1.2
17	23.6	-0.168	20	2	107	-1.4
18	23.8	0.243	20	3	107	1.25
19	24.7	0.111	20	4	107	-0.203
20	25.3	0.165	20	5	108	-0.0151
21	25.8	-0.495	25	1	116	-0.0852
22	26.1	-0.0894	25	2	116	-1.35
23	26.8	0.571	25	3	117	-0.921
24	26.9	-0.00506	25	4	116	0.754
25	27.9	-0.143	25	5	117	0.893
26	27.8	0.17	30	1	124	-0.905
27	28.5	-0.285	30	2	123	1.14
28	29.1	0.071	30	3	124	-0.0432
29	29.2	0.347	30	4	125	-1.8
30	30	-0.0517	30	5	124	1.36

Tabla D.4.16: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.303	5	1	69.9	-0.655
2	11.7	-0.347	5	2	70.2	0.127
3	13	0.128	5	3	71.3	0.189
4	14.1	-0.351	5	4	72.8	0.375
5	15	0.00153	5	5	73.7	-0.0284
6	16.1	0.48	10	1	88.8	-0.348
7	16.9	0.329	10	2	89.6	0.836
8	17.7	-0.721	10	3	89.4	1.76
9	18.3	0.566	10	4	90.8	-0.309
10	19	0.246	10	5	91.1	-0.71
11	20	-0.955	15	1	102	1.41
12	20.6	0.709	15	2	103	-1.16
13	21.2	-0.455	15	3	104	0.809
14	21.8	0.35	15	4	105	2.32
15	22.3	0.909	15	5	104	1.16
16	22.9	0.277	20	1	115	1.36
17	23.6	-0.168	20	2	115	-1.66
18	23.9	0.256	20	3	115	1.35
19	24.7	0.0963	20	4	116	-0.218
20	25.3	0.166	20	5	117	0.00796
21	25.8	-0.487	25	1	126	0.0343
22	26.1	-0.096	25	2	126	-1.39
23	26.8	0.574	25	3	126	-0.875
24	26.9	-0.00131	25	4	126	0.718
25	27.9	-0.144	25	5	127	0.795
26	27.9	0.166	30	1	135	-0.994
27	28.5	-0.282	30	2	134	1.16
28	29.1	0.0707	30	3	135	0.0642
29	29.2	0.332	30	4	136	-1.86
30	30.1	-0.0537	30	5	136	1.36

Tabla D.4.17: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$
(valores multiplicados por 10^3) caso ML

d	$EMSE_d$	$BIAS_d$	d	i	$EMSE_{di}$	$BIAS_{di}$
1	10.1	-0.307	5	1	71.8	-0.729
2	11.7	-0.342	5	2	72.2	0.128
3	13	0.127	5	3	73.3	0.213
4	14.1	-0.354	5	4	74.8	0.38
5	15	0.00163	5	5	75.7	0.016
6	16.1	0.482	10	1	91.8	-0.265
7	16.9	0.333	10	2	92.7	0.801
8	17.7	-0.728	10	3	92.6	1.71
9	18.4	0.562	10	4	94.1	-0.326
10	19	0.247	10	5	94.2	-0.681
11	20	-0.956	15	1	107	1.36
12	20.6	0.709	15	2	107	-1.11
13	21.2	-0.465	15	3	108	0.64
14	21.8	0.351	15	4	109	2.42
15	22.3	0.907	15	5	109	1.22
16	23	0.283	20	1	120	1.47
17	23.6	-0.168	20	2	120	-1.85
18	23.9	0.266	20	3	120	1.4
19	24.7	0.0811	20	4	121	-0.216
20	25.4	0.168	20	5	122	0.0424
21	25.9	-0.481	25	1	132	0.114
22	26.2	-0.103	25	2	132	-1.38
23	26.8	0.577	25	3	132	-0.81
24	26.9	0.00182	25	4	132	0.666
25	28	-0.142	25	5	133	0.696
26	27.9	0.16	30	1	141	-1.02
27	28.6	-0.278	30	2	141	1.14
28	29.1	0.0701	30	3	142	0.16
29	29.3	0.321	30	4	143	-1.87
30	30.1	-0.0556	30	5	143	1.32

Tabla D.4.18: Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML



Apéndice E

Resultados del experimento de simulación del capítulo 4

E.1. Introducción

En el presente apéndice se presentan tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación descrito en el apartado 4.5, en concreto:

- en la sección E.2 se muestran las tablas de resultados correspondientes a las medidas de eficiencia calculadas en el experimento 4.5, bajo un modelo con datos homocedásticos, $\ell = 0$,
- en la sección E.3 se muestran las tablas de resultados correspondientes a las medidas de eficiencia calculadas en el experimento 4.5, bajo un modelo con datos heterocedásticos, $\ell = 1/2$.

El error cuadrático medio empírico y el sesgo empírico se han multiplicado por 10^4 para poder apreciar las magnitudes. La probabilidad de cobertura se ha expresado en %.

E.2. Tablas numéricas correspondientes al caso homocedástico, $\ell = 0$

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.006	-7	98.7%	94%	5	1	0.0125	1.81	99%	95%
2	0.00581	-6.86	98.6%	94%	5	2	0.014	4.25	99%	95.1%
3	0.00589	-6.92	98.6%	94%	5	3	0.0128	2.58	99%	95%
4	0.00633	-7.23	98.6%	93.9%	5	4	0.0122	-0.557	99%	95%
5	0.00489	-6.15	98.7%	94%	5	5	0.0122	-0.146	99%	94.9%
6	0.00643	-7.3	98.6%	93.9%	10	1	0.0122	-0.291	99%	95%
7	0.00582	-6.87	98.6%	94.1%	10	2	0.0123	-1.24	99%	94.9%
8	0.00618	-7.13	98.6%	94%	10	3	0.0124	1.43	99%	95%
9	0.00532	-6.49	98.7%	94%	10	4	0.0125	-1.85	98.9%	95%
10	0.00491	-6.17	98.7%	94.1%	10	5	0.0122	0.481	99%	95%
11	0.00674	-7.51	98.6%	94%	15	1	0.0124	1.65	99%	95.1%
12	0.00651	-7.35	98.7%	94%	15	2	0.0124	1.55	99%	95%
13	0.0062	-7.14	98.6%	94%	15	3	0.0122	0.487	99%	95%
14	0.00607	-7.05	98.6%	93.9%	15	4	0.0122	0.465	99%	95%
15	0.00537	-6.54	98.7%	94%	15	5	0.0126	1.99	99%	95.1%
16	0.00618	-7.13	98.6%	93.9%	20	1	0.0122	-0.0372	99%	95%
17	0.00637	-7.26	98.7%	93.9%	20	2	0.0122	-0.374	99%	95%
18	0.00506	-6.29	98.6%	94.1%	20	3	0.0122	0.327	99%	95.1%
19	0.00669	-7.48	98.6%	93.9%	20	4	0.0123	1.08	99%	95%
20	0.00664	-7.44	98.7%	93.9%	20	5	0.0122	-0.494	98.9%	94.9%
21	0.00705	-7.71	98.6%	93.9%	25	1	0.0135	-3.58	99%	94.8%
22	0.00592	-6.94	98.6%	94%	25	2	0.0129	-2.69	98.9%	95%
23	0.00683	-7.57	98.6%	93.9%	25	3	0.0126	-1.92	98.9%	95%
24	0.00497	-6.22	98.7%	94.2%	25	4	0.0124	1.43	99%	95.1%
25	0.00766	-8.09	98.6%	93.8%	25	5	0.0136	-3.71	99%	95%
26	0.00512	-6.33	98.6%	94.2%	30	1	0.0123	-0.678	99%	95%
27	0.00591	-6.93	98.6%	94%	30	2	0.0124	1.31	99%	95%
28	0.00643	-7.3	98.6%	94%	30	3	0.0126	-2.07	99%	94.9%
29	0.00526	-6.44	98.7%	94%	30	4	0.0129	-2.69	99%	94.9%
30	0.00661	-7.42	98.6%	93.9%	30	5	0.0123	-0.744	99%	94.9%

Tabla E.2.1: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.00636	-6.96	98.6 %	94 %	5	1	0.013	1.66	99 %	95.1 %
2	0.00623	-6.86	98.6 %	94 %	5	2	0.0142	3.84	99 %	95.1 %
3	0.00625	-6.88	98.6 %	94 %	5	3	0.0133	2.56	99 %	95 %
4	0.00669	-7.2	98.6 %	93.9 %	5	4	0.0127	-0.241	99 %	95.1 %
5	0.00528	-6.13	98.7 %	94.1 %	5	5	0.0127	0.00277	99 %	95 %
6	0.00682	-7.28	98.6 %	93.9 %	10	1	0.0127	-0.214	99 %	95 %
7	0.00622	-6.86	98.6 %	94 %	10	2	0.0129	-1.36	99 %	94.9 %
8	0.00655	-7.1	98.6 %	94 %	10	3	0.0129	1.27	99 %	95 %
9	0.0057	-6.47	98.7 %	94 %	10	4	0.0133	-2.51	98.9 %	95 %
10	0.00528	-6.14	98.7 %	94.1 %	10	5	0.0128	0.808	99 %	95 %
11	0.00712	-7.49	98.6 %	94 %	15	1	0.013	1.65	99 %	95.1 %
12	0.00693	-7.36	98.7 %	94 %	15	2	0.0129	1.54	99 %	95 %
13	0.00658	-7.12	98.6 %	94 %	15	3	0.0127	0.63	99 %	95.1 %
14	0.00647	-7.03	98.6 %	93.9 %	15	4	0.0127	0.691	99 %	95 %
15	0.00576	-6.51	98.7 %	94 %	15	5	0.0132	2.24	99 %	95.1 %
16	0.00657	-7.11	98.6 %	94 %	20	1	0.0127	0.0971	99 %	95 %
17	0.00677	-7.25	98.7 %	93.9 %	20	2	0.0127	-0.204	99 %	95 %
18	0.00543	-6.26	98.6 %	94.1 %	20	3	0.0127	0.0261	99 %	95.1 %
19	0.00708	-7.46	98.6 %	93.9 %	20	4	0.0128	0.716	99 %	95 %
20	0.00702	-7.42	98.7 %	93.9 %	20	5	0.0127	-0.469	99 %	94.9 %
21	0.00741	-7.68	98.6 %	93.9 %	25	1	0.0142	-3.86	99 %	94.8 %
22	0.00631	-6.92	98.6 %	94 %	25	2	0.0134	-2.67	99 %	95 %
23	0.00722	-7.55	98.6 %	93.9 %	25	3	0.0131	-1.85	98.9 %	95 %
24	0.00537	-6.2	98.7 %	94.2 %	25	4	0.0129	1.41	99 %	95.1 %
25	0.00803	-8.07	98.6 %	93.8 %	25	5	0.0143	-3.92	99 %	94.9 %
26	0.00552	-6.32	98.6 %	94.2 %	30	1	0.0128	-0.379	99 %	95 %
27	0.00629	-6.9	98.6 %	94 %	30	2	0.0129	1.23	99 %	95 %
28	0.00684	-7.3	98.6 %	94 %	30	3	0.0132	-2.18	98.9 %	94.9 %
29	0.00565	-6.43	98.7 %	94 %	30	4	0.0134	-2.64	99 %	94.9 %
30	0.00701	-7.41	98.6 %	93.9 %	30	5	0.0128	-0.881	99 %	95 %

Tabla E.2.2: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.00576	-6.06	98.7%	94.2%	5	1	0.0135	1.4	99%	95.1%
2	0.00567	-5.99	98.7%	94.1%	5	2	0.0145	3.41	99%	95%
3	0.0056	-5.93	98.7%	94.1%	5	3	0.0139	2.5	99%	95%
4	0.00612	-6.36	98.7%	94%	5	4	0.0133	-0.109	99%	95%
5	0.00485	-5.26	98.7%	94.2%	5	5	0.0133	0.0771	99%	94.9%
6	0.00614	-6.37	98.7%	94.1%	10	1	0.0133	-0.234	99%	95%
7	0.00561	-5.94	98.7%	94.2%	10	2	0.0136	-1.63	99%	94.9%
8	0.00595	-6.22	98.7%	94.2%	10	3	0.0135	1.51	99%	95%
9	0.0052	-5.59	98.7%	94.1%	10	4	0.0142	-3.06	99%	94.9%
10	0.00488	-5.29	98.7%	94.2%	10	5	0.0134	1.14	99%	95%
11	0.00641	-6.58	98.7%	94.1%	15	1	0.0137	1.82	99%	95%
12	0.00633	-6.52	98.7%	94.1%	15	2	0.0135	1.52	99%	95%
13	0.00593	-6.2	98.6%	94.1%	15	3	0.0134	0.731	99%	95.1%
14	0.00591	-6.18	98.6%	94%	15	4	0.0134	1.03	99%	95%
15	0.00518	-5.56	98.7%	94.1%	15	5	0.0141	2.72	99%	95.1%
16	0.00594	-6.21	98.7%	94.1%	20	1	0.0133	0.0772	99%	95%
17	0.00609	-6.33	98.7%	94.1%	20	2	0.0133	0.0318	99%	95%
18	0.00499	-5.39	98.7%	94.2%	20	3	0.0133	-0.218	99%	95.1%
19	0.00644	-6.6	98.6%	94%	20	4	0.0133	0.222	99%	95%
20	0.00635	-6.53	98.7%	94%	20	5	0.0134	-0.436	99%	94.9%
21	0.0068	-6.87	98.6%	94%	25	1	0.0148	-3.88	99%	94.8%
22	0.00581	-6.11	98.7%	94.1%	25	2	0.0142	-2.87	99%	95%
23	0.00659	-6.71	98.7%	94%	25	3	0.0136	-1.7	98.9%	95%
24	0.00501	-5.4	98.7%	94.2%	25	4	0.0135	1.19	99%	95.1%
25	0.00729	-7.21	98.6%	93.9%	25	5	0.0151	-4.14	99%	94.9%
26	0.00507	-5.47	98.7%	94.3%	30	1	0.0134	-0.0815	99%	95%
27	0.0057	-6.02	98.6%	94.1%	30	2	0.0135	1.16	99%	95%
28	0.00623	-6.44	98.7%	94.1%	30	3	0.0138	-2.1	98.9%	94.9%
29	0.00512	-5.51	98.7%	94.2%	30	4	0.014	-2.46	99%	94.9%
30	0.00647	-6.62	98.6%	94%	30	5	0.0135	-1.3	99%	95%

Tabla E.2.3: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0264	-15.4	98.1 %	92.6 %	5	1	0.0125	1.82	99 %	95 %
2	0.026	-15.2	98 %	92.4 %	5	2	0.014	4.26	99 %	95.1 %
3	0.0261	-15.3	98 %	92.5 %	5	3	0.0129	2.63	99 %	95 %
4	0.0271	-15.6	98 %	92.3 %	5	4	0.0122	-0.529	99 %	95 %
5	0.0238	-14.5	98.1 %	92.5 %	5	5	0.0122	-0.157	99 %	94.9 %
6	0.0272	-15.6	98 %	92.4 %	10	1	0.0122	-0.316	99 %	95 %
7	0.026	-15.2	98 %	92.5 %	10	2	0.0124	-1.23	99 %	94.9 %
8	0.0267	-15.5	98.1 %	92.5 %	10	3	0.0124	1.48	99 %	95 %
9	0.0248	-14.8	98.1 %	92.5 %	10	4	0.0126	-1.88	99 %	95 %
10	0.0239	-14.5	98.1 %	92.6 %	10	5	0.0122	0.508	99 %	95 %
11	0.028	-15.9	98 %	92.4 %	15	1	0.0125	1.62	99 %	95.1 %
12	0.0275	-15.7	98.1 %	92.5 %	15	2	0.0125	1.57	99 %	95 %
13	0.0268	-15.5	98 %	92.5 %	15	3	0.0122	0.521	99 %	95 %
14	0.0267	-15.5	98 %	92.4 %	15	4	0.0122	0.437	99 %	95 %
15	0.025	-14.9	98.1 %	92.5 %	15	5	0.0126	2.06	99 %	95.1 %
16	0.0268	-15.5	98 %	92.4 %	20	1	0.0122	-0.0338	99 %	95 %
17	0.0272	-15.6	98 %	92.4 %	20	2	0.0122	-0.398	99 %	95 %
18	0.0243	-14.6	98 %	92.6 %	20	3	0.0122	0.295	99 %	95.1 %
19	0.0278	-15.8	98 %	92.4 %	20	4	0.0123	1.04	99 %	95 %
20	0.0279	-15.8	98 %	92.4 %	20	5	0.0123	-0.542	98.9 %	94.9 %
21	0.0286	-16.1	98 %	92.4 %	25	1	0.0135	-3.59	99 %	94.8 %
22	0.0263	-15.3	98.1 %	92.4 %	25	2	0.013	-2.69	98.9 %	95 %
23	0.0282	-15.9	98 %	92.4 %	25	3	0.0126	-1.93	98.9 %	95 %
24	0.0242	-14.6	98.1 %	92.7 %	25	4	0.0125	1.46	99 %	95.1 %
25	0.0299	-16.5	97.9 %	92.2 %	25	5	0.0136	-3.69	99 %	95 %
26	0.0244	-14.7	98 %	92.7 %	30	1	0.0123	-0.634	99 %	95 %
27	0.0262	-15.3	98 %	92.5 %	30	2	0.0124	1.32	99 %	95 %
28	0.0274	-15.7	98 %	92.5 %	30	3	0.0127	-2.06	99 %	94.9 %
29	0.0247	-14.8	98.1 %	92.5 %	30	4	0.013	-2.71	99 %	94.9 %
30	0.0278	-15.8	98 %	92.4 %	30	5	0.0123	-0.847	99 %	94.9 %

Tabla E.2.4: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0304	-16.3	98 %	92.3 %	5	1	0.013	1.62	99 %	95.1 %
2	0.03	-16.1	97.9 %	92.2 %	5	2	0.0142	3.85	99 %	95.1 %
3	0.0301	-16.2	97.9 %	92.3 %	5	3	0.0134	2.65	99 %	95 %
4	0.0312	-16.5	97.9 %	92.1 %	5	4	0.0127	-0.205	99 %	95.1 %
5	0.0277	-15.4	98 %	92.3 %	5	5	0.0127	-0.076	99 %	94.9 %
6	0.0313	-16.5	97.9 %	92.2 %	10	1	0.0127	-0.234	99 %	95 %
7	0.0301	-16.2	97.9 %	92.3 %	10	2	0.0129	-1.32	99 %	95 %
8	0.0308	-16.4	98 %	92.3 %	10	3	0.0129	1.33	99 %	95 %
9	0.0287	-15.7	97.9 %	92.3 %	10	4	0.0134	-2.52	99 %	95 %
10	0.0278	-15.4	98 %	92.4 %	10	5	0.0128	0.806	99 %	95 %
11	0.0321	-16.8	97.9 %	92.2 %	15	1	0.013	1.62	99 %	95.1 %
12	0.0317	-16.6	98 %	92.2 %	15	2	0.013	1.53	99 %	95 %
13	0.0309	-16.4	97.9 %	92.2 %	15	3	0.0128	0.663	99 %	95.1 %
14	0.0307	-16.4	97.9 %	92.2 %	15	4	0.0128	0.625	99 %	95 %
15	0.0289	-15.8	98 %	92.3 %	15	5	0.0133	2.32	99 %	95.1 %
16	0.0309	-16.4	97.9 %	92.2 %	20	1	0.0128	0.0802	99 %	95 %
17	0.0313	-16.5	97.9 %	92.2 %	20	2	0.0128	-0.195	99 %	95 %
18	0.0282	-15.6	97.9 %	92.4 %	20	3	0.0128	-0.00601	99 %	95.1 %
19	0.032	-16.7	97.9 %	92.2 %	20	4	0.0128	0.734	99 %	95 %
20	0.032	-16.7	97.9 %	92.1 %	20	5	0.0128	-0.514	99 %	94.9 %
21	0.0328	-17	97.9 %	92.1 %	25	1	0.0143	-3.86	99 %	94.8 %
22	0.0303	-16.2	98 %	92.2 %	25	2	0.0135	-2.67	99 %	95 %
23	0.0324	-16.8	97.9 %	92.2 %	25	3	0.0131	-1.88	98.9 %	95 %
24	0.0281	-15.5	98 %	92.4 %	25	4	0.013	1.44	99 %	95.1 %
25	0.0341	-17.4	97.8 %	92 %	25	5	0.0143	-3.92	99 %	94.9 %
26	0.0284	-15.6	98 %	92.4 %	30	1	0.0128	-0.337	99 %	95 %
27	0.0302	-16.2	97.9 %	92.3 %	30	2	0.013	1.27	99 %	95 %
28	0.0315	-16.6	97.9 %	92.3 %	30	3	0.0133	-2.16	98.9 %	94.9 %
29	0.0287	-15.7	98 %	92.3 %	30	4	0.0135	-2.64	99 %	94.9 %
30	0.0319	-16.7	97.9 %	92.2 %	30	5	0.0129	-0.969	99 %	95 %

Tabla E.2.5: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0284	-15.1	98.1%	92.5%	5	1	0.0136	1.47	99%	95.1%
2	0.0282	-15.1	97.9%	92.4%	5	2	0.0146	3.49	99%	95%
3	0.0281	-15	98%	92.5%	5	3	0.014	2.62	99%	95%
4	0.0292	-15.4	97.9%	92.3%	5	4	0.0133	0.0426	99%	95.1%
5	0.026	-14.3	98%	92.5%	5	5	0.0133	0.0667	99%	95%
6	0.0293	-15.4	98%	92.4%	10	1	0.0134	-0.185	99%	95%
7	0.0282	-15.1	98%	92.5%	10	2	0.0135	-1.38	99%	94.9%
8	0.0288	-15.3	98%	92.5%	10	3	0.0135	1.24	99%	95%
9	0.0269	-14.6	98%	92.5%	10	4	0.0142	-2.95	98.9%	94.9%
10	0.026	-14.3	98.1%	92.6%	10	5	0.0135	1.03	99%	95%
11	0.0301	-15.7	98%	92.4%	15	1	0.0136	1.64	99%	95%
12	0.0297	-15.6	98.1%	92.4%	15	2	0.0136	1.54	99%	95%
13	0.029	-15.3	97.9%	92.4%	15	3	0.0134	0.714	99%	95.1%
14	0.0288	-15.3	98%	92.3%	15	4	0.0134	0.812	99%	95%
15	0.0271	-14.7	98%	92.5%	15	5	0.014	2.46	99%	95.1%
16	0.0289	-15.3	98%	92.4%	20	1	0.0134	0.172	99%	95%
17	0.0294	-15.4	98%	92.4%	20	2	0.0134	-0.051	99%	95%
18	0.0264	-14.4	98%	92.6%	20	3	0.0134	-0.26	99%	95.1%
19	0.0299	-15.6	98%	92.4%	20	4	0.0134	0.424	99%	95%
20	0.03	-15.6	98%	92.3%	20	5	0.0134	-0.513	99%	94.9%
21	0.0307	-15.9	98%	92.3%	25	1	0.015	-4.02	99%	94.8%
22	0.0284	-15.1	98%	92.4%	25	2	0.0141	-2.62	99%	95%
23	0.0303	-15.7	98%	92.4%	25	3	0.0137	-1.78	98.9%	95%
24	0.0264	-14.4	98%	92.6%	25	4	0.0136	1.37	99%	95.1%
25	0.0319	-16.3	97.9%	92.2%	25	5	0.015	-4.02	99%	94.9%
26	0.0266	-14.5	98%	92.6%	30	1	0.0134	-0.133	99%	95%
27	0.0283	-15.1	97.9%	92.5%	30	2	0.0135	1.18	99%	95%
28	0.0296	-15.5	98%	92.5%	30	3	0.0139	-2.22	98.9%	94.9%
29	0.0269	-14.6	98%	92.5%	30	4	0.014	-2.51	99%	94.9%
30	0.0299	-15.6	97.9%	92.4%	30	5	0.0135	-1.02	99%	95%

Tabla E.2.6: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.113	-32.3	95.7 %	87.8 %	5	1	0.0126	1.85	99 %	95 %
2	0.112	-32.1	95.6 %	87.8 %	5	2	0.0141	4.26	99 %	95.1 %
3	0.112	-32.1	95.6 %	87.8 %	5	3	0.013	2.67	99 %	95 %
4	0.115	-32.5	95.5 %	87.6 %	5	4	0.0123	-0.513	99 %	95 %
5	0.108	-31.4	95.7 %	88 %	5	5	0.0122	-0.167	99 %	94.9 %
6	0.115	-32.5	95.6 %	87.8 %	10	1	0.0123	-0.323	99 %	95 %
7	0.113	-32.2	95.6 %	87.9 %	10	2	0.0124	-1.23	99 %	94.9 %
8	0.114	-32.4	95.7 %	87.9 %	10	3	0.0125	1.53	99 %	95 %
9	0.11	-31.7	95.7 %	87.9 %	10	4	0.0126	-1.91	99 %	95 %
10	0.108	-31.4	95.7 %	88 %	10	5	0.0123	0.538	99 %	95 %
11	0.117	-32.8	95.6 %	87.8 %	15	1	0.0125	1.6	99 %	95.1 %
12	0.116	-32.6	95.6 %	87.8 %	15	2	0.0125	1.58	99 %	95 %
13	0.114	-32.4	95.5 %	87.7 %	15	3	0.0123	0.554	99 %	95 %
14	0.114	-32.4	95.6 %	87.8 %	15	4	0.0123	0.42	99 %	95 %
15	0.11	-31.8	95.6 %	87.8 %	15	5	0.0127	2.11	99 %	95.1 %
16	0.114	-32.4	95.6 %	87.8 %	20	1	0.0123	-0.0215	99 %	95 %
17	0.115	-32.5	95.6 %	87.8 %	20	2	0.0123	-0.418	99 %	95 %
18	0.109	-31.6	95.7 %	88.1 %	20	3	0.0123	0.283	99 %	95.1 %
19	0.116	-32.7	95.6 %	87.8 %	20	4	0.0124	1.01	99 %	95 %
20	0.117	-32.8	95.6 %	87.7 %	20	5	0.0123	-0.568	98.9 %	94.9 %
21	0.118	-33	95.5 %	87.6 %	25	1	0.0136	-3.59	99 %	94.8 %
22	0.113	-32.3	95.7 %	87.8 %	25	2	0.013	-2.67	98.9 %	95 %
23	0.117	-32.9	95.5 %	87.7 %	25	3	0.0126	-1.93	98.9 %	95 %
24	0.109	-31.6	95.8 %	88 %	25	4	0.0125	1.49	99 %	95.1 %
25	0.12	-33.4	95.4 %	87.6 %	25	5	0.0136	-3.68	99 %	95 %
26	0.109	-31.6	95.8 %	88 %	30	1	0.0123	-0.602	99 %	95 %
27	0.113	-32.2	95.6 %	87.9 %	30	2	0.0125	1.34	99 %	95 %
28	0.116	-32.6	95.6 %	87.9 %	30	3	0.0127	-2.05	98.9 %	94.9 %
29	0.11	-31.7	95.7 %	87.8 %	30	4	0.013	-2.71	99 %	94.9 %
30	0.116	-32.7	95.6 %	87.8 %	30	5	0.0124	-0.933	99 %	94.9 %

Tabla E.2.7: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.139	-35.5	94.8 %	86.5 %	5	1	0.013	1.63	98.9 %	95.1 %
2	0.138	-35.4	94.7 %	86.5 %	5	2	0.0143	3.85	99 %	95.1 %
3	0.138	-35.4	94.7 %	86.4 %	5	3	0.0135	2.69	99 %	95 %
4	0.141	-35.8	94.6 %	86.3 %	5	4	0.0128	-0.185	99 %	95 %
5	0.133	-34.7	94.8 %	86.6 %	5	5	0.0128	-0.0811	99 %	94.9 %
6	0.141	-35.8	94.8 %	86.3 %	10	1	0.0128	-0.251	99 %	95 %
7	0.138	-35.4	94.7 %	86.5 %	10	2	0.0129	-1.32	99 %	94.9 %
8	0.14	-35.6	94.8 %	86.5 %	10	3	0.013	1.37	99 %	95 %
9	0.135	-35	94.8 %	86.6 %	10	4	0.0134	-2.55	99 %	95 %
10	0.133	-34.7	94.8 %	86.6 %	10	5	0.0128	0.82	99 %	95 %
11	0.143	-36	94.7 %	86.4 %	15	1	0.013	1.59	99 %	95.1 %
12	0.142	-35.9	94.7 %	86.4 %	15	2	0.013	1.54	99 %	95 %
13	0.14	-35.7	94.7 %	86.3 %	15	3	0.0128	0.683	99 %	95 %
14	0.14	-35.6	94.6 %	86.4 %	15	4	0.0128	0.599	99 %	95 %
15	0.136	-35	94.7 %	86.4 %	15	5	0.0133	2.37	99 %	95.1 %
16	0.14	-35.7	94.7 %	86.4 %	20	1	0.0128	0.0839	99 %	95 %
17	0.141	-35.8	94.7 %	86.4 %	20	2	0.0128	-0.213	99 %	95 %
18	0.134	-34.8	94.8 %	86.7 %	20	3	0.0128	-0.0332	99 %	95.1 %
19	0.142	-36	94.7 %	86.4 %	20	4	0.0128	0.71	99 %	95 %
20	0.143	-36	94.7 %	86.3 %	20	5	0.0128	-0.55	99 %	94.9 %
21	0.144	-36.2	94.6 %	86.2 %	25	1	0.0143	-3.86	99 %	94.9 %
22	0.139	-35.5	94.8 %	86.4 %	25	2	0.0135	-2.66	99 %	95 %
23	0.143	-36.1	94.6 %	86.3 %	25	3	0.0132	-1.89	98.9 %	95 %
24	0.134	-34.8	94.9 %	86.6 %	25	4	0.013	1.46	99 %	95.1 %
25	0.147	-36.6	94.5 %	86.3 %	25	5	0.0143	-3.91	99 %	94.9 %
26	0.134	-34.9	94.9 %	86.5 %	30	1	0.0128	-0.307	99 %	95 %
27	0.139	-35.5	94.7 %	86.5 %	30	2	0.013	1.28	99 %	95 %
28	0.141	-35.9	94.7 %	86.5 %	30	3	0.0133	-2.15	98.9 %	94.9 %
29	0.135	-35	94.8 %	86.5 %	30	4	0.0135	-2.65	99 %	94.9 %
30	0.142	-36	94.7 %	86.4 %	30	5	0.0129	-1.05	99 %	95 %

Tabla E.2.8: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.14	-35.1	94.6 %	86.3 %	5	1	0.0136	1.44	99 %	95.1 %
2	0.14	-35	94.5 %	86.3 %	5	2	0.0146	3.5	99 %	95 %
3	0.139	-35	94.5 %	86.2 %	5	3	0.0141	2.69	99 %	95 %
4	0.142	-35.4	94.4 %	86.1 %	5	4	0.0134	0.0714	99 %	95.1 %
5	0.134	-34.3	94.5 %	86.4 %	5	5	0.0134	-0.0276	99 %	94.9 %
6	0.142	-35.4	94.5 %	86.2 %	10	1	0.0134	-0.202	99 %	95 %
7	0.14	-35	94.5 %	86.3 %	10	2	0.0136	-1.35	99 %	94.9 %
8	0.141	-35.2	94.5 %	86.4 %	10	3	0.0135	1.28	99 %	95 %
9	0.137	-34.6	94.6 %	86.4 %	10	4	0.0143	-2.96	98.9 %	94.9 %
10	0.135	-34.3	94.6 %	86.4 %	10	5	0.0135	1.05	99 %	95 %
11	0.144	-35.6	94.5 %	86.2 %	15	1	0.0136	1.61	99 %	95 %
12	0.143	-35.5	94.5 %	86.2 %	15	2	0.0136	1.54	99 %	95 %
13	0.141	-35.3	94.5 %	86.3 %	15	3	0.0134	0.749	99 %	95.1 %
14	0.141	-35.3	94.4 %	86.3 %	15	4	0.0134	0.779	99 %	95.1 %
15	0.137	-34.7	94.5 %	86.3 %	15	5	0.014	2.52	99 %	95.1 %
16	0.141	-35.3	94.5 %	86.3 %	20	1	0.0134	0.165	99 %	95 %
17	0.142	-35.4	94.4 %	86.2 %	20	2	0.0134	-0.0356	99 %	95 %
18	0.135	-34.4	94.6 %	86.4 %	20	3	0.0134	-0.299	99 %	95.1 %
19	0.144	-35.6	94.5 %	86.2 %	20	4	0.0134	0.448	99 %	95 %
20	0.144	-35.6	94.5 %	86.1 %	20	5	0.0134	-0.538	99 %	94.9 %
21	0.145	-35.8	94.4 %	86.1 %	25	1	0.015	-4.01	99 %	94.8 %
22	0.14	-35.1	94.6 %	86.2 %	25	2	0.0141	-2.63	99 %	95 %
23	0.145	-35.7	94.4 %	86.2 %	25	3	0.0137	-1.82	98.9 %	95 %
24	0.136	-34.4	94.6 %	86.4 %	25	4	0.0136	1.41	99 %	95.1 %
25	0.148	-36.2	94.3 %	86.1 %	25	5	0.015	-4.02	99 %	94.9 %
26	0.136	-34.5	94.7 %	86.4 %	30	1	0.0134	-0.106	99 %	95 %
27	0.14	-35.1	94.5 %	86.3 %	30	2	0.0136	1.21	99 %	95 %
28	0.143	-35.5	94.5 %	86.3 %	30	3	0.0139	-2.18	99 %	94.9 %
29	0.136	-34.6	94.6 %	86.3 %	30	4	0.0141	-2.51	99 %	94.9 %
30	0.144	-35.6	94.5 %	86.3 %	30	5	0.0136	-1.08	99 %	95 %

Tabla E.2.9: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

E.3. Tablas numéricas correspondientes al caso heterocedástico, $\ell = 1/2$

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.00578	-6.73	98.7%	94.2%	5	1	0.101	2.19	99%	95%
2	0.00542	-6.25	98.7%	94.3%	5	2	0.113	8	99%	95.1%
3	0.00559	-6.11	98.8%	94.4%	5	3	0.114	4.54	99%	95%
4	0.00615	-6.25	98.8%	94.4%	5	4	0.119	-1.44	99%	95%
5	0.0046	-4.37	98.8%	94.6%	5	5	0.123	-1.27	99%	95%
6	0.00705	-6.26	98.8%	94.5%	10	1	0.247	-0.599	99%	95%
7	0.00627	-5.15	98.9%	94.7%	10	2	0.254	-1.85	99%	95%
8	0.00691	-5.31	98.9%	94.8%	10	3	0.261	4.82	99%	95%
9	0.00641	-4.25	98.9%	94.7%	10	4	0.265	-0.723	99%	95%
10	0.00606	-3.13	98.9%	94.9%	10	5	0.272	-0.208	99%	95%
11	0.00952	-6.28	98.9%	94.7%	15	1	0.404	3.82	99%	95.1%
12	0.00895	-5.34	99%	94.7%	15	2	0.41	4.53	99%	95%
13	0.00907	-5.05	98.9%	94.6%	15	3	0.41	0.462	99%	95%
14	0.00928	-4.61	98.9%	94.7%	15	4	0.419	-1.74	99%	95%
15	0.00916	-3.87	98.9%	94.8%	15	5	0.422	2.98	98.9%	95.1%
16	0.0101	-4.37	98.9%	94.8%	20	1	0.552	-3.63	99%	94.9%
17	0.0112	-5.04	98.9%	94.7%	20	2	0.556	-1.69	99%	95%
18	0.00977	-2.46	98.9%	94.9%	20	3	0.564	3.13	99%	95.1%
19	0.0127	-5.55	98.9%	94.7%	20	4	0.567	4.6	99%	95.1%
20	0.0139	-6.15	98.9%	94.7%	20	5	0.575	-5.71	98.9%	94.9%
21	0.0143	-6.05	98.9%	94.7%	25	1	0.704	-11.5	99%	94.8%
22	0.0124	-3.83	99%	94.8%	25	2	0.708	-7.81	98.9%	94.9%
23	0.0148	-5.78	98.9%	94.7%	25	3	0.712	-6.61	98.9%	95%
24	0.0121	-1.42	99%	95%	25	4	0.709	4.39	99%	95%
25	0.0178	-7.39	98.9%	94.6%	25	5	0.714	-6.77	99%	94.9%
26	0.0131	-1.87	98.9%	94.9%	30	1	0.832	-7.57	98.9%	94.9%
27	0.0145	-3.6	98.9%	94.8%	30	2	0.832	2.64	99%	95%
28	0.0158	-4.54	98.9%	94.8%	30	3	0.842	-5.16	99%	94.9%
29	0.0145	-1.9	99%	94.9%	30	4	0.85	-7.25	99%	95%
30	0.0172	-5.38	98.9%	94.8%	30	5	0.845	0.935	99%	95%

Tabla E.3.1: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.00631	-6.82	98.7 %	94.2 %	5	1	0.117	1.79	98.9 %	95 %
2	0.00619	-6.53	98.7 %	94.2 %	5	2	0.13	7.45	99 %	95.1 %
3	0.00637	-6.41	98.8 %	94.3 %	5	3	0.132	4.56	99 %	95 %
4	0.00705	-6.65	98.8 %	94.4 %	5	4	0.139	-0.934	99 %	95 %
5	0.00542	-4.85	98.8 %	94.6 %	5	5	0.144	-1.05	99 %	94.9 %
6	0.0081	-6.79	98.8 %	94.5 %	10	1	0.304	-0.364	99 %	95 %
7	0.00729	-5.78	98.8 %	94.7 %	10	2	0.313	-2.37	99 %	95 %
8	0.00789	-5.89	98.9 %	94.7 %	10	3	0.321	4.24	99 %	95 %
9	0.0073	-4.88	98.9 %	94.7 %	10	4	0.328	-2.53	99 %	95 %
10	0.00683	-3.79	98.9 %	94.8 %	10	5	0.337	0.444	99 %	95 %
11	0.0108	-7.01	98.8 %	94.6 %	15	1	0.515	3.49	99 %	95.1 %
12	0.0102	-6.22	98.9 %	94.7 %	15	2	0.524	4.37	99 %	95.1 %
13	0.0102	-5.84	98.9 %	94.6 %	15	3	0.526	1.47	99 %	95 %
14	0.0103	-5.42	98.9 %	94.6 %	15	4	0.537	-1.89	98.9 %	95 %
15	0.0101	-4.67	98.9 %	94.7 %	15	5	0.542	4.07	99 %	95.1 %
16	0.0111	-5.2	98.9 %	94.7 %	20	1	0.725	-3.64	99 %	95 %
17	0.0124	-5.96	98.9 %	94.7 %	20	2	0.732	-1.48	99 %	95 %
18	0.0105	-3.26	98.9 %	94.9 %	20	3	0.742	2.89	99 %	95.1 %
19	0.014	-6.45	98.9 %	94.6 %	20	4	0.748	4.15	99 %	95.1 %
20	0.0153	-7.06	98.9 %	94.6 %	20	5	0.76	-5.9	98.9 %	94.9 %
21	0.0157	-6.95	98.8 %	94.6 %	25	1	0.951	-13.8	99 %	94.8 %
22	0.0135	-4.78	98.9 %	94.7 %	25	2	0.954	-8.45	99 %	94.9 %
23	0.0162	-6.74	98.9 %	94.7 %	25	3	0.96	-6.99	98.9 %	94.9 %
24	0.0126	-2.44	99 %	95 %	25	4	0.958	4.77	99 %	95 %
25	0.0195	-8.38	98.9 %	94.6 %	25	5	0.966	-7.95	99 %	94.9 %
26	0.0138	-2.92	98.9 %	94.9 %	30	1	1.14	-6.36	98.9 %	94.9 %
27	0.0155	-4.63	98.9 %	94.8 %	30	2	1.15	2.79	99 %	95 %
28	0.0171	-5.74	98.9 %	94.8 %	30	3	1.16	-6.4	99 %	94.9 %
29	0.0151	-2.97	98.9 %	94.9 %	30	4	1.17	-8.1	99 %	95 %
30	0.0187	-6.54	98.9 %	94.8 %	30	5	1.17	-0.404	99 %	95 %

Tabla E.3.2: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.00584	-5.99	98.7%	94.3%	5	1	0.129	1.19	98.9%	95%
2	0.00597	-5.86	98.7%	94.3%	5	2	0.143	6.7	99%	95%
3	0.00608	-5.66	98.8%	94.4%	5	3	0.147	4.57	99%	95%
4	0.00691	-6.05	98.8%	94.4%	5	4	0.155	-0.424	99%	95.1%
5	0.00555	-4.29	98.8%	94.6%	5	5	0.161	-1.24	99%	94.9%
6	0.00796	-6.19	98.8%	94.5%	10	1	0.349	-0.46	99%	95%
7	0.00732	-5.2	98.9%	94.7%	10	2	0.36	-2.91	99%	94.9%
8	0.00799	-5.39	98.9%	94.7%	10	3	0.37	4.34	99%	95%
9	0.00757	-4.44	98.9%	94.7%	10	4	0.378	-3.65	99%	95%
10	0.00722	-3.37	98.9%	94.8%	10	5	0.389	1.24	99%	95%
11	0.0108	-6.51	98.9%	94.6%	15	1	0.606	3.44	99%	95.1%
12	0.0107	-6	98.9%	94.7%	15	2	0.616	3.81	99%	95%
13	0.0104	-5.42	98.9%	94.6%	15	3	0.62	2.43	99%	95%
14	0.0108	-5.16	98.9%	94.6%	15	4	0.634	-1.01	99%	94.9%
15	0.0104	-4.16	98.9%	94.8%	15	5	0.642	5.72	99%	95.1%
16	0.0115	-4.84	98.9%	94.7%	20	1	0.87	-3.4	99%	94.9%
17	0.0128	-5.64	98.9%	94.7%	20	2	0.88	-0.932	99%	95%
18	0.0111	-3.01	98.9%	94.8%	20	3	0.891	1.96	99%	95.1%
19	0.0144	-6.15	98.9%	94.6%	20	4	0.899	2.88	99%	95%
20	0.0158	-6.88	98.9%	94.6%	20	5	0.914	-5.37	98.9%	94.9%
21	0.0164	-6.92	98.9%	94.7%	25	1	1.16	-15.1	99%	94.8%
22	0.0143	-4.82	98.9%	94.7%	25	2	1.17	-9.06	99%	94.9%
23	0.0168	-6.61	98.9%	94.7%	25	3	1.17	-6.56	98.9%	94.9%
24	0.0135	-2.62	99%	95%	25	4	1.17	4.7	99%	95%
25	0.0203	-8.37	98.8%	94.6%	25	5	1.18	-9.09	99%	94.9%
26	0.0145	-2.76	98.9%	94.9%	30	1	1.41	-4.84	98.9%	94.9%
27	0.0162	-4.46	98.9%	94.8%	30	2	1.42	3.08	99%	95%
28	0.0179	-5.71	98.9%	94.8%	30	3	1.44	-7.22	99%	94.9%
29	0.0158	-2.7	98.9%	94.9%	30	4	1.46	-7.94	99%	94.9%
30	0.0197	-6.6	98.9%	94.8%	30	5	1.45	-1.86	99%	95%

Tabla E.3.3: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0248	-14.8	98.3 %	93 %	5	1	0.102	2.23	99 %	95 %
2	0.0225	-14	98.3 %	93.3 %	5	2	0.114	8.07	99 %	95.1 %
3	0.0215	-13.5	98.5 %	93.6 %	5	3	0.115	4.71	99 %	95 %
4	0.0217	-13.4	98.5 %	93.7 %	5	4	0.12	-1.38	99 %	95 %
5	0.0169	-11.3	98.6 %	94 %	5	5	0.124	-1.3	99 %	94.9 %
6	0.0214	-13	98.6 %	94 %	10	1	0.25	-0.688	99 %	95 %
7	0.019	-11.8	98.7 %	94.2 %	10	2	0.257	-1.81	99 %	95 %
8	0.0193	-11.8	98.7 %	94.3 %	10	3	0.265	5.03	99 %	95 %
9	0.017	-10.5	98.7 %	94.3 %	10	4	0.268	-0.752	98.9 %	95 %
10	0.0152	-9.37	98.7 %	94.4 %	10	5	0.275	-0.0227	99 %	95 %
11	0.0224	-12.4	98.7 %	94.2 %	15	1	0.409	3.75	99 %	95.1 %
12	0.0205	-11.4	98.8 %	94.3 %	15	2	0.416	4.64	99 %	95 %
13	0.02	-11	98.8 %	94.3 %	15	3	0.416	0.644	99 %	95 %
14	0.0198	-10.6	98.8 %	94.3 %	15	4	0.425	-1.81	99 %	95 %
15	0.0183	-9.61	98.8 %	94.4 %	15	5	0.428	3.27	99 %	95 %
16	0.0197	-10	98.8 %	94.5 %	20	1	0.561	-3.63	99 %	94.9 %
17	0.0217	-10.7	98.8 %	94.4 %	20	2	0.565	-1.72	99 %	95 %
18	0.0169	-7.94	98.8 %	94.6 %	20	3	0.573	3.05	99 %	95.1 %
19	0.0231	-11	98.8 %	94.4 %	20	4	0.576	4.37	99 %	95.1 %
20	0.0254	-11.7	98.8 %	94.4 %	20	5	0.585	-5.87	98.9 %	94.9 %
21	0.0252	-11.4	98.8 %	94.4 %	25	1	0.717	-11.6	98.9 %	94.8 %
22	0.021	-9.22	98.9 %	94.5 %	25	2	0.721	-7.84	99 %	94.9 %
23	0.0253	-11.1	98.9 %	94.5 %	25	3	0.725	-6.48	98.9 %	94.9 %
24	0.018	-6.75	98.9 %	94.7 %	25	4	0.722	4.55	99 %	95.1 %
25	0.0296	-12.5	98.8 %	94.4 %	25	5	0.727	-6.71	99 %	94.9 %
26	0.0192	-6.91	98.8 %	94.7 %	30	1	0.849	-7.35	98.9 %	94.9 %
27	0.0224	-8.7	98.8 %	94.6 %	30	2	0.85	2.77	99 %	95 %
28	0.0247	-9.64	98.9 %	94.7 %	30	3	0.859	-5.09	98.9 %	94.9 %
29	0.0204	-6.76	98.9 %	94.7 %	30	4	0.867	-7.34	99 %	95 %
30	0.0267	-10.3	98.8 %	94.6 %	30	5	0.862	0.536	99 %	95 %

Tabla E.3.4: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0295	-16	98.2 %	92.7 %	5	1	0.117	1.72	98.9 %	95 %
2	0.028	-15.4	98.3 %	93.1 %	5	2	0.131	7.54	99 %	95.1 %
3	0.0273	-15.1	98.4 %	93.4 %	5	3	0.133	4.77	99 %	95 %
4	0.0281	-15.3	98.5 %	93.5 %	5	4	0.14	-0.884	99 %	95 %
5	0.0228	-13.3	98.5 %	93.8 %	5	5	0.145	-1.21	99 %	94.9 %
6	0.0283	-15.1	98.6 %	93.8 %	10	1	0.307	-0.481	99 %	95 %
7	0.0257	-14	98.6 %	94 %	10	2	0.316	-2.25	99 %	94.9 %
8	0.0261	-14	98.7 %	94.1 %	10	3	0.324	4.43	99 %	95 %
9	0.0236	-12.9	98.7 %	94.1 %	10	4	0.331	-2.53	99 %	95 %
10	0.0213	-11.8	98.7 %	94.3 %	10	5	0.34	0.489	99 %	95 %
11	0.0301	-14.9	98.7 %	94.1 %	15	1	0.521	3.37	99 %	95.1 %
12	0.0281	-14	98.8 %	94.2 %	15	2	0.53	4.26	99 %	95.1 %
13	0.0274	-13.6	98.7 %	94.1 %	15	3	0.532	1.57	99 %	95 %
14	0.0269	-13.3	98.7 %	94.1 %	15	4	0.544	-2.1	98.9 %	95 %
15	0.0251	-12.3	98.8 %	94.3 %	15	5	0.549	4.36	99 %	95 %
16	0.0268	-12.8	98.7 %	94.3 %	20	1	0.735	-3.72	99 %	94.9 %
17	0.0293	-13.5	98.8 %	94.2 %	20	2	0.742	-1.37	99 %	95 %
18	0.023	-10.8	98.8 %	94.5 %	20	3	0.751	2.61	99 %	95.1 %
19	0.031	-13.8	98.7 %	94.3 %	20	4	0.758	4.14	99 %	95.1 %
20	0.0337	-14.6	98.7 %	94.2 %	20	5	0.77	-6.12	98.9 %	94.9 %
21	0.0335	-14.4	98.7 %	94.3 %	25	1	0.965	-13.9	99 %	94.8 %
22	0.0281	-12.2	98.8 %	94.3 %	25	2	0.968	-8.51	99 %	95 %
23	0.0335	-14.1	98.8 %	94.3 %	25	3	0.974	-7.01	98.9 %	94.9 %
24	0.0238	-9.79	98.9 %	94.6 %	25	4	0.972	4.9	99 %	95 %
25	0.0389	-15.6	98.7 %	94.3 %	25	5	0.98	-7.97	99 %	94.9 %
26	0.0251	-10	98.8 %	94.6 %	30	1	1.16	-6.36	98.9 %	95 %
27	0.0294	-11.8	98.8 %	94.5 %	30	2	1.16	2.88	99 %	95 %
28	0.0326	-12.9	98.8 %	94.5 %	30	3	1.18	-6.36	99 %	94.9 %
29	0.0263	-9.93	98.8 %	94.6 %	30	4	1.19	-8.16	99 %	94.9 %
30	0.0351	-13.6	98.7 %	94.5 %	30	5	1.18	-0.701	99 %	95 %

Tabla E.3.5: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.0282	-15	98.2 %	92.8 %	5	1	0.13	1.34	98.9 %	95 %
2	0.0275	-14.7	98.3 %	93.2 %	5	2	0.144	7	99 %	95 %
3	0.0272	-14.5	98.5 %	93.5 %	5	3	0.148	4.75	99 %	95 %
4	0.0283	-14.8	98.5 %	93.5 %	5	4	0.155	-0.423	99 %	95.1 %
5	0.0236	-12.9	98.6 %	93.8 %	5	5	0.162	-1	99 %	94.9 %
6	0.0292	-14.8	98.6 %	93.8 %	10	1	0.352	-0.307	99 %	95 %
7	0.027	-13.9	98.6 %	94 %	10	2	0.362	-2.48	99 %	94.9 %
8	0.0275	-13.9	98.6 %	94.1 %	10	3	0.372	4.08	99 %	95 %
9	0.0252	-12.9	98.7 %	94.1 %	10	4	0.381	-3.9	99 %	94.9 %
10	0.023	-11.8	98.7 %	94.2 %	10	5	0.391	1.1	99 %	95 %
11	0.0322	-15	98.7 %	94.1 %	15	1	0.611	3.21	99 %	95.1 %
12	0.0305	-14.3	98.8 %	94.2 %	15	2	0.621	4.21	99 %	95.1 %
13	0.0297	-13.9	98.7 %	94.1 %	15	3	0.625	2.19	99 %	95 %
14	0.0293	-13.6	98.7 %	94.1 %	15	4	0.639	-1.86	99 %	94.9 %
15	0.0275	-12.6	98.8 %	94.2 %	15	5	0.647	5.24	99 %	95.1 %
16	0.0294	-13.2	98.7 %	94.3 %	20	1	0.878	-3.52	99 %	94.9 %
17	0.0322	-14	98.8 %	94.2 %	20	2	0.887	-0.919	99 %	95 %
18	0.0256	-11.2	98.8 %	94.4 %	20	3	0.898	2.07	99 %	95.1 %
19	0.0341	-14.4	98.7 %	94.2 %	20	4	0.908	3.56	98.9 %	95 %
20	0.0369	-15.2	98.7 %	94.2 %	20	5	0.923	-6.21	99 %	94.9 %
21	0.0368	-14.9	98.7 %	94.2 %	25	1	1.17	-15.2	99 %	94.8 %
22	0.0313	-12.8	98.8 %	94.3 %	25	2	1.18	-8.64	99 %	95 %
23	0.037	-14.7	98.8 %	94.3 %	25	3	1.18	-6.92	98.9 %	94.9 %
24	0.0268	-10.5	98.9 %	94.6 %	25	4	1.18	5.06	99 %	95 %
25	0.0428	-16.3	98.7 %	94.2 %	25	5	1.19	-8.61	99 %	94.9 %
26	0.0284	-10.8	98.8 %	94.5 %	30	1	1.43	-5.15	99 %	95 %
27	0.033	-12.6	98.8 %	94.5 %	30	2	1.44	2.8	99 %	95 %
28	0.0367	-13.8	98.8 %	94.4 %	30	3	1.46	-7.12	99 %	94.9 %
29	0.0297	-10.8	98.8 %	94.6 %	30	4	1.47	-8.16	99 %	95 %
30	0.0394	-14.6	98.7 %	94.4 %	30	5	1.47	-1.47	99 %	95 %

Tabla E.3.6: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.106	-31.1	96.6 %	89.4 %	5	1	0.102	2.3	99 %	95 %
2	0.0958	-29.5	97.2 %	90.7 %	5	2	0.115	8.13	99 %	95.1 %
3	0.0893	-28.4	97.6 %	91.5 %	5	3	0.115	4.84	99 %	95 %
4	0.0868	-27.9	97.8 %	91.9 %	5	4	0.121	-1.33	99 %	95 %
5	0.0734	-25.4	98.1 %	92.4 %	5	5	0.125	-1.3	99 %	94.9 %
6	0.0803	-26.7	98.1 %	92.6 %	10	1	0.252	-0.685	99 %	95 %
7	0.0734	-25.3	98.2 %	93 %	10	2	0.259	-1.76	99 %	95 %
8	0.0715	-24.8	98.3 %	93.1 %	10	3	0.267	5.23	99 %	95 %
9	0.0647	-23.3	98.3 %	93.2 %	10	4	0.27	-0.721	98.9 %	95 %
10	0.0589	-21.9	98.4 %	93.4 %	10	5	0.277	0.167	99 %	95 %
11	0.0726	-24.8	98.4 %	93.4 %	15	1	0.413	3.72	99 %	95.1 %
12	0.0675	-23.6	98.5 %	93.5 %	15	2	0.42	4.78	99 %	95.1 %
13	0.0648	-23	98.4 %	93.5 %	15	3	0.42	0.869	99 %	95 %
14	0.0632	-22.5	98.5 %	93.6 %	15	4	0.429	-1.8	99 %	95 %
15	0.0579	-21.2	98.6 %	93.7 %	15	5	0.432	3.57	99 %	95 %
16	0.0596	-21.4	98.5 %	93.8 %	20	1	0.567	-3.51	99 %	94.9 %
17	0.0628	-22	98.6 %	93.8 %	20	2	0.571	-1.68	99 %	95 %
18	0.0507	-19	98.6 %	94.1 %	20	3	0.579	3.1	99 %	95.1 %
19	0.0628	-21.8	98.6 %	93.8 %	20	4	0.582	4.23	98.9 %	95 %
20	0.0669	-22.6	98.6 %	93.8 %	20	5	0.591	-5.85	98.9 %	94.9 %
21	0.0649	-22.1	98.6 %	93.8 %	25	1	0.725	-11.5	98.9 %	94.9 %
22	0.056	-19.8	98.7 %	94 %	25	2	0.729	-7.73	98.9 %	94.9 %
23	0.0634	-21.5	98.7 %	93.9 %	25	3	0.733	-6.27	98.9 %	94.9 %
24	0.047	-17.2	98.7 %	94.2 %	25	4	0.731	4.83	99 %	95.1 %
25	0.0693	-22.7	98.6 %	93.9 %	25	5	0.735	-6.55	99 %	94.9 %
26	0.0474	-17	98.7 %	94.2 %	30	1	0.859	-7.09	99 %	94.9 %
27	0.0539	-18.7	98.6 %	94.2 %	30	2	0.86	2.99	99 %	95 %
28	0.058	-19.6	98.7 %	94.2 %	30	3	0.869	-4.95	98.9 %	94.9 %
29	0.0471	-16.5	98.8 %	94.3 %	30	4	0.878	-7.29	99 %	94.9 %
30	0.0602	-20	98.7 %	94.2 %	30	5	0.873	0.265	99 %	95 %

Tabla E.3.7: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.134	-34.8	96 %	88.3 %	5	1	0.118	1.72	98.9 %	95 %
2	0.127	-33.8	96.7 %	89.8 %	5	2	0.131	7.56	99 %	95.1 %
3	0.122	-33.1	97.2 %	90.6 %	5	3	0.134	4.87	99 %	95 %
4	0.121	-33	97.4 %	91.1 %	5	4	0.14	-0.854	99 %	95 %
5	0.107	-30.7	97.7 %	91.7 %	5	5	0.146	-1.23	99 %	94.9 %
6	0.117	-32.2	97.8 %	92 %	10	1	0.309	-0.555	99 %	94.9 %
7	0.11	-31.1	97.9 %	92.3 %	10	2	0.318	-2.23	99 %	95 %
8	0.108	-30.8	98.1 %	92.5 %	10	3	0.326	4.55	99 %	95 %
9	0.101	-29.4	98.1 %	92.6 %	10	4	0.333	-2.59	99 %	95 %
10	0.0938	-28.2	98.2 %	92.9 %	10	5	0.342	0.59	99 %	95 %
11	0.112	-31.2	98.2 %	92.9 %	15	1	0.525	3.28	99 %	95.1 %
12	0.106	-30.2	98.3 %	93 %	15	2	0.534	4.31	99 %	95.1 %
13	0.103	-29.6	98.2 %	93.1 %	15	3	0.536	1.68	99 %	95 %
14	0.101	-29.2	98.3 %	93.1 %	15	4	0.548	-2.19	98.9 %	95 %
15	0.0947	-28	98.4 %	93.3 %	15	5	0.553	4.57	99 %	95.1 %
16	0.0974	-28.4	98.4 %	93.3 %	20	1	0.741	-3.72	99 %	94.9 %
17	0.102	-29	98.4 %	93.3 %	20	2	0.748	-1.4	99 %	95 %
18	0.0857	-26	98.5 %	93.6 %	20	3	0.758	2.5	99 %	95.1 %
19	0.102	-29	98.4 %	93.4 %	20	4	0.764	3.95	99 %	95.1 %
20	0.108	-29.8	98.4 %	93.4 %	20	5	0.777	-6.25	98.9 %	94.9 %
21	0.105	-29.4	98.4 %	93.4 %	25	1	0.974	-13.9	99 %	94.8 %
22	0.0933	-27.1	98.5 %	93.6 %	25	2	0.978	-8.52	99 %	95 %
23	0.103	-28.9	98.5 %	93.6 %	25	3	0.983	-6.96	98.9 %	94.9 %
24	0.0811	-24.6	98.6 %	93.9 %	25	4	0.982	5.02	99 %	95.1 %
25	0.112	-30.1	98.5 %	93.5 %	25	5	0.989	-7.92	99 %	94.9 %
26	0.0815	-24.5	98.6 %	93.8 %	30	1	1.17	-6.2	98.9 %	95 %
27	0.0908	-26.3	98.5 %	93.8 %	30	2	1.18	2.95	99 %	95 %
28	0.0967	-27.3	98.6 %	93.8 %	30	3	1.19	-6.33	99 %	94.9 %
29	0.081	-24.2	98.6 %	93.9 %	30	4	1.21	-8.25	99 %	94.9 %
30	0.0999	-27.7	98.5 %	93.9 %	30	5	1.2	-1.08	99 %	95 %

Tabla E.3.8: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	B_d	$C_d^{99\%}$	$C_d^{95\%}$	d	i	E_{di}	B_{di}	$C_{di}^{99\%}$	$C_{di}^{95\%}$
1	0.138	-34.8	95.8 %	88.1 %	5	1	0.13	1.26	98.9 %	95 %
2	0.134	-34.2	96.6 %	89.6 %	5	2	0.144	7.04	99 %	95 %
3	0.131	-33.8	97.1 %	90.5 %	5	3	0.148	4.91	99 %	95 %
4	0.132	-34	97.3 %	90.9 %	5	4	0.156	-0.385	99 %	95.1 %
5	0.119	-31.9	97.6 %	91.5 %	5	5	0.162	-1.13	99 %	95 %
6	0.131	-33.6	97.7 %	91.8 %	10	1	0.353	-0.401	99 %	94.9 %
7	0.124	-32.7	97.8 %	92.1 %	10	2	0.364	-2.39	99 %	94.9 %
8	0.124	-32.5	98 %	92.2 %	10	3	0.374	4.21	99 %	95 %
9	0.117	-31.3	98 %	92.4 %	10	4	0.383	-3.91	99 %	94.9 %
10	0.11	-30.2	98.1 %	92.7 %	10	5	0.393	1.17	99 %	95 %
11	0.131	-33.4	98.1 %	92.7 %	15	1	0.614	3.16	99 %	95.1 %
12	0.126	-32.5	98.2 %	92.8 %	15	2	0.625	4.1	99 %	95 %
13	0.123	-32.1	98.1 %	92.9 %	15	3	0.629	2.3	99 %	95 %
14	0.121	-31.7	98.2 %	92.9 %	15	4	0.643	-2.1	99 %	94.9 %
15	0.115	-30.6	98.3 %	93.1 %	15	5	0.651	5.44	99 %	95.1 %
16	0.118	-31.1	98.3 %	93.1 %	20	1	0.884	-3.57	99 %	94.9 %
17	0.124	-31.9	98.3 %	93.1 %	20	2	0.893	-0.821	99 %	95 %
18	0.106	-28.9	98.4 %	93.4 %	20	3	0.904	1.91	99 %	95.1 %
19	0.125	-32	98.3 %	93.2 %	20	4	0.914	3.59	99 %	95 %
20	0.131	-32.9	98.3 %	93.2 %	20	5	0.929	-6.34	98.9 %	94.9 %
21	0.13	-32.5	98.3 %	93.2 %	25	1	1.18	-15.2	98.9 %	94.8 %
22	0.116	-30.4	98.5 %	93.4 %	25	2	1.19	-8.67	99 %	95 %
23	0.128	-32.2	98.4 %	93.4 %	25	3	1.19	-6.93	98.9 %	94.9 %
24	0.103	-28	98.5 %	93.7 %	25	4	1.19	5.15	99 %	95 %
25	0.138	-33.6	98.4 %	93.3 %	25	5	1.2	-8.59	99 %	94.9 %
26	0.105	-28.1	98.5 %	93.7 %	30	1	1.44	-4.97	99 %	95 %
27	0.115	-29.9	98.4 %	93.6 %	30	2	1.45	2.93	99 %	95 %
28	0.123	-31	98.5 %	93.7 %	30	3	1.47	-7.02	99 %	94.9 %
29	0.105	-27.9	98.5 %	93.7 %	30	4	1.49	-8.16	99 %	95 %
30	0.127	-31.6	98.4 %	93.7 %	30	5	1.48	-1.72	99 %	95 %

Tabla E.3.9: EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.



Apéndice F

Resultados del experimento de simulación del capítulo 5

F.1. Introducción

En el presente apéndice se presentan tablas con los valores numéricos correspondientes a la realización del experimento de simulación descrito en el apartado 5.3, en concreto:

- en la sección F.2 se muestran las tablas de resultados correspondientes a las medidas de eficiencia calculadas en el experimento 5.3, bajo un modelo con datos homocedásticos, $\ell = 0$,
- en la sección F.3 se muestran las tablas de resultados correspondientes a las medidas de eficiencia calculadas en el experimento 5.3, bajo un modelo con datos heterocedásticos, $\ell = 1/2$.

Las medidas de eficiencia E_d , E_{di} , E_d^{*1} , E_{di}^{*1} , E_d^{*2} y E_{di}^{*2} , se han multiplicado por 10^7 para poder apreciar las magnitudes. Los sesgos empíricos B_d , B_{di} , B_d^{*1} , B_{di}^{*1} , B_d^{*2} y B_{di}^{*2} , se han multiplicado por 10^5 , mientras que las probabilidades de cobertura se muestran en %.

F.2. Tablas correspondientes al caso homocedástico, $\ell = 0$

F.2.1. Error cuadrático medio empírico, E_d y E_{di}

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	5.979	2.250	0.565	5	1	12.809	46.842	12.968
2	5.786	1.910	0.570	5	2	14.213	48.026	14.381
3	5.868	2.051	0.567	5	3	13.123	51.458	13.289
4	6.305	2.059	0.565	5	4	12.585	50.756	12.743
5	4.871	2.100	0.655	5	5	12.546	46.024	12.703
6	6.406	1.995	0.567	10	1	12.562	49.384	12.724
7	5.795	1.945	0.569	10	2	12.729	51.079	12.883
8	6.159	1.978	0.564	10	3	12.703	46.956	12.860
9	5.301	2.048	0.602	10	4	12.940	48.457	13.092
10	4.894	2.235	0.652	10	5	12.552	45.807	12.709
11	6.713	2.098	0.579	15	1	12.762	51.382	12.926
12	6.488	2.121	0.570	15	2	12.745	49.367	12.904
13	6.173	2.264	0.564	15	3	12.564	47.175	12.719
14	6.049	1.972	0.563	15	4	12.549	47.854	12.707
15	5.354	2.121	0.597	15	5	12.886	46.957	13.051
16	6.156	2.055	0.564	20	1	12.533	43.172	12.691
17	6.349	2.153	0.568	20	2	12.579	47.271	12.743
18	5.044	2.071	0.631	20	3	12.557	49.702	12.723
19	6.662	2.146	0.577	20	4	12.615	46.633	12.774
20	6.615	2.179	0.575	20	5	12.601	52.134	12.754
21	7.033	2.145	0.602	25	1	13.941	51.193	14.089
22	5.893	2.150	0.568	25	2	13.359	46.583	13.510
23	6.808	2.063	0.586	25	3	12.991	52.679	13.137
24	4.947	2.180	0.646	25	4	12.747	47.959	12.905
25	7.625	2.280	0.663	25	5	14.014	49.320	14.159
26	5.098	2.325	0.628	30	1	12.625	47.388	12.781
27	5.887	2.119	0.568	30	2	12.695	46.947	12.857
28	6.405	2.114	0.567	30	3	13.040	48.837	13.193
29	5.241	2.174	0.609	30	4	13.330	47.831	13.477
30	6.583	2.175	0.576	30	5	12.683	45.618	12.838

Tabla F.2.1: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	6.400	2.262	0.567	5	1	13.140	49.130	13.287
2	6.272	1.922	0.570	5	2	14.206	50.864	14.474
3	6.292	2.070	0.570	5	3	13.466	55.549	13.666
4	6.736	2.068	0.567	5	4	12.984	53.383	13.029
5	5.321	2.126	0.655	5	5	12.965	48.393	13.024
6	6.858	2.005	0.570	10	1	12.988	52.387	13.039
7	6.262	1.954	0.570	10	2	13.230	53.849	13.215
8	6.594	1.983	0.566	10	3	13.055	50.231	13.181
9	5.742	2.067	0.603	10	4	13.749	51.865	13.672
10	5.330	2.262	0.654	10	5	12.987	48.604	13.090
11	7.164	2.096	0.582	15	1	13.139	54.416	13.290
12	6.978	2.127	0.574	15	2	13.125	52.900	13.267
13	6.626	2.281	0.566	15	3	12.986	50.090	13.078
14	6.507	1.985	0.565	15	4	12.973	50.594	13.069
15	5.800	2.147	0.598	15	5	13.349	50.097	13.532
16	6.607	2.079	0.566	20	1	12.951	45.893	13.015
17	6.814	2.161	0.571	20	2	13.001	50.118	13.052
18	5.478	2.091	0.633	20	3	12.986	53.286	13.051
19	7.121	2.139	0.580	20	4	12.963	49.709	13.061
20	7.059	2.186	0.578	20	5	13.044	54.696	13.075
21	7.455	2.139	0.604	25	1	14.704	53.878	14.553
22	6.351	2.165	0.569	25	2	13.841	49.316	13.755
23	7.258	2.072	0.589	25	3	13.446	55.978	13.400
24	5.406	2.187	0.645	25	4	13.133	51.078	13.265
25	8.064	2.285	0.666	25	5	14.729	51.631	14.572
26	5.564	2.346	0.627	30	1	13.018	50.190	13.057
27	6.331	2.142	0.570	30	2	13.069	49.968	13.195
28	6.884	2.128	0.570	30	3	13.585	51.038	13.525
29	5.702	2.189	0.609	30	4	13.808	50.218	13.720
30	7.051	2.181	0.579	30	5	13.151	47.898	13.162

Tabla F.2.2: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	5.448	8.691	6.421	5	1	13.919	210.128	158.617
2	5.364	8.460	6.434	5	2	14.951	207.139	161.118
3	5.296	8.581	6.446	5	3	14.382	207.448	159.894
4	5.805	8.545	6.379	5	4	13.676	212.127	157.277
5	4.569	8.529	6.625	5	5	13.681	209.968	157.422
6	5.822	8.792	6.377	10	1	13.685	211.558	157.250
7	5.309	8.453	6.444	10	2	13.891	211.251	156.396
8	5.637	8.531	6.396	10	3	13.963	212.621	158.734
9	4.910	8.692	6.528	10	4	14.513	215.474	156.013
10	4.592	8.497	6.619	10	5	13.848	206.935	158.377
11	6.085	8.691	6.364	15	1	14.088	210.476	159.135
12	6.007	8.733	6.363	15	2	13.978	215.108	158.802
13	5.617	8.700	6.404	15	3	13.755	210.077	158.004
14	5.593	8.524	6.403	15	4	13.817	209.594	158.317
15	4.885	8.617	6.535	15	5	14.500	211.788	160.223
16	5.622	8.557	6.400	20	1	13.704	213.970	157.439
17	5.775	8.599	6.383	20	2	13.684	212.289	157.647
18	4.704	8.586	6.585	20	3	13.704	207.597	157.512
19	6.110	8.665	6.360	20	4	13.686	210.427	157.444
20	6.026	8.634	6.370	20	5	13.690	213.781	157.212
21	6.466	8.762	6.349	25	1	15.094	219.118	155.984
22	5.502	8.644	6.409	25	2	14.380	211.148	156.659
23	6.260	8.671	6.355	25	3	13.997	212.089	156.783
24	4.717	8.617	6.583	25	4	13.937	208.429	158.701
25	6.949	8.743	6.374	25	5	15.247	213.775	156.482
26	4.785	8.572	6.573	30	1	13.786	212.225	157.546
27	5.393	8.666	6.433	30	2	13.866	209.751	158.877
28	5.904	8.598	6.387	30	3	14.114	214.424	156.960
29	4.833	8.539	6.570	30	4	14.284	212.542	156.198
30	6.142	8.662	6.398	30	5	13.860	211.014	156.697

Tabla F.2.3: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	26.262	2.275	0.567	5	1	12.771	47.085	13.019
2	25.842	1.924	0.572	5	2	13.564	48.389	14.435
3	25.930	2.082	0.571	5	3	12.904	51.805	13.364
4	26.991	2.076	0.568	5	4	13.132	50.895	12.789
5	23.702	2.139	0.661	5	5	13.004	46.199	12.753
6	27.073	2.010	0.568	10	1	13.063	49.472	12.776
7	25.907	1.961	0.571	10	2	13.456	51.169	12.931
8	26.585	1.998	0.566	10	3	12.760	47.157	12.921
9	24.658	2.086	0.608	10	4	13.849	48.624	13.158
10	23.797	2.267	0.655	10	5	12.844	45.920	12.759
11	27.826	2.120	0.581	15	1	12.760	51.476	12.965
12	27.390	2.146	0.573	15	2	12.774	49.510	12.957
13	26.700	2.294	0.566	15	3	12.852	47.323	12.770
14	26.545	1.991	0.566	15	4	12.855	48.033	12.755
15	24.845	2.155	0.601	15	5	12.810	47.195	13.124
16	26.648	2.073	0.566	20	1	12.956	43.160	12.736
17	27.099	2.178	0.571	20	2	13.100	47.446	12.796
18	24.131	2.095	0.635	20	3	12.900	49.897	12.770
19	27.664	2.163	0.578	20	4	12.761	46.659	12.814
20	27.743	2.193	0.580	20	5	13.165	52.215	12.810
21	28.497	2.166	0.604	25	1	15.271	51.237	14.147
22	26.145	2.163	0.570	25	2	14.454	46.625	13.559
23	28.064	2.077	0.589	25	3	13.906	52.814	13.192
24	24.063	2.187	0.640	25	4	12.807	48.276	12.962
25	29.727	2.295	0.665	25	5	15.353	49.392	14.202
26	24.278	2.356	0.630	30	1	13.200	47.433	12.829
27	26.089	2.126	0.571	30	2	12.787	47.127	12.912
28	27.259	2.121	0.571	30	3	13.977	49.013	13.243
29	24.597	2.198	0.612	30	4	14.430	47.770	13.534
30	27.599	2.194	0.579	30	5	13.332	45.743	12.908

Tabla F.2.4: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	30.485	2.279	0.568	5	1	13.083	49.039	13.314
2	30.089	1.923	0.572	5	2	13.997	51.182	14.524
3	30.123	2.086	0.572	5	3	13.384	55.660	13.754
4	31.260	2.077	0.568	5	4	13.074	53.037	13.067
5	27.789	2.141	0.661	5	5	13.055	48.327	13.065
6	31.365	2.012	0.569	10	1	13.087	52.004	13.079
7	30.131	1.962	0.572	10	2	13.397	53.857	13.242
8	30.824	1.998	0.567	10	3	13.042	50.184	13.234
9	28.790	2.088	0.609	10	4	14.024	51.384	13.712
10	27.850	2.272	0.657	10	5	13.003	48.386	13.129
11	32.153	2.119	0.582	15	1	13.083	54.318	13.318
12	31.739	2.143	0.574	15	2	13.083	52.924	13.302
13	30.975	2.296	0.567	15	3	13.015	49.912	13.121
14	30.784	1.994	0.567	15	4	13.000	50.543	13.101
15	28.981	2.156	0.602	15	5	13.281	50.029	13.608
16	30.923	2.076	0.567	20	1	13.021	45.593	13.050
17	31.389	2.178	0.571	20	2	13.094	49.937	13.092
18	28.223	2.099	0.636	20	3	13.068	53.115	13.090
19	32.009	2.161	0.579	20	4	12.986	49.446	13.102
20	32.057	2.193	0.580	20	5	13.170	54.887	13.120
21	32.870	2.166	0.604	25	1	15.073	53.543	14.583
22	30.374	2.169	0.570	25	2	14.130	49.100	13.798
23	32.414	2.073	0.590	25	3	13.684	55.719	13.450
24	28.167	2.193	0.640	25	4	13.110	51.439	13.315
25	34.168	2.298	0.666	25	5	15.109	51.283	14.609
26	28.411	2.355	0.630	30	1	13.121	50.063	13.098
27	30.302	2.131	0.571	30	2	13.061	49.701	13.247
28	31.586	2.124	0.572	30	3	13.824	51.239	13.558
29	28.736	2.203	0.613	30	4	14.083	49.866	13.755
30	31.951	2.194	0.581	30	5	13.325	47.776	13.219

Tabla F.2.5: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	28.716	2.282	0.570	5	1	13.647	50.632	13.794
2	28.451	1.932	0.573	5	2	14.532	52.905	14.811
3	28.390	2.098	0.574	5	3	14.051	58.320	14.275
4	29.459	2.087	0.570	5	4	13.517	54.962	13.571
5	26.259	2.162	0.661	5	5	13.518	50.011	13.574
6	29.597	2.019	0.571	10	1	13.542	54.108	13.583
7	28.471	1.979	0.573	10	2	13.791	55.768	13.752
8	29.068	2.006	0.569	10	3	13.603	52.514	13.734
9	27.174	2.106	0.610	10	4	14.574	53.867	14.433
10	26.295	2.294	0.659	10	5	13.571	50.351	13.691
11	30.327	2.116	0.584	15	1	13.691	56.160	13.851
12	29.996	2.150	0.577	15	2	13.681	55.224	13.833
13	29.230	2.314	0.569	15	3	13.550	52.014	13.648
14	29.068	2.004	0.568	15	4	13.541	52.642	13.646
15	27.366	2.181	0.603	15	5	13.998	52.324	14.211
16	29.178	2.089	0.569	20	1	13.500	47.783	13.562
17	29.637	2.187	0.573	20	2	13.548	51.965	13.597
18	26.633	2.114	0.638	20	3	13.570	55.488	13.607
19	30.204	2.163	0.581	20	4	13.502	51.711	13.581
20	30.226	2.198	0.582	20	5	13.612	56.585	13.629
21	30.952	2.161	0.605	25	1	15.397	55.589	15.184
22	28.672	2.182	0.572	25	2	14.367	51.198	14.247
23	30.562	2.078	0.592	25	3	13.977	57.903	13.910
24	26.636	2.198	0.639	25	4	13.686	53.701	13.823
25	32.192	2.303	0.667	25	5	15.371	53.015	15.157
26	26.868	2.371	0.629	30	1	13.552	52.225	13.595
27	28.591	2.150	0.573	30	2	13.622	51.890	13.751
28	29.836	2.139	0.574	30	3	14.169	52.836	14.075
29	27.156	2.213	0.613	30	4	14.288	51.804	14.174
30	30.166	2.199	0.583	30	5	13.738	49.429	13.723

Tabla F.2.6: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	112.664	2.291	0.571	5	1	13.676	47.190	13.054
2	111.846	1.934	0.576	5	2	13.275	48.608	14.461
3	111.850	2.106	0.576	5	3	13.410	52.010	13.408
4	114.246	2.090	0.572	5	4	15.194	50.909	12.817
5	107.198	2.164	0.666	5	5	14.904	46.323	12.783
6	114.213	2.023	0.571	10	1	15.040	49.483	12.807
7	112.040	1.972	0.575	10	2	15.874	51.237	12.961
8	113.242	2.013	0.570	10	3	13.822	47.296	12.961
9	109.165	2.111	0.615	10	4	16.619	48.718	13.198
10	107.421	2.291	0.660	10	5	14.387	45.979	12.791
11	115.926	2.134	0.585	15	1	13.780	51.564	12.986
12	115.126	2.160	0.577	15	2	13.810	49.590	12.990
13	113.642	2.313	0.570	15	3	14.388	47.420	12.802
14	113.484	2.004	0.570	15	4	14.467	48.133	12.783
15	109.668	2.178	0.605	15	5	13.590	47.363	13.173
16	113.517	2.088	0.570	20	1	14.776	43.182	12.763
17	114.498	2.195	0.575	20	2	15.127	47.573	12.830
18	108.129	2.112	0.640	20	3	14.579	50.002	12.799
19	115.515	2.176	0.581	20	4	14.075	46.675	12.838
20	115.936	2.203	0.585	20	5	15.276	52.288	12.845
21	117.301	2.181	0.607	25	1	18.861	51.254	14.181
22	112.574	2.175	0.573	25	2	17.582	46.633	13.586
23	116.479	2.087	0.594	25	3	16.683	52.869	13.226
24	108.269	2.192	0.637	25	4	13.891	48.491	13.000
25	119.811	2.306	0.668	25	5	18.965	49.409	14.225
26	108.522	2.375	0.633	30	1	15.298	47.416	12.858
27	112.372	2.132	0.574	30	2	13.948	47.212	12.945
28	114.916	2.125	0.575	30	3	16.801	49.097	13.275
29	109.171	2.216	0.617	30	4	17.572	47.745	13.569
30	115.563	2.208	0.584	30	5	15.641	45.821	12.958

Tabla F.2.7: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	138.886	2.293	0.572	5	1	13.041	49.167	13.342
2	138.035	1.933	0.576	5	2	13.629	51.394	14.548
3	137.975	2.107	0.577	5	3	13.200	55.895	13.798
4	140.624	2.089	0.572	5	4	13.292	53.091	13.093
5	132.874	2.164	0.666	5	5	13.262	48.419	13.092
6	140.616	2.024	0.572	10	1	13.322	52.029	13.107
7	138.212	1.972	0.575	10	2	13.780	53.912	13.268
8	139.520	2.012	0.570	10	3	13.042	50.320	13.269
9	135.036	2.112	0.615	10	4	14.611	51.468	13.756
10	133.071	2.292	0.661	10	5	13.078	48.426	13.157
11	142.484	2.133	0.585	15	1	13.040	54.357	13.337
12	141.651	2.159	0.578	15	2	13.055	53.018	13.332
13	139.988	2.314	0.571	15	3	13.110	50.019	13.150
14	139.768	2.005	0.570	15	4	13.108	50.645	13.125
15	135.572	2.178	0.606	15	5	13.146	50.229	13.657
16	139.852	2.090	0.571	20	1	13.200	45.591	13.075
17	140.917	2.194	0.575	20	2	13.323	50.045	13.121
18	133.880	2.114	0.640	20	3	13.271	53.236	13.117
19	142.069	2.175	0.581	20	4	13.076	49.426	13.125
20	142.483	2.203	0.585	20	5	13.456	54.887	13.151
21	144.010	2.180	0.607	25	1	15.832	53.575	14.613
22	138.784	2.178	0.573	25	2	14.709	49.116	13.821
23	143.103	2.085	0.594	25	3	14.163	55.815	13.483
24	134.031	2.195	0.637	25	4	13.098	51.660	13.350
25	146.767	2.306	0.668	25	5	15.859	51.320	14.627
26	134.340	2.373	0.633	30	1	13.356	50.077	13.126
27	138.554	2.135	0.575	30	2	13.074	49.781	13.278
28	141.402	2.127	0.576	30	3	14.329	51.364	13.585
29	135.045	2.217	0.617	30	4	14.664	49.831	13.787
30	142.130	2.208	0.585	30	5	13.698	47.844	13.263

Tabla F.2.8: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	140.926	2.296	0.572	5	1	13.598	50.487	13.805
2	140.162	1.932	0.576	5	2	14.397	53.116	14.839
3	140.013	2.109	0.577	5	3	13.980	58.348	14.331
4	142.652	2.090	0.572	5	4	13.538	54.670	13.592
5	135.018	2.165	0.666	5	5	13.550	49.985	13.593
6	142.672	2.024	0.572	10	1	13.579	53.717	13.603
7	140.297	1.972	0.575	10	2	13.872	55.809	13.764
8	141.551	2.013	0.571	10	3	13.577	52.476	13.766
9	137.133	2.112	0.615	10	4	14.747	53.404	14.457
10	135.149	2.295	0.663	10	5	13.549	50.152	13.713
11	144.508	2.133	0.585	15	1	13.634	56.094	13.863
12	143.752	2.158	0.579	15	2	13.632	55.399	13.850
13	142.059	2.315	0.571	15	3	13.543	51.840	13.673
14	141.802	2.007	0.571	15	4	13.527	52.430	13.661
15	137.648	2.178	0.607	15	5	13.930	52.310	14.261
16	141.931	2.092	0.571	20	1	13.516	47.546	13.580
17	142.966	2.194	0.575	20	2	13.575	51.822	13.618
18	135.981	2.116	0.641	20	3	13.615	55.478	13.629
19	144.139	2.173	0.582	20	4	13.507	51.384	13.603
20	144.492	2.204	0.586	20	5	13.669	56.559	13.652
21	146.025	2.179	0.608	25	1	15.598	55.277	15.188
22	140.847	2.181	0.574	25	2	14.521	50.882	14.269
23	145.134	2.083	0.594	25	3	14.107	57.802	13.943
24	136.151	2.198	0.638	25	4	13.657	53.790	13.858
25	148.753	2.309	0.669	25	5	15.584	52.698	15.173
26	136.482	2.371	0.633	30	1	13.583	52.000	13.617
27	140.601	2.139	0.575	30	2	13.598	51.595	13.780
28	143.484	2.129	0.577	30	3	14.285	52.956	14.082
29	137.159	2.220	0.617	30	4	14.429	51.384	14.190
30	144.213	2.207	0.586	30	5	13.834	49.389	13.758

Tabla F.2.9: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.2.2. Sesgo empírico, B_d y B_{di}

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-69.734	-0.265	1.129	5	1	16.540	-2.543	16.677
2	-68.332	1.334	2.525	5	2	40.947	33.017	41.101
3	-68.928	2.668	1.931	5	3	24.209	17.232	24.349
4	-72.027	-4.702	-1.168	5	4	-7.120	-15.929	-6.990
5	-61.274	8.803	9.586	5	5	-2.997	-16.452	-2.859
6	-72.725	-1.700	-1.869	10	1	-4.438	-8.704	-4.288
7	-68.396	1.301	2.456	10	2	-13.911	-30.821	-13.747
8	-71.007	-1.792	-0.150	10	3	12.725	11.569	12.854
9	-64.684	4.160	6.169	10	4	-20.026	-30.135	-19.880
10	-61.452	7.854	9.402	10	5	3.292	-4.001	3.428
11	-74.814	-3.707	-3.960	15	1	15.043	-5.389	15.193
12	-73.287	-1.728	-2.436	15	2	13.887	2.505	14.019
13	-71.107	-0.065	-0.256	15	3	3.312	-6.795	3.460
14	-70.228	0.848	0.623	15	4	3.106	-7.464	3.255
15	-65.092	4.179	5.759	15	5	18.351	-1.184	18.533
16	-70.993	-0.626	-0.146	20	1	-1.954	-22.788	-1.797
17	-72.315	-2.558	-1.473	20	2	-5.239	-23.297	-5.104
18	-62.653	8.931	8.190	20	3	1.692	-18.465	1.860
19	-74.458	-6.013	-3.613	20	4	9.309	1.939	9.443
20	-74.154	-3.823	-3.308	20	5	-6.582	-2.741	-6.423
21	-76.904	-6.139	-6.064	25	1	-37.371	-60.675	-37.198
22	-69.093	-1.622	1.751	25	2	-28.436	-36.314	-28.267
23	-75.430	-3.081	-4.588	25	3	-20.941	-29.735	-20.794
24	-61.854	8.380	8.983	25	4	12.756	-2.270	12.903
25	-80.659	-13.042	-9.820	25	5	-38.607	-51.466	-38.439
26	-63.089	8.658	7.755	30	1	-8.135	-21.037	-7.957
27	-69.059	0.902	1.776	30	2	11.522	-4.054	11.674
28	-72.705	-4.485	-1.871	30	3	-22.326	-34.843	-22.178
29	-64.198	6.884	6.633	30	4	-28.277	-41.930	-28.126
30	-73.910	-3.347	-3.080	30	5	-8.740	-23.696	-8.609

Tabla F.2.10: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-69.432	0.047	1.215	5	1	13.603	1.840	16.328
2	-68.504	1.245	2.141	5	2	35.358	34.344	38.091
3	-68.651	2.968	1.995	5	3	22.585	23.665	25.315
4	-71.817	-4.285	-1.172	5	4	-5.433	-5.749	-2.715
5	-61.172	8.789	9.475	5	5	-2.984	-8.647	-0.264
6	-72.656	-1.497	-2.014	10	1	-5.146	-2.318	-2.416
7	-68.436	1.328	2.207	10	2	-16.622	-24.437	-13.884
8	-70.814	-1.458	-0.171	10	3	9.719	18.021	12.433
9	-64.524	4.411	6.119	10	4	-28.114	-29.716	-25.389
10	-61.236	8.132	9.407	10	5	5.090	6.175	7.811
11	-74.740	-3.497	-4.098	15	1	13.588	0.260	16.316
12	-73.471	-1.721	-2.832	15	2	12.375	7.991	15.096
13	-71.038	-0.096	-0.398	15	3	3.266	1.282	5.993
14	-70.204	0.899	0.437	15	4	3.893	2.449	6.622
15	-64.969	4.251	5.671	15	5	19.415	7.833	22.159
16	-70.918	-0.591	-0.283	20	1	-2.085	-14.404	0.646
17	-72.335	-2.418	-1.700	20	2	-5.008	-14.479	-2.284
18	-62.427	9.103	8.207	20	3	-2.794	-14.049	-0.055
19	-74.432	-5.931	-3.796	20	4	4.188	5.864	6.911
20	-74.037	-3.739	-3.400	20	5	-7.807	4.362	-5.073
21	-76.646	-5.818	-6.015	25	1	-41.668	-58.051	-38.923
22	-69.064	-1.596	1.572	25	2	-29.681	-28.282	-26.936
23	-75.344	-3.104	-4.708	25	3	-21.695	-23.124	-18.963
24	-61.832	8.481	8.797	25	4	11.040	3.234	13.775
25	-80.516	-12.941	-9.883	25	5	-42.266	-47.811	-39.524
26	-63.123	8.676	7.513	30	1	-6.604	-11.361	-3.858
27	-68.927	1.127	1.702	30	2	9.247	1.957	11.982
28	-72.820	-4.630	-2.189	30	3	-24.904	-30.111	-22.169
29	-64.181	6.961	6.447	30	4	-29.200	-35.195	-26.465
30	-73.944	-3.288	-3.318	30	5	-11.594	-18.622	-8.872

Tabla F.2.11: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-58.973	-5.579	8.680	5	1	15.646	-24.758	51.891
2	-58.255	-6.190	9.400	5	2	35.708	9.590	72.118
3	-57.663	-4.427	9.998	5	3	26.582	-12.822	62.920
4	-61.924	-10.266	5.701	5	4	0.526	-43.249	36.646
5	-50.970	1.182	16.743	5	5	2.384	-26.005	38.520
6	-62.055	-6.460	5.571	10	1	-0.674	-36.211	35.448
7	-57.782	-4.651	9.878	10	2	-14.731	-49.672	21.280
8	-60.551	-5.854	7.086	10	3	16.702	-19.993	52.955
9	-54.216	-0.058	13.469	10	4	-28.912	-71.321	6.976
10	-51.203	-0.788	16.509	10	5	13.066	-31.118	49.292
11	-64.131	-13.104	3.477	15	1	19.824	-9.069	56.108
12	-63.531	-12.065	4.078	15	2	16.776	-19.695	53.042
13	-60.386	-7.903	7.253	15	3	8.884	-24.163	45.084
14	-60.181	-8.746	7.454	15	4	11.829	-28.998	48.057
15	-53.984	0.693	13.704	15	5	28.831	-5.238	65.192
16	-60.427	-7.386	7.209	20	1	2.320	-44.602	38.466
17	-61.672	-8.574	5.948	20	2	2.011	-41.672	38.182
18	-52.298	-0.498	15.402	20	3	-0.595	-32.245	35.569
19	-64.320	-9.610	3.283	20	4	3.955	-34.098	40.103
20	-63.670	-12.218	3.941	20	5	-2.771	-42.847	33.356
21	-67.021	-13.226	0.558	25	1	-37.008	-72.841	-1.188
22	-59.458	-5.188	8.182	25	2	-26.869	-61.676	9.113
23	-65.489	-12.557	2.106	25	3	-15.480	-54.206	20.563
24	-52.414	-0.047	15.286	25	4	13.598	-24.272	49.863
25	-70.546	-16.654	-2.984	25	5	-39.653	-75.021	-3.779
26	-53.054	-0.212	14.645	30	1	1.189	-33.248	37.341
27	-58.473	-6.609	9.178	30	2	13.246	-24.560	49.539
28	-62.709	-9.299	4.917	30	3	-19.464	-57.230	16.599
29	-53.452	0.983	14.249	30	4	-23.083	-70.440	12.865
30	-64.555	-11.054	3.066	30	5	-11.286	-53.646	24.763

Tabla F.2.12: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-153.064	0.224	1.135	5	1	4.061	-1.451	16.774
2	-151.685	1.833	2.510	5	2	28.430	34.219	41.160
3	-151.976	3.457	2.220	5	3	12.153	18.816	24.866
4	-155.427	-4.281	-1.230	5	4	-19.465	-14.709	-6.756
5	-144.459	9.477	9.739	5	5	-15.738	-15.692	-3.021
6	-155.691	-0.846	-1.495	10	1	-17.320	-8.154	-4.591
7	-151.901	1.646	2.293	10	2	-26.466	-30.064	-13.724
8	-154.114	-1.079	0.083	10	3	0.652	13.088	13.362
9	-147.730	4.850	6.465	10	4	-33.027	-29.473	-20.301
10	-144.784	8.346	9.412	10	5	-9.065	-2.998	3.648
11	-158.094	-3.270	-3.900	15	1	2.122	-4.878	14.854
12	-156.702	-1.283	-2.509	15	2	1.459	3.841	14.173
13	-154.485	0.400	-0.291	15	3	-8.977	-5.443	3.755
14	-153.984	0.929	0.211	15	4	-9.802	-6.936	2.927
15	-148.363	4.807	5.834	15	5	6.404	0.548	19.166
16	-154.327	-0.123	-0.134	20	1	-14.547	-21.444	-1.806
17	-155.766	-2.007	-1.575	20	2	-18.103	-22.674	-5.385
18	-145.927	9.457	8.264	20	3	-11.259	-17.904	1.492
19	-157.573	-5.401	-3.380	20	4	-3.698	2.562	9.019
20	-157.835	-3.613	-3.641	20	5	-19.684	-2.295	-6.944
21	-160.198	-5.571	-6.006	25	1	-50.091	-59.947	-37.330
22	-152.674	-1.377	1.520	25	2	-41.016	-35.447	-28.262
23	-158.840	-2.624	-4.647	25	3	-33.649	-29.095	-20.914
24	-145.690	8.349	8.502	25	4	0.399	-0.997	13.132
25	-163.989	-12.610	-9.797	25	5	-51.111	-50.472	-38.359
26	-146.452	9.128	7.743	30	1	-20.324	-19.609	-7.555
27	-152.497	1.309	1.694	30	2	-0.942	-3.170	11.800
28	-156.277	-4.195	-2.085	30	3	-34.803	-34.156	-22.061
29	-147.513	7.263	6.677	30	4	-41.023	-40.972	-28.283
30	-157.362	-3.017	-3.171	30	5	-22.431	-23.739	-9.706

Tabla F.2.13: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-162.370	0.362	1.177	5	1	9.373	2.398	15.958
2	-161.145	1.744	2.400	5	2	31.636	35.400	38.229
3	-161.252	3.581	2.293	5	3	19.677	25.325	26.264
4	-164.739	-4.216	-1.192	5	4	-8.902	-4.734	-2.321
5	-153.844	9.497	9.703	5	5	-7.608	-8.639	-1.025
6	-165.056	-0.783	-1.511	10	1	-9.183	-0.808	-2.591
7	-161.275	1.714	2.267	10	2	-20.066	-23.708	-13.467
8	-163.409	-0.943	0.136	10	3	6.449	18.780	13.027
9	-157.062	4.925	6.482	10	4	-32.016	-29.524	-25.429
10	-154.036	8.495	9.509	10	5	1.228	6.136	7.810
11	-167.432	-3.161	-3.888	15	1	9.366	0.900	15.959
12	-166.183	-1.370	-2.640	15	2	8.411	9.692	14.995
13	-163.868	0.431	-0.325	15	3	-0.238	2.330	6.353
14	-163.286	1.006	0.258	15	4	-0.608	2.303	5.984
15	-157.669	4.863	5.875	15	5	16.354	9.184	22.961
16	-163.719	-0.126	-0.177	20	1	-6.089	-13.271	0.509
17	-165.126	-1.992	-1.585	20	2	-8.755	-13.762	-2.168
18	-155.239	9.554	8.302	20	3	-6.952	-14.810	-0.347
19	-166.991	-5.394	-3.449	20	4	0.535	6.462	7.124
20	-167.150	-3.549	-3.607	20	5	-12.091	4.650	-5.493
21	-169.552	-5.548	-6.011	25	1	-45.449	-57.466	-38.838
22	-162.020	-1.328	1.523	25	2	-33.589	-28.367	-26.980
23	-168.205	-2.602	-4.662	25	3	-25.802	-23.429	-19.205
24	-155.053	8.411	8.488	25	4	7.490	4.005	14.087
25	-173.339	-12.597	-9.797	25	5	-46.097	-46.620	-39.490
26	-155.869	9.131	7.676	30	1	-10.020	-10.417	-3.406
27	-161.806	1.418	1.734	30	2	5.790	2.307	12.395
28	-165.714	-4.238	-2.173	30	3	-28.510	-29.843	-21.907
29	-156.875	7.287	6.665	30	4	-33.002	-33.882	-26.399
30	-166.811	-3.079	-3.271	30	5	-16.321	-18.301	-9.730

Tabla F.2.14: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-151.295	0.664	1.290	5	1	11.691	4.068	14.958
2	-150.418	1.678	2.166	5	2	31.931	34.358	35.201
3	-150.215	3.727	2.369	5	3	23.221	28.652	26.491
4	-153.731	-3.894	-1.147	5	4	-2.589	1.271	0.674
5	-142.945	9.424	9.639	5	5	-2.340	-3.849	0.924
6	-154.177	-0.575	-1.594	10	1	-4.846	2.359	-1.575
7	-150.483	1.645	2.099	10	2	-16.792	-20.080	-13.518
8	-152.454	-0.789	0.129	10	3	9.355	22.225	12.616
9	-146.107	5.087	6.476	10	4	-32.546	-30.392	-29.279
10	-143.063	8.642	9.520	10	5	7.357	12.366	10.622
11	-156.534	-3.091	-3.951	15	1	13.429	4.204	16.699
12	-155.465	-1.298	-2.883	15	2	12.366	12.652	15.633
13	-152.982	0.334	-0.400	15	3	4.109	6.540	7.379
14	-152.454	0.952	0.129	15	4	5.102	8.436	8.373
15	-146.768	4.850	5.814	15	5	21.597	14.118	24.874
16	-152.822	-0.120	-0.241	20	1	-1.328	-8.184	1.945
17	-154.302	-1.865	-1.722	20	2	-3.470	-8.630	-0.200
18	-144.237	9.596	8.344	20	3	-5.654	-13.136	-2.377
19	-156.125	-5.387	-3.543	20	4	1.283	7.696	4.553
20	-156.218	-3.537	-3.635	20	5	-8.238	8.301	-4.964
21	-158.509	-5.253	-5.929	25	1	-43.271	-56.362	-39.989
22	-151.140	-1.300	1.443	25	2	-29.213	-23.586	-25.931
23	-157.274	-2.716	-4.692	25	3	-20.992	-19.309	-17.716
24	-144.240	8.329	8.340	25	4	10.610	6.109	13.887
25	-162.376	-12.468	-9.793	25	5	-43.238	-44.327	-39.956
26	-145.078	9.108	7.506	30	1	-4.124	-4.714	-0.840
27	-150.882	1.519	1.698	30	2	8.774	4.915	12.055
28	-154.942	-4.316	-2.359	30	3	-25.255	-27.266	-21.975
29	-146.022	7.295	6.560	30	4	-27.844	-29.439	-24.565
30	-155.994	-3.054	-3.413	30	5	-12.959	-15.346	-9.686

Tabla F.2.15: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-321.544	0.588	1.191	5	1	-20.404	-0.668	16.937
2	-320.268	2.085	2.465	5	2	3.757	34.871	41.116
3	-320.275	3.997	2.458	5	3	-12.208	19.648	25.132
4	-323.994	-4.030	-1.259	5	4	-43.990	-14.037	-6.651
5	-312.929	9.860	9.805	5	5	-40.531	-15.278	-3.184
6	-323.943	-0.263	-1.209	10	1	-42.081	-7.792	-4.723
7	-320.572	1.827	2.160	10	2	-51.116	-29.603	-13.744
8	-322.439	-0.563	0.295	10	3	-23.587	14.147	13.753
9	-316.055	5.269	6.678	10	4	-57.928	-29.113	-20.571
10	-313.282	8.666	9.452	10	5	-33.464	-2.248	3.879
11	-326.581	-3.004	-3.848	15	1	-22.815	-4.610	14.548
12	-325.346	-1.086	-2.613	15	2	-23.068	4.701	14.276
13	-323.058	0.660	-0.326	15	3	-33.340	-4.516	4.022
14	-322.814	0.917	-0.081	15	4	-34.666	-6.701	2.692
15	-316.850	5.182	5.885	15	5	-17.749	1.560	19.642
16	-322.874	0.141	-0.141	20	1	-39.114	-20.679	-1.743
17	-324.380	-1.681	-1.648	20	2	-42.996	-22.371	-5.648
18	-314.407	9.784	8.325	20	3	-36.072	-17.563	1.308
19	-325.947	-5.006	-3.213	20	4	-28.681	2.825	8.666
20	-326.598	-3.517	-3.865	20	5	-44.635	-2.071	-7.265
21	-328.676	-5.215	-5.943	25	1	-74.793	-59.487	-37.402
22	-321.398	-1.285	1.335	25	2	-65.581	-34.898	-28.197
23	-327.426	-2.383	-4.693	25	3	-58.330	-28.703	-20.963
24	-314.629	8.212	8.105	25	4	-23.981	-0.153	13.381
25	-332.471	-12.329	-9.738	25	5	-75.648	-49.862	-38.267
26	-315.056	9.354	7.678	30	1	-44.696	-18.737	-7.297
27	-321.090	1.552	1.643	30	2	-25.518	-2.685	11.852
28	-325.015	-4.080	-2.281	30	3	-59.395	-33.828	-22.023
29	-316.058	7.422	6.675	30	4	-65.737	-40.323	-28.369
30	-326.017	-2.901	-3.283	30	5	-47.989	-24.112	-10.631

Tabla F.2.16: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-354.604	0.634	1.205	5	1	2.135	2.897	15.989
2	-353.402	2.020	2.406	5	2	24.322	35.980	38.185
3	-353.317	4.032	2.491	5	3	12.721	26.220	26.577
4	-357.045	-4.003	-1.236	5	4	-15.994	-4.078	-2.142
5	-346.022	9.847	9.787	5	5	-14.951	-8.230	-1.096
6	-357.035	-0.255	-1.226	10	1	-16.643	-0.615	-2.780
7	-353.653	1.847	2.154	10	2	-27.291	-23.272	-13.422
8	-355.495	-0.519	0.314	10	3	-0.484	19.622	13.366
9	-349.132	5.301	6.676	10	4	-39.625	-29.356	-25.766
10	-346.304	8.732	9.504	10	5	-5.929	6.666	7.924
11	-359.646	-2.956	-3.838	15	1	1.844	1.096	15.709
12	-358.479	-1.139	-2.671	15	2	1.220	10.382	15.075
13	-356.152	0.665	-0.344	15	3	-7.330	3.189	6.534
14	-355.844	0.963	-0.036	15	4	-8.152	2.447	5.710
15	-349.900	5.198	5.909	15	5	9.552	10.167	23.430
16	-355.971	0.136	-0.163	20	1	-13.341	-12.403	0.527
17	-357.454	-1.680	-1.647	20	2	-16.224	-13.523	-2.367
18	-347.466	9.813	8.341	20	3	-14.514	-14.589	-0.639
19	-359.063	-5.020	-3.254	20	4	-7.001	6.751	6.857
20	-359.649	-3.489	-3.840	20	5	-19.745	4.738	-5.878
21	-361.757	-5.224	-5.950	25	1	-52.772	-57.030	-38.890
22	-354.455	-1.242	1.353	25	2	-40.784	-27.831	-26.906
23	-360.505	-2.375	-4.696	25	3	-33.193	-23.169	-19.324
24	-347.684	8.264	8.124	25	4	0.454	4.864	14.320
25	-365.548	-12.325	-9.739	25	5	-53.244	-46.031	-39.368
26	-348.158	9.351	7.652	30	1	-17.008	-9.567	-3.123
27	-354.138	1.603	1.671	30	2	-1.395	2.723	12.478
28	-358.122	-4.109	-2.314	30	3	-35.685	-29.514	-21.811
29	-349.135	7.430	6.673	30	4	-40.371	-33.373	-26.500
30	-359.143	-2.946	-3.334	30	5	-24.396	-18.587	-10.533

Tabla F.2.17: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-351.089	0.727	1.242	5	1	9.011	3.999	14.670
2	-349.999	1.949	2.331	5	2	29.647	35.016	35.309
3	-349.785	4.117	2.545	5	3	21.499	29.329	27.159
4	-353.538	-3.964	-1.207	5	4	-4.679	1.980	0.977
5	-342.571	9.845	9.760	5	5	-5.662	-4.374	-0.004
6	-353.566	-0.219	-1.236	10	1	-7.395	3.183	-1.733
7	-350.192	1.881	2.136	10	2	-18.893	-19.650	-13.227
8	-351.977	-0.428	0.353	10	3	7.451	22.549	13.106
9	-345.644	5.340	6.686	10	4	-35.021	-30.337	-29.361
10	-342.759	8.837	9.571	10	5	5.108	12.031	10.765
11	-356.157	-2.879	-3.828	15	1	10.801	4.411	16.464
12	-355.088	-1.198	-2.759	15	2	9.911	13.506	15.571
13	-352.697	0.677	-0.368	15	3	2.082	7.149	7.746
14	-352.333	1.005	-0.003	15	4	2.395	8.192	8.057
15	-346.390	5.221	5.940	15	5	19.806	14.896	25.475
16	-352.524	0.121	-0.195	20	1	-3.771	-7.573	1.895
17	-353.980	-1.677	-1.652	20	2	-5.693	-7.909	-0.032
18	-343.966	9.870	8.362	20	3	-8.420	-13.921	-2.750
19	-355.631	-5.014	-3.301	20	4	-0.854	7.904	4.808
20	-356.142	-3.456	-3.811	20	5	-10.872	8.200	-5.207
21	-358.278	-5.211	-5.949	25	1	-45.479	-55.948	-39.805
22	-350.970	-1.204	1.360	25	2	-31.642	-23.765	-25.969
23	-357.035	-2.369	-4.705	25	3	-23.733	-20.041	-18.065
24	-344.213	8.301	8.116	25	4	8.699	6.879	14.365
25	-362.067	-12.332	-9.736	25	5	-45.573	-43.891	-39.901
26	-344.727	9.343	7.605	30	1	-6.237	-4.292	-0.561
27	-350.628	1.669	1.701	30	2	6.700	5.148	12.372
28	-354.701	-4.148	-2.371	30	3	-27.293	-27.323	-21.621
29	-345.666	7.437	6.664	30	4	-30.181	-28.615	-24.510
30	-355.730	-2.996	-3.399	30	5	-16.030	-15.384	-10.365

Tabla F.2.18: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.2.3. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 95 %

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.10	94.90	94.90	5	1	93.60	93.50	93.60
2	93.00	94.30	94.20	5	2	94.20	94.10	94.20
3	95.20	96.30	96.00	5	3	95.30	95.50	95.40
4	93.40	94.40	94.50	5	4	94.40	94.30	94.40
5	93.60	94.50	94.40	5	5	95.10	94.90	95.10
6	94.80	96.00	95.70	10	1	94.00	93.80	94.00
7	93.70	94.90	94.90	10	2	93.80	94.00	93.70
8	94.60	95.70	95.60	10	3	94.90	94.90	94.90
9	95.00	96.20	96.20	10	4	95.20	95.20	95.20
10	93.00	93.70	93.90	10	5	94.80	95.00	94.80
11	94.40	95.10	95.20	15	1	94.30	94.30	94.30
12	93.00	94.50	94.20	15	2	95.30	95.30	95.30
13	95.20	96.60	96.30	15	3	95.00	94.80	95.00
14	94.30	95.30	95.20	15	4	95.30	95.40	95.30
15	92.10	93.20	93.10	15	5	93.70	93.90	93.70
16	95.20	96.80	96.70	20	1	94.60	94.50	94.60
17	94.10	94.80	94.80	20	2	94.40	94.30	94.40
18	94.70	95.40	95.50	20	3	94.90	94.80	95.00
19	94.40	95.50	95.50	20	4	94.70	94.90	94.80
20	94.20	95.50	95.50	20	5	95.10	95.40	95.10
21	95.00	95.60	95.70	25	1	95.30	95.40	95.30
22	95.00	96.60	96.50	25	2	94.50	94.30	94.50
23	94.60	95.50	95.60	25	3	94.20	94.00	94.20
24	94.90	95.50	95.40	25	4	95.60	95.90	95.60
25	93.40	94.70	94.50	25	5	94.50	94.60	94.40
26	94.30	95.30	95.30	30	1	94.20	94.10	94.20
27	95.70	96.40	96.60	30	2	93.80	93.30	93.80
28	94.10	95.20	95.50	30	3	95.30	95.20	95.30
29	94.50	95.20	95.40	30	4	94.90	94.90	94.90
30	93.40	94.90	95.00	30	5	95.10	95.40	95.10

Tabla F.2.19: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.10	94.80	95.00	5	1	93.60	93.40	93.60
2	93.00	94.40	94.40	5	2	94.40	94.20	94.40
3	95.00	96.10	96.00	5	3	95.20	95.50	95.20
4	93.20	94.50	94.50	5	4	94.20	93.90	94.20
5	94.00	94.50	94.60	5	5	95.20	95.00	95.20
6	94.80	95.90	95.60	10	1	93.70	93.50	93.70
7	93.80	94.90	94.80	10	2	93.90	94.20	94.00
8	94.40	95.40	95.70	10	3	95.00	95.20	95.00
9	95.00	95.90	96.00	10	4	95.00	94.90	95.00
10	93.00	93.50	93.90	10	5	94.80	94.90	94.80
11	94.40	95.10	94.90	15	1	94.50	94.40	94.50
12	92.90	94.40	94.00	15	2	95.40	95.10	95.40
13	95.30	96.50	96.20	15	3	94.40	94.50	94.40
14	94.30	95.50	95.40	15	4	95.10	95.40	95.10
15	92.20	93.20	93.10	15	5	93.70	94.00	93.70
16	95.20	96.80	96.80	20	1	94.30	94.40	94.40
17	93.90	94.90	95.00	20	2	94.50	94.20	94.50
18	94.50	95.50	95.60	20	3	95.10	94.80	95.10
19	94.40	95.40	95.50	20	4	94.60	94.70	94.70
20	94.00	95.40	95.60	20	5	95.10	95.10	95.10
21	95.20	95.60	95.50	25	1	95.40	95.40	95.50
22	95.20	96.50	96.40	25	2	94.70	94.30	94.70
23	94.70	95.60	95.60	25	3	94.00	94.00	94.00
24	94.90	95.50	95.40	25	4	95.40	95.30	95.40
25	93.40	94.50	94.30	25	5	94.80	94.60	94.80
26	94.40	95.00	95.40	30	1	94.00	94.10	94.00
27	95.40	96.30	96.60	30	2	93.20	93.30	93.20
28	94.30	95.10	95.80	30	3	95.00	95.20	95.00
29	94.30	95.30	95.60	30	4	95.40	95.00	95.40
30	93.60	94.80	94.90	30	5	95.40	95.50	95.40

Tabla F.2.20: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	93.85	94.66	95.26	5	1	93.35	93.45	93.55
2	93.95	94.86	95.06	5	2	93.75	93.75	93.85
3	94.35	95.16	95.46	5	3	96.17	96.07	96.37
4	95.26	96.07	96.07	5	4	94.46	94.76	94.86
5	92.54	93.55	93.75	5	5	94.76	95.16	94.96
6	95.26	95.87	95.97	10	1	94.25	94.56	94.46
7	94.46	95.36	95.56	10	2	93.45	93.35	93.65
8	94.05	94.86	94.76	10	3	95.46	95.67	95.67
9	92.84	94.25	94.05	10	4	94.96	94.86	95.06
10	94.66	95.06	95.67	10	5	94.76	94.86	94.76
11	93.85	94.66	94.46	15	1	95.36	95.36	95.56
12	92.94	94.05	94.35	15	2	95.97	95.97	96.17
13	94.76	95.36	95.67	15	3	94.56	94.66	94.66
14	93.35	93.85	94.05	15	4	94.05	94.25	94.15
15	95.87	96.57	96.88	15	5	94.05	94.05	94.35
16	93.65	94.86	95.06	20	1	94.25	94.05	94.46
17	94.66	95.26	95.36	20	2	94.76	95.06	94.96
18	94.05	94.76	94.96	20	3	95.06	95.16	95.16
19	94.76	95.26	95.97	20	4	94.56	94.56	94.86
20	92.64	94.05	94.35	20	5	94.35	93.95	94.76
21	93.75	94.56	94.96	25	1	95.26	95.26	95.56
22	93.25	93.85	93.85	25	2	95.36	95.46	95.46
23	94.25	94.76	95.06	25	3	95.16	95.26	95.16
24	95.06	95.77	95.77	25	4	95.36	94.96	95.56
25	95.46	95.87	96.07	25	5	95.16	95.16	95.16
26	94.76	95.16	95.67	30	1	95.26	95.06	95.36
27	94.35	95.46	95.67	30	2	94.46	94.56	94.76
28	94.35	95.26	95.46	30	3	94.46	94.35	94.66
29	94.76	95.56	95.67	30	4	95.56	95.36	95.87
30	94.15	95.16	95.26	30	5	95.16	95.06	95.36

Tabla F.2.21: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	92.80	95.10	95.20	5	1	93.60	93.50	93.60
2	91.40	94.20	94.40	5	2	94.30	94.20	94.30
3	94.10	96.10	96.10	5	3	95.30	95.50	95.30
4	92.00	94.50	94.10	5	4	94.50	94.40	94.60
5	92.30	94.30	94.30	5	5	95.10	95.10	95.10
6	93.40	95.80	95.60	10	1	93.70	93.70	93.70
7	92.30	95.10	94.80	10	2	93.60	94.00	93.60
8	92.90	95.60	95.90	10	3	94.70	94.90	94.80
9	93.40	96.30	96.30	10	4	95.00	95.00	95.00
10	91.70	93.70	93.90	10	5	94.60	95.00	94.70
11	93.00	95.20	94.70	15	1	94.20	94.20	94.20
12	91.90	94.20	94.10	15	2	95.30	95.30	95.30
13	93.70	96.50	96.30	15	3	94.90	95.00	95.00
14	92.90	95.30	95.20	15	4	95.20	95.50	95.30
15	90.80	93.30	93.10	15	5	93.40	93.80	93.80
16	94.30	96.80	96.90	20	1	94.70	94.60	94.70
17	93.30	94.70	94.90	20	2	94.40	94.40	94.40
18	92.90	95.40	95.50	20	3	94.90	94.70	94.90
19	92.70	95.50	95.50	20	4	94.50	94.80	94.80
20	92.80	95.40	95.50	20	5	95.20	95.10	95.30
21	93.00	95.50	95.40	25	1	95.20	95.30	95.30
22	93.00	96.30	96.20	25	2	94.60	94.30	94.70
23	93.20	95.50	95.40	25	3	94.20	94.00	94.20
24	93.00	95.40	95.50	25	4	95.60	95.80	95.60
25	91.90	94.60	94.60	25	5	94.40	94.50	94.40
26	92.80	95.30	95.50	30	1	94.00	94.20	94.10
27	94.00	96.60	96.50	30	2	93.90	93.50	93.90
28	92.30	95.10	95.60	30	3	95.10	95.30	95.10
29	92.20	95.20	95.40	30	4	94.80	94.80	94.90
30	92.20	95.00	95.20	30	5	95.10	95.50	95.10

Tabla F.2.22: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	92.70	95.10	95.20	5	1	93.60	93.40	93.60
2	90.80	94.00	94.10	5	2	94.50	94.40	94.50
3	93.90	96.00	96.00	5	3	95.10	95.50	95.30
4	91.70	94.70	94.30	5	4	94.30	94.10	94.40
5	92.10	94.40	94.40	5	5	95.20	95.00	95.20
6	93.20	96.00	95.60	10	1	93.50	93.40	93.50
7	92.00	95.00	94.80	10	2	93.90	94.20	94.00
8	92.50	95.60	95.80	10	3	95.00	95.20	95.00
9	93.20	96.10	96.20	10	4	95.10	95.10	95.10
10	91.10	93.60	94.00	10	5	94.80	95.00	94.80
11	92.70	95.30	94.80	15	1	94.50	94.60	94.50
12	91.40	94.20	94.00	15	2	95.40	95.10	95.40
13	93.60	96.50	96.20	15	3	94.40	94.40	94.50
14	92.50	95.20	95.40	15	4	95.00	95.30	95.00
15	90.40	93.30	93.10	15	5	93.60	94.00	93.60
16	94.20	96.90	96.90	20	1	94.30	94.40	94.30
17	93.10	94.80	94.90	20	2	94.60	94.20	94.70
18	92.70	95.40	95.50	20	3	95.10	94.80	95.10
19	92.60	95.40	95.50	20	4	94.60	94.60	94.60
20	92.70	95.40	95.50	20	5	95.10	95.10	95.10
21	92.60	95.70	95.40	25	1	95.50	95.40	95.50
22	93.10	96.30	96.30	25	2	94.40	94.20	94.40
23	93.10	95.50	95.50	25	3	94.00	93.90	94.00
24	92.60	95.40	95.50	25	4	95.40	95.40	95.40
25	92.00	94.60	94.60	25	5	94.80	94.80	94.80
26	92.30	95.20	95.30	30	1	93.90	94.10	93.90
27	93.90	96.50	96.30	30	2	93.20	93.30	93.20
28	92.00	95.20	95.70	30	3	95.10	95.20	95.10
29	92.20	95.20	95.40	30	4	95.30	95.00	95.30
30	92.20	94.90	95.20	30	5	95.30	95.60	95.30

Tabla F.2.23: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	92.80	95.10	95.20	5	1	93.70	93.70	93.70
2	90.70	94.10	94.30	5	2	94.40	94.60	94.40
3	94.10	96.00	96.00	5	3	95.20	95.50	95.20
4	91.90	94.60	94.50	5	4	94.40	94.30	94.40
5	92.30	94.40	94.50	5	5	95.10	94.80	95.10
6	93.30	96.00	95.70	10	1	93.80	93.70	93.80
7	92.40	95.00	94.80	10	2	94.00	93.90	94.00
8	92.70	95.80	95.80	10	3	95.10	95.30	95.10
9	93.30	96.10	96.10	10	4	94.90	95.00	94.90
10	91.20	93.60	94.00	10	5	95.00	95.00	95.00
11	93.40	95.30	94.80	15	1	94.50	94.40	94.50
12	91.30	94.20	93.90	15	2	95.20	94.90	95.20
13	93.40	96.40	96.20	15	3	94.80	94.50	94.80
14	92.50	95.30	95.40	15	4	95.10	95.40	95.20
15	90.10	93.30	93.20	15	5	93.60	93.80	93.60
16	94.50	96.80	96.90	20	1	94.20	94.30	94.30
17	93.10	94.80	95.10	20	2	94.40	94.40	94.40
18	92.80	95.20	95.80	20	3	94.80	95.00	94.80
19	92.70	95.30	95.40	20	4	94.70	94.70	94.70
20	92.50	95.30	95.40	20	5	95.10	95.20	95.10
21	92.50	95.70	95.50	25	1	95.30	95.50	95.30
22	93.20	96.10	96.30	25	2	94.20	94.20	94.30
23	93.30	95.40	95.50	25	3	93.90	93.70	93.90
24	93.00	95.40	95.40	25	4	95.70	95.50	95.70
25	92.10	94.70	94.30	25	5	95.00	94.60	95.00
26	92.40	95.00	95.20	30	1	94.20	94.40	94.20
27	94.00	96.50	96.20	30	2	93.30	93.70	93.30
28	92.00	95.10	95.60	30	3	94.80	94.80	94.80
29	92.80	95.20	95.40	30	4	95.50	95.30	95.40
30	92.30	94.80	95.10	30	5	95.70	95.70	95.70

Tabla F.2.24: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	88.80	95.00	95.10	5	1	93.50	93.50	93.60
2	86.60	94.20	94.30	5	2	94.20	94.10	94.30
3	89.30	95.90	96.00	5	3	95.30	95.40	95.40
4	88.00	94.50	94.20	5	4	94.40	94.20	94.50
5	88.00	94.30	94.40	5	5	95.00	95.10	95.10
6	89.00	95.80	95.80	10	1	93.40	93.60	93.50
7	87.80	94.90	95.00	10	2	93.50	94.00	93.70
8	87.80	95.80	95.90	10	3	94.50	94.80	94.60
9	89.70	96.30	96.10	10	4	94.70	95.00	94.90
10	86.10	93.80	94.00	10	5	94.60	95.00	94.80
11	87.10	95.40	94.90	15	1	94.10	94.20	94.20
12	86.70	94.10	94.00	15	2	95.20	95.30	95.20
13	87.90	96.50	96.20	15	3	94.80	95.00	94.90
14	87.50	95.30	95.50	15	4	95.10	95.50	95.10
15	85.20	93.40	93.30	15	5	93.40	93.90	93.60
16	90.10	96.90	96.90	20	1	94.60	94.50	94.70
17	88.20	94.60	94.80	20	2	94.40	94.40	94.40
18	88.90	95.40	95.50	20	3	94.80	94.60	94.80
19	88.00	95.40	95.20	20	4	94.60	94.80	94.80
20	88.00	95.30	95.40	20	5	95.00	95.10	95.10
21	88.50	95.50	95.40	25	1	95.10	95.40	95.40
22	88.10	96.10	96.30	25	2	94.50	94.40	94.70
23	88.90	95.40	95.50	25	3	94.10	94.00	94.20
24	89.00	95.50	95.60	25	4	95.50	95.60	95.50
25	87.50	94.50	94.40	25	5	94.40	94.60	94.40
26	88.40	95.20	95.30	30	1	93.90	94.30	94.10
27	89.50	96.60	96.40	30	2	93.90	93.50	93.90
28	86.40	95.20	95.50	30	3	95.20	95.30	95.20
29	86.90	95.40	95.40	30	4	94.80	95.10	95.20
30	88.10	94.90	94.90	30	5	95.00	95.50	95.20

Tabla F.2.25: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	86.80	95.10	95.10	5	1	93.60	93.40	93.60
2	85.40	94.30	94.40	5	2	94.30	94.40	94.40
3	87.80	96.00	96.00	5	3	95.20	95.40	95.30
4	87.20	94.50	94.20	5	4	94.40	94.30	94.50
5	86.60	94.30	94.50	5	5	95.30	95.00	95.30
6	87.60	95.70	95.70	10	1	93.40	93.40	93.40
7	86.10	95.00	95.00	10	2	94.00	94.30	94.00
8	86.40	95.60	95.90	10	3	94.90	95.00	94.90
9	88.40	96.20	96.10	10	4	95.10	95.20	95.10
10	84.50	93.80	94.10	10	5	94.70	94.80	94.70
11	85.20	95.20	94.80	15	1	94.40	94.60	94.50
12	85.70	94.10	94.10	15	2	95.30	95.20	95.40
13	86.50	96.50	96.30	15	3	94.40	94.20	94.60
14	85.80	95.30	95.50	15	4	94.90	95.30	94.90
15	83.30	93.40	93.40	15	5	93.60	94.00	93.90
16	88.90	96.80	96.80	20	1	94.30	94.30	94.30
17	86.40	94.60	94.80	20	2	94.30	94.20	94.50
18	87.20	95.40	95.70	20	3	95.10	94.80	95.10
19	86.40	95.40	95.20	20	4	94.60	94.30	94.60
20	86.90	95.30	95.40	20	5	95.00	95.00	95.10
21	87.50	95.50	95.40	25	1	95.50	95.40	95.50
22	87.40	96.00	96.30	25	2	94.30	94.30	94.40
23	87.10	95.40	95.50	25	3	93.90	93.70	93.90
24	86.80	95.50	95.70	25	4	95.50	95.50	95.50
25	86.00	94.60	94.30	25	5	94.90	94.80	94.90
26	87.50	95.20	95.30	30	1	93.90	94.10	94.00
27	88.60	96.60	96.20	30	2	93.40	93.30	93.40
28	84.70	95.20	95.50	30	3	95.20	95.10	95.20
29	85.60	95.40	95.50	30	4	95.30	95.10	95.30
30	86.30	95.00	94.90	30	5	95.20	95.60	95.20

Tabla F.2.26: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	86.30	95.10	95.20	5	1	93.80	93.80	93.80
2	85.00	94.10	94.50	5	2	94.40	94.70	94.40
3	87.60	96.00	96.10	5	3	95.30	95.50	95.40
4	86.60	94.50	94.20	5	4	94.40	94.30	94.40
5	86.60	94.30	94.60	5	5	95.00	95.00	95.00
6	87.30	95.70	95.70	10	1	93.80	93.70	93.80
7	85.90	94.90	95.00	10	2	94.20	93.90	94.20
8	86.10	95.60	95.80	10	3	95.00	95.30	95.10
9	87.80	96.20	96.10	10	4	94.90	95.00	94.90
10	84.70	93.40	94.10	10	5	94.70	94.90	94.70
11	85.10	95.30	94.80	15	1	94.40	94.50	94.40
12	85.60	94.10	94.10	15	2	95.10	95.00	95.10
13	86.30	96.50	96.30	15	3	94.80	94.40	94.80
14	86.00	95.30	95.60	15	4	95.10	95.30	95.10
15	83.60	93.50	93.40	15	5	93.80	93.70	93.90
16	88.50	96.70	96.80	20	1	94.20	94.20	94.20
17	86.60	94.70	94.80	20	2	94.40	94.30	94.40
18	86.80	95.40	95.70	20	3	94.80	95.00	94.80
19	85.90	95.30	95.20	20	4	94.60	94.40	94.70
20	87.00	95.30	95.40	20	5	95.00	95.20	95.00
21	86.50	95.60	95.60	25	1	95.40	95.40	95.40
22	87.30	96.00	96.40	25	2	94.30	94.40	94.30
23	86.40	95.40	95.50	25	3	93.80	93.70	93.80
24	86.90	95.50	95.60	25	4	95.50	95.50	95.50
25	86.10	94.50	94.30	25	5	95.00	94.60	95.00
26	87.40	95.10	95.30	30	1	94.20	94.30	94.20
27	88.40	96.50	96.20	30	2	93.40	93.80	93.50
28	85.00	95.20	95.50	30	3	94.70	94.80	94.70
29	85.50	95.30	95.50	30	4	95.50	95.50	95.50
30	86.00	95.00	94.70	30	5	95.60	95.70	95.60

Tabla F.2.27: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.2.4. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 99%

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.70	99.10	99.10	5	1	98.80	98.60	98.80
2	98.50	98.70	98.80	5	2	99.30	99.20	99.30
3	98.50	98.90	99.20	5	3	99.30	99.10	99.30
4	98.70	99.00	99.20	5	4	98.60	98.50	98.60
5	98.30	99.10	98.90	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.90	99.30	99.30	10	1	98.90	98.70	98.90
7	98.50	98.90	99.00	10	2	98.60	98.50	98.60
8	99.00	99.40	99.30	10	3	98.90	99.10	98.90
9	98.70	98.90	99.00	10	4	98.70	98.70	98.70
10	98.30	98.60	98.60	10	5	99.00	98.80	99.00
11	98.60	98.80	98.90	15	1	98.40	98.40	98.40
12	98.00	98.50	98.40	15	2	98.90	99.00	98.90
13	98.90	99.20	99.20	15	3	98.50	98.60	98.50
14	98.10	98.70	98.70	15	4	99.20	99.20	99.20
15	98.00	98.60	98.60	15	5	98.90	98.70	98.90
16	99.00	99.40	99.30	20	1	99.00	98.90	99.00
17	98.60	99.10	99.00	20	2	99.00	99.00	99.00
18	98.80	99.30	99.40	20	3	98.80	98.80	98.80
19	99.20	99.40	99.50	20	4	99.30	99.20	99.30
20	98.70	99.10	99.10	20	5	99.20	99.20	99.20
21	99.20	99.30	99.30	25	1	98.70	98.70	98.70
22	98.80	98.90	98.90	25	2	99.20	99.10	99.20
23	99.00	99.30	99.30	25	3	98.90	98.80	98.90
24	99.30	99.60	99.70	25	4	99.10	99.10	99.10
25	98.40	98.90	99.10	25	5	98.50	98.60	98.50
26	98.90	99.10	99.10	30	1	99.00	99.10	99.00
27	99.10	99.30	99.40	30	2	98.50	98.60	98.50
28	98.60	98.70	98.70	30	3	99.10	99.10	99.10
29	98.30	98.60	98.70	30	4	99.00	99.10	99.00
30	98.70	99.00	99.00	30	5	98.90	98.90	98.90

Tabla F.2.28: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.80	99.10	99.10	5	1	98.60	98.40	98.60
2	98.50	98.70	98.60	5	2	99.30	99.20	99.30
3	98.50	98.90	99.10	5	3	99.00	98.90	99.00
4	98.60	99.00	99.10	5	4	98.30	98.20	98.30
5	98.40	99.00	98.90	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.90	99.20	99.30	10	1	98.70	98.70	98.70
7	98.50	98.90	99.00	10	2	98.70	98.50	98.70
8	98.90	99.50	99.30	10	3	98.70	98.90	98.70
9	98.60	99.00	99.00	10	4	98.80	98.80	98.80
10	98.40	98.60	98.70	10	5	99.30	99.10	99.30
11	98.50	98.80	98.90	15	1	98.60	98.60	98.60
12	98.10	98.50	98.50	15	2	98.90	98.90	98.90
13	98.90	99.20	99.10	15	3	98.50	98.70	98.50
14	98.00	98.70	98.80	15	4	99.20	99.00	99.20
15	98.10	98.50	98.60	15	5	98.70	98.70	98.70
16	99.10	99.40	99.30	20	1	99.10	99.10	99.10
17	98.60	99.10	99.00	20	2	98.90	98.90	98.90
18	98.80	99.30	99.30	20	3	98.70	98.70	98.70
19	99.10	99.40	99.40	20	4	99.20	99.10	99.20
20	98.70	99.10	99.10	20	5	99.00	99.20	99.00
21	99.10	99.30	99.30	25	1	98.70	98.70	98.70
22	98.80	98.90	98.90	25	2	99.20	99.10	99.20
23	99.00	99.20	99.30	25	3	98.90	98.80	99.00
24	99.40	99.60	99.70	25	4	99.20	99.10	99.20
25	98.50	98.90	99.10	25	5	98.70	98.60	98.70
26	98.90	99.10	99.10	30	1	98.90	99.10	98.90
27	99.00	99.30	99.40	30	2	98.30	98.40	98.30
28	98.40	98.80	98.90	30	3	99.00	99.10	99.00
29	98.30	98.60	98.70	30	4	99.20	99.10	99.20
30	98.60	99.00	99.00	30	5	99.00	99.00	99.00

Tabla F.2.29: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.89	99.19	99.40	5	1	98.79	98.69	98.99
2	98.59	98.99	99.09	5	2	98.69	98.69	98.79
3	98.49	98.59	98.89	5	3	99.50	99.40	99.70
4	98.69	98.89	98.89	5	4	98.69	98.69	99.09
5	98.39	98.69	98.99	5	5	99.09	99.19	99.29
6	99.40	99.60	99.70	10	1	98.69	98.59	98.99
7	98.69	99.09	99.19	10	2	98.99	99.09	99.19
8	98.79	99.29	99.19	10	3	98.79	98.69	98.99
9	98.39	98.89	99.09	10	4	99.19	98.99	99.50
10	99.70	99.70	99.90	10	5	99.09	99.09	99.09
11	98.29	98.69	98.99	15	1	99.70	99.70	99.90
12	98.49	99.09	99.50	15	2	98.69	98.69	98.89
13	99.19	99.19	99.60	15	3	99.40	99.50	99.80
14	98.29	98.79	98.69	15	4	98.99	99.19	99.19
15	99.09	99.60	99.60	15	5	98.39	98.49	98.89
16	98.89	98.89	99.09	20	1	99.29	99.40	99.60
17	98.49	98.79	98.99	20	2	98.89	98.79	99.09
18	98.29	99.09	99.29	20	3	99.19	98.99	99.29
19	98.79	99.19	99.50	20	4	99.09	99.19	99.40
20	98.49	98.89	99.29	20	5	98.69	98.69	99.09
21	98.39	98.49	98.59	25	1	99.19	99.19	99.50
22	98.19	98.39	98.59	25	2	98.99	99.29	99.19
23	99.09	99.29	99.29	25	3	98.49	98.49	98.59
24	98.59	98.79	98.89	25	4	99.19	99.29	99.40
25	99.09	99.29	99.40	25	5	99.19	99.29	99.19
26	99.09	99.19	99.60	30	1	98.89	99.09	99.09
27	99.09	99.29	99.50	30	2	99.19	99.19	99.50
28	98.39	98.89	98.89	30	3	99.19	99.29	99.40
29	99.09	99.60	99.70	30	4	99.19	99.19	99.60
30	98.99	99.40	99.60	30	5	99.50	99.50	99.60

Tabla F.2.30: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	97.60	99.20	99.20	5	1	98.80	98.60	98.80
2	97.90	98.70	98.80	5	2	99.30	99.10	99.30
3	98.30	99.00	99.00	5	3	99.30	99.10	99.30
4	97.80	99.00	99.10	5	4	98.60	98.50	98.60
5	97.50	99.00	98.80	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.30	99.10	99.20	10	1	98.90	98.60	98.90
7	97.70	98.90	99.00	10	2	98.60	98.50	98.60
8	98.00	99.50	99.30	10	3	98.90	99.10	99.00
9	98.30	99.10	98.90	10	4	98.80	98.80	98.80
10	97.40	98.60	98.50	10	5	99.00	98.80	99.00
11	98.20	98.80	98.90	15	1	98.40	98.50	98.40
12	97.60	98.50	98.60	15	2	98.90	99.00	98.90
13	98.10	99.20	99.30	15	3	98.50	98.60	98.50
14	97.80	98.70	98.80	15	4	99.20	99.20	99.20
15	97.20	98.60	98.60	15	5	98.80	98.60	98.80
16	98.70	99.40	99.50	20	1	99.00	98.90	99.00
17	98.10	99.10	99.10	20	2	99.00	99.00	99.00
18	98.60	99.30	99.40	20	3	98.80	98.80	98.80
19	98.50	99.30	99.50	20	4	99.30	99.20	99.30
20	98.20	99.10	99.10	20	5	99.20	99.30	99.20
21	98.70	99.20	99.30	25	1	98.70	98.70	98.70
22	98.50	98.90	98.90	25	2	99.20	99.10	99.20
23	98.50	99.30	99.30	25	3	98.80	98.80	98.90
24	98.80	99.50	99.70	25	4	99.10	99.20	99.20
25	97.60	98.90	99.10	25	5	98.50	98.70	98.50
26	98.40	99.20	99.10	30	1	99.10	99.10	99.10
27	98.50	99.30	99.30	30	2	98.60	98.60	98.60
28	98.30	98.80	98.90	30	3	99.00	99.10	99.10
29	97.80	98.60	98.70	30	4	98.90	99.00	98.90
30	98.10	98.90	99.00	30	5	98.90	99.00	98.90

Tabla F.2.31: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	97.50	99.20	99.20	5	1	98.50	98.40	98.50
2	97.60	98.70	98.80	5	2	99.30	99.20	99.30
3	98.20	99.00	99.00	5	3	99.10	98.90	99.10
4	97.80	99.00	99.10	5	4	98.30	98.30	98.40
5	97.40	99.00	98.90	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.30	99.10	99.20	10	1	98.80	98.70	98.80
7	97.70	99.00	99.10	10	2	98.60	98.60	98.60
8	97.90	99.50	99.30	10	3	98.70	98.80	98.70
9	98.30	99.10	98.90	10	4	98.80	98.70	98.80
10	97.20	98.60	98.50	10	5	99.30	99.10	99.30
11	98.20	98.80	99.00	15	1	98.60	98.50	98.60
12	97.70	98.50	98.60	15	2	98.90	98.90	98.90
13	98.00	99.20	99.30	15	3	98.50	98.70	98.50
14	97.80	98.70	98.80	15	4	99.10	99.00	99.10
15	97.10	98.60	98.60	15	5	98.70	98.60	98.70
16	98.60	99.40	99.50	20	1	99.10	99.10	99.10
17	97.90	99.10	99.10	20	2	98.90	98.90	98.90
18	98.40	99.30	99.30	20	3	98.80	98.70	98.80
19	98.40	99.30	99.50	20	4	99.20	99.10	99.20
20	98.10	99.10	99.10	20	5	99.00	99.20	99.00
21	98.70	99.20	99.30	25	1	98.70	98.70	98.70
22	98.50	98.90	98.90	25	2	99.20	99.10	99.20
23	98.20	99.30	99.30	25	3	98.70	98.80	98.80
24	98.50	99.60	99.70	25	4	99.20	99.10	99.20
25	97.50	98.80	99.10	25	5	98.70	98.60	98.70
26	98.30	99.30	99.10	30	1	98.90	99.10	98.90
27	98.60	99.30	99.30	30	2	98.40	98.40	98.40
28	98.30	98.90	98.90	30	3	99.00	99.10	99.00
29	97.80	98.70	98.70	30	4	99.20	99.10	99.20
30	97.80	98.90	99.00	30	5	99.00	99.00	99.00

Tabla F.2.32: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	97.70	99.10	99.20	5	1	98.60	98.50	98.60
2	98.10	98.70	98.70	5	2	99.30	99.20	99.30
3	98.20	99.00	99.00	5	3	98.80	98.90	98.80
4	97.70	99.00	99.10	5	4	98.50	98.40	98.50
5	97.40	98.90	99.00	5	5	99.00	98.90	99.00
6	98.40	99.10	99.20	10	1	98.60	98.60	98.60
7	97.90	99.00	99.10	10	2	98.80	98.70	98.80
8	97.90	99.50	99.30	10	3	98.70	98.80	98.70
9	98.30	99.10	98.90	10	4	98.90	98.90	98.90
10	97.30	98.60	98.60	10	5	99.30	99.20	99.30
11	98.00	98.80	99.00	15	1	98.70	98.70	98.70
12	97.70	98.50	98.60	15	2	98.90	98.80	98.90
13	98.20	99.20	99.20	15	3	98.60	98.60	98.60
14	97.80	98.70	98.70	15	4	99.00	98.90	99.00
15	97.40	98.70	98.50	15	5	98.60	98.70	98.60
16	98.50	99.40	99.50	20	1	99.10	99.10	99.10
17	98.00	99.20	99.10	20	2	99.10	99.00	99.10
18	98.70	99.30	99.30	20	3	98.70	98.90	98.70
19	98.50	99.30	99.50	20	4	99.10	99.00	99.10
20	98.10	99.10	99.10	20	5	99.00	99.00	99.00
21	98.70	99.20	99.30	25	1	98.80	98.70	98.80
22	98.50	98.90	98.90	25	2	99.30	99.20	99.30
23	98.30	99.20	99.30	25	3	98.70	98.80	98.70
24	98.70	99.50	99.60	25	4	99.20	99.20	99.20
25	97.80	98.80	99.10	25	5	98.80	98.80	98.80
26	98.60	99.30	99.20	30	1	99.00	99.00	99.00
27	98.60	99.30	99.30	30	2	98.40	98.40	98.40
28	98.20	98.90	99.00	30	3	99.00	99.00	99.00
29	97.80	98.70	98.70	30	4	99.30	99.20	99.30
30	97.70	98.90	99.00	30	5	99.10	99.00	99.10

Tabla F.2.33: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	95.20	99.20	99.20	5	1	98.80	98.60	98.80
2	94.60	98.70	98.80	5	2	99.20	99.10	99.20
3	96.80	99.00	99.00	5	3	99.20	99.20	99.30
4	95.00	99.00	99.00	5	4	98.50	98.50	98.50
5	95.70	99.10	98.90	5	5	99.10	99.00	99.10
6	96.40	99.00	99.10	10	1	98.90	98.60	98.90
7	96.00	99.00	99.00	10	2	98.60	98.50	98.60
8	96.00	99.40	99.30	10	3	98.80	99.10	99.00
9	96.30	99.10	98.90	10	4	98.80	98.80	98.80
10	94.60	98.50	98.60	10	5	99.00	98.80	99.00
11	95.90	98.90	99.00	15	1	98.40	98.50	98.40
12	95.20	98.60	98.60	15	2	98.90	99.00	99.00
13	96.40	99.30	99.20	15	3	98.40	98.60	98.50
14	95.70	98.70	98.80	15	4	99.10	99.10	99.20
15	94.00	98.70	98.60	15	5	98.80	98.70	98.80
16	96.90	99.50	99.50	20	1	99.00	98.80	99.00
17	96.10	99.20	99.20	20	2	99.00	99.00	99.00
18	95.50	99.30	99.30	20	3	98.80	98.80	98.80
19	96.10	99.30	99.50	20	4	99.20	99.10	99.20
20	95.50	99.20	99.10	20	5	99.20	99.30	99.20
21	96.20	99.30	99.20	25	1	98.70	98.70	98.70
22	96.30	98.80	98.90	25	2	99.20	99.20	99.20
23	95.40	99.30	99.30	25	3	98.70	98.80	98.80
24	96.50	99.40	99.60	25	4	99.10	99.20	99.20
25	95.20	98.90	99.10	25	5	98.50	98.70	98.50
26	95.80	99.30	99.20	30	1	99.10	99.00	99.10
27	96.70	99.30	99.30	30	2	98.60	98.60	98.60
28	95.70	98.80	98.90	30	3	99.00	99.20	99.00
29	95.50	98.70	98.80	30	4	98.90	99.00	98.90
30	95.70	98.90	99.00	30	5	98.90	99.00	98.90

Tabla F.2.34: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.80	99.20	99.20	5	1	98.50	98.40	98.50
2	93.70	98.60	98.80	5	2	99.10	99.20	99.20
3	96.20	99.00	99.00	5	3	99.00	98.90	99.10
4	94.10	99.00	99.00	5	4	98.30	98.30	98.40
5	94.80	99.10	98.90	5	5	99.00	99.00	99.10
6	95.40	99.10	99.10	10	1	98.60	98.60	98.70
7	95.40	99.00	99.00	10	2	98.60	98.50	98.60
8	94.80	99.40	99.30	10	3	98.70	98.90	98.70
9	95.50	99.10	98.90	10	4	98.80	98.70	98.80
10	93.90	98.50	98.60	10	5	99.30	99.10	99.30
11	95.10	98.90	99.00	15	1	98.60	98.50	98.60
12	93.80	98.60	98.60	15	2	98.90	98.90	98.90
13	95.60	99.30	99.20	15	3	98.50	98.70	98.60
14	94.70	98.70	98.80	15	4	99.10	99.00	99.10
15	92.40	98.70	98.50	15	5	98.80	98.70	98.80
16	96.50	99.50	99.50	20	1	99.10	99.00	99.10
17	94.90	99.20	99.20	20	2	98.90	98.90	98.90
18	95.10	99.30	99.30	20	3	98.80	98.70	98.80
19	95.20	99.30	99.50	20	4	99.20	99.10	99.20
20	94.80	99.20	99.10	20	5	99.00	99.20	99.10
21	95.80	99.30	99.20	25	1	98.70	98.70	98.70
22	95.70	98.80	98.90	25	2	99.20	99.10	99.20
23	94.50	99.30	99.30	25	3	98.60	98.70	98.60
24	95.60	99.40	99.50	25	4	99.20	99.20	99.20
25	93.70	98.90	99.10	25	5	98.70	98.60	98.70
26	94.50	99.30	99.20	30	1	98.90	99.10	98.90
27	96.00	99.30	99.30	30	2	98.30	98.40	98.40
28	95.00	98.80	98.90	30	3	99.00	99.00	99.00
29	94.80	98.70	98.80	30	4	99.20	99.10	99.20
30	95.00	98.90	99.00	30	5	99.00	99.00	99.00

Tabla F.2.35: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.80	99.10	99.20	5	1	98.60	98.50	98.60
2	93.30	98.60	98.70	5	2	99.30	99.30	99.30
3	95.90	99.00	99.00	5	3	98.90	98.90	98.90
4	93.80	99.00	99.00	5	4	98.50	98.40	98.60
5	94.60	99.10	99.00	5	5	99.00	98.90	99.00
6	95.10	99.10	99.10	10	1	98.60	98.60	98.60
7	95.00	99.00	99.00	10	2	98.80	98.70	98.90
8	94.50	99.40	99.30	10	3	98.70	98.90	98.90
9	95.30	99.10	98.90	10	4	98.90	98.90	98.90
10	93.50	98.60	98.60	10	5	99.30	99.30	99.30
11	95.00	98.90	99.00	15	1	98.70	98.70	98.70
12	93.60	98.60	98.60	15	2	98.80	98.90	98.80
13	95.20	99.30	99.30	15	3	98.60	98.60	98.60
14	94.00	98.70	98.80	15	4	99.00	98.90	99.10
15	92.00	98.70	98.60	15	5	98.50	98.60	98.60
16	95.90	99.40	99.50	20	1	99.10	99.10	99.10
17	94.40	99.20	99.20	20	2	99.10	99.00	99.10
18	94.50	99.30	99.30	20	3	98.80	98.80	98.80
19	94.80	99.30	99.50	20	4	99.10	99.10	99.10
20	94.10	99.20	99.10	20	5	99.00	99.00	99.00
21	95.70	99.20	99.20	25	1	98.80	98.70	98.80
22	95.40	98.90	98.90	25	2	99.30	99.20	99.30
23	94.20	99.20	99.30	25	3	98.70	98.80	98.70
24	95.40	99.40	99.50	25	4	99.20	99.20	99.20
25	93.70	98.90	99.10	25	5	98.90	98.80	98.90
26	94.10	99.30	99.20	30	1	99.00	99.00	99.00
27	95.40	99.30	99.30	30	2	98.40	98.40	98.40
28	95.10	98.80	98.90	30	3	99.10	99.00	99.10
29	94.70	98.70	98.80	30	4	99.30	99.20	99.30
30	94.80	98.90	99.00	30	5	98.90	99.00	99.00

Tabla F.2.36: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.3. Tablas correspondientes al caso heterocedástico, $\ell = 1/2$

F.3.1. Error cuadrático medio empírico, E_d y E_{di}

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	5.726	2.921	0.771	5	1	95.320	184.313	96.622
2	5.530	3.448	1.125	5	2	116.773	203.331	118.389
3	5.563	4.642	1.578	5	3	105.068	201.390	106.552
4	6.293	5.777	2.040	5	4	121.811	239.792	123.091
5	4.526	6.719	2.822	5	5	127.630	208.568	129.109
6	7.038	7.642	3.077	10	1	257.110	385.849	260.576
7	6.521	8.454	3.716	10	2	256.663	406.260	259.204
8	6.651	9.372	3.984	10	3	253.779	394.396	257.523
9	6.736	10.921	4.803	10	4	268.509	409.991	271.612
10	6.117	12.794	5.698	10	5	282.621	424.235	286.283
11	9.722	13.474	6.047	15	1	418.809	599.389	422.700
12	8.948	13.718	6.125	15	2	370.212	544.984	374.537
13	9.683	16.675	7.017	15	3	396.555	584.802	401.693
14	9.567	15.391	7.630	15	4	412.947	621.676	418.177
15	9.025	17.202	7.920	15	5	423.021	600.710	428.711
16	10.610	19.080	8.698	20	1	503.200	716.109	507.804
17	10.934	18.974	8.770	20	2	599.657	816.665	606.373
18	9.748	20.229	9.661	20	3	549.352	754.484	554.674
19	13.655	21.867	10.968	20	4	555.615	814.128	562.266
20	13.126	22.850	9.824	20	5	552.658	794.339	558.289
21	13.648	23.486	10.678	25	1	727.681	989.575	734.462
22	12.652	23.158	11.583	25	2	720.262	1002.848	722.250
23	14.594	23.854	12.309	25	3	695.557	997.535	700.431
24	12.334	27.320	13.385	25	4	714.102	927.510	721.806
25	18.363	28.827	14.154	25	5	746.950	1081.964	756.923
26	13.048	29.174	13.492	30	1	891.227	1185.805	901.763
27	14.123	27.472	13.051	30	2	794.736	1071.945	802.527
28	15.779	28.630	14.041	30	3	832.512	1129.396	840.498
29	14.543	31.134	14.916	30	4	799.785	1091.323	804.589
30	17.807	32.673	15.330	30	5	882.986	1189.041	891.437

Tabla F.3.1: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	6.334	2.947	0.774	5	1	108.712	204.270	109.695
2	6.373	3.480	1.129	5	2	131.964	232.287	133.754
3	6.419	4.701	1.588	5	3	124.812	236.081	126.272
4	7.301	5.835	2.058	5	4	141.516	271.578	142.265
5	5.371	6.784	2.829	5	5	149.044	236.395	149.437
6	8.159	7.716	3.098	10	1	311.259	457.779	313.621
7	7.644	8.511	3.745	10	2	313.800	476.177	314.532
8	7.691	9.420	4.024	10	3	309.999	471.852	313.378
9	7.749	11.052	4.862	10	4	331.526	487.783	332.803
10	6.870	12.921	5.722	10	5	350.453	502.451	351.919
11	11.014	13.532	6.117	15	1	531.063	743.824	535.202
12	10.290	13.745	6.218	15	2	467.959	667.853	471.962
13	10.919	16.876	7.083	15	3	511.377	728.515	516.092
14	10.694	15.506	7.697	15	4	531.981	774.187	535.174
15	9.953	17.540	8.006	15	5	542.434	747.624	547.922
16	11.806	19.390	8.818	20	1	657.213	898.289	659.506
17	12.066	19.111	8.869	20	2	775.530	1025.270	780.041
18	10.462	20.685	9.820	20	3	725.042	969.768	729.981
19	14.932	21.802	11.134	20	4	727.381	1031.749	733.214
20	14.644	23.040	9.984	20	5	731.011	1002.515	735.130
21	15.025	23.855	10.888	25	1	954.132	1244.448	954.805
22	13.651	23.566	11.762	25	2	974.977	1317.406	974.832
23	15.841	24.158	12.508	25	3	938.752	1282.136	940.010
24	12.814	27.653	13.483	25	4	966.069	1200.524	972.564
25	20.223	29.106	14.453	25	5	1013.516	1414.141	1021.451
26	13.629	29.620	13.587	30	1	1208.064	1542.644	1213.595
27	15.230	27.887	13.273	30	2	1092.742	1429.589	1101.976
28	17.197	28.838	14.334	30	3	1153.657	1477.011	1157.841
29	15.300	31.405	15.064	30	4	1109.455	1424.171	1112.291
30	19.378	32.873	15.622	30	5	1224.993	1577.118	1231.501

Tabla F.3.2: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	5.471	11.099	8.169	5	1	140.949	663.557	518.887
2	5.677	14.537	11.460	5	2	142.797	653.884	500.446
3	5.740	18.080	14.197	5	3	159.593	685.843	614.015
4	6.532	21.380	15.545	5	4	162.021	747.077	579.113
5	5.428	25.184	20.003	5	5	159.714	738.498	626.857
6	7.882	29.017	21.317	10	1	378.801	1215.261	1089.462
7	6.918	31.300	22.250	10	2	349.630	1214.108	1019.318
8	7.724	35.056	27.608	10	3	378.590	1273.933	978.308
9	7.537	39.144	30.454	10	4	370.150	1264.281	993.798
10	6.755	40.753	32.151	10	5	375.046	1241.690	954.578
11	10.407	45.837	34.236	15	1	603.004	1770.227	1503.192
12	10.048	48.065	35.748	15	2	616.228	1782.617	1441.175
13	10.197	52.034	38.539	15	3	632.707	1807.211	1525.379
14	11.319	54.442	41.022	15	4	603.453	1794.173	1480.902
15	10.193	57.626	44.865	15	5	651.516	1858.972	1585.120
16	12.085	60.888	43.148	20	1	875.559	2348.521	1945.165
17	12.219	63.574	48.705	20	2	892.184	2323.352	2025.672
18	10.696	65.687	52.163	20	3	889.815	2371.712	1738.044
19	13.673	69.045	52.854	20	4	901.321	2329.076	1971.714
20	15.701	73.323	51.225	20	5	907.812	2425.731	1741.852
21	15.292	75.694	59.780	25	1	1222.815	2955.076	2579.249
22	14.211	78.403	61.545	25	2	1272.777	3088.813	2414.582
23	15.763	81.617	63.865	25	3	1183.607	2866.885	2388.170
24	13.538	86.144	64.494	25	4	1202.545	2893.352	2379.624
25	19.437	90.381	65.344	25	5	1257.813	3002.324	2720.753
26	15.527	90.308	74.808	30	1	1472.638	3428.788	2697.162
27	15.813	94.986	74.007	30	2	1429.746	3303.628	2716.119
28	17.551	96.384	69.960	30	3	1466.483	3469.749	2643.787
29	15.291	99.689	76.763	30	4	1419.989	3422.260	2541.181
30	20.183	102.632	70.441	30	5	1508.432	3543.937	3117.040

Tabla F.3.3: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	24.537	2.958	0.773	5	1	96.341	186.228	97.431
2	22.662	3.473	1.128	5	2	114.614	205.885	119.394
3	21.239	4.715	1.589	5	3	105.207	203.348	107.471
4	21.842	5.857	2.065	5	4	125.325	241.583	124.166
5	16.447	6.882	2.851	5	5	132.639	209.856	130.234
6	21.103	7.732	3.105	10	1	262.720	388.666	263.387
7	19.138	8.611	3.779	10	2	266.478	409.771	261.972
8	18.538	9.579	4.061	10	3	254.459	398.564	260.477
9	17.458	11.286	4.920	10	4	276.513	414.657	274.573
10	14.940	13.017	5.715	10	5	291.773	426.623	288.862
11	22.189	13.814	6.173	15	1	427.152	606.914	429.091
12	20.334	14.051	6.260	15	2	378.090	551.350	379.996
13	20.694	17.213	7.204	15	3	404.785	591.208	407.388
14	19.824	15.777	7.814	15	4	423.894	628.032	423.352
15	17.772	17.730	8.095	15	5	430.432	609.853	434.918
16	20.178	19.582	8.944	20	1	524.495	724.354	516.460
17	20.906	19.486	8.929	20	2	619.419	829.426	616.202
18	16.919	20.801	9.991	20	3	563.197	765.122	563.944
19	23.782	22.264	11.213	20	4	570.287	826.087	571.687
20	24.347	23.305	10.132	20	5	573.206	805.474	567.308
21	24.036	24.119	10.970	25	1	766.763	1003.862	748.093
22	20.778	23.652	11.860	25	2	758.526	1020.035	737.937
23	24.044	24.145	12.566	25	3	729.532	1014.362	712.889
24	17.838	28.019	13.578	25	4	734.293	946.124	736.048
25	30.068	29.711	14.665	25	5	771.041	1100.069	769.732
26	18.937	30.086	13.859	30	1	930.882	1201.499	918.059
27	22.020	28.279	13.559	30	2	816.891	1094.776	821.048
28	24.549	29.116	14.514	30	3	866.861	1148.625	857.343
29	20.273	32.376	15.510	30	4	842.507	1111.826	822.632
30	27.252	33.393	15.905	30	5	914.312	1211.373	910.231

Tabla F.3.4: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	29.500	2.964	0.774	5	1	108.833	204.827	110.424
2	28.393	3.475	1.130	5	2	131.278	233.478	134.764
3	27.309	4.728	1.593	5	3	124.659	237.232	127.218
4	28.470	5.872	2.071	5	4	142.202	271.959	143.289
5	22.536	6.899	2.856	5	5	150.469	236.525	150.559
6	28.229	7.763	3.111	10	1	313.038	458.305	316.451
7	26.155	8.621	3.793	10	2	317.088	478.597	317.235
8	25.537	9.595	4.078	10	3	310.378	475.660	316.446
9	24.301	11.323	4.947	10	4	334.665	489.902	335.704
10	21.130	13.077	5.744	10	5	353.307	505.275	354.643
11	30.064	13.819	6.197	15	1	535.162	749.934	541.619
12	28.106	14.056	6.297	15	2	471.217	674.508	477.290
13	28.385	17.270	7.224	15	3	514.337	732.011	522.102
14	27.181	15.853	7.844	15	4	536.170	778.863	540.622
15	24.596	17.797	8.141	15	5	545.527	754.301	554.626
16	27.693	19.696	8.992	20	1	666.398	907.201	668.518
17	28.468	19.528	8.965	20	2	784.424	1034.193	790.199
18	23.103	20.988	10.070	20	3	732.370	975.512	740.024
19	31.786	22.293	11.275	20	4	734.827	1046.972	743.125
20	33.008	23.366	10.188	20	5	739.634	1015.379	744.591
21	32.388	24.187	11.060	25	1	972.934	1255.480	968.848
22	27.835	23.849	11.952	25	2	994.096	1325.748	991.173
23	32.003	24.233	12.645	25	3	955.102	1295.586	953.806
24	23.532	28.206	13.643	25	4	977.422	1224.399	988.073
25	39.607	29.786	14.777	25	5	1024.887	1433.707	1035.158
26	24.904	30.198	13.920	30	1	1227.635	1556.354	1232.199
27	29.304	28.463	13.654	30	2	1106.089	1443.196	1122.393
28	32.594	29.280	14.646	30	3	1171.905	1500.660	1176.482
29	26.406	32.542	15.601	30	4	1131.495	1448.730	1131.954
30	35.859	33.559	16.031	30	5	1243.228	1598.009	1252.061

Tabla F.3.5: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	28.365	2.982	0.777	5	1	120.151	219.807	121.184
2	28.073	3.512	1.133	5	2	145.047	253.848	146.967
3	27.401	4.769	1.601	5	3	140.987	263.032	142.627
4	28.976	5.909	2.082	5	4	157.988	297.030	158.995
5	23.499	6.965	2.865	5	5	166.431	259.527	166.840
6	29.444	7.825	3.126	10	1	356.121	512.179	358.833
7	27.753	8.688	3.815	10	2	360.628	533.501	361.474
8	27.211	9.639	4.107	10	3	357.632	536.838	361.606
9	26.181	11.419	4.987	10	4	383.716	551.908	384.769
10	23.063	13.197	5.769	10	5	404.799	565.642	406.451
11	32.367	13.840	6.246	15	1	626.375	860.730	631.642
12	30.751	14.117	6.361	15	2	552.955	772.919	557.964
13	31.058	17.397	7.275	15	3	608.486	849.435	614.882
14	29.944	15.960	7.896	15	4	631.432	898.720	635.472
15	27.239	18.068	8.205	15	5	643.517	874.183	650.640
16	30.755	19.983	9.078	20	1	792.549	1064.186	795.908
17	31.500	19.698	9.041	20	2	925.375	1200.196	931.420
18	25.869	21.437	10.187	20	3	879.718	1155.415	886.276
19	35.016	22.234	11.383	20	4	878.969	1226.154	885.911
20	36.684	23.586	10.298	20	5	888.407	1183.183	894.326
21	35.843	24.309	11.195	25	1	1154.928	1471.847	1155.714
22	31.183	24.195	12.087	25	2	1204.481	1591.816	1206.367
23	35.656	24.370	12.784	25	3	1155.363	1535.326	1158.224
24	26.764	28.454	13.734	25	4	1191.634	1455.981	1200.627
25	43.921	29.969	14.975	25	5	1250.784	1715.862	1261.208
26	28.198	30.516	14.013	30	1	1494.386	1864.925	1502.488
27	33.219	28.787	13.824	30	2	1373.369	1768.417	1387.383
28	36.999	29.601	14.865	30	3	1447.921	1801.012	1454.318
29	30.295	32.823	15.731	30	4	1397.239	1738.979	1403.521
30	40.491	33.773	16.251	30	5	1539.168	1929.579	1548.906

Tabla F.3.6: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	104.678	2.981	0.778	5	1	105.418	187.212	97.912
2	95.715	3.494	1.138	5	2	117.496	207.382	119.985
3	88.337	4.781	1.607	5	3	112.880	204.522	108.034
4	86.564	5.928	2.095	5	4	139.944	242.560	124.812
5	71.893	7.009	2.886	5	5	150.391	210.855	130.903
6	79.170	7.813	3.145	10	1	285.739	389.957	265.044
7	73.081	8.731	3.848	10	2	297.871	411.995	263.658
8	69.456	9.746	4.145	10	3	267.738	401.246	262.256
9	64.964	11.551	5.038	10	4	304.875	417.555	276.389
10	57.806	13.236	5.776	10	5	322.503	428.144	290.371
11	71.354	14.058	6.306	15	1	457.780	612.217	432.965
12	66.680	14.310	6.411	15	2	409.115	555.288	383.352
13	65.301	17.610	7.381	15	3	436.142	595.473	410.758
14	62.324	16.091	8.002	15	4	462.348	631.602	426.449
15	56.357	18.153	8.292	15	5	459.749	615.092	438.659
16	59.813	20.024	9.194	20	1	583.818	729.310	521.705
17	60.926	19.906	9.134	20	2	674.768	837.657	622.181
18	50.387	21.296	10.317	20	3	607.565	771.519	569.512
19	62.686	22.610	11.482	20	4	617.223	833.142	577.487
20	65.211	23.738	10.473	20	5	632.283	812.374	572.882
21	62.524	24.666	11.296	25	1	860.308	1012.662	756.245
22	54.598	24.201	12.200	25	2	847.723	1030.216	747.500
23	59.887	24.493	12.893	25	3	814.187	1025.141	720.359
24	45.860	28.656	13.860	25	4	790.035	957.915	744.638
25	69.214	30.429	15.157	25	5	838.127	1111.378	777.684
26	46.555	30.872	14.266	30	1	1026.877	1211.150	927.907
27	53.110	28.999	14.089	30	2	877.092	1110.010	832.621
28	57.242	29.600	15.038	30	3	953.146	1160.890	867.524
29	46.260	33.413	16.097	30	4	943.725	1125.140	833.655
30	60.423	34.101	16.507	30	5	994.394	1225.448	921.870

Tabla F.3.7: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	133.751	2.985	0.779	5	1	108.909	205.991	110.899
2	127.655	3.495	1.139	5	2	129.505	235.154	135.353
3	121.855	4.789	1.610	5	3	123.933	238.637	127.818
4	121.971	5.930	2.098	5	4	143.116	273.298	143.953
5	106.122	7.015	2.890	5	5	152.550	237.560	151.238
6	116.334	7.835	3.148	10	1	314.545	460.063	318.246
7	110.119	8.739	3.856	10	2	321.819	481.212	319.064
8	106.612	9.749	4.155	10	3	308.973	478.655	318.358
9	101.725	11.562	5.050	10	4	338.964	493.104	337.664
10	93.195	13.260	5.798	10	5	356.901	507.179	356.354
11	110.948	14.058	6.316	15	1	538.040	755.052	545.868
12	105.869	14.314	6.431	15	2	473.863	678.884	480.902
13	104.397	17.638	7.392	15	3	515.410	737.221	525.950
14	100.790	16.141	8.020	15	4	540.188	782.871	544.128
15	93.392	18.185	8.319	15	5	546.047	761.088	558.934
16	98.297	20.086	9.216	20	1	676.724	914.123	674.435
17	99.841	19.930	9.154	20	2	793.252	1043.291	796.968
18	85.684	21.408	10.361	20	3	737.800	983.335	746.495
19	102.363	22.623	11.515	20	4	741.315	1055.108	749.702
20	106.649	23.778	10.502	20	5	748.746	1023.343	750.947
21	103.002	24.707	11.348	25	1	996.827	1265.860	978.190
22	91.956	24.296	12.254	25	2	1015.649	1338.944	1002.146
23	99.363	24.540	12.940	25	3	973.905	1308.636	962.725
24	79.893	28.729	13.899	25	4	985.256	1238.262	998.199
25	112.189	30.473	15.220	25	5	1035.118	1447.974	1044.381
26	80.947	30.927	14.304	30	1	1247.370	1568.918	1243.963
27	90.591	29.093	14.134	30	2	1113.846	1460.572	1136.138
28	96.365	29.694	15.120	30	3	1190.114	1515.842	1188.736
29	80.564	33.481	16.150	30	4	1156.220	1465.620	1145.179
30	100.666	34.189	16.578	30	5	1260.359	1614.141	1265.853

Tabla F.3.8: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	E_d	E_d^{*1}	E_d^{*2}	d	i	E_{di}	E_{di}^{*1}	E_{di}^{*2}
1	138.411	2.989	0.781	5	1	120.012	219.707	121.564
2	135.378	3.496	1.140	5	2	144.386	254.530	147.502
3	131.644	4.798	1.613	5	3	140.649	263.468	143.220
4	133.718	5.934	2.101	5	4	158.025	296.290	159.579
5	118.895	7.026	2.894	5	5	166.997	258.859	167.466
6	130.920	7.850	3.152	10	1	356.413	512.700	360.454
7	125.740	8.751	3.866	10	2	362.022	534.806	363.053
8	123.024	9.756	4.167	10	3	357.058	538.232	363.404
9	118.812	11.581	5.067	10	4	385.206	551.023	386.459
10	110.354	13.299	5.820	10	5	405.653	568.405	408.021
11	130.349	14.057	6.332	15	1	627.608	864.156	635.457
12	125.955	14.315	6.455	15	2	553.762	778.400	561.106
13	125.006	17.673	7.408	15	3	608.606	849.933	618.498
14	121.583	16.192	8.041	15	4	632.626	901.736	638.734
15	114.027	18.212	8.350	15	5	643.662	877.781	654.735
16	120.282	20.172	9.249	20	1	796.395	1069.638	801.331
17	122.184	19.965	9.180	20	2	928.728	1206.945	937.639
18	106.921	21.513	10.414	20	3	882.430	1158.171	892.414
19	125.900	22.624	11.557	20	4	881.850	1232.721	892.000
20	131.517	23.829	10.537	20	5	891.628	1194.136	900.105
21	127.794	24.749	11.408	25	1	1164.740	1473.806	1164.159
22	115.606	24.432	12.318	25	2	1214.101	1594.581	1216.353
23	124.453	24.576	12.994	25	3	1163.172	1544.366	1166.822
24	102.885	28.856	13.944	25	4	1195.732	1474.385	1210.223
25	139.751	30.526	15.298	25	5	1254.736	1728.033	1269.813
26	104.536	31.004	14.356	30	1	1502.281	1871.410	1513.859
27	116.192	29.214	14.204	30	2	1377.911	1769.995	1400.538
28	123.284	29.817	15.216	30	3	1455.971	1817.756	1465.939
29	105.459	33.566	16.216	30	4	1407.948	1756.020	1415.917
30	128.750	34.301	16.673	30	5	1547.496	1941.050	1562.020

Tabla F.3.9: EMSE multiplicados por 10^7
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.3.2. Sesgo empírico, B_d y B_{di}

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-66.879	-0.503	1.310	5	1	24.211	-22.965	26.296
2	-63.499	-0.359	1.522	5	2	72.734	48.363	74.960
3	-60.648	2.018	1.898	5	3	28.741	-0.834	31.028
4	-63.277	-9.443	-2.733	5	4	-7.585	-39.507	-5.177
5	-42.773	13.257	15.982	5	5	-29.134	-67.401	-26.607
6	-62.550	-6.162	-5.320	10	1	-1.600	-35.225	3.251
7	-51.717	-0.335	4.143	10	2	-46.078	-107.087	-41.220
8	-50.891	-1.875	3.685	10	3	42.687	11.525	47.638
9	-43.798	3.889	9.690	10	4	-24.940	-73.990	-19.865
10	-32.170	14.435	20.220	10	5	-55.033	-91.897	-49.861
11	-61.532	-11.773	-10.169	15	1	21.612	-57.916	28.811
12	-53.604	-4.754	-3.139	15	2	13.066	-48.967	20.319
13	-52.397	-5.279	-2.791	15	3	-3.740	-56.552	3.833
14	-46.023	-1.191	2.721	15	4	-36.264	-97.233	-28.548
15	-37.754	3.879	10.171	15	5	13.717	-65.114	21.695
16	-44.285	-3.070	2.918	20	1	-60.916	-153.994	-51.108
17	-49.684	-10.982	-3.298	20	2	-42.039	-124.681	-32.320
18	-24.552	16.668	21.180	20	3	-5.857	-93.595	3.999
19	-56.002	-22.137	-10.931	20	4	0.558	-58.053	10.435
20	-61.658	-23.078	-17.231	20	5	-58.765	-89.876	-48.443
21	-58.382	-20.925	-14.686	25	1	-136.431	-239.228	-124.341
22	-37.011	-8.794	6.132	25	2	-118.968	-185.653	-107.054
23	-53.234	-11.304	-10.756	25	3	-123.927	-177.526	-111.962
24	-13.873	20.381	28.067	25	4	-15.508	-98.846	-3.398
25	-74.556	-46.503	-33.159	25	5	-60.738	-129.313	-47.991
26	-20.069	16.411	20.841	30	1	-136.507	-222.510	-122.123
27	-36.470	-4.898	3.828	30	2	19.481	-74.704	33.444
28	-46.022	-20.802	-6.285	30	3	-92.664	-170.514	-78.567
29	-18.184	16.168	20.971	30	4	-116.421	-208.384	-102.424
30	-55.348	-22.865	-16.659	30	5	-57.552	-148.914	-43.537

Tabla F.3.10: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-67.887	-0.200	1.324	5	1	18.828	-7.291	26.960
2	-66.485	-0.563	0.868	5	2	64.646	61.695	72.967
3	-63.925	2.672	1.925	5	3	26.105	20.052	34.632
4	-67.514	-8.703	-2.927	5	4	-3.123	-11.116	5.611
5	-47.771	13.401	15.665	5	5	-30.392	-46.067	-21.516
6	-68.116	-5.570	-5.692	10	1	0.525	-3.016	13.321
7	-58.191	0.133	3.314	10	2	-56.138	-83.437	-43.269
8	-56.906	-0.541	3.700	10	3	35.675	39.128	48.721
9	-50.313	4.770	9.540	10	4	-46.154	-63.312	-32.934
10	-39.079	15.347	19.994	10	5	-56.831	-61.775	-43.544
11	-68.915	-10.990	-10.608	15	1	16.308	-31.960	32.944
12	-62.545	-4.748	-4.903	15	2	6.570	-22.241	23.315
13	-60.524	-4.998	-3.525	15	3	6.569	-11.378	23.638
14	-54.308	-0.406	2.045	15	4	-39.163	-59.211	-21.946
15	-45.953	4.596	9.753	15	5	22.961	-22.495	40.430
16	-52.776	-2.182	2.367	20	1	-62.955	-113.809	-42.681
17	-59.062	-10.349	-4.548	20	2	-43.197	-83.419	-22.855
18	-32.751	18.292	21.231	20	3	-12.051	-58.114	8.431
19	-65.271	-21.153	-11.808	20	4	-10.201	-25.578	10.351
20	-70.967	-22.381	-18.054	20	5	-57.115	-43.907	-36.077
21	-67.589	-20.546	-15.283	25	1	-161.542	-228.151	-137.933
22	-46.565	-8.246	5.285	25	2	-128.315	-145.008	-104.738
23	-63.023	-10.721	-11.703	25	3	-134.715	-146.705	-111.103
24	-24.263	20.968	26.573	25	4	-19.584	-61.499	4.148
25	-84.614	-46.264	-34.250	25	5	-64.861	-89.761	-40.403
26	-30.604	17.247	19.300	30	1	-132.400	-175.956	-105.787
27	-46.893	-3.992	2.502	30	2	26.682	-20.521	53.270
28	-58.120	-21.552	-9.175	30	3	-106.945	-142.168	-80.283
29	-29.022	16.776	19.389	30	4	-127.382	-176.102	-100.719
30	-67.218	-23.537	-19.230	30	5	-78.546	-123.644	-51.852

Tabla F.3.11: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-57.602	-6.323	9.962	5	1	15.908	-48.825	76.618
2	-56.169	-9.291	11.691	5	2	69.355	25.244	128.600
3	-54.721	-8.319	13.219	5	3	38.592	-30.399	104.808
4	-58.347	-15.776	9.168	5	4	-13.095	-90.152	50.834
5	-40.860	0.634	27.204	5	5	-5.882	-57.202	61.624
6	-60.540	-14.704	7.270	10	1	2.995	-73.872	86.927
7	-50.600	-11.344	16.797	10	2	-28.251	-108.772	53.881
8	-52.429	-10.437	15.766	10	3	23.832	-58.787	102.236
9	-42.478	-2.047	25.649	10	4	-22.244	-120.072	57.611
10	-31.192	-1.945	36.736	10	5	4.214	-93.380	81.669
11	-62.481	-31.621	5.356	15	1	18.737	-57.670	115.234
12	-58.363	-28.300	9.419	15	2	34.606	-61.896	127.803
13	-50.726	-19.269	16.964	15	3	27.483	-51.368	123.995
14	-50.684	-23.999	16.871	15	4	-37.758	-140.535	57.794
15	-39.739	-6.719	28.185	15	5	66.195	-25.229	164.241
16	-47.527	-18.494	19.361	20	1	-43.830	-174.163	62.962
17	-52.240	-23.430	15.443	20	2	-1.297	-121.719	106.488
18	-30.458	-5.958	37.435	20	3	12.306	-77.950	108.415
19	-60.031	-29.061	7.547	20	4	26.986	-80.219	133.738
20	-66.137	-46.196	0.330	20	5	-65.594	-183.208	30.927
21	-64.463	-38.074	3.363	25	1	-151.061	-270.247	-29.618
22	-42.701	-17.376	24.891	25	2	-71.063	-187.583	40.542
23	-62.778	-39.108	4.938	25	3	-15.769	-142.988	97.471
24	-21.562	-2.537	45.453	25	4	87.948	-38.388	201.877
25	-75.880	-54.768	-9.240	25	5	-91.501	-206.838	31.991
26	-24.588	-6.944	43.470	30	1	-94.819	-205.842	22.506
27	-40.110	-24.847	27.414	30	2	17.319	-109.950	138.152
28	-56.383	-36.582	10.003	30	3	-74.069	-204.348	40.873
29	-17.180	4.159	49.642	30	4	-72.609	-242.961	41.902
30	-64.468	-47.080	0.788	30	5	-38.934	-185.869	93.399

Tabla F.3.12: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-147.145	0.175	1.308	5	1	-10.521	-20.005	26.450
2	-140.182	0.392	1.433	5	2	37.825	51.978	75.442
3	-133.843	3.618	2.410	5	3	-5.885	3.429	32.434
4	-134.795	-8.379	-2.870	5	4	-44.064	-36.334	-4.817
5	-111.691	15.149	16.364	5	5	-67.036	-65.258	-27.246
6	-129.392	-3.955	-4.604	10	1	-51.379	-32.649	2.049
7	-118.037	1.114	3.828	10	2	-95.022	-103.642	-41.425
8	-114.788	0.482	4.297	10	3	-5.043	17.622	49.317
9	-106.188	6.514	10.583	10	4	-75.433	-70.346	-20.629
10	-94.128	16.551	20.294	10	5	-103.839	-86.831	-48.799
11	-122.316	-9.532	-10.051	15	1	-37.953	-53.723	27.739
12	-113.807	-2.557	-3.451	15	2	-45.240	-42.051	20.839
13	-111.569	-2.956	-3.015	15	3	-61.876	-49.025	5.253
14	-105.496	-0.056	1.240	15	4	-97.438	-93.184	-29.860
15	-94.524	7.172	10.525	15	5	-43.929	-56.624	24.135
16	-100.435	0.079	3.145	20	1	-128.315	-147.339	-51.593
17	-106.039	-8.174	-4.095	20	2	-110.003	-119.068	-33.113
18	-78.710	20.412	21.885	20	3	-74.589	-88.658	2.607
19	-109.527	-18.829	-10.304	20	4	-69.944	-54.298	7.424
20	-116.762	-21.141	-18.828	20	5	-129.023	-84.620	-50.342
21	-111.319	-17.384	-14.766	25	1	-211.394	-233.595	-125.332
22	-90.123	-6.378	5.292	25	2	-193.678	-179.338	-107.788
23	-105.303	-7.947	-11.217	25	3	-197.673	-170.013	-111.441
24	-66.454	22.540	26.644	25	4	-88.966	-89.946	-2.470
25	-125.095	-42.903	-33.042	25	5	-135.645	-120.916	-47.542
26	-69.886	20.651	21.143	30	1	-215.036	-212.334	-120.786
27	-86.720	-1.356	3.263	30	2	-59.537	-65.514	34.876
28	-96.352	-17.773	-7.397	30	3	-172.955	-163.988	-78.371
29	-65.994	20.771	21.946	30	4	-198.198	-199.997	-103.675
30	-103.975	-19.216	-16.907	30	5	-142.941	-144.036	-48.277

Tabla F.3.13: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-159.071	0.329	1.347	5	1	7.497	-6.102	26.327
2	-155.195	0.215	1.232	5	2	54.721	64.705	73.928
3	-150.654	3.880	2.554	5	3	17.065	24.017	36.706
4	-153.318	-8.205	-2.767	5	4	-13.917	-7.859	6.249
5	-131.789	15.291	16.331	5	5	-43.552	-45.015	-23.085
6	-150.586	-3.640	-4.555	10	1	-16.614	0.371	12.334
7	-140.440	1.247	3.691	10	2	-71.162	-80.774	-42.064
8	-137.791	0.993	4.508	10	3	21.267	43.661	50.834
9	-130.105	6.815	10.646	10	4	-62.736	-61.585	-32.860
10	-118.558	17.088	20.599	10	5	-73.291	-59.439	-43.300
11	-147.566	-9.007	-9.892	15	1	-5.201	-27.831	32.059
12	-140.343	-2.877	-3.998	15	2	-15.238	-16.232	22.284
13	-138.182	-2.702	-3.094	15	3	-13.255	-4.119	24.939
14	-132.195	0.609	1.606	15	4	-62.351	-57.419	-23.873
15	-121.784	7.648	10.795	15	5	4.799	-14.797	43.637
16	-128.425	0.296	3.098	20	1	-88.270	-108.792	-43.218
17	-134.423	-7.874	-4.119	20	2	-66.749	-78.054	-21.532
18	-107.122	21.107	22.187	20	3	-39.533	-58.533	5.960
19	-138.694	-18.549	-10.400	20	4	-35.272	-19.737	10.351
20	-145.918	-20.528	-18.578	20	5	-84.353	-40.291	-37.787
21	-141.068	-17.180	-14.802	25	1	-189.798	-221.820	-137.648
22	-119.775	-5.641	5.626	25	2	-156.928	-141.179	-104.783
23	-135.445	-7.481	-11.053	25	3	-163.508	-142.555	-111.202
24	-97.211	22.747	26.398	25	4	-46.796	-56.014	5.711
25	-156.014	-42.733	-33.210	25	5	-93.816	-81.822	-40.022
26	-101.025	21.219	20.953	30	1	-164.066	-168.422	-105.539
27	-118.054	-0.885	3.102	30	2	-3.726	-15.009	55.158
28	-128.753	-18.313	-8.421	30	3	-138.196	-137.901	-79.242
29	-97.936	20.703	21.588	30	4	-159.624	-165.906	-100.610
30	-136.784	-19.976	-17.979	30	5	-113.631	-117.155	-54.522

Tabla F.3.14: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-149.704	0.646	1.458	5	1	15.698	-0.061	24.980
2	-148.276	0.171	0.868	5	2	60.857	68.118	70.339
3	-144.847	4.265	2.639	5	3	28.368	34.394	38.093
4	-148.842	-7.631	-2.749	5	4	3.923	9.474	13.913
5	-128.560	15.427	16.244	5	5	-29.766	-33.207	-19.620
6	-148.455	-3.143	-4.776	10	1	3.485	17.549	18.287
7	-139.464	1.286	3.182	10	2	-57.867	-66.753	-42.970
8	-137.115	1.744	4.519	10	3	35.905	59.036	51.052
9	-130.150	7.464	10.630	10	4	-59.322	-59.173	-43.993
10	-119.310	17.641	20.576	10	5	-53.136	-40.210	-37.749
11	-149.178	-8.483	-10.140	15	1	14.868	-12.654	34.445
12	-143.388	-2.940	-5.110	15	2	4.253	-1.947	23.980
13	-140.984	-2.740	-3.427	15	3	16.332	22.764	36.435
14	-135.543	0.974	1.268	15	4	-37.388	-31.092	-17.139
15	-125.402	8.043	10.685	15	5	36.020	12.969	56.490
16	-132.570	0.692	2.895	20	1	-60.852	-81.540	-36.726
17	-139.619	-7.506	-4.881	20	2	-37.721	-49.560	-13.459
18	-111.776	21.858	22.365	20	3	-20.467	-39.573	3.961
19	-144.299	-17.892	-10.769	20	4	-17.970	-1.948	6.551
20	-151.781	-20.113	-18.832	20	5	-55.578	-13.787	-30.497
21	-147.088	-16.413	-14.813	25	1	-174.806	-213.027	-146.337
22	-126.422	-5.089	5.326	25	2	-129.811	-111.701	-101.312
23	-142.608	-7.042	-11.470	25	3	-136.835	-121.293	-108.264
24	-105.113	22.846	25.516	25	4	-20.201	-34.665	8.487
25	-163.820	-42.680	-33.697	25	5	-64.285	-55.399	-34.763
26	-109.410	21.668	20.172	30	1	-124.138	-133.384	-91.717
27	-126.628	-0.297	2.442	30	2	32.695	19.183	65.386
28	-138.742	-18.965	-10.184	30	3	-113.750	-120.087	-81.041
29	-107.444	20.895	20.581	30	4	-127.859	-139.243	-95.057
30	-147.060	-20.197	-19.510	30	5	-92.824	-99.168	-59.969

Tabla F.3.15: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-309.339	0.644	1.371	5	1	-78.382	-17.941	26.758
2	-295.057	0.797	1.324	5	2	-31.158	54.027	75.607
3	-282.287	4.678	2.833	5	3	-75.518	5.853	33.218
4	-278.992	-7.782	-2.962	5	4	-115.884	-34.492	-4.683
5	-251.364	16.227	16.544	5	5	-140.363	-64.128	-27.788
6	-265.095	-2.458	-4.050	10	1	-146.716	-31.049	1.420
7	-251.375	1.882	3.545	10	2	-190.273	-101.648	-41.660
8	-244.180	2.184	4.876	10	3	-100.101	21.714	50.583
9	-232.978	8.112	11.228	10	4	-172.830	-68.077	-21.095
10	-218.867	17.901	20.419	10	5	-200.145	-83.558	-47.869
11	-244.757	-8.264	-9.998	15	1	-152.882	-51.519	26.590
12	-234.716	-1.565	-3.958	15	2	-159.268	-37.838	21.249
13	-230.200	-1.624	-3.226	15	3	-176.408	-43.980	6.564
14	-223.027	0.385	0.137	15	4	-214.858	-91.141	-30.820
15	-208.860	9.237	10.775	15	5	-158.892	-51.541	26.072
16	-213.406	1.807	3.177	20	1	-258.192	-143.062	-51.547
17	-217.962	-6.540	-4.752	20	2	-241.231	-115.879	-33.934
18	-187.957	22.745	22.431	20	3	-206.085	-85.717	1.856
19	-217.291	-16.713	-9.782	20	4	-203.658	-52.748	4.731
20	-224.797	-20.106	-19.959	20	5	-262.740	-81.277	-51.328
21	-216.742	-15.184	-14.741	25	1	-355.062	-229.652	-125.738
22	-195.152	-5.167	4.484	25	2	-337.192	-175.368	-107.999
23	-208.477	-6.008	-11.575	25	3	-340.978	-165.215	-110.890
24	-169.681	23.233	25.209	25	4	-231.864	-84.015	-1.265
25	-225.493	-40.581	-32.755	25	5	-281.268	-115.922	-47.221
26	-169.597	22.986	20.986	30	1	-368.493	-206.028	-119.885
27	-185.729	0.750	2.773	30	2	-213.986	-59.831	35.834
28	-194.978	-16.249	-8.548	30	3	-328.641	-160.387	-78.584
29	-162.185	23.018	22.219	30	4	-354.782	-194.775	-104.687
30	-200.068	-17.394	-17.449	30	5	-303.212	-143.047	-52.724

Tabla F.3.16: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-347.573	0.696	1.383	5	1	-12.604	-4.637	26.317
2	-339.106	0.669	1.208	5	2	34.418	66.591	74.071
3	-330.414	4.790	2.918	5	3	-2.938	26.418	37.600
4	-330.436	-7.674	-2.869	5	4	-35.121	-6.093	6.508
5	-305.771	16.262	16.533	5	5	-65.653	-44.016	-23.421
6	-321.761	-2.283	-3.979	10	1	-47.664	1.446	11.540
7	-310.215	1.926	3.464	10	2	-101.592	-79.094	-42.103
8	-304.711	2.368	4.985	10	3	-8.524	47.091	51.977
9	-295.130	8.229	11.226	10	4	-94.615	-59.841	-33.556
10	-282.308	18.171	20.612	10	5	-103.905	-56.804	-42.607
11	-309.525	-7.928	-9.806	15	1	-44.586	-26.003	31.157
12	-301.032	-1.716	-4.174	15	2	-53.685	-12.487	22.619
13	-297.375	-1.523	-3.236	15	3	-51.711	0.289	25.901
14	-290.863	0.870	0.507	15	4	-103.189	-55.966	-25.002
15	-277.786	9.467	10.977	15	5	-33.134	-9.578	45.594
16	-283.292	1.915	3.206	20	1	-134.388	-104.280	-43.226
17	-288.586	-6.363	-4.655	20	2	-113.530	-75.148	-21.991
18	-259.220	23.054	22.574	20	3	-87.304	-56.551	4.734
19	-289.366	-16.542	-9.753	20	4	-83.981	-17.958	8.303
20	-297.280	-19.716	-19.696	20	5	-133.246	-37.820	-39.142
21	-290.115	-15.137	-14.763	25	1	-243.099	-218.460	-138.009
22	-268.606	-4.536	4.898	25	2	-210.011	-137.385	-104.833
23	-282.697	-5.667	-11.331	25	3	-216.555	-138.890	-110.958
24	-244.636	23.335	25.118	25	4	-99.178	-50.547	6.744
25	-300.947	-40.597	-32.898	25	5	-147.630	-76.735	-39.394
26	-245.286	23.341	21.000	30	1	-221.794	-162.245	-104.176
27	-261.997	0.883	2.629	30	2	-62.395	-9.851	56.194
28	-272.078	-16.712	-9.155	30	3	-197.730	-134.588	-79.007
29	-239.309	22.825	21.971	30	4	-220.336	-161.036	-101.501
30	-277.931	-17.961	-18.138	30	5	-177.608	-116.081	-58.519

Tabla F.3.17: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	B_d	B_d^{*1}	B_d^{*2}	d	i	B_{di}	B_{di}^{*1}	B_{di}^{*2}
1	-347.545	0.802	1.421	5	1	8.345	0.133	24.220
2	-343.390	0.552	1.072	5	2	54.502	69.884	70.706
3	-337.741	4.974	3.028	5	3	23.138	36.627	39.739
4	-340.477	-7.572	-2.794	5	4	-2.704	10.828	14.380
5	-318.308	16.345	16.517	5	5	-38.234	-33.193	-20.888
6	-336.274	-2.074	-3.925	10	1	-7.766	19.677	17.437
7	-326.711	1.988	3.369	10	2	-67.416	-65.218	-42.064
8	-322.726	2.696	5.133	10	3	26.634	61.205	52.448
9	-314.719	8.378	11.263	10	4	-70.130	-58.731	-44.038
10	-303.194	18.498	20.836	10	5	-63.425	-39.566	-37.230
11	-331.903	-7.574	-9.697	15	1	0.840	-10.038	34.110
12	-325.108	-1.968	-4.548	15	2	-10.634	2.211	22.904
13	-322.310	-1.433	-3.312	15	3	3.500	27.481	37.674
14	-316.638	1.266	0.749	15	4	-53.933	-32.020	-19.497
15	-304.677	9.738	11.175	15	5	23.903	17.363	58.636
16	-311.354	2.006	3.171	20	1	-78.044	-77.620	-37.025
17	-317.648	-6.244	-4.666	20	2	-53.621	-46.229	-12.376
18	-288.946	23.484	22.767	20	3	-38.882	-41.210	2.631
19	-320.164	-16.288	-9.758	20	4	-34.770	1.105	6.881
20	-328.627	-19.295	-19.424	20	5	-74.023	-10.713	-31.437
21	-322.589	-15.015	-14.760	25	1	-194.465	-211.405	-146.094
22	-301.516	-4.020	5.187	25	2	-149.820	-110.671	-101.392
23	-316.601	-5.342	-11.195	25	3	-156.986	-119.738	-108.369
24	-279.525	23.356	24.878	25	4	-39.164	-31.636	9.626
25	-336.395	-40.634	-33.035	25	5	-84.395	-50.484	-34.296
26	-281.306	23.713	20.943	30	1	-145.013	-128.187	-89.885
27	-298.711	1.136	2.514	30	2	11.541	22.232	67.230
28	-309.991	-17.096	-9.834	30	3	-135.478	-117.708	-79.752
29	-277.484	22.642	21.648	30	4	-150.586	-133.424	-94.730
30	-317.016	-18.458	-18.833	30	5	-118.336	-96.778	-62.355

Tabla F.3.18: Sesgos multiplicados por 10^5
para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.3.3. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 95 %

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.20	94.90	94.90	5	1	94.30	94.00	94.30
2	93.90	94.40	94.50	5	2	93.90	93.80	93.90
3	95.10	95.80	96.00	5	3	95.90	95.60	95.90
4	93.90	95.00	94.60	5	4	94.50	94.10	94.50
5	94.10	94.70	94.60	5	5	94.90	95.00	94.90
6	95.60	96.00	96.00	10	1	94.20	94.10	94.30
7	94.70	95.00	94.90	10	2	93.90	93.90	93.90
8	94.90	95.10	95.30	10	3	95.20	95.00	95.20
9	95.30	95.90	96.20	10	4	95.20	95.10	95.20
10	94.00	94.60	94.50	10	5	95.10	95.20	95.00
11	95.40	96.00	96.10	15	1	94.40	94.20	94.50
12	93.80	94.10	94.10	15	2	95.40	95.50	95.40
13	96.40	96.30	96.50	15	3	94.30	94.20	94.30
14	94.90	95.20	95.00	15	4	95.10	95.10	95.10
15	92.70	93.20	93.30	15	5	93.60	93.60	93.70
16	96.70	96.60	96.80	20	1	95.10	94.90	95.10
17	94.20	94.60	94.30	20	2	94.20	94.10	94.20
18	95.70	96.00	96.10	20	3	94.60	94.50	94.60
19	95.20	95.50	95.40	20	4	94.70	94.60	94.70
20	95.00	95.30	95.10	20	5	94.90	94.70	94.90
21	95.70	95.70	95.90	25	1	95.30	95.20	95.30
22	95.50	95.90	95.50	25	2	95.40	95.20	95.40
23	95.10	95.50	95.20	25	3	94.50	94.50	94.50
24	95.50	95.20	95.50	25	4	95.70	95.20	95.70
25	94.10	94.60	94.30	25	5	94.70	94.60	94.70
26	95.20	95.40	95.50	30	1	94.80	94.60	94.80
27	95.90	96.10	96.10	30	2	94.20	94.10	94.20
28	95.40	95.60	95.70	30	3	94.80	94.80	94.80
29	95.80	96.00	95.80	30	4	94.80	94.60	94.80
30	94.10	94.10	94.30	30	5	94.60	94.60	94.60

Tabla F.3.19: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.20	94.80	94.80	5	1	94.00	93.90	94.00
2	93.60	94.30	94.50	5	2	94.20	94.20	94.20
3	95.20	96.00	96.00	5	3	95.50	95.60	95.50
4	93.90	94.70	94.60	5	4	94.40	94.20	94.40
5	94.20	94.70	94.80	5	5	95.00	95.00	95.00
6	95.50	96.00	95.90	10	1	94.00	93.80	94.00
7	94.50	94.90	94.90	10	2	93.40	93.20	93.40
8	94.90	95.10	95.20	10	3	95.10	95.20	95.20
9	95.10	95.60	95.90	10	4	94.90	95.10	95.00
10	93.80	94.20	94.70	10	5	94.80	95.20	95.00
11	95.60	95.90	96.00	15	1	94.40	94.20	94.40
12	93.90	94.00	94.00	15	2	95.30	95.50	95.30
13	96.20	96.30	96.30	15	3	94.40	94.30	94.40
14	94.80	95.20	95.10	15	4	95.10	95.10	95.10
15	92.20	93.20	93.10	15	5	93.80	93.50	93.80
16	96.50	96.50	96.80	20	1	95.30	95.10	95.30
17	94.20	94.50	94.50	20	2	94.00	94.00	94.00
18	95.70	96.00	95.90	20	3	95.30	95.00	95.30
19	95.00	95.20	95.40	20	4	94.40	94.50	94.40
20	94.70	95.20	95.10	20	5	94.80	95.10	94.80
21	95.80	95.90	96.00	25	1	95.30	95.30	95.30
22	95.50	95.90	95.50	25	2	94.80	94.80	94.80
23	95.20	95.60	95.50	25	3	94.40	94.40	94.40
24	95.10	95.20	95.30	25	4	95.90	95.80	95.90
25	94.10	94.60	94.40	25	5	94.70	94.90	94.70
26	95.20	95.20	95.30	30	1	94.40	94.30	94.40
27	95.60	96.20	96.10	30	2	94.20	94.10	94.20
28	95.70	95.70	96.00	30	3	94.50	94.60	94.60
29	95.60	95.80	95.60	30	4	94.60	94.50	94.60
30	93.90	94.20	94.30	30	5	94.80	94.60	94.80

Tabla F.3.20: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	94.46	95.16	95.46	5	1	94.05	93.75	94.25
2	93.85	94.86	95.16	5	2	94.25	94.05	94.46
3	95.36	95.97	96.37	5	3	96.07	95.87	96.27
4	95.77	96.17	96.17	5	4	94.05	94.25	94.56
5	93.65	93.95	94.15	5	5	94.86	94.96	95.16
6	95.36	95.77	95.87	10	1	93.95	94.05	94.25
7	94.96	95.16	95.46	10	2	94.15	94.46	94.35
8	94.66	95.06	95.26	10	3	95.56	95.56	95.77
9	93.95	94.15	94.25	10	4	95.06	94.76	95.46
10	94.76	94.76	95.36	10	5	95.26	95.16	95.26
11	94.35	94.46	94.86	15	1	95.67	95.77	95.97
12	93.75	93.75	94.15	15	2	95.87	95.77	96.07
13	95.06	95.36	95.67	15	3	94.35	94.76	94.76
14	94.76	94.66	94.96	15	4	94.25	94.35	94.56
15	96.07	96.17	96.67	15	5	93.85	94.05	94.35
16	94.96	95.26	95.26	20	1	94.56	94.56	94.96
17	95.06	95.46	95.56	20	2	94.96	95.16	95.26
18	94.96	94.86	95.36	20	3	95.36	95.56	95.56
19	95.16	95.06	95.67	20	4	94.66	94.76	94.96
20	94.66	94.76	95.06	20	5	93.95	93.95	94.35
21	94.86	95.16	95.16	25	1	95.67	95.77	96.07
22	93.15	93.45	93.55	25	2	95.67	95.36	96.07
23	94.76	94.96	95.36	25	3	95.56	95.36	95.67
24	94.76	95.06	95.26	25	4	94.86	95.16	95.16
25	95.67	95.87	96.07	25	5	94.96	94.76	94.96
26	95.36	95.87	95.87	30	1	95.26	95.16	95.67
27	95.36	95.36	95.77	30	2	94.76	94.46	95.06
28	95.26	95.36	95.56	30	3	94.25	94.05	94.46
29	94.76	95.36	95.16	30	4	95.67	95.56	96.17
30	94.96	95.16	95.26	30	5	94.35	94.25	94.66

Tabla F.3.21: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	93.10	94.90	95.00	5	1	94.00	94.10	94.10
2	92.20	94.30	94.30	5	2	93.90	94.00	94.00
3	94.70	96.00	96.10	5	3	95.80	95.60	95.80
4	93.30	94.60	94.80	5	4	94.40	94.30	94.60
5	93.70	94.70	94.80	5	5	94.80	94.80	94.90
6	95.00	95.80	96.00	10	1	94.30	94.10	94.30
7	94.30	95.10	95.20	10	2	93.50	93.60	93.60
8	94.70	95.40	95.30	10	3	95.00	95.10	95.30
9	95.40	95.80	96.20	10	4	95.10	95.00	95.20
10	93.20	94.20	94.30	10	5	94.90	95.00	94.90
11	95.30	95.80	95.90	15	1	94.40	94.20	94.50
12	93.40	94.10	94.00	15	2	95.50	95.50	95.50
13	96.10	96.30	96.20	15	3	94.30	94.30	94.40
14	94.80	95.30	95.00	15	4	95.00	95.00	95.00
15	91.80	92.70	92.80	15	5	93.60	93.50	93.70
16	96.70	96.60	96.80	20	1	95.00	94.90	95.00
17	94.10	94.70	94.60	20	2	94.30	94.10	94.40
18	95.50	96.00	95.90	20	3	94.60	94.50	94.60
19	95.10	95.40	95.50	20	4	94.50	94.30	94.90
20	94.50	95.30	95.50	20	5	94.80	94.70	94.90
21	95.50	95.80	96.10	25	1	95.20	95.50	95.20
22	95.10	95.40	95.60	25	2	95.40	95.10	95.40
23	94.80	95.40	95.20	25	3	94.40	94.50	94.40
24	95.60	95.60	96.00	25	4	95.60	95.30	95.70
25	94.30	94.80	94.50	25	5	94.70	94.60	94.80
26	95.10	95.40	95.60	30	1	94.70	94.50	94.70
27	95.70	95.90	96.00	30	2	94.20	94.00	94.30
28	95.30	95.60	95.70	30	3	94.80	94.60	94.80
29	95.30	95.60	95.70	30	4	94.70	94.50	94.80
30	93.70	94.20	94.30	30	5	94.60	94.50	94.70

Tabla F.3.22: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	93.00	95.00	94.90	5	1	94.00	93.90	94.00
2	91.90	94.20	94.40	5	2	93.70	94.20	93.80
3	94.60	96.00	95.90	5	3	95.70	95.60	95.70
4	93.20	94.60	94.80	5	4	94.40	94.20	94.40
5	93.80	94.70	95.00	5	5	95.00	94.80	95.10
6	94.80	95.90	95.80	10	1	94.00	93.90	94.00
7	94.10	95.10	95.20	10	2	93.20	93.20	93.20
8	94.20	95.20	95.30	10	3	94.90	95.30	94.90
9	95.40	95.90	96.20	10	4	94.90	94.90	95.00
10	93.00	94.30	94.20	10	5	94.90	95.20	95.00
11	95.20	95.80	95.80	15	1	94.40	94.10	94.40
12	93.20	94.00	94.10	15	2	95.40	95.50	95.40
13	95.80	96.30	96.30	15	3	94.40	94.20	94.40
14	94.70	95.30	95.10	15	4	95.00	95.20	95.00
15	91.80	92.70	92.70	15	5	93.50	93.70	93.60
16	96.60	96.60	96.80	20	1	95.30	95.30	95.30
17	94.20	94.80	94.80	20	2	94.00	93.90	94.10
18	95.30	96.10	96.10	20	3	94.90	94.90	94.90
19	94.80	95.20	95.40	20	4	94.60	94.50	94.70
20	94.60	95.00	95.30	20	5	94.70	95.00	94.70
21	95.30	95.70	96.10	25	1	95.50	95.50	95.50
22	95.00	95.50	95.70	25	2	95.00	94.60	95.00
23	94.60	95.50	95.50	25	3	94.30	94.60	94.30
24	94.90	95.60	95.90	25	4	95.90	95.90	95.90
25	94.10	94.80	94.70	25	5	94.70	94.90	94.70
26	94.90	95.20	95.60	30	1	94.40	94.30	94.40
27	95.70	95.90	96.10	30	2	94.30	94.20	94.30
28	95.40	95.60	95.80	30	3	94.60	94.60	94.80
29	95.40	95.50	95.60	30	4	94.50	94.60	94.50
30	93.70	94.40	94.40	30	5	94.60	94.60	94.70

Tabla F.3.23: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	93.10	95.00	94.80	5	1	93.80	93.90	93.80
2	91.80	94.10	94.50	5	2	94.60	94.50	94.60
3	94.40	96.00	95.90	5	3	95.60	95.70	95.60
4	93.30	94.70	94.70	5	4	94.40	94.00	94.40
5	93.90	94.80	94.90	5	5	95.50	95.40	95.50
6	95.00	96.00	95.90	10	1	94.10	93.90	94.10
7	94.00	95.00	95.00	10	2	93.00	93.20	93.10
8	94.20	95.40	95.10	10	3	95.00	95.20	95.00
9	95.30	95.80	96.10	10	4	95.20	95.20	95.20
10	93.20	93.90	94.30	10	5	95.60	95.40	95.60
11	94.80	95.90	95.80	15	1	94.60	94.40	94.60
12	93.20	93.90	93.90	15	2	95.60	95.70	95.70
13	95.80	96.10	96.30	15	3	94.60	94.50	94.60
14	94.60	95.20	95.40	15	4	95.40	95.30	95.40
15	91.70	92.70	92.60	15	5	94.10	94.00	94.20
16	96.30	96.70	96.80	20	1	94.80	95.00	94.90
17	94.00	94.60	94.90	20	2	94.70	94.60	94.70
18	95.40	95.90	96.10	20	3	95.30	94.90	95.40
19	94.70	95.20	95.30	20	4	95.00	94.90	95.00
20	94.10	95.00	95.30	20	5	95.00	95.20	95.00
21	95.50	95.80	96.00	25	1	95.40	95.40	95.40
22	95.10	95.70	95.90	25	2	95.00	95.00	95.00
23	94.70	95.50	95.30	25	3	94.20	94.70	94.20
24	94.80	95.60	95.60	25	4	95.90	95.80	95.90
25	94.30	94.60	94.70	25	5	94.70	94.80	94.70
26	94.60	95.10	95.50	30	1	94.10	94.10	94.20
27	95.50	95.80	95.90	30	2	94.00	93.90	94.00
28	95.40	95.70	95.80	30	3	94.40	94.30	94.40
29	95.30	95.50	95.50	30	4	94.90	94.70	94.90
30	93.80	94.50	94.70	30	5	94.80	94.50	94.80

Tabla F.3.24: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	90.10	95.00	95.10	5	1	93.90	94.10	94.00
2	90.00	94.10	94.30	5	2	93.70	94.00	94.10
3	93.40	95.90	96.10	5	3	95.70	95.60	95.80
4	92.00	94.70	94.70	5	4	94.40	94.50	94.40
5	92.60	95.00	94.90	5	5	94.70	95.00	94.90
6	93.80	95.80	96.00	10	1	94.00	94.10	94.30
7	92.80	95.10	95.00	10	2	93.20	93.80	93.30
8	92.70	95.50	95.50	10	3	94.60	94.90	94.80
9	94.50	95.90	96.20	10	4	94.90	95.00	95.00
10	92.20	94.00	94.10	10	5	94.90	95.10	95.00
11	94.10	95.70	95.80	15	1	94.40	94.40	94.40
12	92.50	94.10	94.20	15	2	95.30	95.70	95.50
13	95.30	96.10	96.10	15	3	94.20	94.40	94.60
14	94.00	95.20	95.10	15	4	94.70	95.10	95.00
15	91.60	93.10	93.10	15	5	93.10	93.70	93.80
16	96.10	96.80	96.80	20	1	94.90	95.00	95.10
17	93.30	94.90	95.00	20	2	94.10	94.50	94.40
18	95.00	96.10	96.10	20	3	94.40	94.50	94.80
19	94.50	95.60	95.40	20	4	93.90	94.10	94.60
20	94.20	95.30	95.20	20	5	94.50	94.70	94.90
21	95.10	95.80	96.00	25	1	95.00	95.50	95.30
22	94.60	95.50	95.50	25	2	95.20	95.00	95.50
23	94.50	95.40	95.40	25	3	94.10	94.20	94.20
24	94.70	95.60	96.00	25	4	95.20	95.30	95.60
25	93.90	94.80	94.80	25	5	94.40	94.60	94.80
26	94.40	95.30	95.50	30	1	94.60	94.40	94.60
27	95.30	95.80	95.70	30	2	94.00	93.90	94.30
28	94.80	95.60	95.60	30	3	94.60	94.70	94.90
29	94.80	95.60	95.40	30	4	94.60	94.60	95.00
30	93.70	94.60	94.60	30	5	94.20	94.40	94.50

Tabla F.3.25: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	88.60	95.00	95.10	5	1	94.00	94.00	94.00
2	89.30	94.10	94.30	5	2	93.80	94.00	93.80
3	92.90	95.90	95.90	5	3	95.60	95.70	95.70
4	91.20	94.80	94.60	5	4	94.40	94.20	94.50
5	91.80	95.00	94.90	5	5	94.80	94.80	95.00
6	92.40	95.90	96.00	10	1	93.90	93.80	94.00
7	91.80	95.10	95.00	10	2	93.00	93.10	93.00
8	91.60	95.60	95.40	10	3	94.90	95.00	94.90
9	93.60	96.00	96.20	10	4	95.00	94.80	95.00
10	91.70	93.80	94.20	10	5	95.00	95.20	95.00
11	93.20	95.80	95.70	15	1	94.40	94.10	94.40
12	92.00	94.00	94.20	15	2	95.40	95.50	95.60
13	95.00	96.10	96.10	15	3	94.40	94.40	94.50
14	93.50	95.20	95.10	15	4	95.00	95.10	95.00
15	90.60	92.90	92.90	15	5	93.60	93.80	93.70
16	95.60	96.80	96.80	20	1	95.10	95.20	95.10
17	92.80	94.80	94.80	20	2	94.10	94.20	94.10
18	94.40	96.00	96.20	20	3	94.80	94.80	94.80
19	94.10	95.40	95.40	20	4	94.80	94.60	94.90
20	93.50	95.00	95.20	20	5	94.60	95.10	94.70
21	94.80	95.70	95.90	25	1	95.20	95.40	95.50
22	94.10	95.70	95.40	25	2	94.90	94.50	94.90
23	94.40	95.40	95.30	25	3	94.20	94.80	94.50
24	94.10	95.60	95.90	25	4	95.80	95.70	95.80
25	93.10	94.90	94.80	25	5	94.60	94.90	94.60
26	93.90	95.20	95.50	30	1	94.40	94.40	94.40
27	95.10	95.80	95.70	30	2	94.30	94.20	94.30
28	94.40	95.60	95.70	30	3	94.60	94.50	94.60
29	94.60	95.60	95.40	30	4	94.60	94.60	94.70
30	93.00	94.70	94.60	30	5	94.70	94.60	94.70

Tabla F.3.26: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	88.30	95.00	95.00	5	1	93.80	93.90	93.80
2	89.10	94.10	94.30	5	2	94.20	94.40	94.30
3	92.70	95.90	95.90	5	3	95.60	95.70	95.60
4	90.90	94.80	94.50	5	4	94.40	94.00	94.40
5	91.80	95.00	95.00	5	5	95.40	95.10	95.40
6	92.40	95.90	96.00	10	1	94.10	93.80	94.10
7	92.00	95.10	94.90	10	2	92.90	93.20	92.90
8	91.30	95.70	95.50	10	3	95.10	95.20	95.10
9	93.50	96.10	96.20	10	4	95.10	95.20	95.10
10	91.20	93.80	94.10	10	5	95.60	95.40	95.60
11	92.80	95.70	95.80	15	1	94.40	94.40	94.70
12	92.00	94.00	94.20	15	2	95.60	95.70	95.60
13	94.70	96.10	96.10	15	3	94.50	94.40	94.50
14	93.30	95.30	95.20	15	4	95.30	95.30	95.40
15	90.40	93.00	93.00	15	5	94.10	94.00	94.10
16	95.20	96.80	96.80	20	1	95.00	95.10	95.10
17	92.80	94.70	95.00	20	2	94.60	94.70	94.60
18	94.20	96.00	96.10	20	3	95.10	95.10	95.10
19	93.90	95.20	95.40	20	4	94.80	95.00	95.00
20	93.30	95.10	95.20	20	5	95.00	95.30	95.00
21	94.50	95.80	95.90	25	1	95.40	95.60	95.40
22	93.90	95.60	95.50	25	2	94.90	95.10	94.90
23	94.40	95.50	95.40	25	3	94.20	94.50	94.20
24	93.90	95.50	95.80	25	4	96.00	96.00	96.00
25	93.00	94.90	94.70	25	5	94.70	94.60	94.70
26	93.50	95.20	95.20	30	1	94.20	94.20	94.20
27	94.60	95.80	96.00	30	2	93.90	93.90	94.00
28	94.60	95.60	95.80	30	3	94.30	94.30	94.30
29	94.40	95.50	95.40	30	4	94.70	94.70	94.90
30	92.90	94.60	94.60	30	5	94.60	94.50	94.90

Tabla F.3.27: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.

F.3.4. Probabilidad de cobertura empírica, C_d y C_{di} al 99%

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.80	99.10	99.00	5	1	98.50	98.80	98.50
2	98.50	98.70	98.80	5	2	99.20	99.20	99.20
3	98.80	99.00	99.00	5	3	99.40	99.40	99.40
4	98.70	98.90	98.90	5	4	98.60	98.50	98.50
5	98.80	99.10	99.00	5	5	99.20	99.10	99.20
6	98.90	99.00	99.00	10	1	98.90	98.80	98.90
7	98.60	98.80	98.90	10	2	98.60	98.30	98.60
8	99.10	99.30	99.20	10	3	99.10	99.30	99.20
9	99.00	99.20	99.10	10	4	98.60	98.70	98.60
10	98.70	98.60	98.70	10	5	98.70	98.60	98.70
11	98.90	98.80	98.90	15	1	98.70	98.70	98.70
12	98.60	98.80	98.70	15	2	99.10	99.10	99.10
13	99.20	99.40	99.20	15	3	98.60	98.60	98.60
14	98.80	98.90	98.90	15	4	99.00	99.00	99.00
15	98.50	98.70	98.60	15	5	98.70	98.70	98.70
16	99.40	99.40	99.50	20	1	99.10	99.00	99.10
17	98.70	99.00	98.80	20	2	99.20	99.10	99.20
18	99.60	99.60	99.60	20	3	98.70	98.80	98.70
19	99.20	99.30	99.30	20	4	99.00	99.00	99.00
20	98.90	99.30	99.10	20	5	98.90	98.90	98.90
21	99.40	99.40	99.40	25	1	98.90	98.90	98.90
22	99.00	98.90	99.00	25	2	99.30	99.20	99.30
23	99.40	99.50	99.50	25	3	99.00	99.00	99.00
24	99.50	99.60	99.50	25	4	99.10	99.30	99.10
25	98.90	98.80	99.20	25	5	98.80	98.80	98.80
26	99.20	99.10	99.20	30	1	98.90	98.90	98.90
27	99.10	99.10	99.20	30	2	98.50	98.70	98.50
28	98.70	98.70	98.70	30	3	99.20	99.10	99.20
29	99.00	99.00	99.00	30	4	99.20	99.00	99.20
30	99.00	98.90	99.00	30	5	99.00	99.00	99.00

Tabla F.3.28: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.90	99.00	99.00	5	1	98.40	98.40	98.40
2	98.40	98.70	98.80	5	2	99.10	99.10	99.10
3	99.00	99.00	99.00	5	3	99.30	99.30	99.30
4	98.70	98.90	98.90	5	4	98.30	98.30	98.30
5	99.00	99.10	99.00	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.80	99.00	99.00	10	1	98.80	98.80	98.80
7	98.60	98.90	98.90	10	2	98.70	98.40	98.70
8	99.10	99.40	99.30	10	3	99.30	99.20	99.30
9	99.00	99.20	99.10	10	4	98.70	98.90	98.70
10	98.70	98.70	98.70	10	5	98.90	98.80	98.90
11	98.80	98.70	98.80	15	1	98.70	98.70	98.70
12	98.70	98.90	98.80	15	2	98.90	99.00	98.90
13	99.20	99.40	99.20	15	3	98.50	98.60	98.50
14	98.70	98.90	98.90	15	4	99.10	99.30	99.10
15	98.40	98.70	98.50	15	5	98.70	98.60	98.70
16	99.30	99.40	99.30	20	1	99.10	99.00	99.10
17	98.80	98.90	98.90	20	2	99.40	99.40	99.40
18	99.50	99.60	99.60	20	3	99.00	99.00	99.00
19	99.20	99.10	99.30	20	4	98.90	98.80	98.90
20	99.10	99.30	99.40	20	5	98.90	98.70	98.90
21	99.40	99.30	99.40	25	1	98.50	98.60	98.50
22	99.00	98.90	99.00	25	2	98.80	98.80	98.80
23	99.40	99.50	99.50	25	3	99.00	99.00	99.00
24	99.40	99.60	99.40	25	4	99.10	99.20	99.10
25	98.80	99.00	99.00	25	5	98.80	98.70	98.80
26	99.20	99.10	99.20	30	1	99.10	99.10	99.10
27	99.10	99.10	99.20	30	2	98.80	98.90	98.80
28	98.80	98.70	98.80	30	3	99.10	99.20	99.10
29	99.00	99.00	99.00	30	4	99.00	99.10	99.00
30	98.90	99.00	98.90	30	5	98.90	98.90	98.90

Tabla F.3.29: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.99	99.19	99.40	5	1	99.09	98.99	99.29
2	98.59	98.99	99.09	5	2	98.89	98.79	99.09
3	98.59	98.59	98.89	5	3	99.09	99.29	99.29
4	98.79	98.89	99.09	5	4	98.49	98.29	98.99
5	98.49	98.49	98.89	5	5	99.19	99.19	99.70
6	99.40	99.40	99.80	10	1	98.79	98.89	99.19
7	98.99	99.09	99.40	10	2	99.19	99.29	99.60
8	98.69	98.99	99.19	10	3	99.19	98.99	99.40
9	99.09	99.19	99.29	10	4	99.09	98.79	99.50
10	99.40	99.50	100.00	10	5	98.89	98.99	98.89
11	98.79	98.89	99.19	15	1	99.50	99.40	99.80
12	99.19	99.09	99.50	15	2	98.99	98.99	99.19
13	99.19	99.29	99.60	15	3	99.09	99.09	99.60
14	98.79	98.79	98.99	15	4	99.09	99.09	99.50
15	99.09	99.29	99.60	15	5	98.69	98.69	99.19
16	98.79	98.69	98.99	20	1	98.79	98.89	99.09
17	98.29	98.49	98.59	20	2	98.89	98.89	99.19
18	98.99	98.99	99.29	20	3	98.99	99.09	99.19
19	98.89	99.09	99.50	20	4	99.50	99.60	99.90
20	99.19	99.19	99.50	20	5	98.59	98.49	99.19
21	98.59	98.49	98.79	25	1	99.09	99.09	99.50
22	98.39	98.59	98.79	25	2	99.29	99.29	99.80
23	98.99	99.29	99.19	25	3	98.79	98.79	98.99
24	99.09	99.09	99.29	25	4	99.09	99.09	99.40
25	98.99	99.19	99.50	25	5	99.29	99.09	99.29
26	99.29	99.29	99.80	30	1	98.99	99.09	99.40
27	99.29	99.29	99.70	30	2	99.19	99.29	99.70
28	98.69	98.79	98.89	30	3	99.40	99.40	99.60
29	99.50	99.50	99.80	30	4	99.40	99.19	100.00
30	99.19	99.29	99.60	30	5	99.60	99.60	99.90

Tabla F.3.30: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	98.10	99.10	99.20	5	1	98.50	98.70	98.60
2	98.40	98.90	98.80	5	2	99.20	99.20	99.20
3	98.60	99.00	99.00	5	3	99.40	99.40	99.40
4	98.60	98.90	98.90	5	4	98.40	98.50	98.40
5	98.60	99.10	99.10	5	5	99.10	99.10	99.20
6	98.70	99.00	99.10	10	1	98.90	98.80	98.90
7	98.50	98.70	98.70	10	2	98.60	98.30	98.60
8	98.70	99.30	99.40	10	3	99.10	99.30	99.10
9	98.90	99.00	99.10	10	4	98.70	98.70	98.70
10	98.50	98.60	98.80	10	5	98.70	98.60	98.80
11	98.80	98.90	98.90	15	1	98.60	98.70	98.60
12	98.40	98.50	98.50	15	2	99.00	99.10	99.00
13	99.10	99.30	99.30	15	3	98.70	98.60	98.60
14	98.50	98.80	98.80	15	4	98.90	99.10	99.00
15	98.30	98.70	98.50	15	5	98.70	98.70	98.70
16	99.40	99.50	99.50	20	1	99.10	99.00	99.20
17	98.70	99.20	99.00	20	2	99.20	99.20	99.20
18	99.60	99.60	99.60	20	3	98.70	98.80	98.70
19	99.10	99.30	99.20	20	4	99.00	99.00	99.00
20	98.80	99.40	99.00	20	5	98.80	98.90	98.90
21	99.30	99.30	99.40	25	1	98.90	98.80	98.90
22	98.80	98.80	99.00	25	2	99.30	99.20	99.30
23	99.30	99.50	99.50	25	3	99.00	99.00	99.00
24	99.40	99.50	99.50	25	4	99.10	99.30	99.10
25	98.70	98.90	98.90	25	5	98.80	98.90	98.90
26	99.10	99.10	99.20	30	1	98.90	99.00	99.00
27	99.10	99.10	99.10	30	2	98.50	98.60	98.50
28	98.70	98.90	99.00	30	3	99.20	99.20	99.30
29	98.80	99.00	99.00	30	4	99.10	99.00	99.10
30	98.90	98.90	99.00	30	5	98.90	98.90	98.90

Tabla F.3.31: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	97.90	98.90	99.20	5	1	98.30	98.40	98.30
2	98.30	98.80	98.80	5	2	99.10	99.10	99.10
3	98.50	99.00	99.00	5	3	99.30	99.40	99.30
4	98.50	98.90	98.90	5	4	98.30	98.50	98.30
5	98.50	99.20	99.10	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.70	99.00	99.00	10	1	98.80	98.80	98.80
7	98.50	98.80	98.70	10	2	98.70	98.60	98.70
8	98.60	99.30	99.40	10	3	99.30	99.30	99.30
9	99.00	99.10	99.10	10	4	98.70	98.90	98.70
10	98.40	98.70	98.80	10	5	98.90	98.80	98.90
11	98.60	98.80	98.90	15	1	98.70	98.70	98.70
12	98.30	98.60	98.60	15	2	98.90	99.00	98.90
13	99.20	99.30	99.30	15	3	98.70	98.60	98.70
14	98.50	98.80	98.90	15	4	99.10	99.20	99.10
15	98.30	98.70	98.50	15	5	98.70	98.60	98.70
16	99.20	99.40	99.40	20	1	99.10	99.00	99.10
17	98.80	99.10	99.00	20	2	99.40	99.40	99.40
18	99.50	99.60	99.60	20	3	99.10	99.00	99.10
19	99.10	99.20	99.20	20	4	99.00	98.80	99.00
20	98.70	99.40	99.10	20	5	98.90	98.80	98.90
21	99.20	99.30	99.30	25	1	98.80	98.60	98.80
22	98.70	98.80	99.00	25	2	98.90	99.00	98.90
23	99.30	99.50	99.50	25	3	99.00	98.90	99.00
24	99.40	99.50	99.40	25	4	99.10	99.20	99.10
25	98.50	98.90	99.00	25	5	98.80	98.80	98.80
26	99.10	99.10	99.20	30	1	99.10	99.20	99.10
27	99.10	99.10	99.10	30	2	98.80	98.80	98.80
28	98.80	99.00	99.10	30	3	99.20	99.20	99.20
29	98.80	99.00	99.00	30	4	99.00	99.10	99.00
30	98.80	99.00	99.00	30	5	99.10	98.90	99.10

Tabla F.3.32: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	97.90	98.90	99.20	5	1	98.20	98.40	98.20
2	98.30	98.70	98.80	5	2	99.20	99.00	99.20
3	98.60	99.10	99.00	5	3	99.30	99.00	99.30
4	98.50	98.90	99.00	5	4	98.30	98.40	98.40
5	98.30	99.20	99.10	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.70	99.00	99.00	10	1	98.60	99.00	98.60
7	98.50	98.90	98.80	10	2	99.10	99.10	99.10
8	98.70	99.30	99.40	10	3	99.30	99.20	99.30
9	99.00	99.10	99.00	10	4	98.90	98.90	98.90
10	98.30	98.70	98.80	10	5	99.10	99.00	99.10
11	98.50	98.80	98.80	15	1	98.70	98.60	98.70
12	98.40	98.60	98.60	15	2	99.00	99.10	99.00
13	99.20	99.30	99.30	15	3	98.60	98.70	98.60
14	98.60	98.90	98.80	15	4	99.00	99.20	99.00
15	98.40	98.70	98.60	15	5	98.70	98.90	98.70
16	99.20	99.40	99.40	20	1	99.00	99.00	99.00
17	98.80	99.10	99.00	20	2	99.30	99.30	99.30
18	99.40	99.60	99.60	20	3	99.00	99.10	99.00
19	99.00	99.20	99.20	20	4	98.80	98.80	98.80
20	98.70	99.50	99.20	20	5	98.70	98.40	98.70
21	99.20	99.30	99.20	25	1	98.60	98.50	98.60
22	98.60	98.80	98.80	25	2	99.00	99.10	99.00
23	99.30	99.50	99.50	25	3	99.00	98.90	99.00
24	99.40	99.50	99.40	25	4	99.10	99.20	99.10
25	98.50	99.00	98.90	25	5	98.80	98.80	98.80
26	99.10	99.10	99.20	30	1	99.10	99.20	99.10
27	99.10	99.10	99.10	30	2	98.80	98.70	98.80
28	98.80	99.00	98.90	30	3	99.20	99.20	99.20
29	98.80	99.00	99.00	30	4	99.20	99.20	99.20
30	98.90	99.00	99.10	30	5	99.10	99.00	99.10

Tabla F.3.33: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	96.20	99.10	99.20	5	1	98.30	98.70	98.60
2	96.50	98.90	98.80	5	2	99.10	99.10	99.20
3	98.20	99.00	99.00	5	3	99.40	99.40	99.40
4	97.80	98.90	99.00	5	4	98.40	98.50	98.40
5	97.40	99.30	99.10	5	5	99.00	99.00	99.20
6	98.30	99.00	99.00	10	1	98.80	98.80	98.90
7	98.20	98.90	98.70	10	2	98.60	98.50	98.60
8	98.40	99.30	99.20	10	3	99.00	99.20	99.10
9	98.70	99.00	99.10	10	4	98.70	98.70	98.70
10	98.10	98.70	98.80	10	5	98.60	98.70	98.70
11	98.40	98.90	98.90	15	1	98.60	98.50	98.60
12	98.20	98.80	98.70	15	2	99.00	99.10	99.00
13	98.70	99.20	99.30	15	3	98.80	98.70	98.80
14	98.30	98.60	98.70	15	4	99.00	99.10	99.00
15	98.10	98.70	98.50	15	5	98.70	98.70	98.70
16	99.10	99.50	99.50	20	1	99.00	99.10	99.10
17	98.90	99.20	99.20	20	2	99.00	99.20	99.30
18	99.30	99.60	99.60	20	3	98.60	98.70	99.00
19	98.90	99.20	99.30	20	4	98.90	99.00	99.00
20	98.50	99.30	98.90	20	5	98.80	99.00	98.80
21	99.10	99.10	99.20	25	1	98.80	98.80	98.90
22	98.60	98.80	98.80	25	2	99.20	99.20	99.30
23	99.10	99.50	99.40	25	3	99.10	99.00	99.10
24	99.40	99.50	99.40	25	4	99.10	99.40	99.10
25	98.30	99.00	98.80	25	5	98.80	98.90	98.90
26	99.00	99.20	99.20	30	1	98.90	99.00	99.10
27	99.00	99.10	99.10	30	2	98.40	98.60	98.40
28	98.60	99.00	98.90	30	3	99.20	99.20	99.30
29	98.70	99.10	99.00	30	4	99.10	99.10	99.10
30	98.80	99.00	99.00	30	5	98.90	98.90	99.00

Tabla F.3.34: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	95.40	99.10	99.20	5	1	98.20	98.50	98.20
2	96.00	98.70	98.80	5	2	99.10	99.00	99.10
3	97.90	99.00	99.00	5	3	99.30	99.40	99.30
4	97.50	99.00	99.00	5	4	98.30	98.40	98.30
5	97.30	99.20	99.10	5	5	99.10	99.00	99.10
6	98.20	99.00	99.00	10	1	98.80	98.80	98.80
7	98.00	98.90	98.70	10	2	98.70	98.70	98.80
8	98.10	99.30	99.20	10	3	99.30	99.30	99.30
9	98.30	99.00	99.10	10	4	98.70	98.90	98.80
10	98.00	98.80	98.80	10	5	98.90	98.80	98.90
11	98.40	98.80	98.90	15	1	98.60	98.70	98.60
12	98.00	98.80	98.70	15	2	98.90	99.00	98.90
13	98.60	99.40	99.30	15	3	98.70	98.70	98.70
14	98.30	98.70	98.70	15	4	99.10	99.20	99.20
15	98.10	98.70	98.50	15	5	98.70	98.60	98.70
16	98.90	99.50	99.50	20	1	99.00	99.00	99.00
17	98.50	99.20	99.10	20	2	99.30	99.30	99.40
18	99.20	99.60	99.60	20	3	99.00	99.00	99.10
19	98.90	99.20	99.30	20	4	98.80	98.80	99.10
20	98.20	99.30	99.00	20	5	98.90	98.80	98.90
21	99.10	99.10	99.20	25	1	98.80	98.60	98.80
22	98.50	98.80	98.80	25	2	98.90	99.10	98.90
23	99.00	99.50	99.50	25	3	99.00	98.90	99.00
24	99.40	99.50	99.40	25	4	99.10	99.20	99.10
25	98.10	99.00	99.00	25	5	98.80	98.80	98.80
26	99.00	99.20	99.20	30	1	99.10	99.20	99.10
27	99.00	99.10	99.10	30	2	98.60	98.70	98.70
28	98.40	99.00	99.00	30	3	99.20	99.20	99.20
29	98.50	99.10	99.00	30	4	99.10	99.10	99.10
30	98.80	99.00	99.00	30	5	99.00	99.00	99.10

Tabla F.3.35: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$.

d	C_d	C_d^{*1}	C_d^{*2}	d	i	C_{di}	C_{di}^{*1}	C_{di}^{*2}
1	95.50	99.00	99.20	5	1	98.30	98.40	98.30
2	95.90	98.70	98.80	5	2	99.20	99.00	99.20
3	97.80	99.00	99.00	5	3	99.30	99.10	99.30
4	97.40	99.00	99.00	5	4	98.40	98.40	98.40
5	97.30	99.20	99.10	5	5	99.10	99.10	99.10
6	98.20	99.00	99.00	10	1	98.60	98.90	98.60
7	97.80	98.90	98.70	10	2	99.10	99.10	99.10
8	97.80	99.40	99.20	10	3	99.30	99.20	99.30
9	98.10	99.10	99.10	10	4	98.90	98.90	98.90
10	98.00	98.80	98.70	10	5	99.10	99.00	99.10
11	98.20	98.80	98.90	15	1	98.70	98.60	98.70
12	97.90	98.80	98.60	15	2	99.00	99.10	99.00
13	98.50	99.40	99.30	15	3	98.60	98.70	98.60
14	98.20	98.70	98.70	15	4	99.10	99.10	99.10
15	97.90	98.70	98.50	15	5	98.70	98.80	98.70
16	98.80	99.40	99.50	20	1	99.00	99.00	99.00
17	98.40	99.30	99.20	20	2	99.30	99.30	99.30
18	99.00	99.60	99.60	20	3	99.00	99.10	99.00
19	98.70	99.20	99.30	20	4	98.90	98.80	98.90
20	98.10	99.30	99.10	20	5	98.80	98.40	98.80
21	99.10	99.20	99.20	25	1	98.60	98.50	98.60
22	98.40	98.80	98.70	25	2	99.00	99.10	99.00
23	98.80	99.50	99.50	25	3	99.10	99.00	99.10
24	99.40	99.40	99.40	25	4	99.10	99.20	99.20
25	98.10	99.00	99.10	25	5	98.80	98.80	98.90
26	99.00	99.20	99.20	30	1	99.20	99.20	99.20
27	99.00	99.10	99.10	30	2	98.80	98.70	98.80
28	98.40	99.10	99.00	30	3	99.20	99.20	99.40
29	98.50	99.10	99.10	30	4	99.20	99.20	99.20
30	98.80	99.00	99.00	30	5	99.10	99.10	99.10

Tabla F.3.36: Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99% para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$.



Bibliografía

- Arnold, S. (1981). *The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis*. John Wiley, New York.
- Battese, G. E., Harter, R. M. and Fuller, W. A. (1988), An error component model for prediction of county crop areas using survey and satellite data. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 28–36.
- Das, K., Jiang, J. and Rao, J. N. K. (2004). Mean squared error of empirical predictor. *The Annals of Statistics*, **32**, 818–840.
- Datta, G.S. and Ghosh, M. (1991). Bayesian prediction in linear models: applications to small area estimation. *The Annals of Statistics*, **19**, 1748–1770.
- Datta, G.S. and Lahiri, P. (2000). A unified measure of uncertainty of estimated best linear unbiased predictors in small area estimation problems. *Statistica Sinica*, **10**, 613–627.
- Demidenko E. (2004). *Mixed models, Theory and Applications*. John Wiley, New York.
- Dick, P. (1995). Modelling net undercoverage in the 1991 Canadian census, *Survey Methodology*, **21**, 45–54.
- Ericksen, E. P. and Kadane, J. B. (1985). Estimating the population in census year: 1980 and beyond (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, **80**, 98–131.
- Fay, R. E. and Herriot, R. A. (1979). Estimation of income from small places: An application of James-Stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 269–277.
- Ghosh, M. and Rao, J.N.K. (1994). Small area estimation: An appraisal. *Statistical Science*, **9**, 55–93.
- Goldstein, H. (2003). *Multilevel Statistical Models*. Arnold, London.
- González-Manteiga, W., Lombardía M.J., Molina, I., Morales, D. and Santamaría L. (2006). Estimation of the mean squared error of predictors of small area linear parameters under logistic mixed model. *Computational Statistics and Data Analysis*. **51**, 5, 2720–2733.

- González-Manteiga, W., Lombardía M.J., Molina, I., Morales, D. and Santamaría L. (2008). Bootstrap Mean Squared Error of a Small-Area EBLUP. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **78**, 5, 443–462.
- Graybill, F.A. (1976). *Theory and Application of Linear Model*. Duxbury, Mass.
- Hall, P. and Maiti, T. (2006a). Nonparametric estimation of mean-squared prediction error in nested-error regression models. *Annals of Statistics*. **34**, 1733–1750.
- Hall, P. and Maiti, T. (2006b). On parametric bootstrap methods for small-area prediction. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **68**, 221–238.
- Henderson, C. R. (1975). Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. *Biometrics*, **31**, 423–447.
- Hocking, R.R. (1985). *The Analysis of Linear Models*. Brooks/Cole, Pacific Grove, California.
- Jiang, J., Lahiri, P., and Wan, S. (2002). A unified jackknife theory for empirical best prediction with M-estimation. *The Annals of Statistics*, **30**, 1782–1810.
- Jiang, J. and Lahiri, P. (2006). Mixed model prediction and small area estimation. *Test*, **15**, 1–96.
- Jiang, J. (2007). *Linear and Generalized Linear Mixed Models and their Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Kacker, R. and Harville, D. A. (1981). Unbiasedness of two-stage estimation and prediction procedures for mixed linear models. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Ser. A, **10**, 1249–1261.
- Kacker, R. and Harville, D. A. (1984). Approximations for standard errors of estimators of fixed and random effects in mixed linear models. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 853–862.
- Longford, N.T. (1995). *Random coefficient models*. Clarendon Press, London.
- Miller, J. (1977). Asymptotic properties of maximum likelihood estimates in the mixed model analysis of variance. *The Annals of Statistics*, **5**, 746–762.
- National Research Council (2000). *Small-area estimates of school-age children in poverty: Evaluation of current methodology*. C.F. Citro and G. Kalton (Eds.), Committee on National Statistics, Washington DC: National Academy Press.
- Pfeifferman, D. and Barnard, C. (1991). Some new estimators for small area means with applications to the assessment of farmland values. *Journal of Business and Economic Statistics*, **9**, 73–84.

-
- Pfefferman, D. and Tiller, R. (2005). Bootstrap approximation to prediction MSE for state-space models with estimated parameters. *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 893–916.
 - Prasad, N. G. N. and Rao, J. N. K. (1990). The estimation of the mean squared error of small-area estimators. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 163–171.
 - Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley, New York.
 - Rao, J.N.K. (2003). *Small area estimation*. John Wiley, New-York.
 - Rencher, A.C. (2000). *Linear models in Statistics*. John Wiley, New York.
 - Searle, S.R. (1971). *Linear Models*. John Wiley, New York.
 - Searle, S.R., Casella, G. and McCulloch, C.E. (1992). *Variance components*. John Wiley, New-York.
 - Seber, G.A.F. (1977). *Linear Regression Analysis*. John Wiley, New York.
 - Stukel, D.M and Rao, J.N.K (1997). Estimation of regression models with nested error structure and unequal error variances under two and three stage cluster sampling. *Statistics and Probability Letters*, **35**, 401–407.
 - Stukel, D.M and Rao, J.N.K (1999). On small-area estimation under two-fold nested error regression models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **78**, 131–147.
 - Ugarte, M.D., Militino, A.F. and Goicoa T. (2009). Benchmarked estimates in small areas using linear mixed models with restrictions *Test*, in press.
 - Valliant, R., Dorfman, A.H. and Royall, R.M. (2000). *Finite Population Sampling and Inference. A Prediction Approach*. John Wiley, New York.



Índice de figuras

2.1. Error cuadrático medio de $\widehat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	78
2.2. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	78
2.3. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	79
2.4. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	79
2.5. Variabilidad del error cuadrático medio de los estimadores en experimento 1	80
2.6. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	80
2.7. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	81
2.8. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	81
2.9. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 1	82
2.10. Sesgo de estimadores para $\ell = 0, 1/2, 1$ en el experimento 1	82
2.11. Error cuadrático medio de $\widehat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	83
2.12. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	84
2.13. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	84
2.14. Error cuadrático medio de $\widehat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	85
2.15. Variabilidad del error cuadrático medio de los estimadores en experimento 2	85
2.16. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\beta}$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	86
2.17. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_0^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	86
2.18. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_1^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	87
2.19. Sesgo en valor absoluto de $\widehat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	87
2.20. Sesgo de estimadores para $\ell = 0, 1/2, 1$ en experimento 2	88
3.1. Comparación de los $EMSE_d$ con $\ell = 0$	100
3.2. Comparación de los $BIAS_d$ en valor absoluto con $\ell = 0$	101
3.3. Comparación de los $EMSE_d$ con $\ell = 1/2$	101
3.4. Comparación de los $BIAS_d$ en valor absoluto con $\ell = 1/2$	102
3.5. Comparación de los $EMSE_{di}$ con $\ell = 0$	102
3.6. Comparación de los $BIAS_{di}$ en valor absoluto con $\ell = 0$	103
3.7. Comparación de los $EMSE_{di}$ con $\ell = 1/2$	103
3.8. Comparación de los $BIAS_{di}$ en valor absoluto con $\ell = 1/2$	104
4.1. E_d y B_d para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	119

4.2.	$C_d^{95\%}$ y $C_d^{99\%}$ para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	120
4.3.	Medidas de eficiencia en dominios con $\ell = 1/2$	120
4.4.	E_{di} y B_{di} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	121
4.5.	$C_{di}^{95\%}$ y $C_{di}^{99\%}$ para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	121
4.6.	Medidas de eficiencia en subdominios con $\ell = 1/2$	122
5.1.	E_d , E_d^{*1} , E_d^{*2} , B_d , B_d^{*1} y B_d^{*2} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	132
5.2.	C_d , C_d^{*1} y C_d^{*2} al 95% y 99%, para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	132
5.3.	E_{di} , E_{di}^{*1} , E_{di}^{*2} , B_{di} , B_{di}^{*1} y B_{di}^{*2} para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	133
5.4.	C_{di} , C_{di}^{*1} y C_{di}^{*2} al 95% y 99%, para $\ell = 0$ y $\ell = 1/2$	133
6.1.	Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-hombres	147
6.2.	Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados-mujeres	147
6.3.	Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP de totales de parados	148
6.4.	Raíz cuadrada del error cuadrático medio de estimadores	148
6.5.	Raíz cuadrada del error cuadrático medio de estimadores	149
6.6.	Coefficiente de variación en% de estimadores de totales de parados-hombres	149
6.7.	Coefficiente de variación en% de estimadores de totales de parados-mujeres	150
6.8.	Estimadores directo, EBLUPA y EBLUP del gasto total anual medio del hogar	157
6.9.	Estimadores directo y EBLUP del gasto total anual medio del hogar	157
6.10.	Estimadores directo y EBLUPA del gasto total anual medio del hogar	158
6.11.	Raíz cuadrada del ECM de estimadores del gasto total anual medio del hogar	158
6.12.	Coefficiente de variación en% de estimadores del gasto total anual medio del hogar	159
D.1.	$EMSE_d$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)	238
D.2.	$EMSE_d$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)	238
D.3.	$BIAS_d$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)	239
D.4.	$BIAS_d$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)	239
D.5.	$EMSE_{di}$ para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)	240
D.6.	$EMSE_{di}$ para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)	240
D.7.	B_{di} para ML y REML, caso homocedástico ($\ell = 0$)	241
D.8.	B_{di} para ML y REML, caso heterocedástico ($\ell = 1/2$)	241

Índice de tablas

2.7.1. Grupos de tamaños muestrales. Experimento 1.	77
2.7.2. Grupos de tamaños muestrales. Experimento 2.	83
3.3.1. Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación	100
4.5.1. Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación	119
5.3.1. Combinaciones de σ_1^2 y σ_2^2 para el experimento de simulación	131
6.4.1. Descripción del fichero de datos de la EPA.	144
6.4.2. Descripción de la variable explicativa GSED	145
6.4.3. Estimadores de totales de parados-hombres y coeficientes de variación en %	151
6.4.4. Estimadores de totales de parados-mujeres y coeficientes de variación en %	152
6.5.1. Descripción del fichero de datos de la ECPF.	155
6.5.2. Descripción de la variable explicativa MIEMBROSM	155
6.5.3. Descripción de la variable explicativa NUMOCUP	155
6.5.4. Estimadores del gasto anual medio del hogar y coeficientes de variación en %	159
C.2.1. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$	230
C.2.2. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$	230
C.2.3. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$	231
C.2.4. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$	231
C.2.5. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$	232
C.2.6. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$	232
C.3.1. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$	233
C.3.2. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$	233
C.3.3. EMSE (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$	234
C.3.4. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 0$	234
C.3.5. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1/2$	235
C.3.6. Sesgo (multiplicados por 10^5) de $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ para $\ell = 1$	235
D.3.1. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	242

D.3.2. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	243
D.3.3. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	244
D.3.4. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	245
D.3.5. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	246
D.3.6. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	247
D.3.7. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	248
D.3.8. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	249
D.3.9. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	250
D.3.10. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	251
D.3.11. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	252
D.3.12. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	253
D.3.13. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	254
D.3.14. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	255
D.3.15. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	256
D.3.16. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	257
D.3.17. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	258
D.3.18. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso REML	259
D.4.1. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	260
D.4.2. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	261
D.4.3. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	262

D.4.4. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	263
D.4.5. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	264
D.4.6. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	265
D.4.7. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	266
D.4.8. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	267
D.4.9. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	268
D.4.10. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	269
D.4.11. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	270
D.4.12. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	271
D.4.13. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	272
D.4.14. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	273
D.4.15. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	274
D.4.16. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	275
D.4.17. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	276
D.4.18. Error cuadrático medio y Sesgo para $\ell = 0.5$ $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ (valores multiplicados por 10^3) caso ML	277
E.2.1. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	280
E.2.2. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	281
E.2.3. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	282
E.2.4. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	283

E.2.5. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	284
E.2.6. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	285
E.2.7. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	286
E.2.8. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	287
E.2.9. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	288
E.3.1. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	289
E.3.2. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	290
E.3.3. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	291
E.3.4. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	292
E.3.5. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	293
E.3.6. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	294
E.3.7. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	295
E.3.8. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	296
E.3.9. EMSE, Sesgo (multiplicados por 10^4) y probabilidad de cobertura para $\ell = 0.5$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	297
F.2.1. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	300
F.2.2. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	301
F.2.3. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	302
F.2.4. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	303
F.2.5. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	304
F.2.6. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	305
F.2.7. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	306
F.2.8. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	307
F.2.9. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	308
F.2.10. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	309
F.2.11. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	310

F.2.12. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	311
F.2.13. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	312
F.2.14. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	313
F.2.15. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	314
F.2.16. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	315
F.2.17. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	316
F.2.18. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	317
F.2.19. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	318
F.2.20. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	319
F.2.21. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	320
F.2.22. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	321
F.2.23. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	322
F.2.24. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	323
F.2.25. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	324
F.2.26. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	325
F.2.27. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	326
F.2.28. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	327
F.2.29. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	328
F.2.30. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	329
F.2.31. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	330
F.2.32. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	331
F.2.33. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	332
F.2.34. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0$, $\sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	333

F.2.35. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	334
F.2.36. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 99 % para $\ell = 0, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	335
F.3.1. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	336
F.3.2. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	337
F.3.3. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	338
F.3.4. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	339
F.3.5. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	340
F.3.6. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	341
F.3.7. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	342
F.3.8. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	343
F.3.9. EMSE multiplicados por 10^7 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	344
F.3.10. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	345
F.3.11. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	346
F.3.12. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	347
F.3.13. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	348
F.3.14. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	349
F.3.15. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	350
F.3.16. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	351
F.3.17. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	352
F.3.18. Sesgos multiplicados por 10^5 para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	353
F.3.19. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	354
F.3.20. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$	355
F.3.21. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$	356
F.3.22. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	357
F.3.23. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$	358
F.3.24. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$	359
F.3.25. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$	360
F.3.26. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$	361
F.3.27. Probabilidades de cobertura en % para intervalos de confianza al 95 % para $\ell = 0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$	362

F.3.28. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ 363

F.3.29. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 1$ 364

F.3.30. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 0.5$ y $\sigma_2^2 = 2$ 365

F.3.31. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ 366

F.3.32. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 1$ 367

F.3.33. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 1$ y $\sigma_2^2 = 2$ 368

F.3.34. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 0.5$ 369

F.3.35. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 1$ 370

F.3.36. Probabilidades de cobertura en% para intervalos de confianza al 99% para $\ell=0.5, \sigma_1^2 = 2$ y $\sigma_2^2 = 2$ 371

