



**TRABAJO FIN DE GRADO**  
CURSO ACADÉMICO 2019-2020

UN ALGORITMO GENÉTICO PARA EL  
PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE  
PLANTAS MÓVILES

**UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ**  
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y JURÍDICAS

GRADO EN ESTADÍSTICA EMPRESARIAL

**Autor:** Sergio Ortiz Pérez-Ojeda  
**Tutores:** Mercedes Landete Ruiz y Javier Alcaraz Soria

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. El problema de localización de plantas móviles</b>	<b>4</b>
2.1. Localización discreta . . . . .	5
2.2. Problema de Localización Móvil . . . . .	21
<b>3. Métodos de resolución</b>	<b>26</b>
3.1. Algoritmos heurísticos . . . . .	27
3.2. Algoritmos genéticos . . . . .	34
<b>4. Un algoritmo genético para MLP</b>	<b>39</b>
4.1. Desarrollo del algoritmo . . . . .	39
4.2. Estudio computacional . . . . .	46
4.3. Análisis de resultados . . . . .	48
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>



# 1. Introducción

La optimización matemática, se puede definir como la selección del mejor elemento, con respecto a algún criterio, de un conjunto de elementos disponibles. También conocida como investigación operativa, hace uso de modelos matemáticos para dar la mejor respuesta a problemas complejos y apoyar de una forma eficiente el proceso de toma de decisiones.

Una vez mencionada la rama de las matemáticas que van a servir de soporte en el siguiente proyecto, se debe advertir que el modelo de optimización que se va a presentar en él, no se rige por las características de ser un modelo exacto, aquellos que aseguran una solución óptima al problema. A consecuencia de ello, es necesario introducir el término algoritmo heurístico para entender mejor el propósito del trabajo realizado.

Un algoritmo, es simplemente, una serie de instrucciones que se llevan a cabo para solventar un problema. En términos más rigurosos, se denomina como un grupo finito de operaciones organizadas de manera lógica y ordenada que permite solucionar un determinado problema. En la optimización matemática, existen algoritmos para la totalidad de tipos de problemas que pueden surgir, desde los diseñados para la programación lineal como el Algoritmo Simplex formulado por George Dantzig, pasando por algoritmos combinatorios y hasta métodos iterativos para resolver problemas de programación no lineal.

Se denomina heurística al arte de inventar. En programación se dice que un algoritmo es heurístico cuando la solución no se determina en forma directa, sino mediante ensayos y pruebas. En optimización la utilización de un método heurístico, hace referencia a la alternativa a un método exacto. En este trabajo, se utiliza un algoritmo heurístico, ya que bajo las circunstancias del problema no existe una solución óptima, por lo tanto, se utiliza dicho procedimiento que es capaz de hallar una solución buena, no muy alejada de la óptima.

También es de suma importancia anotar que nuestro algoritmo se sitúa dentro del grupo de los metaheurísticos, algoritmo aproximado de optimización, que a través de un proceso iterativo, guía un heurístico de una manera subordinada combinando de manera inteligente distintos conceptos para explotar adecuadamente el espacio de búsqueda.

Los algoritmos genéticos, que son el grupo que destaca de los metaheurísticos, hacen evolucionar una población de individuos, distintas combinaciones de soluciones, sometiéndola a acciones aleatorias semejantes a las que actúan en la evolución biológica, así como también a alguna selección de acuerdo con algún criterio, en función del cual se decide quienes son los individuos más adaptados, que sobreviven, y quienes los menos aptos, que son descartados.

Tras realizar una breve introducción teórica sobre los conceptos fundamentales de los que se compone nuestro proyecto, en los cuales se profundizará con mas detalle en su sección correspondiente, es momento de hablar de una manera más específica sobre el objetivo de este.

El trabajo realizado aborda el problema de localización de plantas móviles, en inglés Mobile Facility Location Problem (MFLP). El propósito de nuestro modelo es el de, dado un conjunto de ubicaciones que actúan como plantas, y dado un conjunto de ubicaciones que actúan como clientes, ambos con sus correspondientes costes de transporte, optimizar la mejor

distribución de las plantas para atender la demanda de los clientes en términos de minimizar los costes.

La aplicación más común que puede surgir cuando se plantea este tipo de problema, es la de una empresa que desea satisfacer la demanda de sus clientes en una ubicación distinta a la actual, es decir, decide expandir sus servicios a un nuevo territorio. Esa empresa realiza un estudio previo para estimar qué escenario puede ser más oportuno tanto para las características de los clientes como para las de la propia empresa. Durante este año, ha sido tema de actualidad una epidemia global que ha puesto en jaque los sistemas sanitarios de multitud de potencias mundiales, otra posible utilización del modelo, sería en momentos de desastres naturales, donde la demanda sanitaria es muy alta en la totalidad de un país, proponer ubicaciones donde se puedan distribuir los suministros de una manera más rápida y eficiente llegando así a más número de personas en menos tiempo.

A lo largo del grado de Estadística Empresarial, se han estudiado varias asignaturas relacionadas con la investigación operativa y el mundo de la optimización, las cuáles han servido de apoyo para la realización del siguiente trabajo. En concreto, la asignatura que fue impartida en cuarto curso “Gestión y Planificación de la Producción”, aunque no trató los métodos heurísticos en su totalidad, sí que se asientan unas bases introductorias a la resolución de modelos a través de algoritmos que estimen una solución adecuada, aproximada a la óptima. Además, ha sido de gran utilidad la multitud de asignaturas que han optado por impartir la parte práctica, a través del software R, ya que ha servido de ayuda a tener un gran manejo del mismo por el cual ha sido posible la programación completa de nuestro algoritmo.

En las asignaturas de optimización que han sido impartidas a lo largo del grado, se han estudiado distintos lenguajes y programas como Matlab, Lingo e incluso el propio R. Las asignaturas de programación impartidas en Python, contribuyen también en la alta capacidad de la formulación del modelo en el sentido informático, ya que en el código se observa como es necesario implementar multitud de sentencias básicas en programación, para la realización del mismo. En la totalidad del proyecto se ha utilizado la interfaz de R, RStudio en su versión 3.5.2.

## 2. El problema de localización de plantas móviles

La mayoría de las empresas, tanto del sector privado como del sector público, se ha enfrentado alguna vez al problema de la localización de instalaciones. Las industrias deben determinar la ubicación de las plantas de fabricación y montaje, así como de los almacenes. Los comercios deben colocar sus tiendas. El Gobierno debe localizar oficinas y otros servicios públicos como escuelas, hospitales, estaciones de bomberos, bases de ambulancias, estaciones de inspección de vehículos, vertederos, etc.

En cualquier caso, la capacidad de una empresa para producir y comercializar sus productos de manera efectiva o de una agencia para ofrecer servicios de alta calidad depende, en parte, de la ubicación de sus instalaciones y de la relación con otras instalaciones y con sus clientes.

Es aquí cuando surge la teoría de localización. La teoría de localización se dedica a modelar, formular y resolver problemas matemáticos relacionados con la localización de servicios en un espacio dado.

Los problemas de localización, en su forma más general, se pueden describir de la siguiente manera. Un conjunto de clientes distribuidos especialmente en un área geográfica demandan un cierto producto o servicio. La demanda de los clientes es cubierta por una o varias instalaciones. El proceso de decisión establece donde se deben ubicar las instalaciones en el territorio deseado, teniendo en cuenta los requerimientos de los clientes y las restricciones geográficas.

El primer modelo de localización fue propuesto por Alfred Weber en 1909 con la llamada Teoría de la Localización, por la cual trató de explicar y predecir el patrón de la ubicación industrial a una escala macro, haciendo énfasis en que las empresas siempre buscaban un sitio de transporte y costes laborales mínimos.

Sin embargo, el área de estudio denominada “Localización de Instalaciones” no emerge hasta el año 1960, donde surge la investigación de Hakimi publicada en 1964, que estableció resultados importantes en la teoría de localización y generó un gran interés entre los investigadores.

En general, las decisiones de localización podrían catalogarse de infrecuentes, de hecho, algunas empresas sólo la toman una vez en su historia. Este suele ser el caso de las empresas pequeñas de ámbito local, pequeños comercios o tiendas, bares o restaurantes. Para otras, en cambio, es mucho más habitual, todas las empresas multinacionales tienen que hacer frente a este tipo de decisiones de una manera prácticamente anual.

El análisis de la toma de decisiones sobre localizaciones es de enorme interés por su impacto social, económico y mediático. Para tomar decisiones sobre localizaciones es necesario disponer de un modelo matemático que refleje con adecuada precisión los deseos del encargado de decidir. El modelo matemático se convierte en un problema que, generalmente, deberá ser resuelto usando algún algoritmo de optimización.

Además, al tratarse de una decisión de carácter estratégico, donde el poder de decisión recae en las esferas más altas de una compañía siendo el nivel de riesgo e incertidumbre muy elevado. Con un horizonte de planificación que debe ser amplio y teniendo una recopilación

adecuada de las características del entorno, se puede influir de una manera positiva en las probabilidades de éxito de la decisión.

La globalización de la economía, una mayor conciencia medioambiental en el mundo desarrollado y regímenes políticos que han de rendir cuentas sobre sus actuaciones, aumentan el creciente interés social, económico y político sobre la toma de decisiones relacionadas con la localización. Esto nos lleva a concluir que el desarrollo científico del tema seguirá creciendo a corto plazo.

## 2.1. Localización discreta

La localización continua considera problemas en los cuales las ubicaciones se consideran inmersas en un espacio continuo, normalmente en un espacio Euclídeo. Mientras que, la localización discreta impone que el conjunto de lugares candidatos para ubicar el servicio o servicios es finito. En este apartado, nos centramos en comentar los problemas más importantes que se engloban dentro de la localización discreta.

### Localización de plantas

Los problemas de localización de plantas se corresponden a modelos de la Investigación Operativa que tratan el problema de como ubicar almacenes, fábricas o centros de distribución, para desde ellos suministrar a los clientes las mercancías que satisfagan sus demandas.

La familia de los problemas de localización de plantas denominados discretos, supone que se ha identificado con anterioridad el conjunto de los emplazamientos potenciales de las plantas, que denotaremos por  $V$ , que contendrá los índices  $v$  por los que identificaremos cada una de las  $n$  posibles ubicaciones,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ .

El problema consiste entonces en elegir un subconjunto de esos emplazamientos y decidir qué clientes son servidos desde cada uno de ellos de manera que se satisfagan ciertos requisitos. La familia de problemas discretos se divide en dos clases según consideremos o no capacidades de servicios asociadas a la plantas.

El proyecto va dirigido a un problema de localización de plantas móviles sin restricciones de capacidad, es decir, cualquier planta por sí sola es capaz de satisfacer la totalidad de la demanda de los clientes. Sin embargo, es el problema con capacidades al que se dedica la siguiente sección.

### Modelo de localización de plantas móviles con restricciones de capacidad:

Definimos conjuntos, parámetros y variables necesarios:

#### Conjuntos:

$V$  : Conjunto de vértices

$C$  : Conjunto de clientes

$F$  : Conjunto de plantas

$T$  : Conjunto de tipos de plantas  
 $F_t$  : Plantas de tipo  $t$ , para  $t \in T$

**Parámetros:**

$u_i$  : Peso asignado a cada cliente  $i$  en términos de coste de transporte.  $\forall i \in C$   
 $w_j$  : Peso asignado a cada planta  $j$  en términos de coste de transporte.  $\forall j \in F$   
 $d_{iv}$  : Distancia del cliente  $i$  al vértice  $v$ . para cada  $i \in C$  y  $v \in V$   
 $d_{jv}$  : Distancia de la planta  $j$  al vértice  $v$ . para cada  $j \in F$  y  $v \in V$   
 $Q_t$  : Capacidad del tipo de planta  $t$ . para cada  $t \in T$   
 $q_i$  : Demanada del cliente  $i$ . para cada  $i \in C$

**Variables:**

$$x_{iv} = \begin{cases} 1 & \text{Si el destino del cliente } i \text{ es el vértice } v. \text{ para } i \in C \text{ y } v \in V \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

$$y_{jv} = \begin{cases} 1 & \text{Si el destino de la planta } j \text{ es el vértice } v. \text{ para } j \in F \text{ y } v \in V \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

$$z_{tv} = \begin{cases} 1 & \text{Si el vértice } v \text{ es el destino de alguna planta del tipo } t. \text{ para } t \in T \text{ y } v \in V \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

Formulación matemática:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i \in C} \sum_{v \in V} u_i d_{iv} x_{iv} + \sum_{j \in F} \sum_{v \in V} w_j d_{jv} y_{jv} \quad (1)$$

s.a :

$$\sum_{v \in V} x_{iv} = 1 \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{v \in V} y_{jv} = 1 \quad \forall j \in F \quad (3)$$

$$\sum_{j \in F_t} y_{jv} = z_{tv} \quad \forall v \in V, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{t \in T} z_{tv} \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (5)$$

$$x_{iv} \leq \sum_{t \in T} z_{tv} \quad \forall i \in C, v \in V \quad (6)$$

$$\sum_{i \in C} q_i x_{iv} \leq \sum_{t \in T} Q_t z_{tv} \quad \forall i \in C, v \in V \quad (7)$$

$$x_{iv}, y_{jv}, z_{tv} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, j \in F, v \in V, t \in T \quad (8)$$

La función objetivo (1) calcula la distancia total recorrida por las plantas y los clientes, el objetivo es tratar de minimizar esta distancia, en términos de reducir costes, por lo que, aquella combinación que tenga en su conjunto una distancia menor será aquella que el modelo propondrá como solución óptima.

Es necesario hablar sobre cada una de las restricciones, para entender mejor el modelo mostrado. Las restricción (2) y (3) aseguran que cada cliente y cada planta tenga un vértice de destino. Así pues, cada planta dirigirá su producción a una ubicación y cada cliente recibirá su demanda en una ubicación, asegurando que tanto ningún cliente como ninguna planta sean excluidos de la solución.

Las restricciones (4) y (5) en el caso de que  $z_{tv} = 1$ , es decir, que el vértice  $v$  sea el destino de alguna planta del tipo  $t$ , especifican que ese vértice no puede recibir más de una planta. En el caso, de que  $z_{tv} = 0$ , se consigue que ninguna planta del tipo  $t$  puede utilizar ese vértice como destino.

La restricción (6) asegura que un cliente solo se dirigirá a un vértice  $v$ , si allí se encuentra una planta, al tratarse de dos variables binarias, que solo pueden contener los valores 0 y 1, de la manera que está formulada la restricción, se consigue que el caso contrario no ocurra, es decir, que un cliente vaya a solicitar su producto a una ubicación vacía, así pues la variable  $x$  nunca estará activada obteniendo el valor 1, a no ser que alguna planta de cualquier tipo se encuentre también activada.

La restricción (7) es de capacidad, asegurando que la demanda de los cliente no sea nunca mayor que la capacidad de las plantas. Así, descartamos soluciones no factibles que no



tendrían sentido y no tienen cabida en este modelo, la demanda hacia una planta siempre será menor que la capacidad que esta pueda mantener. Por último, la restricción (8) define que todas las variables que se utilizan en este modelo son binarias.

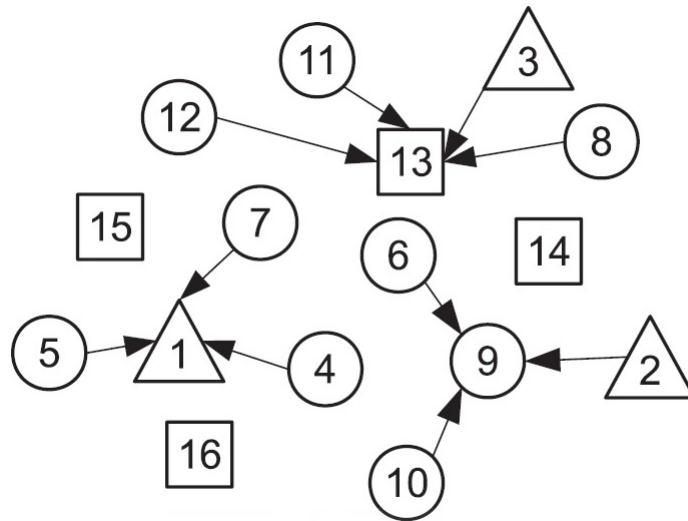


Figura 1: Grafo de un Modelo de Localización. Fuente: S. Raghavan, M. Sahin and F.S. Salman (2019) The capacitated mobile facility location problem

En la Figura 1, se muestra una posible solución a un problema de localización de plantas a pequeña escala, a través de un grafo. Supongamos que tenemos 16 ubicaciones disponibles que pueden ser denominadas como vértices. De las cuales, 3 de ellas (los  $\triangle$ ) son plantas, 9 de ellas (los  $\circ$ ) son clientes y el resto (los  $\square$ ) son ubicaciones restantes que pueden actuar como intermediarios entre clientes y plantas.

Se muestra la siguiente solución, los vértices 1, 9 y 13 uno de cada tipo de ubicación, actúan como vértices activados. De esta manera, el vértice 1 que es una planta atrae a tres clientes que están muy cercanos, el vértice 9 que un cliente atrae a la planta 2 para dejar allí su producción y a dos clientes más cercanos. Por último, el vértice 13 actúa como intermediario y recibe la producción de la planta 3, y a él acuden los tres últimos clientes para satisfacer su demanda.

A través del grafo, se puede entender mejor varias características del problema:

- Todas las plantas envían su producción a un vértice al cual no pueden acudir otras plantas
- Todos los clientes son servidos únicamente por una planta
- Varios clientes pueden acudir a la misma planta
- Varios clientes pueden acudir al mismo cliente, si el cliente actúa como intermediario de una planta.

- Todas las ubicaciones de clientes y plantas deben tener un vértice asignado, mientras que los restantes no

Este modelo se asemeja bastante al modelo por el cual se realiza este trabajo, siendo una formulación muy similar, pero como se ha comentado anteriormente, sin tener en cuenta las limitaciones de capacidad, y siendo estudiado más adelante.

## Los problemas p-centro

Uno de los problemas más utilizados en localización en redes son los del tipo p-centro, en este problema, la distancia máxima entre los clientes y las instalaciones es un factor esencial. Este problema también es conocido como el problema de localización minimax, donde  $n$  puntos de demanda son ubicados en un plano y están en posiciones fijas junto a ubicaciones de instalaciones también estáticas.

Propuesto por Hakimi en 1964, el problema del p-centro trata de encontrar la localización de  $p$  centros de servicio de forma que se minimice la máxima distancia entre un punto demanda y su centro de servicio más próximo. Es uno de los problemas más conocidos en localización discreta del tipo NP-duro y tiene muchas aplicaciones en problemas del mundo real.

## Modelo del Problema de P-centro

Se asume que en caso de disponibilidad de varias instalaciones en la red, el cliente elegirá la más cercana. El objetivo del problema es ubicar las  $p$  instalaciones de tal manera que la distancia máxima ponderada en la red se minimiza. Además, todas las instalaciones brindan el mismo servicio a los clientes ya que son idénticas y no hay límite para el número de clientes que puede abastecer un centro de servicio.

Definimos conjuntos, parámetros y variables necesarios:

### Conjuntos:

$N$  : Conjunto de nodos

### Parámetros:

$d_{ij}$  : Distancia más corta entre los nodos  $i$  y  $j$ .  $\forall i, j \in N$   
 $w_i$  : Demanda del nodo  $i$ .  $\forall i \in N$

### Variables:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si una de las } p \text{ instalaciones se encuentra ubicada en el nodo } j. \text{ para } j \in N \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la demanda del nodo } i \text{ es asignada a una instalación ubicada en el nodo } j. \text{ para } i, j \in N \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

Formulación matemática:

$$\text{Minimizar} \quad T = \langle \text{máx} \sum_{j=1}^n w_i x_{ij} d_{ij} \rangle \quad (9)$$

s.a :

$$\sum_{j=1}^n w_i x_{ij} d_{ij} \leq T \quad \forall i \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = p \quad (11)$$

$$x_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall i, j \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (13)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (14)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (15)$$

$$T \in \mathbb{R}^+ \quad (16)$$

Como se ha comentado anteriormente, la función objetivo (9) trata de ubicar las instalaciones de tal manera que se consiga minimizar la distancia máxima entre los puntos de demanda y los centros de servicio. La restricción (10) calcula la distancia ponderada cada nodo y la limitan a  $T$ , nuestra función objetivo, de esta manera se sabe cual es el nodo que contiene la distancia más grande.

La restricción (11) asegura que las  $p$  instalaciones se encuentran ubicadas dentro de la red, así pues la suma de las instalaciones ubicadas en cualquier nodo debe ser igual al total de instalaciones disponibles no permitiendo que ninguna quede sin su nodo. La restricción (12) no permite que el problema asigne un nodo de demanda a un nodo donde no se haya ubicado ninguna instalación. Al tratarse de dos variables binarias, esto es posible obligando a que el nodo de demanda siempre sea menor o igual que el nodo donde se ubican las instalaciones, de esta manera una demanda nunca podrá ser asignada a un nodo donde exista una instalación.

La restricción (13) asegura que cada nodo de demanda se asigna solo a una instalación, es una de las características del problema, un nodo de demanda  $i$  debe ser asignado únicamente a un nodo  $j$  donde se encuentre una instalación. Por último, las restricciones (14) y (15) nos comunican que las variables que se utilizan en este modelo tienen el carácter de ser binarias, y por tanto, solo podrán representar los valores 0 y 1.

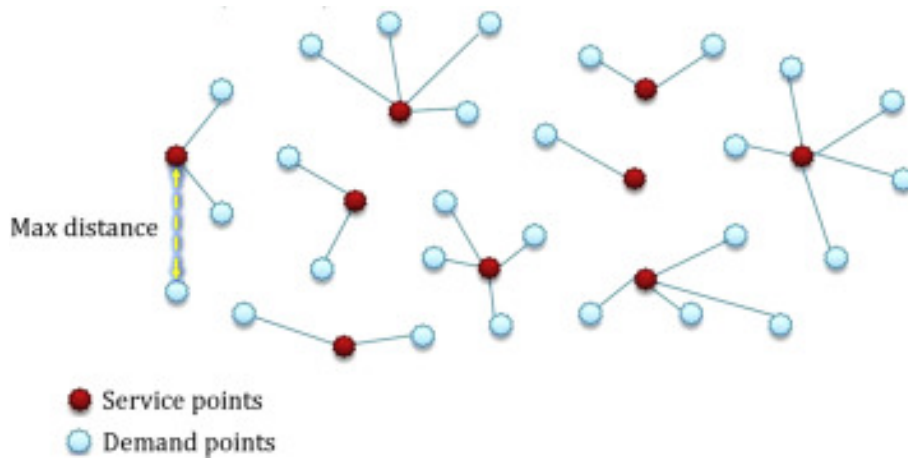


Figura 2: Grafo de un Problema  $p$ -centro. Fuente: A. Kaveh and H. Nasr (2011) Solving the conditional and unconditional  $p$ -center problem with modified harmony search

En la Figura 2, se muestra un grafo a una posible solución de un problema  $p$ -centro, en él se observa como los centros de servicio abastecen a los puntos de demanda que más cercano se encuentran. Cabe recordar que un cliente que solicita un producto siempre acudirá, al centro de servicio más cercano. Además, se observa que la distancia máxima entre un cliente y una instalación se produce en el punto de servicio situado más a la izquierda, como indica la línea amarilla.

Este problema puede ser implementado en la vida real cuando nos referimos a un área poblacional, que ciudadano debe acudir a cada centro hospitalario de la zona, es análogo al caso de estaciones de bomberos que deben cubrir una zona determinada o estaciones de policía. Además, también es utilizado para el caso de ubicar nuevos puntos de servicio en un espacio determinado, para ello sería necesario estudiar que zonas tienen una demanda muy elevada la cual es complicada de satisfacer para centrarse en esa zona e intentar con la apertura de nuevos centros de servicio controlar la afluencia de individuos.

### Los problemas $p$ -mediana

El problema de la  $p$ -mediana es una parte importante de la teoría de la localización discreta. Está motivado por situaciones reales, como tener que instalar una serie de plantas en puntos de un sistema de transporte para minimizar los costes de producción y envío o la instalación de hospitales en una ciudad para que la mayor parte de la población quede cubierta.

El problema de la  $p$ -mediana se remonta al trabajo de Hakimi en 1965. El objetivo del problema es localizar  $p$  ubicaciones de manera que se minimice la suma de las distancias ponderadas o costes de transporte entre los vértices con demanda y las instalaciones seleccionadas, como el problema de  $p$ -centro también está clasificado como NP-duro.

La principal diferencia entre los problemas de  $p$ -centro y  $p$ -mediana es que, mientras que

el primero trata de minimizar la máxima distancia ponderada desde un centro de servicio hasta sus usuarios asignados, el segundo consiste en minimizar la suma total de las distancias ponderadas.

### Modelo del Problema de la P-mediana

No se especifican restricciones de capacidad para las instalaciones y se asume que los costes fijos para el emplazamiento de las instalaciones son idénticos por lo que no son introducidos en la formulación del problema.

Definimos conjuntos, parámetros y variables necesarios:

#### Conjuntos:

$N$  : Conjunto de índices para los clientes

$J$  : Conjunto de índices para las instalaciones

#### Parámetros:

$d_{ij}$  : Distancia mínima del cliente  $i$  a la instalación  $j$ .  $\forall i \in N, j \in J$

$h_i$  : Demanda del cliente  $i$ .  $\forall i \in N$

#### Variables:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se localiza una instalación en } j. \text{ para } j \in J \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el cliente } i \text{ es asignado a la instalación } j. \text{ para } i \in N \quad j \in J \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

Formulación matemática:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} x_{ij} \quad (17)$$

s.a :

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (18)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p \quad (19)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in N, j \in J \quad (20)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, j \in J, \quad (21)$$

La función objetivo (17) representa la mínima distancia de satisfacer todos los nodos de la red, minimizando así en términos de coste. Mediante la restricción (18) nos aseguramos de la totalidad clientes  $i$  es asignado a una instalación  $j$ , siendo está una de las características del modelo por la cual todos los clientes deben ser atendidos.

La restricción (19) indica que se deben instalar exactamente  $p$  localizaciones y éstas deben estar ubicadas dentro de la red, así pues la suma de las localizaciones ubicadas en cualquier nodo debe ser igual al total de estas para asegurar que ninguna se queda sin su nodo.

La restricción (20) asegura que ningún cliente pueda ser asignado a un nodo donde no se haya ubicado ninguna instalación, al tratarse de dos variables binarias, esto se consigue obligando a que la variable de asignación de un cliente  $i$  a una instalación  $j$  siempre sea menor que la variable que nos indica si esa instalación está ubicada en el nodo. Por último, la restricción (21), nos indica que ambas variables de decisión son de carácter binario.

Se pueden observar multitud de similitudes entre los problemas  $p$ -centro y  $p$ -mediana en la formulación del modelo matemático, al tratarse de dos modelos propuesto por el mismo autor, y además, afrontar problemas similares del mundo real pero enfocados de manera diferente, provocan que ambos modelos en vez de ser sustitutivos puedan adquirir la característica de complementación. Como ocurrió en la década de los 70 con la formulación de un nuevo problema, el de la  $p$ -centdiana.

El problema de la  $p$ -centdiana es un modelo de localización que trata de combinar adecuadamente la eficiencia con la equidad utilizando como función objetivo una combinación convexa de las funciones de los dos modelos básicos de localización sobre redes: la  $p$ -mediana (eficiencia) y el  $p$ -centro (equidad).

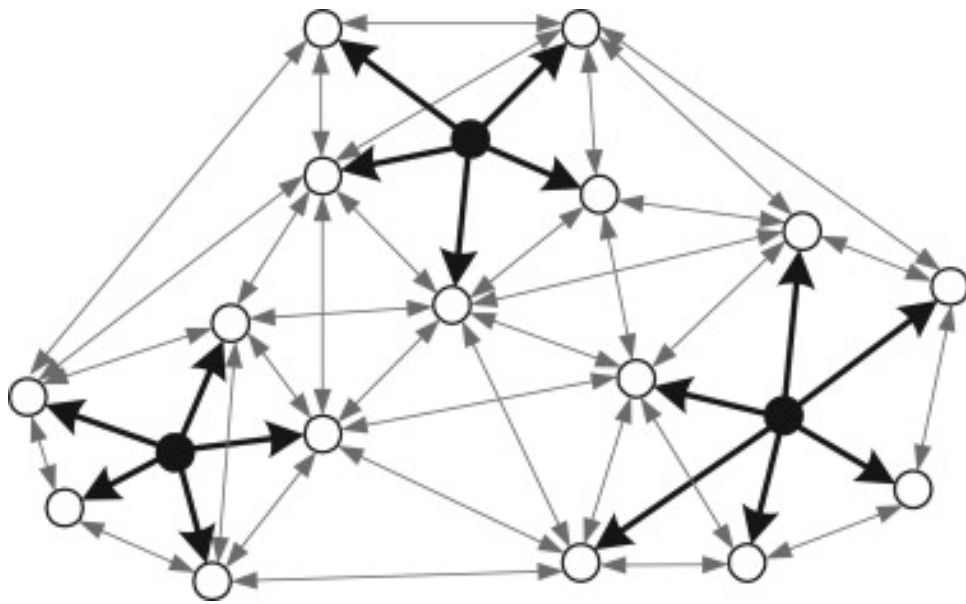


Figura 3: Grafo de un Problema p-mediana. Fuente: P. Avella, M. Boccia, S.Salermo and I.Vasilyev (2012) An aggregation heuristic for large scale p-median problem

En la Figura 3, se observa un grafo que podría actuar como solución a un problema de la p-mediana, ya que se observan un conjunto de nodos que actúan como clientes y al dividir la población adjudicando a cada cliente una de las tres instalaciones que se han implementado se consigue minimizar la suma total de las distancias ponderadas, que es el objetivo del problema.

Observamos como de una población inicial que cuenta con 16 clientes, implementando 3 instalaciones que son nombradas de izquierda a derecha de 1 a 3, se asigna a la instalación 1 cinco cliente así como a la instalación 2, y por último, a la instalación 3 se le asignan los clientes restantes que son seis. Mostrando un perfecto equilibrio en la totalidad de las distancias entre clientes e instalaciones.

Como se comentó en la introducción, este tipo de problemas, se asemeja a los procesos de decisión de ubicar por ejemplo, una serie de hospitales en un área poblacional, o distribuir de una manera eficiente el proceso de distribución de un número de clientes que demandan productos a ciertos proveedores.

### Los problemas de Localización Competitiva

Los modelos de localización competitiva estudian la mejor localización de una o varias nuevas instalaciones en un mercado en el que existen o existirán otras instalaciones ofreciendo el mismo bien o servicio, de forma que se optimice el valor de una función objetivo. Un modelo de localización competitiva es un modelo que pretende dar solución al problema de localizar nuevas instalaciones en un área de mercado.

Estos modelos comenzaron a desarrollarse en 1929 gracias al trabajo de Hotelling, el cual recoge que, “un modelo de localización competitiva es aquél que incorpora el hecho de que otras instalaciones ya están o estarán presentes en el mercado y las nuevas tendrán que com-

petir con éstas por la cuota de mercado.”

El problema básico que propone un modelo de localización competitiva es la localización óptima de nuevas plantas en un mercado donde existe la competencia. Un nuevo competidor entrará en el mercado y deberá decidir dónde ubicarse de una manera estratégica para conseguir su máximo beneficio.

Este apartado va a ser el único en el cual no se formule un modelo de localización discreta, dado la amplia combinación que presenta un problema de estas características, nos ocuparía mas espacio del deseado en este trabajo. Sin embargo, si se va a comentar los elementos principales de un problema de estas características a continuación, que definan perfectamente lo que es un problema de localización competitiva.

#### ■ Competencia

La competencia se suele dividir en dos tipos principales: competencia estática y competencia con previsión. Los modelos de competencia estática son los más simples, ya que suponen que en caso de que existan instalaciones con anterioridad en el mercado, se conoce la localización y características de estas instalaciones, y además se mantienen fijas a lo largo del tiempo, así como los nuevos centros que se instalen.

Los modelos de competencia con previsión se supone que los competidores toman decisiones para prevenir la entrada de un nuevo competidor en el mercado, es decir, reaccionan ante dicha entrada, cambiando probablemente sus estrategias cuando pierdan parte de la cuota de mercado.

#### ■ Número de nuevas instalaciones

El problema cambia de dificultad dependiendo del número de instalaciones que añadimos al mercado. Al aumentar el número de instalaciones el número de variables aumenta en consonancia, y además el problema puede producir soluciones simétricas. Una solución simétrica, es aquella que su grafo muestra una compensación y armonía casi perfecta en ambos lados.

#### ■ Demanda

Los clientes pueden estar distribuidos en regiones de demanda descritas por una distribución continua y uniforme o pueden estar agrupados en puntos de demanda distribuidos por el plano o como vértices en redes. La demanda puede ser elástica o inelástica.

La demanda es inelástica si es fija, se conoce de antemano y no cambia. Y es elástica, cuando esta no es fija, sino que puede variar dependiendo de las condiciones del mercado.

Este elemento está muy ligado al tipo de producto que ofrece la instalación. Si un producto



es esencial, por ejemplo el agua, se supone una demanda inelástica. Sin embargo, para los bienes no esenciales, como un barco, la demanda depende de las características de la oferta y el precio, siendo elástica.

- Comportamiento de los consumidores

Los patrones de comportamiento de los consumidores más habituales son el determinístico (también llamado binario o Hotelling) y el probabilístico (proporcional o Huff)

En el primero cada consumidor elige una y sólo una instalación para satisfacer toda su demanda, aquella por la cual se siente más atraído. Mientras que, en el segundo el consumidor divide su demanda entre todas las instalaciones de manera proporcional en función de la atracción que siente hacia ellas.

- Función de atracción

La función de atracción describe la atracción que siente un consumidor hacia una instalación. Se asume que la distancia entre la instalación y el consumidor cumple un papel fundamental en la atracción hacia ella.

Sin embargo, existen más factores que afectan a esta función, como son el precio de los productos, el tamaño de la instalación, la disponibilidad de aparcamiento, lo que Huff resumió como calidad de la instalación en 1964.

- Función Objetivo

En último lugar, la función objetivo es la ecuación que será optimizada dadas las limitaciones o restricciones determinadas y con variables que deberán ser minimizadas o maximizadas.

Este modelo se centra en la maximización de beneficios de la cadena a la que pertenece una nueva instalación. Con un indicador de rentabilidad, que será una función creciente en las ventas esperadas y decreciente en el coste de inversión.

## **Problema de Localización de Plantas en dos etapas**

El problema de localización de plantas en dos etapas, se puede definir de la siguiente manera. Se produce un único producto en las plantas con el objetivo de satisfacer la demanda de los clientes. En primer lugar, este producto se transporta desde esas plantas hasta algunos depósitos, y en segundo lugar, a los clientes.

El modelo que se va a describir a continuación, cuenta con capacidades de plantas y depósitos limitadas. El objetivo es seleccionar aquellas ubicaciones que minimicen los costes de un conjunto de plantas y depósitos potenciales. El coste incluye los costes de apertura de las

distintas plantas y depósitos, así como, el coste variable de transporte en ambas etapas.

Se necesita identificar que plantas y depósitos, actúan como ubicaciones a utilizar en el proceso, además, de que manera el producto fluye a través de toda esta red, siempre con la obligación fundamental de cumplir las demandas de los clientes a un coste mínimo.

### Conjuntos:

$I$  : Conjunto de plantas

$J$  : Conjunto de depósitos

$K$  : Conjunto de clientes

### Parámetros:

$f_i$  : Coste fijo de apertura de la planta  $i$ .

$\forall i \in I$

$g_j$  : Coste fijo de apertura del depósito  $j$ .

$\forall j \in J$

$c_{ij}$  : Coste de transporte de la planta  $i$  al depósito  $j$ .

$\forall i \in I, j \in J$

$d_{jk}$  : Coste de transporte del depósito  $j$  al cliente  $k$ .

$\forall j \in J, k \in K$

$q_k$  : Demanda del cliente  $k$ .

$\forall k \in K$

$b_i$  : Capacidad de la planta  $i$ .

$\forall i \in I$

$p_j$  : Capacidad del depósito  $j$ .

$\forall j \in J$

### Variables:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la planta } i \text{ es instalada.} \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases} \quad \text{para } i \in I$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el depósito } j \text{ es instalado.} \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases} \quad \text{para } j \in J$$

$x_{ij}$  : Flujo de transporte de la planta  $i$  al depósito  $j$ .

$\forall i \in I, j \in J$

$s_{jk}$  : Flujo de transporte del depósito  $j$  al cliente  $k$ .

$\forall j \in J, k \in K$

Formulación matemática:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} g_j z_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} d_{jk} s_{jk} \quad (22)$$

s.a :

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq p_j \quad \forall i \in J \quad (24)$$

$$\sum_{j \in J} s_{jk} \geq q_k \quad \forall k \in K \quad (25)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \sum_{k \in K} s_{jk} \quad \forall j \in J \quad (26)$$

$$x_{ij} \leq M y_i \quad \forall i \in I, j \in J \quad (27)$$

$$s_{jk} \leq M z_j \quad \forall j \in J, k \in K \quad (28)$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+ \quad y_i, z_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K \quad (29)$$

La función objetivo (22) representa la totalidad de los costes del modelo, los dos primeros sumatorios hacen referencia a los costes fijos de apertura de las plantas y los depósitos respectivamente, teniendo en cuenta siempre si son abiertas esta o no. Los dos dobles sumatorios restantes hacen referencia a los costes variables de transporte de las dos etapas. En primer lugar, el coste de transportar producto de la planta al depósito (etapa 1), y en segundo lugar, del depósito al cliente (etapa 2).

Las restricciones (23) y (24) actúan como límites de capacidad de las plantas y los depósitos, asegurando que los flujos de transporte nunca sean mayores a la capacidad que una planta puede soportar. La restricción (25), hace referencia a la demanda del cliente, ya que para cada cliente como mínimo su demanda debe ser satisfecha, para ello nos apoyamos en los flujos de transporte, obligando a que siempre sean mayores que la demanda.

La restricción (26) indica la relajación de los flujos, es decir, el flujo de transporte de las plantas a los depósitos, siempre debe ser mayor al flujo de transporte de los depósitos a los clientes, ya que tiene sentido que, el producto transportado a los clientes tenga relación con el producto producido de las plantas.

Las restricciones (27) y (28) aseguran que solo se produzcan flujos de transporte hacia aquellas ubicaciones que han sido abiertas y por lo tanto se encuentran operativas, para ello en el lado derecho de ambas restricciones se colocan límites superiores que son multiplicados por las variables binarias, para activar las restricciones en aquellos casos en que el camino entre una planta y depósito, o depósito y cliente está abierta y por lo tanto, debe producirse el envío de productos.

La restricción (29) representa que las dos contantes que representan los límites superiores pertenecen a todos los reales, y la totalidad de variables del modelo, son de carácter binario y comprenden únicamente los valores 0 y 1.

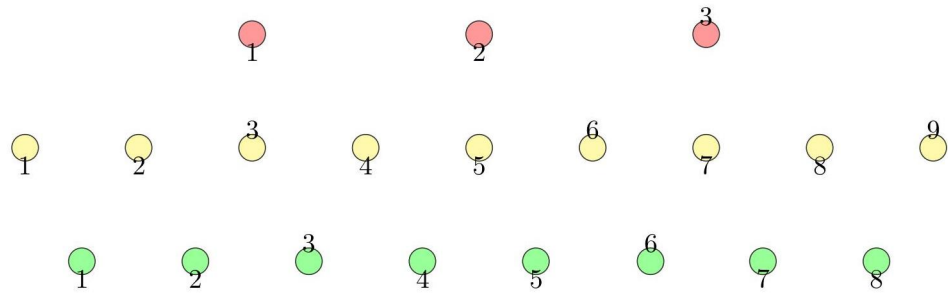


Figura 4: Elementos de un problema de localización de plantas en dos etapas. Fuente: Elaboración propia

La Figura 4, muestra un ejemplo de los elementos que pueden aparecer en un problema de este tipo. La primera fila representa las plantas, existen tres círculos rojos que nos indican que esas ubicaciones van a actuar como fabricantes del producto.

La segunda fila, representan los depósitos, existen nueve ubicaciones que pueden comportarse como intermediarios entre las plantas y los clientes. Es la primera etapa de este problema el desplazamiento de los productos de las plantas a estos depósitos.

En último lugar, los círculos verdes representan ocho clientes, los cuales todos requieren servicio de cualquiera de las tres plantas iniciales, y acudirán a aquel depósito que tenga productos que más cercano se encuentren en términos de distancia o más barato en términos de costes, representando la segunda etapa del proceso.

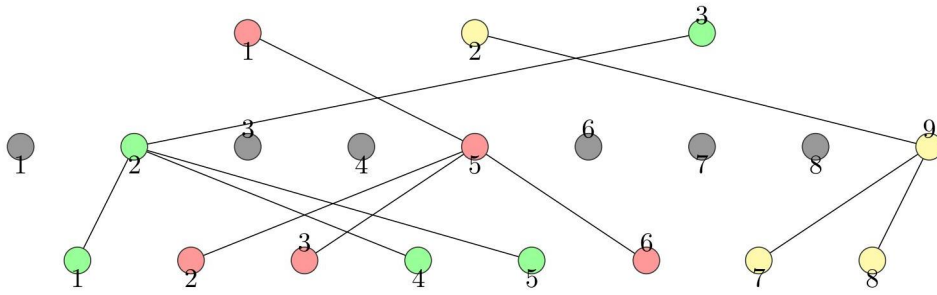


Figura 5: Grafo de un problema de localización de plantas en dos etapas. Fuente: Elaboración propia

La Figura 5, representa lo que podría ser una solución final al problema de localización de plantas en dos etapas a través de un grafo. A primera vista, se puede observar, como la totalidad de las plantas fabrican productos, es decir, se encuentran operativas, y como la totalidad de los clientes, reciben esos productos, es decir, son servidos al final del proceso.

Cabe recordar que, en esta solución se produce la casualidad de que la totalidad de las plantas se encuentran abiertas, cuando existe la posibilidad de seleccionar únicamente aquellas más beneficiosas para las características del problema, y no todas deben estar operativas de manera obligatoria como en otros modelos estudiados anteriormente.

Son señalados las tres rutas diferentes que aparecen en el proceso, a través de colores diferentes. Como se puede observar la planta 1 se dirige en primera etapa al depósito 2, la planta 5 al depósito 9 y la planta 3 al 2. Estos sirven a tres y dos clientes respectivamente. El depósito 2, sirve al cliente 1, 4 y 5, el depósito 5, al cliente 2,3 y 6, y el depósito 9 al 7 y 8.

Aunque no existe una relación directa entre fabricantes y clientes, a través de la ruta coloreada, se puede observar con facilidad como la planta 1 acaba sirviendo al cliente 2, 3 y 6, la planta 2, al cliente 7 y 8, y la planta 3, al 1, 4 y 5.

Mientras que, aquellos depósitos coloreados en gris, no intervienen en el modelo, ya que, no es obligatorio que la totalidad de los depósitos sean utilizados, porque disponen de la capacidad de servir a varios clientes al mismo tiempo.

## 2.2. Problema de Localización Móvil

Las decisiones de localización forman parte del proceso de formulación estratégica de la empresa. Donde una selección adecuada, puede ayudar al cumplimiento de los objetivos empresariales, mientras que una localización desacertada, puede derivar en un desempeño inadecuado de las instalaciones. La selección del lugar donde se van a desarrollar las operaciones de la empresa es una decisión de gran envergadura. Como se ha comentado anteriormente, se trata de una decisión infrecuente, pero el impacto y las implicaciones posteriores atraen la atención de la dirección de la empresa.

No existe una tendencia por parte de los directivos a tomar decisiones de este tipo, dificultando así, la comprensión de la importancia que conllevan. Además, de ser decisiones que afectan a la capacidad competitiva de la empresa, originando un desarrollo eficiente o imponiendo limitaciones a estas, en función del resultado de dicha decisión. Entre las causas que pueden provocar problemas ligados a la localización podemos nombrar:

- Un mercado en expansión
- La introducción de nuevos productos o servicios
- La presión de la competencia
- Fusiones y/o adquisiciones entre empresas
- Cambios en las condiciones políticas o económicas en una región

Los motivos mencionados pueden llevar a una compañía a evaluar la localización de sus instalaciones, para examinar, si es necesario que tomen una decisión en dichas circunstancias. Existen tres tipos de decisiones que una empresa puede tomar para anticiparse al impacto negativo de una modificación del mercado o para intentar sobrevivir tras una situación crítica.

En primer lugar, la posibilidad de expandir una instalación, de manera obvia, esto únicamente será posible si existe espacio para ello. Puede ser una buena decisión cuando la compañía considera que la ubicación presenta unas características adecuadas y de manera general puede suponer unos costes inferiores para la empresa que otras opciones, sobre todo si esta expansión fue prevista en el momento que se estableció la instalación.

Otra opción, es añadir nuevas instalaciones en otros lugares, suele ser la opción más común y en ocasiones, la única posible. Como con cualquier decisión, será necesario evaluar el impacto que producirá en el resto de ubicaciones del sistema de la empresa. En términos de costes, en ocasiones puede resultar una opción más ventajosa que la anterior, si la expansión provoca problemas de dimensiones o no consigue mantener el enfoque sobre los objetivos.

En último lugar, aparece la opción de cerrar una instalación en un lugar y abrirla en otro lugar distinto, suele ser la opción que más costes conlleva y por ello ser la más improbable de producirse. Es de gran utilidad, comparar los beneficios de esta relocalización con la situación actual de permanecer en el lugar ocupado.

La mayoría de los factores ligados a la localización no permanecen de una manera inalterada a lo largo del tiempo, más bien ocurre al contrario, ya que el ritmo elevado al que se

producen cambios en un entorno, es una de las características usuales en la actualidad.

La internacionalización de la economía es uno de los fenómenos que mas contribuyen en este constante cambio. Las empresas traspasan fronteras cada vez con mayor inclinación para competir a nivel global. Y el hecho de aparecer en nuevos mercados, en otros países distintos a los de origen, conlleva una logística más compleja y una autoevaluación de las compañías para estimar la competitividad.

La automatización de procesos ha originado que muchas empresas dejen de mirar a países donde el factor de la mano de obra conlleve un bajo coste salarial en algunas industrias. Sin embargo, el coste del factor trabajo sigue siendo un factor fundamental en otras.

En último lugar, la mejora de los transportes y el desarrollo de las tecnologías informáticas, están ayudando hoy día a la internacionalización de las operaciones y abriendo una mayor diversidad geográfica en la decisiones de localización. Esto, unido a la creciente competencia en el servicio al cliente, el contacto directo o la entrega rápida, provoca una tendencia a la localización cercana a los mercados.

Este proyecto presenta un modelo de localización de instalaciones sin restricciones de capacidad. Donde el objetivo es, dado un conjunto de clientes que demandan un producto y un conjunto de instalaciones que fabrican ese producto, configurar de la mejor forma posible la combinación de que instalaciones deben servir a que clientes. Además, disponemos de un conjunto de ubicaciones restantes, que pueden actuar como comodín y hacer de intermediario entre los conjuntos anteriormente descritos.

### **Modelo de localización de plantas sin restricciones de capacidad:**

Definimos conjuntos, parámetros y variables necesarios:

#### **Conjuntos:**

$V$  : Conjunto de vértices

$C$  : Conjunto de clientes

$F$  : Conjunto de plantas

#### **Parámetros:**

$u_i$  : Peso asignado a cada cliente  $i$  en términos de coste de transporte.  $\forall i \in C$

$w_j$  : Peso asignado a cada planta  $j$  en términos de coste de transporte.  $\forall j \in F$

$d_{iv}$  : Distancia del cliente  $i$  al vértice  $v$ . para cada  $i \in C$  y  $v \in V$

$d_{jv}$  : Distancia de la planta  $j$  al vértice  $v$ . para cada  $j \in F$  y  $v \in V$

**Variables:**

$$x_{iv} = \begin{cases} 1 & \text{Si el destino del cliente } i \text{ es el vértice } v. \text{ para } i \in C \text{ y } v \in V \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

$$y_{jv} = \begin{cases} 1 & \text{Si el destino de la planta } j \text{ es el vértice } v. \text{ para } j \in F \text{ y } v \in V \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$$

Formulación matemática:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j \in F} \sum_{v \in V} w_j d_{jv} y_{jv} + \sum_{i \in C} \sum_{v \in V} u_i d_{iv} x_{iv} \quad (30)$$

s.a :

$$\sum_{v \in V} x_{iv} = 1 \quad \forall i \in C \quad (31)$$

$$\sum_{v \in V} y_{jv} = 1 \quad \forall j \in F \quad (32)$$

$$\sum_{j \in F_i} y_{jv} \geq x_{iv} \quad \forall i \in C, v \in V \quad (33)$$

$$x_{iv}, y_{jv} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, j \in F, v \in V \quad (34)$$

Si se realiza la comparación con el modelo propuesto en la sección anterior, el cual se componía de restricciones de capacidad. Es observable que este modulo es menos restrictivo, puesto que el número de restricciones disminuye de seis a tres. De manera obvia, si no limitas el problema mediante restricciones bien sean de capacidad, demanda o distancia, otorgas al modelo una mayor libertad. Además, la función objetivo y las restricciones (31) y (32) son similares en ambos modelos.

La función objetivo (30) minimiza el movimiento total ponderado de las instalaciones así como el movimiento total ponderado de los clientes. Representa aquella combinación que produzca la mínima distancia de entre todas las posibles, obteniendo unos costes más inferiores de esta manera.

Las restricciones (31) y (32) especifican que tanto cada cliente como cada instalación deben tener asignado un vértice de destino, asegurando así que todas las ubicaciones de plantas y clientes forman parte del modelo final. De esta manera, cada cliente recibirá el producto demandado en una ubicación y cada planta entregará el producto fabricado en otra.

La restricción (33) ayuda a que ningún cliente vaya a recibir el producto en una ubicación donde no exista ninguna planta que lo proporcione, es decir, establecer una relación entre los vértices  $v$  que han sido elegidos por las plantas y los clientes que necesitan recibir su producto, asegurando así, que el modelo actúe adecuadamente. Esto se consigue con la utilización de



las dos variables binarias, indicando que la variable que nos indique el destino de las plantas siempre sea mayor que la variable que nos indique el destino de los clientes. Así pues, si el vértice  $v$  no está operativo los clientes directamente descartan esa ubicación, y si el vértice  $v$  ha sido utilizado por una planta, el cliente podrá acudir o no a esa ubicación. Además, impedimos que ocurra lo que no debería ocurrir, que un cliente acuda a una ubicación donde no se encuentra ninguna planta.

En último lugar, a través de la restricción (34), indicamos que la totalidad de las variables de este modelo son de carácter binario, comprendiendo así únicamente los valores 0 y 1. En comparación con el modelo anterior, otra de las modificaciones es la utilización de una variable menos, pasando de un modelo de tres variables binarias a uno de dos.

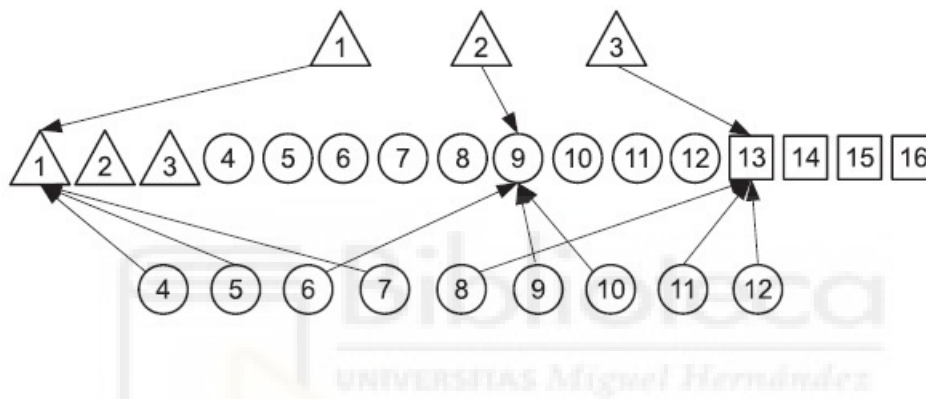


Figura 6: Grafo de un Modelo de Localización. Fuente: S. Raghavan, M. Sahin and F.S. Salman (2019) The capacitated mobile facility location problem

La Figura 6 muestra un grafo de un problema de este tipo, pudiendo ser una solución a un ejemplo en el cual existen dieciséis vértices. Los tres primeros vértices, actúan como plantas, es decir, son aquellas ubicaciones donde se fabrica el producto. De los vértices cuatro al doce, actúan como clientes, siendo aquellas ubicaciones que demandan el producto y deben recibirlo. Es necesario realizar la relación entre qué clientes deben acudir a qué plantas recordando que tanto la totalidad de las plantas como de los clientes deben tener un punto de destino, es decir, todas aquellos nodos que actúen como plantas y como clientes deben formar parte del modelo final. En último lugar, existen cuatro vértices adicionales que actúan como ubicaciones restantes, es decir, si el modelo lo requiere pueden actuar como comodín y realizar de intermediarios entre las plantas y los clientes.

De la manera que se muestra la Figura 6, facilita la comprensión del problema y se observa mejor la combinación de todas las ubicaciones. La planta 1, decide producir su material y retenerlo en la misma ubicación, acudiendo a ella los clientes 4, 5 y 7. Por su parte la planta 2, determina después de producir su material el envío de este a la ubicación 9 que actúa como cliente, hacia ella acuden los clientes 6 y 10, además de manera obvia, el cliente 9 también recibe su producto. En último lugar, la planta 3 establece el envío de su material a la ubicación 13, que actúa como vértice restante, y realiza las funciones de intermediación entre la planta

3 y los clientes 8, 11 y 12.

El grafo muestra los tres tipos de decisiones que puede tomar una planta tras producir su producto. En primer lugar, pueden optar por no enviar su producto a ninguna ubicación y que los clientes acudan a recogerla a la propia planta, reduciendo así los costes de transporte de la planta en cuestión, como es el caso de la planta 1. En segundo lugar, se puede escoger la opción de enviar el producto a un cliente y que el resto de clientes cercanos acudan a él, reduciendo de esta manera los costes de transporte del cliente que actúa como punto de recogida, como es el ejemplo de la planta 2. Por último, existe la posibilidad de utilizar un intermediario para minimizar los costes del envío y la recogida, una ubicación restante actúa como nexo de ambos conjuntos, como ocurre con la planta 3.

Además se observa como todas las ubicaciones de triángulos y círculos, que actúan como plantas y clientes respectivamente, cumplen con las características del modelo y son todas incluidas en él. A excepción de las ubicaciones restantes, que únicamente tienen la posibilidad de participar en ocasiones y no de manera obligatoria. No se da la posibilidad en el grafo de que dos plantas envíen su producto a un mismo cliente, además no tendría demasiado sentido, puesto que los costes de transporte deberían ser mayores si todos escogen la misma vía, ya que las plantas no tienen restricciones de capacidad. De todas formas, en la resolución del algoritmo introduciremos poblaciones tanto para que no pueda ocurrir lo comentado y para que sí, con la intención de demostrar que si cada planta proporciona material de manera independiente a sus clientes más cercanos es más óptimo que si todas las plantas envían el producto a un cliente central y el resto acuden a él.

A continuación, se hace un breve resumen de las distintas características del problema para finalizar el capítulo, así como ya se realizó en la sección anterior, es necesario prestar atención a las siguientes particularidades:

- Todas las plantas deben estar operativas y participar en el modelo
- Todos los clientes deben ser servidos únicamente por una planta y participar en el modelo
- Las plantas pueden almacenar el producto, enviarlo a un cliente que haga de intermediario o a un intermediario que no sea cliente
- Es preferible que distintas plantas no utilicen el mismo vértice de destino
- Una planta puede almacenar el producto en sí misma, pero no puede enviarlo a otra planta
- Varios clientes pueden acudir a la misma planta, a otro cliente o a un intermediario
- Un cliente no puede acudir a otro cliente que no reciba directamente el producto de una planta
- Los vértices restantes que actúan no es necesario que participen de manera obligatoria en el modelo

### 3. Métodos de resolución

Existen multitud de métodos que pueden aplicarse en la resolución de modelos de optimización con el objetivo de obtener buenos resultados. Se pueden establecer diversas clasificaciones de estos métodos. En primer lugar, podemos diferenciar entre algoritmos deterministas y algoritmos no deterministas. Sin embargo, en términos de precisión en la resolución de problemas de optimización, hablamos de métodos exactos y heurísticos.

Un algoritmo determinista es aquel, que todas las ejecuciones del método producen el mismo resultado final en un conjunto de problemas, es decir, un algoritmo determinista es completamente predictivo si se conocen sus entradas. Un ejemplo de método determinista es una función matemática, pues para cada entrada siempre existe la misma salida.

Un algoritmo no es determinista al introducir algo de aleatoriedad en el proceso de encontrar la solución y por lo tanto los resultados finales ya no serán siempre los mismos. Es un algoritmo que con la misma entrada ya no produce una solución única, sino multitud de posibles resultados, por lo que no se puede saber con anterioridad cual será el resultado de un método de este tipo.

Los métodos exactos, son aquellos que siempre devuelven una solución óptima. El principal problema que pueden tener este tipo de métodos, es que pueden ser muy lentos al necesitar un esfuerzo computacional grande. En ocasiones, será mejor la utilización de métodos aproximados que aseguran soluciones que se encuentran dentro de un cierto porcentaje del óptimo.

Los métodos heurísticos, por su parte, producen soluciones sin ninguna garantía de optimalidad, y por lo general tienen un tiempo de ejecución mucho menor. Dentro de los métodos heurísticos existen multitud de tipos distintos, como pueden ser los heurísticos diseñados de forma específica para resolver un problema o los de propósito en general. Entre estos últimos se encuentran los metaheurísticos y de búsqueda local, de entre los que destacan, tabu-search, simulated annealing o algoritmos genéticos.

En esta sección se estudiará en profundidad los distintos métodos heurísticos que pueden aplicarse a un modelos de estas características, haciendo especial énfasis en los algoritmos genéticos, ya que el problema presentado se resuelve con un algoritmo de este tipo que se ha diseñado e implementado en R.

### 3.1. Algoritmos heurísticos

Existen multitud de métodos heurísticos diseñados de forma específica para resolver distintos problemas de optimización, como puede ser el “Método Vogel” para el problema del transporte o el “Vecino más cercano” para el problema del viajante de comercio, en inglés Taveling Salesman Problem (TSP) por citar algunos ejemplos conocidos.

Además, más recientemente se han desarrollado distintos tipos de técnicas metaheurísticas, de propósito en general, que pueden ser aplicadas para resolver problemas muy diferentes de optimización combinatoria.

A continuación, se muestran varios de los métodos metaheurísticos más comunes. Osman y Kelly en 1996 aportan la siguiente definición: “Los procedimientos metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son ni efectivos ni eficientes. Los metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y la mecánica estadística.”

Los algoritmos metaheurísticos son algoritmos aproximados de optimización y búsqueda de propósito en general. Son procedimientos iterativos que guían una heurística subordinada combinando de forma inteligente distintos conceptos para explorar y explotar adecuadamente el espacio de búsqueda. Suelen tener un gran éxito en la práctica siendo, fácilmente implementables y paralelizables, en cambio, son algoritmos aproximados y no aseguran una solución exacta, además detrás de ellos no existe como tal siempre una base teórica establecida.

Cualquier algoritmo de búsqueda, para obtener soluciones de calidad, debe establecer un adecuado balance entre dos características del proceso, la intensificación y la diversificación. La intensificación se puede definir como la cantidad de esfuerzo empleado en la búsqueda en la región actual, es decir, la explotación del espacio, mientras que la diversificación es aquella cantidad de esfuerzo empleado en la búsqueda en regiones distantes del espacio, la exploración como tal. El equilibrio entre estas dos características, es necesario para identificar regiones en el espacio con soluciones buenas rápidamente, y a su vez, no consumir excesivo tiempo en regiones del espacio no prometedoras o ya exploradas.

Existen distintas metaheurísticas en función de conceptos como:

- Seguimiento de trayectoria considerado
- Uso de poblaciones de soluciones
- Uso de memoria
- Fuente de inspiración

Los métodos metaheurísticos, pueden ser clasificados en cuatro grandes grupos, que son los siguientes:

- Basados en métodos constructivos

- Basados en trayectorias
- Basados en poblaciones
- Algoritmos bioinspirados

Los basados en métodos constructivos son métodos que parten de una solución inicial vacía, y van añadiéndose componentes hasta construir una solución. Un buen ejemplo, es el problema de optimización de colonia de hormigas.

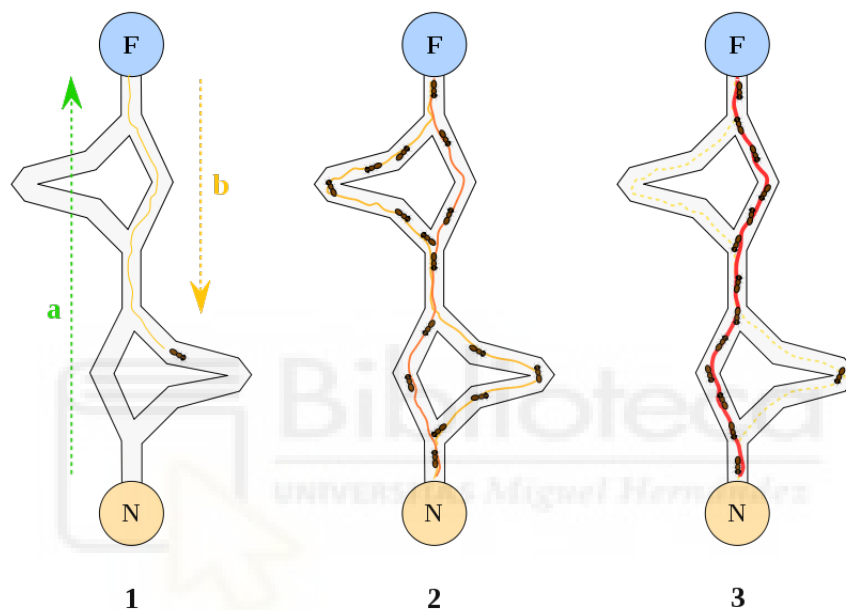


Figura 7: Ejemplo de un diagrama del algoritmo colonia de hormigas. Fuente: Wikipedia

En la figura 7 se muestra la evolución de este problema. Como se puede observar, existen dos nodos y un camino que puede originar distintas rutas, el nodo F representa la fuente de alimento y el nodo N la colonia de hormigas.

En primer lugar, una hormiga va en busca de alimento siguiendo cualquier ruta y vuelve a la colonia de hormigas. En ese momento, el resto de hormigas acuden también en busca de la fuente de alimentos tomando cualquier ruta de manera indiscriminada como se muestra en el paso 2. Por último, tras fortalecerse el camino la ruta más corta se convierte en la más atractiva y el resto empiezan a perder su rastro. De esta manera, a largo plazo todas las hormigas utilizan la ruta más corta.

Este experimento resuelto biológicamente, demostró que si a un conjunto de hormigas se le da la posibilidad de escoger dos rutas de distancias diferentes, escogen la ruta más corta. Esto sucede porque las hormigas dejan tras de sí un rastro de feromonas que la convierten en más atractiva, de esta manera al existir dos rutas, en una misma cantidad de tiempo, la ruta más corta será recorrida por más hormigas que la ruta más larga, aumentando así, la cantidad

de feromonas en la ruta más corta y siendo cada vez más atractiva. Finalmente, la ruta más larga irá desapareciendo, porque las feromonas son volátiles y todas las hormigas escogerán el camino más corto.

Así pues, tras partir de una solución vacía, de una manera continuada se va añadiendo información al problema, hasta poder construir una solución de calidad.

Los métodos basados en trayectorias, utilizan la heurística subordinada, que son algoritmos de búsqueda local que sigue una trayectoria en el espacio de búsqueda. Parten de una solución inicial e iterativamente se trata de reemplazar esa solución inicial por otra de mejor calidad. Existen ejemplos como pueden ser la búsqueda local, el recocido simulado o enfriamiento simulado (simulated annealing), o la búsqueda tabú (tabu search).

Fred Glover, como precursor de la búsqueda tabú, la definió como: “La búsqueda tabú guía un procedimiento de búsqueda local para el explorar el espacio de soluciones más allá del óptimo local.” La búsqueda tabú es un intento de aportar inteligencia a los algoritmos de búsqueda local. A través de la inteligencia artificial se utiliza el concepto de memoria y lo implementa mediante estructuras simples con el objetivo de dirigir la búsqueda teniendo en cuenta los antecedentes de ésta, es decir, se trata de extraer información de lo sucedido anteriormente, actuando así en consecuencia, existiendo un cierto aprendizaje y conllevando una búsqueda inteligente. Este método permite moverse a una solución aunque no sea tan buena como la actual, para no quedar así atrapado en óptimos locales y construir de una manera estratégica la búsqueda de soluciones aún mejores.

La búsqueda tabú en términos generales, es un algoritmo de búsqueda local basado en el uso de la memoria, existiendo dos tipos de memoria, a largo plazo y a corto plazo o memoria reciente. La memoria tiene la función de guardar atributos de las soluciones y es utilizada para no repetir la trayectoria de búsqueda, además, como se ha comentado anteriormente, es posible aceptar soluciones que empeoren la situación actual, con el objetivo de mejorar a largo plazo.

Para entender mejor este método, vamos a exponer un breve ejemplo. Disponemos de siete materiales y el objetivo es maximizar el poder aislante de esos materiales en función del orden en el que se encuentren. La función objetivo actúa como caja negra, es decir, no es posible obtener el funcionamiento de esta y el algoritmo avanza intercambiando las posiciones por pares. La iteración 0, obtiene la siguiente secuencia,  $M = (2,5,7,3,4,6,1)$  con un poder aislante de 10. La búsqueda tabú nos indica que el mejor intercambio es el 4-5, ya que aumenta el poder aislante en 3 unidades. La iteración 1, obtiene la siguiente secuencia,  $M = (2,4,7,3,5,6,1)$  con un poder aislante de 13, y la particularidad de que el intercambio 4-5 ya no se puede realizar más, hasta que pasen el número de iteraciones que se le indique al algoritmo, es decir, en cada iteración el intercambio realizado anteriormente queda tabú durante un número de iteraciones. El algoritmo funciona así sucesivamente. En ocasiones, se utilizará un intercambio que disminuirá el poder aislante, significando así que nos encontramos en un óptimo local y debemos avanzar en búsqueda de una solución mejor.

Existen diversos trabajos que han aplicado procedimientos heurísticos de búsqueda tabú para el problema de localización de instalaciones, bien con restricciones de capacidad o sin ellas

de la siguiente manera. El procedimiento heurístico, utiliza memorias a corto y largo plazo para realizar el proceso de búsqueda principal, así como las funciones de diversificación e intensificación. Las soluciones visitadas son almacenadas en un árbol primogénito que actúa como memoria a largo plazo. Además, la iteración reciente en la que una instalación cambia de estado se almacena para cada ubicación como memoria a corto plazo. Los límites inferiores en la disminución del coste total sirven como medidores del atractivo de cambiar de estado en cada instalación, y se usa para usar un movimiento en el proceso de búsqueda principal.

El enfriamiento o recocido simulado es un algoritmo de búsqueda por entornos con un criterio probabilístico de aceptación de soluciones basado en termodinámica. Como se ha comentado anteriormente, un modo de evitar que la búsqueda local finalice en óptimos locales, hecho que puede ocurrir con los métodos tradicionales de búsqueda local, es permitir que se produzcan movimientos hacia soluciones peores. Este proceso de escapar de óptimos locales, debe realizarse siempre de un modo controlado.

En el caso del enfriamiento simulado, esto se realiza controlando la frecuencia de los movimientos de escape mediante una función de probabilidad por la cual se disminuye la probabilidad de estos movimientos hacia soluciones peores conforme avanza la búsqueda, estando previsiblemente más cerca del óptimo local, explicando así la habitual filosofía de diversificar el principio e intensificar el final.

El fundamento de este control se basa en el trabajo de Metrópolis (1953) en el campo de la termodinámica estadística. Este autor, modeló el proceso de enfriamiento simulando los cambios energéticos de partículas conforme decrece la temperatura, hasta que converge a un estado estable (congelado). En el modelo de Metrópolis, se genera una perturbación aleatoria en el sistema y se calculan los cambios de energía resultantes, si existe una caída energética, el cambio se acepta automáticamente, en cambio, si se produce un incremento energético, el cambio será aceptado con una probabilidad determinada.

El algoritmo de enfriamiento simulado es un método de búsqueda por entornos que se caracteriza por un criterio de aceptación de soluciones vecinas que se adapta de manera continua a lo largo de su ejecución. Hace uso de una variable llamada  $T$  (temperatura), cuyo valor determina en qué medida pueden ser aceptadas soluciones vecinas peores que la actual. Esta variable se inicia a un valor alto como temperatura inicial, y se reduce a cada iteración mediante un mecanismo de enfriamiento de la temperatura, hasta alcanzar una temperatura final. Una de las diferencias, que expresa este método en comparación con la búsqueda tabú, es que el elemento memoria no es utilizado en ningún momento.

En cada iteración se genera un número concreto de vecinos, que puede depender de la iteración concreta o ser fijo para toda la ejecución. Cada vez que se genera un vecino, se aplica el criterio de aceptación para ver si sustituye a la solución actual, si la solución vecina es mejor que la actual, se acepta automáticamente, tal como se haría en la búsqueda local clásica. Sin embargo, si es peor, sigue existiendo la probabilidad de que el vecino sustituya a la solución actual, permitiendo así al algoritmo abandonar óptimos locales para no quedar atrapado. A mayor temperatura, mayor probabilidad de aceptación de soluciones peores. Así, el algoritmo actúa aceptando soluciones peores que al comienzo de la ejecución, en lo que se denomina la fase de exploración. Una vez finalizada la iteración, generando soluciones vecinas, se enfría la

temperatura y se pasa a la siguiente.

Este método ha sido utilizado con éxito, por ejemplo, en el problema del viajante, donde dada una lista de ciudades y de distancias entre cada par de ellas, el objetivo es encontrar aquella ruta más corta por la cual el viajero visite cada ciudad una única vez y vuelva al punto de origen. Supongamos que en el problema a resolver existen siete ciudades y se desea encontrar aquella ruta que las visita todas y vuelve al origen. Partiendo de una permutación aleatoria, en cada iteración se establece el conjunto de vecinos y de éstos se elige uno, que será la solución de la siguiente iteración. Cabe recordar, que en este método es necesario establecer adecuadamente el conjunto de vecinos, ya que no todos los nodos nos pueden transportar a todos los nodos, por tanto, el intercambio siempre será controlado para realizarse entre nodos vecinos.

Fijando el nodo 1 como punto de partida, que deberá ser siempre el primer elemento y el último de la secuencia, en la iteración 0 la solución podría ser esta,  $C=(1,2,3,4,5,6,7,1)$ . A partir de esta solución se establece un conjunto de vecinos, cada uno de los cuales podría obtenerse intercambiando dos posiciones consecutivas. De todos los vecinos se elige el mejor, que será la solución de la siguiente iteración si la probabilidad dada por el parámetro de temperatura así lo determina. Dicho valor podría ser inicialmente de 0.8 e ir decrementándolo en 0.05 unidades en cada iteración.

Este método también ha sido utilizado para la resolución de problemas del tipo de localización de plantas, con la utilización de la función Boltzmann, que toma parte cuando el siguiente valor es peor que la situación actual. A través de esta función existe una probabilidad de que el nuevo valor sustituya al actual, con el objetivo de no restringir la búsqueda únicamente a aquellas soluciones que aporten un impacto positivo a la función objetivo, sino también permitir movimientos que tengan un impacto negativo. Evitando con este mecanismo el procedimiento de quedar atrapado de una manera prematura en un óptimo local.

En los métodos basados en poblaciones el proceso considera múltiples puntos de búsqueda en el espacio que evolucionan en paralelo. Entre sus ejemplos más destacados se encuentran, los algoritmos genéticos, la búsqueda dispersa (scatter search) o los algoritmos meméticos.

La búsqueda dispersa, es un procedimiento metaheurístico introducido en la década de los setenta basado en formulaciones y estrategias. Los conceptos y principios fundamentales del método, fueron propuestos al comienzo de la década, basados en las estrategias para combinar reglas de decisión, especialmente en problemas de secuenciación o en la combinación de restricciones. Este método opera sobre un conjunto de soluciones, denominado conjunto de referencia, combinando éstas para crear nuevas soluciones de modo que mejoren a sus predecesoras.

En este sentido, es clasificado como un método evolutivo. Sin embargo, a diferencia de otros métodos evolutivos, como los algoritmos genéticos, la búsqueda dispersa no está fundamentada en la aleatorización sobre un conjunto relativamente grande de soluciones sino en elecciones sistemáticas y estratégicas sobre un conjunto pequeño. Una breve ilustración es, que mientras los algoritmos genéticos suelen trabajar con una población de 100 soluciones, la búsqueda dispersa, únicamente trabaja con un conjunto habitual de 10 soluciones.



La primera descripción de este método fue propuesta por Fred Glover en 1977 donde establece los principios de la búsqueda dispersa y la describe como una exploración sistemática sobre una serie de buenas soluciones llamadas conjunto de referencia. La búsqueda dispersa se basa en que la información sobre la calidad o atractivo de un conjunto de restricciones, reglas o soluciones puede ser utilizado mediante la combinación de éstas en vez de una manera aislada. Además, se basa en integrar la combinación de soluciones con la búsqueda local. Sin embargo, en diseños más avanzados también se puede hacer uso de la memoria, pero se asemeja más a una búsqueda tabú, y en la mayoría de casos nos limitamos a una búsqueda local convencional.

La búsqueda dispersa, trata de combinar las soluciones del conjunto de referencia, este conjunto almacena las buenas soluciones encontradas durante el proceso de búsqueda. Es importante hacer énfasis en el que la definición de buena solución no se restringe a la calidad de la solución sino también considerando la diversidad que aporta al conjunto de referencia. A grandes rasgos, el método funciona de la siguiente manera.

En primer lugar, a través de un generador de soluciones diversas, se genera un conjunto de  $P$  soluciones diversas (aproximadamente 100), de las cuales extraeremos un subconjunto (de alrededor 10) que se denomina conjunto de referencia. A continuación, se aplica un método de mejora con el objetivo de perfeccionar las soluciones a través de una búsqueda local.

En tercer lugar, se establece un método para crear y actualizar el conjunto de referencia. Dicho conjunto ha sido extraído según los criterios de calidad y diversidad, es decir, contener soluciones buenas y diferentes entre sí.

En último lugar, la búsqueda dispersa, se basa en combinar todas las soluciones del conjunto de referencia a través de un determinado método de combinación. Las soluciones que se obtienen de esta combinación pueden ser introducidas de manera instantánea o almacenadas temporalmente hasta realizar la totalidad de combinaciones y después observar que soluciones entran en el conjunto.

Un ejemplo de éxito de aplicación de este tipo de métodos es el problema de localización de plantas. Las soluciones del conjunto de referencia se combinan mediante un procedimiento que consta de dos fases: la fase de inicialización y la fase de mejora. Durante la primera fase, cada cliente es asignado a una instalación abierta para obtener una solución que posteriormente será mejorada en la fase dos.

En último lugar, se encuentran los algoritmos bioinspirados, que son metaheurísticas basadas en la naturaleza empleando analogías con sistemas naturales o sociales para la resolución de problemas. Los algoritmos bioinspirados simulan el comportamiento de sistemas naturales para el diseño de métodos heurísticos de búsqueda, aprendizaje o comportamiento. Actualmente, se consideran uno de los campos de investigación más prometedores en el diseño de algoritmos.

Entre las características que suelen presentar, se puede destacar que son métodos no determinísticos, en ocasiones presentan de manera implícita una estructura paralela y son adaptativos, utilizando una retroalimentación con el entorno para modificar el modelo y los parámetros. En resumen, actúan como una metáfora biológica, modelando de forma aproximada un fenómeno

existente en la naturaleza.

Entre algunos ejemplos se encuentran, las redes neuronales, que se basan en la simulación del comportamiento del sistema nervioso aplicando un paradigma de aprendizaje automático, o la optimización basada en la colonia de hormigas, que se basa en la simulación del comportamiento de las colonias de hormigas cuando recogen comida.

La inteligencia de enjambre (swarm intelligence), “son algoritmos o mecanismos distribuidos de problemas inspirados en el comportamiento colectivo de colonias de insectos sociales u otras sociedades de animales”, como definieron Bonabeau, Dorigo y Thereaulaz en 1999.

Una de las sociedades de insectos más comunes es la de las abejas, que actúan bajo una cooperación total dentro de la colmena, dividiendo la labor a través de la especialización de cada una y con una comunicación entre las fuentes de comida y su distancia. Un enjambre se encuentra compuesto de agentes simples existiendo una auto-organización descentralizada al no existir un único supervisor. Además de ser un conjunto robusto, ya que las actuaciones se completan aún con la deficiencia de algún individuo, y flexible, pudiendo responder a cambios extremos al disponer de una percepción del entorno. En resumen, la complejidad de la auto-organización se lleva a cabo sin un líder de la sociedad y la modelización de los insectos sociales puede ser de ayuda para el diseño de modelos artificiales distribuidos de resolución de problemas. El objetivo principal es coordinar el esfuerzo individual para alcanzar un fin común. Este tipo de algoritmos se ha utilizado con éxito en problemas de localización de plantas.

De entre los algoritmos inspirados en la naturaleza, sin duda, los que más se han utilizado con éxito en muy diversos problemas de optimización combinatoria son los algoritmos genéticos.

## 3.2. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos reciben su nombre al estar inspirados en los procesos de evolución natural y evolución genética. Surgieron en la década de los 70 de la mano de John Henry Holland y siguen los principios postulados por Darwin de que las poblaciones evolucionan en la naturaleza a través de la selección natural y la supervivencia de aquellos mejor adaptados.

En la naturaleza los individuos de una población deben competir entre sí en la búsqueda de recursos que aseguren su supervivencia. En ocasiones, incluso los miembros de una misma especie pelean entre sí por la búsqueda de recursos. Aquellos individuos que tengan éxito en la supervivencia y en la posibilidad de atraer parejas para la reproducción, serán aquellos que más probabilidad de descendencia tendrán. De esta manera, los genes de los mejores individuos y los más adaptados se propagarán hacia las siguientes generaciones. A lo largo del tiempo, las especies evolucionan logrando unas características cada vez más adaptadas al entorno en el que se encuentran.

Los algoritmos genéticos actúan de forma análoga a la evolución natural. Trabajan con una población de individuos, donde cada uno de ellos representa una posible solución al problema dado. A cada individuo se le asigna un valor de adecuación, que determina la bondad de ajuste de cada solución. En el mundo real sería equivalente a la probabilidad de un organismo para competir por unos determinados recursos. Cuanto mayor sea la adecuación mayor será la probabilidad de supervivencia y reproducción de ese individuo, cruzando su material genético con una pareja y dejando descendencia. De otra manera, cuando menor sea la adecuación del individuo al entorno, menor será la probabilidad de ser seleccionado para la reproducción y que su material genético sea propagado.

De esta forma se genera una nueva población que reemplaza a la anterior y contiene una mayor proporción de características mejores en comparación anterior. Sucesivamente a lo largo de las distintas generaciones las buenas características se van distribuyendo a lo largo de la población, explorando las áreas más interesantes del espacio de búsqueda y con la seguridad de que si el algoritmo ha sido diseñado de manera correcta, la población proporcionará una buena solución del problema.

Una de las características que ha hecho tan utilizada a este tipo de técnicas, es la robustez. Estos algoritmos pueden tratar con multitud de problemas provenientes de diferentes áreas. Los algoritmos genéticos no garantizan el obtener la solución óptima del problema, pero existe evidencia empírica de que se encuentran soluciones de un gran nivel, en un tiempo competitivo si es comparado con el resto de métodos de optimización combinatoria.

A grandes rasgos, un algoritmo genético sigue la siguiente estructura. En primer lugar, se genera una población inicial de individuos, para posteriormente evaluar cada individuo de dicha población, asignando a cada individuo un valor. Posteriormente, se produce el proceso de selección, por el cual los individuos mejores dotados dispondrán mayor probabilidad de ser seleccionados. Después, se aplica el proceso de cruce emparejando de manera aleatoria aquellos individuos que mejor valor de adecuación representan sin alterar el tamaño de la población. Existen diversos métodos de selección y de cruce. En último lugar, se produce el proceso de mutación, que únicamente tiene el objetivo de introducir variabilidad en la población.

Este proceso es repetido hasta que la condición de finalización sea cumplida, esta determina la parada del algoritmo que puede ser establecida por tiempo de computación o por número de generaciones que se desean estudiar en el algoritmo por citar solo las más comunes. Otro aspecto importante de este método, es la necesidad de definir de una manera adecuada como representar cada una de las posibles soluciones al problema, en lo que es conocido, como la codificación de las soluciones. El comportamiento del algoritmo y los resultados que proporcionan dependen en gran medida de este aspecto.

### **Codificación de las soluciones**

Como se ha comentado anteriormente, un aspecto importante es la codificación de las soluciones, ya que es de vital importancia definir de una manera adecuada cada una de las posibles soluciones. El algoritmo genético no opera de manera directa sobre las propias soluciones, sino sobre una codificación representada de estas, que se asemeja al material genético de un individuo. Se han propuesto multitud de formas de como representar estas soluciones, Holland propuso el Teorema de los Esquemas por el cual era aconsejable representar las soluciones mediante un alfabeto binario, pero en la actualidad se ha demostrado que en la mayoría de problemas de optimización combinatoria, esta representación no es adecuada.

Durante estos años, se han propuesto otras formas de codificación como cadenas de enteros, de números reales o en ocasiones cadenas donde siquiera existen números, es decir, en la actualidad se puede trabajar con cadenas que representan cualquier tipo de alfabeto. En el caso de nuestro problema, quizás sería una buena opción crear una cadena a la que podemos llamar cromosoma del tamaño de la totalidad de plantas del problema, y cada posición de este cromosoma a la que podemos llamar gen, representa el vértice a donde cada planta envía su producto.

### **Población inicial**

Otro aspecto importante, será la creación de la población inicial, este conjunto de individuos tiene la posibilidad de ser creado de una manera aleatoria o con la aplicación de un algoritmo heurístico.

Tras la creación de esta población inicial, cada individuo de dicha población ha de ser evaluado. Esto se consigue con la función de evaluación, que asigna a cada individuo un valor de adecuación e indica la competencia de cada individuo en comparación al resto que forman parte del conjunto de la población.

La mayoría de los modelos propuestos en el capítulo anterior, describen problemas donde las funciones objetivos tratan de minimizar o maximizar distancias, esto aporta una facilidad a la hora de determinar que individuos representan mejores valores en referencia a la función objetivo, puesto que si el objetivo es minimizar costes o distancias, aquellos individuos que representen menos valor en comparación con el resto serán más idóneos para nuestro modelo, mientras que en el caso de maximizar ocurre lo contrario.

## Proceso de selección

El proceso de selección trata de simular la selección natural de las especies propuesta por Darwin para explicar la supervivencia de los mejores individuos. El proceso de selección asegura que aquellos individuos mejor dotados tendrán mayor presencia en las generaciones futuras, es decir, tendrán mayor posibilidad de sobrevivir. Como se ha comentado anteriormente, el valor de adecuación representa la probabilidad que tienen los individuos de salir victoriosos al competir por la supervivencia, existirán individuos que por sus buenas características reciben uno o varias copias en la siguiente población, mientras que otros pueden no recibir ninguna y llegar a desaparecer.

Se crea entonces una población de segunda generación que contendrá el mismo número de individuos que la población anterior y sustituye a ésta, produciéndose el cambio generacional. Es necesario tener en cuenta los aspectos de diversidad y tensión del proceso. Si el proceso de selección es demasiado agresivo solo aquellos individuos superdotados, serán aquellos que traspasen sus genes a la siguiente población, perdiendo la diversidad de las soluciones y con la posibilidad de que el algoritmo converja de manera temprana. En cambio, si la tensión del proceso es frágil, es decir, que la totalidad de los individuos tendrían la posibilidad de pasar a la siguiente generación, se pierde el objetivo primordial del proceso de selección, que es que aquellos individuos más preparados sean los que vayan estableciendo su material genético en las siguientes generaciones. Por tanto, será necesario realizar un equilibrio correcto entre ambos conceptos para que el proceso de selección sea eficiente y cumpla las expectativas.

Existen diversos mecanismos de selección de los individuos, desde la selección simple hasta los métodos más sofisticados como pueden ser los procesos determinísticos o estocásticos, pero siempre con la premisa de que aquellos individuos mejores y mejor adaptados deberán tener mayor posibilidad de ser copiados en las siguientes poblaciones. Para el problema presentado en este estudio se ha optado por un mecanismo de selección basado en el torneo y se explicará detalladamente en la sección 4.

## Proceso de cruce

Tras haber generado la segunda población que sustituye a la original, se aplica el proceso de cruce. De nuevo se empareja de manera aleatoria a la totalidad de los individuos de esta segunda población, simulando el proceso de generación de hijos por parte de padres y madres. Es necesario añadir, que no es estrictamente imprescindible la necesidad de que todos los padres y madres crucen su material genético, de hecho existe una probabilidad de cruce, de manera que existirán emparejamientos que no llevarán a cabo el cruce, siendo ellos mismos los que pasen a la siguiente generación.

La segunda población tras haberle aplicado el proceso de cruce, tendrá un porcentaje de individuos que habrán sido inalterados, por lo que si se implementa una probabilidad de cruce del 80 %, de un tamaño poblacional de 1000 individuos, 800 de ellos serán resultado de la combinación de sus madres y padres siendo considerados hijos, mientras que 200 serán padres y madres que se han traspasado de manera inalterada, conviviendo así individuos de distintas generaciones en la misma población.

En este proceso, aunque los emparejamientos se realicen de manera aleatoria, en esta ocasión los mejores individuos sí que van a ser seleccionados más veces, puesto que tendrán más copias en la población que los individuos peor adaptados, participando así con mayor presencia en los emparejamientos y aumentando las posibilidades de pasar su material genético.

De nuevo existen multitud de métodos que pueden ser empleados, pero es necesario que estos sean aplicados de una manera adecuado respetando la combinación de material genético de padres y madres, es decir, el proceso de cruce debe ser diseñado de manera que no sólo se haga una combinación del material genético de los padres, sino que esa combinación sea beneficiosa y capaz de generar mejores individuos.

Además, para respetar el tamaño de la población, es necesario que cada proceso de cruce genere dos hijos, de forma que si el primer hijo, al que llamaremos hijo A, representa una serie de características, el segundo hijo, al que denominamos hijo B, representará las contrarias. Por ejemplo, si se determina que el hijo A recibe en las posiciones pares los índices de la madre, y en las posiciones impares las del padre, el hijo B lo recibirá de manera contraria, en las posiciones pares los índices del padre y en las inferiores los de la madre, para que no se generen dos hijos exactamente iguales.

Como en los procesos anteriores, existen diversos métodos de cruce que pueden ser aplicados. En primer lugar, el cruce 1-punto marca una posición  $k$  que determina en qué punto se pasa de obtener genes del padre al de la madre. Por ejemplo, supongamos que  $k = 3$  y disponemos de una cadena de 5 elementos, entonces el hijo A recibirá las tres primeras posiciones del padre y las dos restantes de la madre, mientras que el hijo B todo lo contrario. De igual manera, funciona el cruce 2-puntos donde ahora existen las posiciones  $k_1$  y  $k_2$ , de la posición 1 a  $k_1$  y de la posición  $k_2+1$  hasta el final hereda los genes del padre, y entre  $k_1+1$  hasta  $k_2$  de la madre, es decir, funciona de manera análoga pero con dos pivotes.

Además existen otros métodos que actúan de una manera muy distinta como puede ser el cruce por orden, en el que es importante el orden en el que aparecen los genes para calcular su valor de adecuación. Sin embargo, se ha visto conveniente en nuestro caso utilizar el cruce uniforme, este método genera una máscara de cruce que está compuesta por una cadena que toman los valores cero y uno de manera aleatoria. Esta máscara se genera en cada emparejamiento y se determina que, si en la posición  $i$  aparece un 1 se intercambian los índices entre los padres, mientras que si aparece un 0 los índices se muestran inalterados.

En modelos donde se requería una especial precaución porque no se deben producir individuos que repitan índices en una misma cadena, o que en todas las posiciones de esa cadena no puedan aparecer todos los índices sino solo un conjunto de ellos, es necesario dirigir al proceso de cruce a través de distintas restricciones para que no se produzca esta incidencia de creación de soluciones no factibles para el modelo.

### **Proceso de mutación**

En último lugar, aparece el proceso de mutación, que tiene el objetivo de añadir variabilidad al proceso tal y como ocurre en la evolución natural. Tras la finalización del proceso de cruce, este paso se asegura de que exista al menos una probabilidad de examinar cada punto

distinto del espacio de búsqueda con la posibilidad de introducir características nuevas en los individuos.

Es necesario determinar una probabilidad de mutación, que debe afectar a cada uno de los genes de cada uno de los individuos. Esta probabilidad debe ser pequeña en equiparación con la del proceso de cruce, para no trastocar en gran medida el proceso, de esta manera, todos los genes de todos los individuos tendrán la pequeña posibilidad de mutar, y así cambiar de manera aleatoria su valor.

El proceso actúa de forma simple recorriendo cada gen de cada individuo y con una especie de dado aleatorio se van obteniendo valores en cada posición, si el número obtenido cumple con las condiciones de la mutación, es decir, es menor o igual que a la probabilidad de mutación entonces el valor de dicho gen es modificado aleatoriamente seleccionando un elemento del resto de la población.

Como ocurría en el proceso anterior, existirán modelos que exijan la no repetición de índices en la misma cadena de un individuo o en el cual existan posiciones de esa cadena que no puedan utilizar la totalidad de los valores del alfabeto, por tanto, de nuevo se debería realizar un proceso de mutación de manera guiada impidiendo que ocurran estos inconvenientes durante la realización del algoritmo.

Cabe destacar que, tanto para los procesos de cruce y de selección, en este estudio se ha optado por la utilización de ambos métodos por una parte, con la posibilidad de que puedan repetirse índices dentro de un mismo individuo y por otra parte, con el impedimento de que esto pueda producirse.

Con el objetivo de intentar realizar una comparación entre ambas elecciones para observar que característica produce mejores soluciones.

## 4. Un algoritmo genético para MLP

En este capítulo se va a describir de forma detallada el diseño del algoritmo genético que posteriormente se ha implementado para resolver el MLP.

### 4.1. Desarrollo del algoritmo

El procedimiento del algoritmo es similar al que se explicó en el capítulo anterior, y sigue todos los pasos de un algoritmo genético. Además, en este apartado se va a profundizar en los distintos apartados que componen la creación de este método.

#### Codificación de la soluciones

Es el primer paso del algoritmo, la decisión de como van a ser representadas las distintas soluciones, es de gran importancia definir estas de una manera adecuada. Como fue comentado en el capítulo anterior, se decantó por escoger la opción de codificar las soluciones a través de una cadena de genes a la que se le denomina cromosoma y que cuenta con la misma longitud que el número de instalaciones existentes en el problema.

Cada una de las posiciones del cromosoma, indica el índice al cual la planta posicionada en ese lugar envía el material, es decir, si en la posición 2 de la cadena, se encuentra el índice 18, este hecho nos indica que la planta 2 envía la producción al a ese vértice en el cual se encontrará un cliente o un intermediario, pero no otra instalación.

#### Población Inicial

Es uno de los pasos fundamentales del algoritmo, la creación de una población inicial de manera aleatoria. Supongamos que se dispone de 10 ubicaciones, de las cuales tres de estas actúan como instalaciones y decidir donde deben dirigir el producto es la pieza fundamental del problema, ya que el objetivo principal es minimizar el coste encontrando aquella combinación de plantas y clientes más eficiente.

Cada individuo, va a ser representado por un cromosoma de tres posiciones, donde cada posición va a representar el vértice donde esa planta va a transportar su producto, es decir, la posición uno del individuo muestra donde la planta 1 conduce su material, como es sabido, con anterior este material puede ser conducido a la misma planta, un cliente o un intermediario, y así sucesivamente con el resto de las plantas.

Una de las características del modelo, es que no todos los índices pueden ser implementados, en todas las posiciones de un individuo, esto conlleva la creación de distintos conjuntos, en concreto de tres, donde cada cual representa a una única planta, por tanto, cuando se requiera introducir un índice en una posición determinada de un individuo, con hacer referencia al conjunto adecuado, se evitan problemas de índices en posiciones donde no pueden existir por la definición del problema.



Aquí se muestran los conjuntos utilizados:

Conjunto 1:  $\langle 1,4,5,6,7,\dots,10 \rangle$

Conjunto 2:  $\langle 2,4,5,6,7,\dots,10 \rangle$

Conjunto 3:  $\langle 3,4,5,6,7,\dots,10 \rangle$

Sin embargo, como será comentado más adelante, el problema cuenta con la implementación de dos vertientes diferentes, implicando así la necesidad de usar dos codificaciones diferentes, una en la cual se permitirá la repetición de índices en cualquier posición de la cadena y otra en la cual este hecho no será posible, y por ello, es necesario conocer el engranaje que debe ser utilizado y este es mostrado a continuación.

Como se puede observar, el procedimiento es similar en todas las instalaciones, la planta 1 puede albergar todas las ubicaciones, excepto las otras dos plantas, la planta 2, de igual manera todas las ubicaciones, incluida la suya, exceptuando las dos plantas restantes, y así sucesivamente.

Si no existieran restricciones de repetición, la creación de la población inicial sería un proceso muy simple, se escogería aleatoriamente una muestra de cada uno de los conjuntos y eso comprendería un individuo, sin embargo, la utilización de los conjuntos facilita este proceso, ya que población inicial se genera de la siguiente manera.

Se escoge un elemento aleatorio del conjunto 1 y se evalúa ese índice, si el elemento está comprendido en el resto de los conjuntos como podría ser los índices de 4 a 10, se elimina ese índice de la totalidad de conjuntos restantes, mientras que si el índice seleccionado es el 1, como únicamente se muestra en ese conjunto no es necesario realizar ninguna modificación en el resto de conjuntos.

Así pues, se escoge un elemento, si se encuentra en otro conjunto se elimina del resto, si no existe se mantienen inalterables los conjuntos, y tras cada individuo de la población formado, los conjuntos vuelven a tomar su valor original. De esta manera, aseguramos que el índice del elemento 2 no coincida con el del elemento 1, al no encontrarse en el conjunto y no poder ser seleccionado de manera aleatoria, y así con el resto de elementos que comprenden un individuo.

Nos situamos en el ejemplo de que disponemos de un conjunto de 100 vértices, de los cuales 10 actúan como plantas y los 90 restantes como clientes. Cada solución se representaría a través de una cadena de 10 posiciones, donde la posición uno representa donde sirve la planta 1 su producto, la posición dos donde realiza este proceso la planta 2, y así sucesivamente. Una posible solución sería, el siguiente cromosoma: (25,33,45,4,12,89,74,68,93,10). El índice 25 nos indica que la planta 1 envía su producto al cliente 25 o el índice 4 nos indica que la planta 4 no realiza ningún envío y sirve su producto en la propia planta.

## **Función Objetivo**

Tras la creación de la población inicial, el siguiente paso es el de evaluar cada individuo

de dicha población, para conocer el nivel de adecuación al problema y determinar como de probable es que sea seleccionado en el proceso de selección.

Como el objetivo del problema es el de minimizar costes, aquellos individuos que representen menor valor de función objetivo, serán aquellos con mayores posibilidades de ser escogidos en el proceso de selección. La función objetivo contiene dos partes bien diferenciadas, en la primera se refleja el coste de las plantas y en la segunda el de los clientes.

Dado un individuo de la población, se ha de calcular el coste que representa cada una de las plantas y cada uno de los clientes en función de los índices del individuo. Se observa de una manera a través de un ejemplo. Se imagina que disponemos del siguiente individuo (19,15,25,14,16). La primera parte consiste en calcular los costes derivados de las plantas, por lo que en el siguiente caso, se suma el coste de transportar material del nodo 1 al 19 por el producto del coste de abrir la planta 1, más el coste de transportar del nodo 2 al 15 por el producto de abrir la planta 2.

Para calcular el coste de los clientes se calcula el mínimo coste de los nodos 19,15,25,14 y 16 al nodo 6 mas el producto del coste de operar con el cliente 6, para el cliente 7 de nuevo se calcula el mínimo coste entre los cinco nodos que componen el individuo y se multiplica por el coste de operar con dicho cliente, y así sucesivamente.

Es importante destacar que, cuando una planta no transporta su producto y lo sirve en la propia planta no incurre en ningún coste de transporte pues el coste de transportar nodo 3 al nodo 3 será de cero, ya que no se modifica la ubicación, sin embargo si los clientes se encuentran excesivamente lejos el coste de transporte de estos será mucho mayor que si la planta hubiese decidido transportar el producto. De esta manera, encontraremos entre las soluciones más eficientes individuos que representen instalaciones que han optado por el autoservicio, al no conllevar costes de transporte.

Tras la adjudicación del valor de adecuación a cada individuo de la población, ya se puede proceder al siguiente paso que corresponde el proceso de selección, en código el cálculo del valor de cada individuo no ha tenido gran complejidad, pues con la utilización de grandes matrices y los parámetros adecuados, así como varias sentencias for de una manera rápida y eficiente se le puede atribuir un valor a cada individuo.

## **Proceso de Selección**

El proceso de selección tiene el objetivo de escoger un conjunto de padres y madres que van a formar la población de segunda generación. Los tamaños de estos conjuntos serán la mitad del tamaño de la población, ya que en el posterior proceso de cruce se selecciona un individuo que actúa como madre y otro como padre, surgiendo de él dos individuos hijos.

Se aplica un método de torneo, por el cual se realizarán tantos emparejamientos como individuos existen en la población inicial, y durante estos duelos se medirá el valor de adecuación de cada individuo, de manera que aquellos que representen un valor más competente para nuestro modelo serán seleccionados por delante de su oponente, en nuestro caso tenemos preferencia por aquellos individuos con menor valor de adecuación ya que es necesario minimizar

distancias.

Los individuos que van a participar en los emparejamientos serán seleccionados de forma aleatoria, de manera que cualquier individuo de la población tendrá la posibilidad de competir por su supervivencia y por dejar descendencia en las futuras generaciones. Al realizarse de manera aleatoria los emparejamientos, aquellos individuos con un valor idóneo tendrán la posibilidad de traspasar sus genes en distintos individuos, mientras que aquellos más débiles, si disponen de suerte en el emparejamiento podrán permanecer una generación más.

Nos situamos en un ejemplo de 10 plantas y 90 clientes, y generamos una población inicial de 1000 individuos, tras evaluar cada uno de ellos por la función de evaluación se realizan de manera aleatoria 1000 emparejamientos en el que participarán 2000 individuos, por lo que se asegura con una probabilidad muy alta que todos los individuos participen al menos una vez en un desafío, y además, tengan la posibilidad de participar en multitud de ocasiones. De estos 1000 emparejamientos obtendremos un vencedor por emparejamiento en función de la eficiencia que aportan al modelo cada uno de ellos, de esta forma el tamaño poblacional queda inalterado y obtenemos una población de segunda generación.

De esta manera, se van rellenando los conjuntos de padres y madres, como se ha comentado estos deberán comprender un tamaño que se adecue a la mitad del tamaño poblacional, si de cada enfrentamiento surge únicamente un vencedor, y se necesitan tantos padres y madres que sumen en conjunto el total de individuos, se deberán realizar tantos enfrentamientos como individuos existen en la población actual.

Con este proceso se consigue que casi la totalidad de los individuos participen en al menos un enfrentamiento del torneo o en multitud de ocasiones, asegurando así que los mejores individuos tengan mayor probabilidad de ser escogidos para formar la siguiente generación, además aquellos individuos mejor capacitados tendrán la posibilidad de registrar varias copias en los distintos conjuntos de padres y madres.

Sin embargo, como ocurre en los procesos de selección natural, aquellos individuos menos adecuados a las condiciones del medio tendrán dificultades para pasar la criba del torneo y en ocasiones poder llegar a desaparecer al no conseguir registrar ninguna copia en alguno de los conjuntos.

El objetivo principal de este proceso es conformar ambos grupos a través de una correcta selección de los individuos, que posteriormente ambos conjuntos de individuos son tratados en los siguientes procesos de cruce y selección, produciendo así el cambio generacional sin sufrir alteraciones en los tamaños de la población.

## **Proceso de Cruce**

Tras la selección de los individuos que van actuar como padres y madres, es el turno del proceso de cruce, este simula la combinación de características en la creación de individuos. Como se ha comentado anteriormente, este modelo presenta dos variaciones en las cuales intervienen los procesos de cruce y mutación al permitir la repetición o no.

El objetivo es que la población de segunda generación, al menos un 20 % de los individuos se muestren inalterados, mientras que el 80 % restante sean formados a través de la combinación de los conjuntos de padres y madres seleccionados. Por tanto, se ha de implementar un probabilidad de mutación de 0.8, es decir, cada combinación de padres y madres se producirá 8 de cada 10 veces, mientras que en las 2 restantes ambos individuos de primera generación, serán copiados de manera similar en la población de segunda generación.

En la formación de los individuos, la selección de las partes que el primer hijo recibe de la madre y de las partes que el primer hijo hereda del padre no ha seguido un patrón fijo y ha sido decidido de manera aleatoria a través de una máscara de cruce, así como para el segundo hijo. Esta máscara de cruce cuenta con un tamaño similar al de los individuos, es decir, cinco posiciones, y comprende los valores binarios 1 y 0.

Si la posición refleja el valor 1, quiere decir que el primer hijo hereda la posición de la madre y el segundo hijo el del padre, de esta forma, si la máscara muestra en la primera posición un 0, el índice 1 del padre será transferido al primer hijo y el índice 1 de la madre será copiado en el segundo hijo.

Como la máscara de cruce muestra un tamaño de cinco índices, de los cuales cada uno de ellos solo puede tomar dos valores, al ser de carácter binario, la máscara puede mostrar 32 combinaciones diferentes (dos elevado a cinco) de como un individuo puede ser formado a través de sus creadores. Para entender mejor este proceso, es mejor apoyarse en un ejemplo.

Padre: (15,21,12,4,19)  
Madre: (18,20,11,9,5)  
Máscara: (1,0,0,1,0)

Ahora existen dos posibilidades, se lanza un dado que contiene diez posibles resultados, de 1 a 10, si el dado muestra el valor 9 o 10, los individuos padre y madre serán copiados en la población de segunda generación de manera idéntica olvidando la máscara de cruce, si el dado muestra alguno de los valores de 1 a 8, los individuos pasarán por la máscara de cruce.

El primer hijo al que se puede nombrar como hijo A, hereda las posiciones 1 y 4 de la madre, y las posiciones 2,3 y 5 del padre, el segundo hijo, al que se puede denominar como hijo B, transfiere las posiciones 1 y 4 del padre, y las posiciones 2,3 y 5 de la madre, es decir, de manera contraria siendo el resultado final el siguiente.

Hijo A: (18,21,12,8,19)  
Hijo B: (15,20,11,4,5)

En los modelos donde se implemente el cruce con repetición, el proceso finaliza aquí, ya que no es necesario evaluar los individuos por si muestran alguna malformación en la repetición de índices en distintas posiciones. Sin embargo, en el proceso de cruce sin repetición, sí que es obligatoria evaluar estos individuos para asegurar la correcta formación de estos.

Esta evaluación se hace comparando posición a posición en la combinación de los individuos de tal manera que en ocasiones no se seguirán las instrucciones de la máscara de cruce

para poder mantener la restricción de no repetición. Por tanto, se evalúa la posición 2 con la 1, si no existe problema de repetición se sigue la indicación de la máscara de cruce, si existe problema el índice del individuo elige que valor escoger. De nuevo, es necesario la utilización de un ejemplo para entender mejor el procedimiento.

Padre: (15,18,12,4,19)

Madre: (18,15,11,9,5)

Máscara: (1,0,0,1,0)

El resultado debería ser el siguiente: hijo A (18,18,12,9,19) hijo B (15,15,11,4,5). Por lo tanto, cuando se haga la comprobación entre cada posición, en el turno de la segunda posición comprobará que es similar a la primera por tanto aunque el hijo A en la segunda posición deba mostrar el valor 18, porque la máscara de cruce nos lo dicta así, el proceso está realizando de tal forma que en estas situaciones excepcionales se escoja entre el valor 2 del padre o de la madre según mejor convenga en cada situación.

El resultado final sería el siguiente: hijo A (18,15,12,9,19) hijo B (15,18,11,4,5). En este proceso no se encuentran problemas de índices en posiciones donde no corresponden, ya que se modifican los índices entre posición y por tanto, si el algoritmo se inicia correctamente en la creación de la población inicial, nunca va a existir un índice 1 que no sea en otra posición que la 1 y así con los cinco primeros índices.

En este proceso se ha encontrado un inconveniente que ocurre en un porcentaje muy pequeño de veces y con mayor frecuencia cuando se utilizan tamaños poblacionales muy elevados. Se supone un gen padre (23,10,12,16,11) y un gen madre (11,15,22,4,12), con una máscara de cruce (1,0,0,1,0), obteniendo los siguientes correspondientes hijos: hijo A (11,10,12,4,11) e hijo B (23,15,22,16,12). Nos encontramos con la mala fortuna de que la última posición del hijo A es indiferente el índice que escoja de los padres (11 o 12) ya que ambos ya han sido implementados en el individuo en las posiciones 1 y 3.

Cuando ocurre esta incidencia no se modifica la malformación de un hijo ya que eso pertenece al proceso de mutación, simplemente se deja en la población con la seguridad de que en generaciones futuras acabará desapareciendo al no ser una solución factible del modelo.

## Proceso de Mutación

En último lugar se produce el proceso de mutación con el objetivo de añadir variabilidad al proceso. Cualquier gen de cualquier individuo contará con una probabilidad de mutación, esta es notablemente inferior a la probabilidad de cruce siendo únicamente del 0.1.

Los conjuntos utilizados para la creación de la población inicial, también son utilizados en este proceso para prevenir errores de índices en posiciones que no correspondan. Así, el proceso de mutación actúa en todo momento con el lanzamiento constante de dados por cada gen de cada individuo, 1 de cada 10 ocasiones el dado indicará que es momento de producir una mutación.

En ese instante, se obtiene que posición es la que ha sido seleccionada para producirse en

ella la mutación, entonces se selecciona el conjunto de esa posición y se extrae de manera aleatoria una muestra de ese conjunto.

Como con el proceso de cruce, el proceso de mutación, también forma parte de una de las dos variantes de los modelos a implementar, la variante de la población sin importar la repetición, el proceso finaliza aquí, pues los individuos no son evaluados y simplemente se cambia una posición de cada diez por una muestra aleatoria.

Sin embargo, para el modelo que incluye la restricción de no repetición cada posición que ha sido mutada, deberá posteriormente ser evaluada para observar si coincide o no con cualquier otro índice del individuo, en caso de que no coincida el individuo habrá sido mutado de forma satisfactoria.

En cambio, si el índice coincide con cualquier otra posición del individuo, la muestra obtenida no será válida y se deberá escoger otra, para de nuevo volver a ser evaluada y comprobar que el individuo muestra un aspecto adecuado a las características del modelo, de esta forma hasta que un individuo no muestre repetición entre alguno de sus índices el proceso de mutación no habrá finalizado.

Todos estos pasos que componen el algoritmo son implementados en única iteración de este. El algoritmo ha sido probado con distintos tamaños de la población, durante distintas iteraciones y en diferentes ocasiones. Las explicaciones del porqué se seleccionan el número de iteraciones a implementar o el tamaño de la población, serán explicados en la siguiente sección.

La sección de resultados mostrará los tiempos de computación de cada modelo, el número de iteraciones necesarias para encontrar el óptimo o la comparativa entre los distintos tamaños poblacionales, así como una gran serie de conclusiones que se han podido extraer de la realización de este estudio que serán mostradas en el último capítulo.

## 4.2. Estudio computacional

En este apartado se muestran los datos que se han utilizado en el algoritmo genético, así como, las distintas variantes del algoritmo implementado o los diferentes tamaños de la población implementados.

Los datos han sido obtenidos de una librería creada por J.E. Beasley, dicha librería contiene una gran colección de conjuntos de datos que pueden ser utilizados en pruebas para la resolución de problemas de investigación operativa.

El conjunto de datos seleccionado dispone de 25 nodos que actúan como ubicaciones, esos nodos van actuar en distinta medida entre los tres tipos de formas que pueden adoptar. Los cinco primeros nodos van a ser marcados como plantas, los dieciséis restantes como clientes, y los cuatro últimos como restos.

La base de datos únicamente muestra los costes entre los distintos nodos, es decir, el coste de transportar unidades del nodo  $i$  al nodo  $j$ , las coordenadas de cada ubicación son desconocidas, por lo que no se dispone de las ubicaciones exactas de cada punto, impidiendo dar un enfoque visual al problema.

El objetivo del modelo es disponiendo solamente del coste de transportar unidades entre los distintos nodos, determinar aquella combinación que deben formar las cinco plantas sobre a quién servir su producto, para conseguir así un coste total mínimo y un nivel de actuación eficiente.

El algoritmo tiene un tamaño de unas 700 líneas de código que se mostrarán en su totalidad en la sección denominada anexo. La población inicial introducida será creada de manera aleatoria y comprenderá distintos tamaños poblacionales, para sacar conclusiones sobre si influye el tamaño de la población para encontrar una solución de manera más rápida.

El método va a ser estudiado en dos supuestos diferentes, tras la creación de una población inicial aleatoria, la cual no va a permitir la repetición de ninguno de los índices de cada individuo, posteriormente sí que se va producir la posibilidad de que ocurra la repetición o no en los procesos de cruce y selección.

De esta manera, van a coexistir dos métodos de resolución totalmente diferentes uno donde el conjunto final de soluciones esté comprendido por individuos que no representan genes repetidos, mientras que el otro mostrará un pequeño porcentaje de individuos con las mismas características, ya que al ser un proceso aleatorio si no se restringe la repetición es muy probable que ocurran casos de similitud.

Esta acción se realiza con el objetivo de estudiar si el hecho de no permitir la repetición dentro de un mismo individuo influye de manera eficiente en el algoritmo, o si simplemente aunque esta restricción no sea utilizada, las soluciones que el método proporcionan ya descartan de por sí los individuos con genes repetidos al no ser eficientes.

Entre las distintas variables que se han utilizado, se dispone de costes tanto para abrir una

planta como para mantener operativo un cliente, así como una matriz de costes que relaciona los 25 nodos del problema. A continuación, se muestra cada uno de ellos:

Costes por Planta					
Planta	1	2	3	4	5
Coste	24	25	24	23	24

El coste por planta ha sido obtenido de manera aleatoria entre los parámetros 22 y 25 unidades de coste, una vez se establecen, son inalterados a lo largo del estudio.

Costes por Cliente																
Cliente	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Coste	14	14	14	15	13	12	14	13	13	15	12	12	13	14	14	13

El coste por cliente ha sido obtenido de manera aleatoria entre los parámetros 12 y 15 unidades de coste, una vez se establecen, son inalterados a lo largo del estudio.

La matriz de costes de tamaño 25x25 ha sido obtenida de la base de datos de la librería OR-Library creada por J.E. Beasley, específicamente del apartado de Location: p-hub, en su cuarto archivo de datos phub4.txt. A continuación, se muestra un extracto de este, de las cinco primeras filas y las quince primeras columnas:

Costes de transporte entre Clientes y Plantas															
Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.000	0.576	0.946	0.597	0.373	0.559	0.709	1.208	0.603	0.695	0.680	1.936	0.332	0.592	0.908
2	0.576	0.000	0.369	0.613	0.429	0.312	1.196	1.502	0.405	1.241	0.960	2.318	0.786	0.949	0.938
3	0.946	0.369	0.000	0.858	0.749	0.556	1.541	1.764	0.621	1.603	1.250	2.600	1.137	1.266	1.124
4	0.597	0.613	0.858	0.000	0.255	0.311	0.790	0.907	0.237	0.932	0.406	1.741	0.485	1.186	0.345
5	0.373	0.429	0.741	0.255	0.000	0.225	0.794	1.080	0.238	0.879	0.533	1.889	0.402	0.947	0.598

El modelo ha sido estudiado con cuatro tamaños poblacionales (50, 100, 150, 200) y durante 50 iteraciones, además es estudiado el tiempo computacional de cada variante y se realizan tres pruebas distintas entre cada una de ellas, ya que los algoritmos cuentan con una gran parte de aleatoriedad y así se evita que quepa la posibilidad de que la mejor versión dé la peor solución.

Existen dos versiones del algoritmo bien diferenciadas que han sido comentadas en la sección anterior y hacen referencia a la posibilidad de permitir o no la repetición de índices en posiciones diferentes dentro del mismo individuo.

Todas las variables expuestas son aplicadas a cada modelo en cada versión y en los cuatro tamaños de la población distintos, por lo que se puede entender, que la totalidad de los modelos utilizan de los 25 nodos disponibles, 5 como plantas, 16 como clientes y 4 como ubicaciones restantes.



### 4.3. Análisis de resultados

En este apartado se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo genético desarrollado en este estudio, así como las deducciones que se pueden obtener al realizar un análisis de estos.

A continuación, se muestran los distintos resultados:

Resultados del estudio					
Tamaño	Repetición	Prueba	Valor	Iteración	Tiempo
50	Sí	1	108.1264	33	9.22
50	Sí	2	115.6047	4	9.11
50	Sí	3	125.1214	26	8.94
50	No	1	108.2384	34	12.55
50	No	2	109.6229	3	12.40
50	No	3	113.4109	44	13.23
100	Sí	1	113.7693	50	13.20
100	Sí	2	112.3553	4	10.23
100	Sí	3	110.0429	39	12.11
100	No	1	112.1225	19	11.15
100	No	2	114.2527	37	15.05
100	No	3	108.6116	38	11.07
150	Sí	1	109.5050	5	9.67
150	Sí	2	111.3846	7	9.86
150	Sí	3	113.8128	3	11.75
150	No	1	115.4097	13	11.53
150	No	2	112.8156	37	11.56
150	No	3	114.2597	4	11.00
200	Sí	1	109.9185	13	13.33
200	Sí	2	112.8317	38	14.83
200	Sí	3	111.1129	40	14.64
200	No	1	109.3456	27	15.23
200	No	2	112.1994	14	16.10
200	No	3	107.1431	12	13.55

Se han utilizado cuatro tamaños de la población distintos, cada uno en su variación de permitir o no la repetición de índices por parte de un individuo, obteniendo ocho modelos distintos, cada uno de ellos ejecutado tres veces, obteniendo 24 ejecuciones cuyos resultados vamos a analizar en esta sección.

Las dos primeras columnas muestran simplemente el número de individuos evaluado durante cada iteración del algoritmo y si se trata de la versión con repetición o sin ella, la tercera columna simplemente enumera el número del experimento de cada modelo distinto.

La columna que representa el valor de la función objetivo, muestra la del mejor individuo encontrado en cada ejecución del correspondiente algoritmo y en la columna siguiente se indica el número de iteración en la que se ha encontrado este individuo. La última columna indica el tiempo total de ejecución hasta completar las 50 iteraciones. Por ejemplo, la primera

línea indica que en la primera ejecución del algoritmo que sí permite repeticiones, usando un tamaño de la población de 50 individuos, el mejor, que proporciona un valor en la función objetivo de 108.12, ha sido encontrado en la iteración 33 y el tiempo total de ejecución hasta completar las 50 iteraciones ha sido de 9.22 segundos.

Resultados medios del estudio			
Tamaño	Repetición	Valor	Tiempo
50	Sí	116.2841	9.09
50	No	110.4240	12.72
100	Sí	112.0558	11.84
100	No	111.6622	12.42
150	Sí	111.5674	10.42
150	No	114.1616	11.36
200	Sí	111.2872	14.26
200	No	109.5627	14.96

Otro factor importante que servirá de ayuda a la hora de extraer conclusiones sobre el funcionamiento del modelo, es la obtención de los valores medios tanto del coste mínimo, como del tiempo de computación de cada uno de los ocho modelos distintos.

Mejores resultados del estudio			
Tamaño	Repetición	Valor	Tiempo
50	Sí	108.1264	8.94
50	No	108.2384	12.40
100	Sí	110.0429	10.23
100	No	108.6116	11.07
150	Sí	109.5050	9.67
150	No	112.8156	11.00
200	Sí	109.5155	13.33
200	No	107.1431	13.55

Así como los mejores resultados de cada modelo, estas dos tablas se utilizan para eliminar la parte de aleatoriedad de los algoritmos, ya que si se ejecuta únicamente una vez cada modelo, cabría la posibilidad de que la mejor versión otorgue una solución peor o al contrario.

Resultados del total de soluciones por modelo		
Tamaño	Valor	Tiempo
2500	112.3553	4.97
5000	111.7150	5.31
7500	109.8018	5.86
10000	108.7675	6.77

Además, las distintas versiones del algoritmo se van a comparar con búsquedas aleatorias puras. Así pues, la versión que utiliza un tamaño de población de 50 individuos, con o sin repetición de índices, que es ejecutado durante 50 iteraciones se va a comparar con el resultado de generar aleatoriamente un total de 2500 soluciones y quedarse con la mejor. En la tabla se muestra el resultado de las 4 búsquedas aleatorias llevadas a cabo.

Este proyecto tenía la intención de mostrar que un algoritmo genético aplicado a un problema de localización de plantas con ubicaciones desconocidas contaba con la posibilidad de señalar buenos resultados y funcionar correctamente, habiendo conseguido el objetivo del trabajo.

En primer lugar, una de las premisas principales del proyecto, era mostrar si era estrictamente necesario restringir la repetición o no de índices dentro de cada individuo de una población.

Observando las tablas de resultados medios y de mejores resultados, en referencia a los tiempos de computación de cada variación distinta, se observa una gran diferencia entre estos. La totalidad de las variaciones donde se obliga a restringir la repetición y esta no es permitida, tienen un tiempo de computación mayor, tanto en tiempos medios como en tiempos mejores.

Esto es debido a que al existir aproximadamente un 25 % de individuos que tienen repeticiones, los métodos de la no repetición tienen que corregir esta incidencia y supone un gasto más en tiempo en comparación con los modelos de repetición.

Además, el código donde se permite la repetición es unas 100 líneas más corto por iteración, hecho que también se traduce en un gasto menor del tiempo de computación en comparación con los modelos donde no se permite la repetición.

En cuanto a los valores obtenidos de coste mínimo, excepto en el caso del tamaño de la población de 150, tanto en las tablas de resultados medios como en las de resultados mejores, los modelos que no permiten la repetición, obtienen mejores resultados que los que sí que la permiten.

Esto se debe, a que normalmente aquellos individuos que no presentan genes repetidos en su cromosoma, suelen mostrar valores de adecuación mejores que a los que sí que les ocurre esta incidencia. Por tanto, si un 25 % de la población presenta peores resultados en los modelos de repetición, existen mayores probabilidades de obtener mejores resultados en aquellos modelos que restrinjan este hecho.

Otro de los hechos relevantes a destacar, es el de la aleatoriedad, como se muestra en la excepción del caso del tamaño de 150 de la población, al final un algoritmo cuenta con un componente aleatorio grande, y en ocasiones el azar da resultados poco esperados como que una población que evalúa 2500 o 5000 individuos más que otra con el mismo modelo, como es el caso de la variación 150 con repetición, no pueda obtener un valor de adecuación mejor que las otras, como es observable en la tabla de mejores resultados del estudio.

En cuanto a qué tamaño de la población sería el idóneo para trabajar con este algoritmo, es necesario observar las tablas de resultados medios y de mejores resultados del estudio, donde se muestran que tamaños de la población de 50 o 100 individuos señalan valores casi similares al caso de 200 individuos con tiempos de computación notablemente inferiores.

Además, en la tabla de resultados medios se observa como únicamente el caso de no repetición con un tamaño de la población de 200 individuos muestra un valor inferior a 110

unidades de coste, pero a su vez, es el único modelo que roza los 15 segundos en tiempo de computación. Mientras que en la tabla de mejores resultados del estudio, este caso también es el que mejor valor representa de las 24 pruebas realizadas con un valor cercano a 107 unidades de coste. Por tanto no existe un tamaño óptimo y depende de la persona decisora decidir que características prefiere que sean más eficientes si el tiempo o los resultados.

En último lugar, la última tabla sirve de ayuda para demostrar como el algoritmo funciona correctamente y la importancia que este representa. El procedimiento ha sido el de generar tantos individuos de manera aleatoria como han sido evaluados en cada variación del tamaño poblacional y sin aplicarle el algoritmo genético y sus correspondientes procesos de cruce y/o mutación determinar el mejor.

Se observa como cuanto mayor es el número de individuos evaluados, mejor son los resultados obtenidos en términos de valor de coste y a su vez, mayores son los tiempos de computación. Además, en comparación con la tabla de mejores resultados del estudio, estos no son comparables, obteniendo resultados notablemente mejores con la utilización del algoritmo genético, demostrando la eficiencia del algoritmo desarrollado.

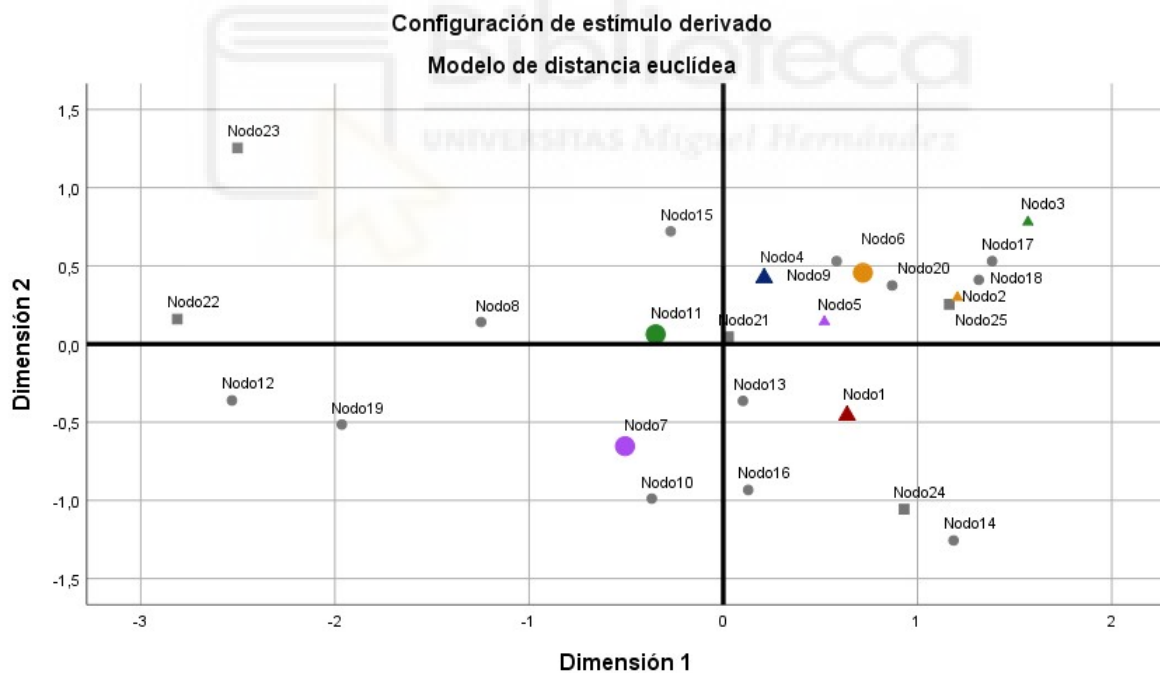


Figura 8: Disposición de los nodos correspondiente a la solución de la prueba 1 del modelo con repetición con un tamaño poblacional de 50 individuos. Fuente: Elaboración propia

Con la ayuda del programa estadístico SPSS de IBM, se ha conseguido situar a la totalidad de los nodos que participan en el modelo a través del escalamiento multidimensional, una técnica de análisis de variables cualitativas que analiza matrices cuadradas de similitudes o

disimilitudes. En este proyecto, se trabaja con una matriz de costes que de igual manera está relacionada con la cercanía entre los distintos nodos, por lo que se puede utilizar como una matriz de distancias, es decir, una matriz de disimilitudes.

De esta forma, se consigue conocer la ubicación exacta de cada una de las ubicaciones que participan en el modelo y se dispone de un enfoque visual que sirve de ayuda para entender porque una solución representada por un individuo es mejor que otras.

La Figura 8 representa la disposición de los nodos de la primera línea de la tabla de resultados del estudio que representa un valor en la función objetivo de 108.12. Las cinco ubicaciones que aumentan de tamaño en comparación con el resto, son aquellas por las cuales las cinco plantas distribuyen su producto. Si una de las plantas es la que está aumentada de tamaño como ocurre con el nodo 1 o el nodo 4, es porque sirven su producto en su misma ubicación. Además, los colores ayudan a identificar que nodo activado corresponde a que planta, sobretodo en los casos en los que una planta envía su producto a un cliente o intermediario.

En el caso del nodo 2, representado con un tono amarillento, se muestra claramente como se relaciona con el cliente 20, el nodo 3, con un tono verdoso, con el cliente 11 y el nodo 5, con un tono violeta, con el cliente 7. En último lugar, como se ha hecho referencia en la totalidad del trabajo las ubicaciones representadas con triángulos hacen referencia a plantas, las representadas con círculos a los clientes y las dibujadas mediante cuadrados a lugares que pueden participar como intermediarios.

Esta solución es representada a través de la siguiente cadena (1,20,11,4,7) y es una de las mejores soluciones que se han obtenido a lo largo de la obtención de resultados por parte del algoritmo. Una de las razones es, porque muestra un ecosistema muy equilibrado al repartir de una manera muy simétrica cada uno de los 16 clientes. Cabe recordar, que cada cliente acude a aquella ubicación activada en función de la cercanía, por lo que el cliente 7 debería recibir a los clientes que se encuentran en el sector inferior izquierdo, el nodo 1 los del sector inferior derecho, y el resto de nodos se encuentran con el grueso mayor de clientes y cada uno se ocupa de un número muy similar al del resto.

## 5. Conclusiones

En este capítulo, se realiza un breve resumen de las aportaciones del trabajo, haciendo énfasis en aquellos aspectos que han resultado más interesantes en el estudio realizado. El objetivo de este proyecto, era el de mostrar como un algoritmo genético podía ser capaz de al implementarse en un problema de localización de plantas móviles proporcionar buenos resultados y funcionar correctamente.

Una de las condiciones principales del modelo que debían ser probadas, era la de mostrar si al restringir la repetición o no de índices dentro de la cadena de cada individuo, el método arrojaría mejores resultados y como influiría esto en el tiempo de computación. Esta demostración fue probada, ya que aquellas pruebas realizadas con modelos donde la repetición no era posible de realizar obtenía unos tiempos de computación mayores a aquellos modelos en los cuales este hecho se erradicaba.

Esto se debe a que aquellos modelos que prohíben la repetición de índices cuentan con un tamaño de código mayor al tener que evaluar que este hecho no ocurra en ningún individuo y corregirlo así es. En cuanto a los resultados obtenidos de valores de la función objetivo en cada prueba, los modelos que no permiten la repetición, sí que cuentan con mejores resultados que los que sí la permiten.

El suceso de que los individuos sin repetición muestren mejores valores que los individuos con repetición, se debe a que cuantas más vías de acceso a las instalaciones existan, más facilidades se les das a los clientes para encontrar una ruta más eficiente para ellos, en cambio, si solo se permitiera acudir a 16 clientes a dos o tres plantas es seguro que el valor de adecuación sería mayor en términos de coste.

Otro de los hechos relevantes a destacar es el del gran componente aleatorio que conlleva un algoritmo de este tipo, lo que lleva a que a veces se obtengan resultados no esperados como que el evaluar más individuos de golpe proporcione resultados peores en cuanto a costes mínimo, por ello la necesidad de realizar tres pruebas por modelo ha ayudado a evitar este problema.

El número de iteraciones es otro de los temas a analizar, este tipo de algoritmos suelen utilizar 50 o 100 iteraciones, sin embargo no ha sido necesaria la implementación de tantas porque el algoritmo se encuentra en dificultades de poder mejorar su valor cuando ya han corrido varias iteraciones, ocurriendo en ocasiones que el método no puede mejorar después de las primeras.

Por ello, se ha optado por la vía de utilización de únicamente 50 iteraciones, ya que en escasas ocasiones se encuentran mejores resultados en las últimas iteraciones, y con este número de evaluaciones se consigue un tiempo de computación constante durante los 24 experimentos donde se mantiene un tiempo de computación constante.

En referencia al tamaño de la población, no existe un tamaño óptimo, sí que es cierto que entre la restricción de la repetición o no, se ha de implementar la repetición, porque maximiza las posibilidades de obtener mejores resultados que es el objetivo final del proyecto. Sin embar-

go, en el caso del tamaño de la población a determinar, existen variaciones muy pequeñas en cuantos a los valores de coste y variaciones más grande en cuanto a los tiempo de computación.

Por tanto, recae sobre el decisor hacer uso de su poder y determinar que es preferible en su caso, si obtener resultados levemente mejores, tiempos notablemente inferiores, o lo que suele ser más habitual, realizar una combinación de ambos balanceando de manera correcta los parámetros.



## Referencias

- [1] J. PUERTO y M. MUÑOZ, E. CONDE, E. CARRIZOSA, *Lectura en Teorías de Localización*, Universidad de Sevilla, 1996.
- [2] M.J. CANÓS y M. MOCHOLÍ, *Un algoritmo para el cálculo del conjunto dominante finito del problema generalizado de la  $p$ -centdiana*, Universidad de Valencia, 2005.
- [3] M. TAGHAVI y H. SAHVANDI, *El problema  $p$ -centro bajo incertidumbre*, Universidad Tecnológica de Irán, 2012.
- [4] M.C. MOLERO y R. BLANQUERO, E. CARRIZOSA, *Problemas de Localización Competitiva. El modelo de Huff*, Universidad de Sevilla, 2016.
- [5] R. HALPER, S. RAGHAVAN y M. SAHIN, *Búsqueda local de heurísticos para el problema de localización de plantas móvil*, Elsevier, 2014.
- [6] S. RAGHAVAN, S. SALMAN y M. SAHIN, *El problema de localización de plantas móvil con capacidades*, Elsevier, 2018.
- [7] A. VIDAL y M.L. CARPENTE, B. CASAS, *Algoritmos heurísticos en optimización*, Universidad de Santiago de Compostela, 2013.
- [8] A.C. RIOJAS *Conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las  $N$ -reinas*, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2005.
- [9] F. HERRERA *Introducción a los Algoritmos Metaheurísticos*, Universidad de Granada, 2009.
- [10] F. HERRERA *Algoritmos Bioinspirados*, Universidad de Granada, 2013.
- [11] R. MARTÍ Y M. LAGUNA *Scatter search: Diseño básico y estrategias avanzadas*, Universidad de Valencia, 2003.
- [12] J.E. BEASLEY *OR-Library: Location  $p$ -hub*, Operational Research Society, 2018.