

**UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE**

**Programa de Doctorado en Estadística, Optimización  
y Matemática Aplicada**

**TESIS DOCTORAL**



**Problemas de localización  
de instalaciones no fiables**

Autor:

**José Luis Sainz-Pardo Auñón**

Directora:

**Mercedes Landete Ruiz**

Codirector:

**Juan Francisco Monge Ivars**

**2016**



UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE

Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y

Matemática Aplicada

PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE  
INSTALACIONES NO FIABLES

José Luis Sainz-Pardo Auñón

Memoria presentada para optar al grado de  
Doctor por la Universidad Miguel Hernández,  
realizada bajo la dirección de Mercedes Landete Ruiz  
y Juan Francisco Monge Ivars



*Dedicado a mi madre,  
a Juani y a mis hijos  
Javier y Pablo*





---

# Tesis por compendio de publicaciones

---

La presente tesis se ha elaborado siguiendo la normativa de Estudios de Doctorado de la Universidad Miguel Hernández de Elche (aprobada el 20 de abril de 2.016) para la presentación de tesis doctorales en la modalidad de compendio por publicaciones. Las referencias completas de los artículos que constituyen el cuerpo de la tesis son:

- *J. Alcaraz, M. Landete, J. F. Monge, and J. L. Sainz-Pardo. (2015) Strengthening the reliability Fixed-charge location model using clique constraints. Computers & Operations Research, 60(1):14-26*
- *J. L. Sainz-Pardo, J. Alcaraz, M. Landete, and J. F. Monge. (2016) On relaxing the integrality of the allocation variables of the reliability fixed-charge location problem. Journal of Global Optimization, Doi: 10.1007/s10898-016-0439-z*
- *J. L. Sainz-Pardo, M. Albareda-Sambola, M. Landete, and J. F. Monge. (2016) Introducing capacities in the location of unreliable facilities. Optimization Online, No. 5451, Vol. 05*





## AUTORIZACIÓN DE PRESENTACIÓN DE TESIS DOCTORAL

MERCEDES LANDETE RUIZ, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche,

JUAN FRANCISCO MONGE IVARS, Profesor Contratado doctor del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche

HACEMOS CONSTAR QUE

autorizamos a D. José Luis Sainz Pardo Auñón a presentar la memoria titulada **Problemas de localización de instalaciones no fiables** en la modalidad de compendio de publicaciones para optar al grado de doctor.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmamos el presente certificado.

Elche, 16 de junio de 2016

Fdo.: Mercedes Landete Ruiz

Fdo.: Juan Francisco Monge Ivars



Dr. Joaquín Sánchez Soriano, Coordinador del Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada de la Universidad Miguel Hernández de Eche por Resolución Rectoral 2063/13 de 20 de noviembre de 2013,

Hace constar que,

El trabajo realizado por D. José Luis Sainz-pardo Auñón titulado “**Problemas de localización de instalaciones no fiables**”, ha sido dirigido por la Dra. Dña. Mercedes Landete Ruiz y el Dr. D. Juan Francisco Monge Ivars dentro del Programa de Doctorado en Estadística, Optimización y Matemática Aplicada, y se encuentra en condiciones de ser leído y defendido como Tesis Doctoral ante el correspondiente tribunal en la Universidad Miguel Hernández de Elche.

Lo firmo para los efectos oportunos.

Elche a 15 de junio de 2016.

Fdo: Joaquín Sánchez Soriano  
Coordinador del Programa de Doctorado en  
Estadística, Optimización y Matemática Aplicada





---

# Agradecimientos

---

Son muchas, bastantes, las personas a las que estoy agradecido, no ya solo por el apoyo durante la realización de esta tesis, sino por su ayuda, influencia y estímulo durante toda mi carrera universitaria. Así pues, en primer lugar estoy agradecido a todos los profesores del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche que me impartieron clase alguna vez, aun cuando ello sucediese hace muchos años, cuando ni siquiera la UMH existía, o recientemente, en la etapa en la que cursaba el máster de investigación. Ha sido una alegría reencontrarme con todos ellos y no solo agradezco el apoyo, y el conocimiento que me han transmitido, sino también el que la mayoría hayan constituido un modelo como profesores y como investigadores. Para no olvidar a nadie, pocos agradecimientos voy a personalizar, pero injusto sería no nombrar a Marc Almiñana, por su incondicional y temprano apoyo, su ejemplo y su entereza.

A los profesores Mercedes Landete, Juan F. Monge y Javier Alcaraz agradezco su tutelaje, y su paciencia ante la adversidad. Agradezco también a Mercedes su guía e incondicional apoyo, así como el que me haya asignado gran cantidad de uno de los recursos más escasos que poseemos: el tiempo. Juanfran, además, me ha premiado con su amistad.

Cómo no, agradecer a los profesores que me acogieron en estancia durante mi período doctoral: a la profesora de la Universitat Politècnica de Catalunya María Albareda-Sambola por su acogida tanto en las actividades investigadores así como en las de tiempo libre, y al catedrático de la Universidad de Murcia, Alfredo Marín, por su incansable y contagioso sentido del humor.

En mi caso, tengo que decir que el período doctoral no ha constituido un período repleto de penalidades y sacrificios, sino todo lo contrario, de alegrías, disfrutes y satisfacciones. No obstante, ha precisado mucho tiempo y dedicación, tiempo que he arañado de la dedicación a la familia, quien además ha tenido que padecer los pocos pero inevitables momentos de tensión. Es por ello que mis mayores agradecimientos van dirigidos a Juani y a mis dos hijos Javier y Pablo.



---

# Índice general

---

<b>Summary</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Atributos de los problemas de localización . . . . .	6
1.2. El problema de localización de instalaciones no fiables . . . . .	7
1.3. Relación entre los distintos artículos constitutivos de la tesis . . . . .	12
<b>2. Resumen de las aportaciones</b>	<b>15</b>
2.1. Reforzando la formulación del modelo RFLP . . . . .	15
2.2. Relajación lineal de las variables de asignación del modelo RFLP . . . . .	20
2.3. Introducción de capacidades en el modelo RFLP . . . . .	22
<b>3. Desarrollos futuros y conclusiones</b>	<b>29</b>
3.1. Análisis de la frontera Pareto eficiente del RFLP . . . . .	29
3.2. Conclusiones . . . . .	35
<b>4. Separatas</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>





---

# Summary

---

The aim of facility location problems consists on deciding where to optimally locate several plants or facilities (like industries, warehouses, schools, hospitals, distribution centers, datawarehouse, etc.) as well as how to optimally assign the clients to these facilities satisfying their demand. These decisions are usually determined considering the opening costs, and the costs of serving the clients.

In the literature, it is frequently assumed that the open facilities are always available. Nevertheless, in practice some facilities can interrupt their service and become unavailable. A lot of location problems of the most recent literature include the failing distribution of the plants in their models, and this type of problems are known like reliability facility location problems. The three contributions collected in the present dissertation are referred to reliability facility location problems.

The objective of this dissertation is to analyze the properties of the so called Reliability Fixed-Charge Location Problem.

- **Paper 1.-** In this first paper, we discuss the previously known formulation of the Reliability Fixed-Charge Location Problem, in which the number of open facilities has to be decided and depends on the opening costs and it is assumed that some of the facilities, called failable, may fail with a given probability, which is identical for all of them. We reformulate the original mathematical programming model as a set packing problem and we study some polyhedral properties of this type of problems. Then, conditions for optimal solutions are introduced. We propose an improved

compact formulation for the problem and we check the performance through an extensive computational study.

- **Paper 2.-** In this paper, we analyze which allocation variables in the Reliability Fixed-Charge Location Problem formulation can be linearized so that the optimal value match the optimal value of the binary problem. We prove that we can relax the integrality of all the allocation variables associated to non-failable facilities or all the allocation variables associated to failable facilities, but not both simultaneously. We also demonstrate that we can relax the integrality of all the allocation variables whenever a family of valid inequalities is added to the set of constraints or whenever the parameters of the problem satisfy certain conditions. Finally, on solving the instances in a data set, we discuss which integrality relaxation or which modification of the problem performs better in terms of resolution time, and we illustrate that to inappropriately relax the integrality of the allocation variables can incur in a high difference at the objective value.
- **Paper 3.-** In the last paper we propose and discuss different models to include capacity constraints into the Reliability Fixed-Charge Location Problem. In all cases, the proposed models represent a trade off between the extreme models that can be found in the literature, where *a priori* assignments are either fixed, or can be fully modified at each scenario. By several computational experiments, we analyze the obtained solutions of introducing capacity constraints according to the different proposed models, in terms of computational burden and in terms of solution cost.

---

# Resumen

---

La finalidad de los problemas de localización de plantas consiste en decidir dónde ubicar de forma óptima plantas o instalaciones (industrias, almacenes, escuelas, hospitales, centros de distribución, centros de datos, etc.) así como la asignación óptima de los clientes a estas instalaciones de forma que se satisfaga su demanda. Estas decisiones se toman habitualmente considerando los costes relativos al establecimiento de las plantas o costes de apertura, así como los costes relativos al servicio de la demanda o costes de transporte.

En la literatura clásica frecuentemente se asume que las plantas abiertas siempre están disponibles, sin embargo, en la práctica, las plantas pueden fallar interrumpiendo su prestación de servicio y no estar disponibles. Problemas de localización de la literatura más recientes consideran en sus modelos distribuciones de probabilidad para el fallo de las plantas, es decir, la fiabilidad de las plantas. Las tres contribuciones recogidas en la presente tesis se refieren a este tipo de modelos.

El objetivo de esta tesis es analizar propiedades del problema de localización de instalaciones no fiables, en inglés *Reliability Fixed-Charge Location Problem*. Esta tesis se estructura en torno a tres artículos:

- **Artículo 1.-** En esta primera aportación los autores reformulan el problema de localización de instalaciones no fiables desde el enfoque de un problema de empaquetamiento de conjuntos, estudiando determinadas propiedades poliédricas referidas al polítopo que conforma la región factible e identificando todas las facetas

asociadas a cliques. Consecuentemente, se estudian ciertas condiciones para las soluciones óptimas. Se propone además una formulación compacta, probando su eficacia mediante un amplio estudio computacional.

- **Artículo 2.-** En este segundo trabajo se estudia bajo qué condiciones podrían relajarse el carácter entero de todas las variables de asignación, probando que puede ser relajado el carácter entero para todas las variables de asignación relativas a las instalaciones completamente fiables; o para las variables de asignación relativas a las plantas cuyo servicio puede presentar interrupciones; mas no para ambas simultáneamente. Finalmente, se propone una familia de desigualdades válidas cuya introducción en el modelo permite la relajación del carácter entero de todas las variables de asignación.
- **Artículo 3.-** En el tercer trabajo los autores proponen y estudian diferentes modelos que incluyen restricciones de capacidad en el modelo de localización de instalaciones no fiables. Para ello añaden a la formulación ya existente diversas restricciones de capacidad encaminadas a acotar la sobrecarga de demanda con la que se enfrentan algunas instalaciones en caso de producirse fallos en las plantas. Además, mediante una serie de pruebas computacionales se analizan las soluciones obtenidas y la bondad de los diferentes métodos empleados.

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

La presente tesis se encuadra dentro de la rama de la *investigación operativa* denominada *localización de instalaciones* consistente tanto en determinar la localización óptima de una serie de plantas o instalaciones, como en determinar la óptima asignación del conjunto de clientes a los que brindar servicio, minimizando una función objetivo dada. En lo sucesivo a los *problemas de localización de instalaciones* los llamaremos también *problemas de localización de plantas* o simplemente *problemas de localización*.

Además de definir la línea de investigación, la finalidad de la presente introducción es establecer la relación entre los distintos artículos que componen esta tesis y enunciar los objetivos de la misma. Para ello, inicialmente comentaremos algunos atributos de los problemas de localización, continuaremos describiendo el problema específico objeto de nuestro estudio: el *problema de localización de instalaciones no fiables*. Finalmente, explicaremos la relación entre las distintas aportaciones.

## 1.1. Atributos de los problemas de localización

Distintos atributos de los problemas de localización de instalaciones son:

- **El espacio de posibles localizaciones.** Según el espacio de posibles localizaciones, podemos distinguir entre *problemas de localización continua* y *problemas de localización discreta*. En los problemas de localización continua el conjunto de posibles localizaciones es infinito, tratándose de localización sobre un plano o espacio. En los problemas de localización discreta el conjunto de posibles localizaciones es finito, buscándose las localizaciones óptimas a partir de un conjunto discreto de posibles localizaciones.
  - **El número de objetivos a optimizar.** Según el número de objetivos a minimizar, podemos diferenciar entre modelos de un solo objetivo y modelos de múltiples objetivos. En este último caso se busca el optimizar un número de objetivos finitos simultáneamente; al poder existir conflictos entre ellos, es necesario establecer criterios para elegir el conjunto de soluciones óptimas.
  - **La limitación de capacidad.** La capacidad del servicio suministrado por las plantas puede ser limitada o no. En los problemas en los que no existen plantas que tengan limitada su capacidad, las plantas pueden suministrar todo el servicio demandado por los clientes que les son asignados. En caso contrario, las plantas tienen limitada la cantidad de suministro a facilitar, existiendo plantas que podrían no cubrir la totalidad de la demanda del sistema.
  - **El número de plantas abiertas.** Si el número de plantas que deben ser abiertas no ha sido fijado previamente, este dependerá de la estructura de costes, proporcionándolo finalmente la solución del problema. En caso contrario, el número de plantas abiertas es conocido de antemano debido a factores exógenos.
  - **La fiabilidad de las instalaciones.** Esta propiedad hace referencia a la forma de tratar las posibles interrupciones del servicio que pueden producirse. Se distingue entre *fiabilidad completa*, en cuyo caso no se pueden producir interrupciones en el
-

servicio, resultan irrelevantes o no son contempladas y entre *múltiples niveles de fiabilidad* en cuyo caso la solución contempla la posibilidad de fallos simultáneos en el sistema, asignando cada cliente mediante un listado ordenado de plantas. En los problemas con dos niveles de fiabilidad, cada cliente será asignado a dos plantas, a la planta inicial, conocida también como *planta primaria* y, en segundo orden, a la conocida como *planta de respaldo*, la cuál le brindará el servicio al cliente en caso de que falle la planta primaria.

- **La distribución de probabilidad.** Tan solo tiene sentido en caso de problemas que contemplan la fiabilidad. Si es así, las probabilidades de fallo de las distintas plantas pueden considerarse constantes e idénticas para todas ellas o también con distribuciones específicas para cada planta.
- **El nivel de información.** Tan solo para problemas que contemplan la fiabilidad, distinguiremos entre *información completa* si los clientes conocen anticipadamente las plantas con fallos de servicio pudiendo entonces obtener directamente el suministro por parte de otra planta operativa; e *información incompleta* si los consumidores no tienen información por adelantado del estado de las plantas pudiendo entonces, en caso de la existencia de fallos en las plantas, verse obligados a visitar distintas instalaciones hasta encontrar una operativa.

El libro [Laporte et al., 2015] es un manual de la teoría de localización moderna. En él se revisan problemas de localización con todos los atributos mencionados, entre otros, y se presentan un gran número de aplicaciones interesantes de los mismos.

## 1.2. El problema de localización de instalaciones no fiables

Aunque los problemas de localización que tienen en cuenta la posibilidad de fallo en las plantas han sido estudiados en la literatura durante años, el trabajo [Drezner, 1987] fue el primero en introducir la probabilidad de que una planta resulte inoperativa, diseñando

---

un algoritmo heurístico para resolver el problema. El primer artículo que propuso un modelo matemático considerando incertidumbre debida a las probabilidades de fallo de las plantas fue [Snyder and Daskin, 2005]. En dicho artículo los autores asumieron que algunas plantas siempre suministran la demanda de sus clientes, mientras que otras pueden interrumpir dicho suministro con idéntica probabilidad. Propusieron un modelo lineal entero mixto y lo resolvieron mediante relajación lagrangiana.

En la literatura se encuentran numerosas casos en los se asume idéntica probabilidad de fallo. Algunos ejemplos en los que todas las instalaciones fallan con idéntica probabilidad son los cajeros automáticos (véase [Berman et al., 2009]) y los sensores de vigilancia del tráfico (véase [Li, 2011]). En ambos casos la probabilidad de fallo se obtiene a partir de las estadísticas históricas de funcionamiento: de hecho [Rajagopal and Varaiya, 2007] proporciona varias medidas de probabilidades de fallo de los sensores de vigilancia del tráfico, y [Ouyang et al., 2009] de las probabilidades de fallo de los sensores para inspeccionar las autopistas. Otros ejemplos de plantas que pueden fallar con la misma probabilidad son las bocas de los canales de riego, las cabinas de teléfono o diversas máquinas expendedoras.

Los trabajos [ReVelle and Eiselt, 2005], [Snyder, 2006] y [ReVelle et al., 2008] son tres recopilaciones de problemas de localización. Si bien [ReVelle and Eiselt, 2005] no tiene en cuenta plantas con probabilidad de fallos, [Snyder, 2006] y [ReVelle et al., 2008] sí la incluyen. En el artículo [Snyder, 2006] se analizó la localización de plantas bajo incertidumbre citando solo literatura sobre modelos estocásticos de localización de plantas. Desde entonces el problema recibió bastante atención. El artículo [Berman et al., 2007] propone diversas características de los patrones de localización óptimos. [Lee and Chang, 2007] propusieron un modelo de dos niveles de fiabilidad con distintas probabilidades de fallo, sin embargo, en el estudio computacional tan solo utilizaron probabilidades de fallo idénticas. La tesis doctoral [Zhan, 2007] presentó modelos lineales con diferentes niveles de fiabilidad y probabilidad de fallo idéntica, así como modelos no lineales con probabilidades de fallo específicas. Los autores proporcionaron varios algoritmos heurísticos lo que les permitió resolver problemas de gran envergadura. Por otra parte, [Shen et al., 2011] analizaron el problema con distintas

---



probabilidades de fallo proponiendo tanto modelos estocásticos basados en escenarios con distintas probabilidades de fallo, como un modelo no lineal de programación entera mixta, mostrando que ambos son equivalentes en general. También evaluaron diferentes procedimientos heurísticos que producen soluciones próximas a las óptimas, llegando a proponer un algoritmo de aproximación mediante ratio constante para el caso en el que todas las probabilidades de fallo son las mismas.

La publicación [Berman et al., 2009] es la primera en este campo de investigación en introducir información incompleta en el problema. En ella, los autores analizaron un modelo con idénticas probabilidades de fallo, varios niveles de fiabilidad e información incompleta. Proporcionaron también algunas ideas sobre el comportamiento de las soluciones óptimas desarrollando tres procedimientos heurísticos para resolver un conjunto de instancias. Posteriormente [Cui et al., 2010] desarrollaron una formulación compacta entera mixta para un problema de fiabilidad con múltiples niveles y distinta probabilidad de fallo, resolviéndolo mediante un algoritmo basado en relajación lagrangiana. [Lim et al., 2010], estudiaron también un modelo lineal con dos niveles de fiabilidad y distintas probabilidades de fallo. [Peng et al., 2011] consideraron un modelo de fiabilidad con limitaciones de capacidad en el que los fallos pueden producirse en diversos niveles; y más recientemente, [Li et al., 2013] presentaron dos problemas de localización con fiabilidad: uno con limitaciones de capacidad y otro sin ellas. Ambos modelos consideraron probabilidades de fallo heterogéneas y un nivel de respaldo, siendo formulados como problemas no lineales de programación entera que resolvieron mediante el desarrollo de algoritmos basados en relajación lagrangiana.

Debido a la complejidad de estos problemas, distintos autores han propuesto también diferentes técnicas metaheurísticas para resolverlos. En [Mladenovic et al., 2007] podemos encontrar una revisión de distintos metaheurísticos para resolver problemas en los que el número de plantas es conocido. Posteriormente, en [Fleszar, 2008] fue propuesto un algoritmo de búsqueda de entorno variable, y más recientemente, en [Alcaraz et al., 2012] los autores desarrollaron metaheurísticos híbridos para resolver un problema de localización con fiabilidad, demostrando también su eficiencia.

Recientemente, la tesis de doctoral [Li, 2011] añadió nuevo material al campo de la

---

localización de plantas con probabilidades de fallo, en este caso, con correlación entre las probabilidades de fallo. Lee diseñó también un modelo para sensores de vigilancia del tráfico con probabilidad de fallo idéntica. Estos avances fueron incorporados en un nuevo software que recientemente ha sido adoptado por la industria [Li and Ouyang, 2010]. En el contexto industrial, diferentes autores han aplicado también modelos de localización con fiabilidad en la gestión de las cadenas de suministro. Una recopilación detallada de estos modelos se puede encontrar en [Melo et al., 2009] y [Snyder et al., 2010].

La presente tesis se ocupa de analizar y proponer distintas mejoras y generalizaciones de la formulación del problema de localización de instalaciones no fiables en [Snyder and Daskin, 2005]. La formulación del problema en [Snyder and Daskin, 2005] asume las siguientes premisas:

- el espacio de posibles localizaciones es discreto,
- la función objetivo pondera dos objetivos,
- las plantas no presentan limitaciones de capacidad,
- el número de plantas abiertas es endógeno y depende de la estructura de costes,
- pueden ocurrir simultáneamente múltiples fallos,
- algunas plantas pueden fallar mientras que otras no,
- todas las plantas fallan con la misma probabilidad,
- los consumidores poseen información completa.

Para definir la formulación definimos previamente los conjuntos de índices y las variables. Sea  $I$  el conjunto de clientes y  $J$  el conjunto de posibles localizaciones. Consideraremos que  $NF$  es el subconjunto de localizaciones de  $J$  donde las plantas no presentan interrupciones en el suministro y que  $F$  es el subconjunto de localizaciones de  $J$  donde las plantas pueden fallar:  $J = F \cup NF$ ,  $F \cap NF = \emptyset$ . Se llama  $q$  a la probabilidad de fallo que cada planta  $F$  presenta. Para cada cliente  $i \in I$  asumimos una demanda  $h_i \geq 0$  solicitada así como que el coste de enviar una unidad de producto desde la planta  $j \in J$  a

---

este cliente es  $d_{ij} \geq 0$ . En lo sucesivo emplearemos indistintamente los términos costes de envío y distancias. Además, la suma de todos estos costes proporciona el llamado coste de transporte. Si todas las plantas operativas están demasiado distantes de un cliente  $i \in I$ , resulta más costoso servirle que pagar un coste de penalización  $\theta_i \geq 0$  por no servirle. Finalmente, abrir una planta en la localización  $j \in J$  presenta un coste de apertura de  $f_j \geq 0$ . La suma de todos estos costes proporciona el coste total de apertura.

El modelo presenta dos familias de variables binarias: las variables de localización y las variables de asignación. La variable de localización  $X_j$  toma el valor 1 si se abre una planta en la localización  $j$ ,  $\forall j \in J$ . La variable de asignación  $Y_{ijr}$  toma el valor 1 si el cliente  $i$  es servido desde la planta  $j$  cuando las  $r$  plantas más cercanas fallan,  $\forall i \in I$ ,  $\forall j \in J$ ,  $\forall r \in \{0, \dots, |F|\}$ . Dado  $i \in I$ ,  $Y_{ij0}$  toma el valor 1 cuando  $j$  es la planta abierta más cercana a  $i$ ,  $Y_{ij1} = 1$  cuando  $j$  es la segunda planta abierta más cercana a  $i$ ,  $Y_{ij2} = 1$  si  $j$  es la tercera y así sucesivamente. Por ejemplo, si tenemos ocho clientes,  $I = \{1, \dots, 8\}$ , cinco posibles localizaciones  $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y decidimos abrir tres de ellas,  $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ ,  $X_4 = X_5 = 0$ , entonces  $Y_{ij0}$  toma el valor 1 si  $j \in \{1, 2, 3\}$  y  $d_{ij} = \min\{d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}\}$ . Si  $d_{81} = 5$ ,  $d_{82} = 7$  y  $d_{83} = 4$ , entonces  $Y_{830} = 1$ ,  $Y_{811} = 1$ ,  $Y_{822} = 1$  y  $Y_{8jr} = 0$  en otro caso. Si  $Y_{ij0} = 1$ , entonces  $j$  es la planta primaria para el cliente  $i$ . Si  $Y_{ij1} = 1$ , entonces diremos que  $j$  es la planta de respaldo para el cliente  $i$  en el nivel 1 y así sucesivamente.

La formulación existente en [Snyder and Daskin, 2005] para el problema de localización de instalaciones no fiables es la siguiente:

$$\text{(RFLP)} \quad \min \quad \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2$$

$$s.a \quad \sum_{j \in F} Y_{ijr} + \sum_{j \in NF} \sum_{s=0}^r Y_{ijs} = 1 \quad \forall i \in I, r \in R \quad (1.1)$$

$$Y_{ijr} \leq X_j \quad \forall i \in I, j \in J, r \in R \quad (1.2)$$

$$\sum_{r \in R} Y_{ijr} \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (1.3)$$

$$X_u = 1 \quad (1.4)$$

$$X_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (1.5)$$

$$Y_{ijr} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, r \in R \quad (1.6)$$

donde  $\alpha$  es un valor entre  $[0, 1]$ ,  $R = \{0, \dots, |F|\}$  y

$$w_1 = \sum_{j \in J} f_j X_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij0}$$

$$w_2 = \sum_{i \in I} h_i \left[ \sum_{j \in NF} \sum_{r \in R} d_{ij} q^r Y_{ijr} + \sum_{j \in F} \sum_{r \in R} d_{ij} q^r (1 - q) Y_{ijr} \right].$$

La componente  $w_1$  en la función objetivo calcula el coste de servir a los clientes desde sus plantas primarias más el coste de apertura de las mismas. La componente  $w_2$  en la función objetivo calcula el coste esperado de servicio: cada cliente  $i$  es servido mediante su  $r$ -ésima planta preferida  $j$  si las  $r - 1$  plantas abiertas más cercanas han fallado (probabilidad  $q^{r-1}$ ) y la planta  $j$  no falla (probabilidad  $(1 - q)$  si  $j \in F$  y 1 si  $j \in NF$ ). Dado que el modelo minimiza la suma ponderada  $\alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2$ , esta representa el compromiso entre el coste de apertura más el coste de transporte desde las plantas primarias y el coste esperado de transporte. El decisor puede elegir el valor de  $\alpha$  dependiendo de sus preferencias entre ambos objetivos.

Las restricciones (1.1) obligan a cada cliente  $i$  a tener asignada una planta de respaldo en cada nivel  $r$  salvo que se le haya asignado en un nivel anterior  $s$  ( $s < r$ ) una planta que no falle. Las restricciones (1.2) garantizan que los clientes son servidos desde plantas abiertas y las restricciones (1.3) fuerzan a que cada cliente sea servido mediante plantas distintas en los diferentes niveles. Además, la variable  $X_u$  representa una planta artificial que no puede fallar, cuyo coste de apertura es cero  $f_u = 0$ , y cuyo coste de transporte es igual al coste de penalización por no servir a un cliente dado,  $d_{iu} = \theta_i$ ,  $f_u = 0$ ; es decir, no servir al cliente  $i$  es equivalente a asignarle a la planta  $u$ . La restricción (1.4) fuerza a que la planta  $u$  esté abierta. Por último, las restricciones (1.5) y (1.6) indican la naturaleza binaria de los dos conjuntos de variables.

### 1.3. Relación entre los distintos artículos constitutivos de la tesis

A continuación se expondrá la relación existente entre las distintas aportaciones que conforman la presente tesis.

La primera contribución [Alcaraz et al., 2015] presenta un estudio poliédrico de la formulación del problema de localización de instalaciones no fiables introducida en [Snyder and Daskin, 2005]. A partir de dicho estudio poliédrico se propone añadir a la formulación original de Snyder y Daskin determinadas familias de restricciones. También se obtienen otras familias de restricciones que se siguen de la lógica subyacente del problema. Tras probar computacionalmente diversas variantes del modelo, se propone una nueva formulación más fuerte.

En [Snyder and Daskin, 2005] los autores comentaban que el carácter entero de las variables de asignación del modelo de localización de instalaciones no fiables se puede relajar. Sin embargo, durante el desarrollo del primer artículo encontramos un contraejemplo que contradecía dicha asunción intuitiva. El estudiar bajo qué condiciones podía ser cierta la asunción, así como el estudiar si algunas variables de asignación sí podían relajarse, o incluso bajo qué variantes del modelo podrían relajarse todas ellas, ha sido el objeto la segunda de las contribuciones [Sainz-Pardo et al., 2016b].

Cómo incluir la limitación de capacidad en el problema de localización de instalaciones no fiables en [Alcaraz et al., 2015] y [Sainz-Pardo et al., 2016b] es el tema de la tercera contribución. En [Sainz-Pardo et al., 2016a] hemos propuesto y justificado cuatro formas distintas de abordar el RFLP limitando la capacidad de las plantas. Cada uno de estos métodos derivó en una variante diferente del problema RFLP.

En consecuencia, los tres trabajos [Alcaraz et al., 2015], [Sainz-Pardo et al., 2016a], [Sainz-Pardo et al., 2016b], abordan formulaciones compactas para el análisis del problema de localización de instalaciones no fiables.

---



# CAPÍTULO 2

---

## Resumen de las aportaciones

---

### 2.1. Reforzando la formulación del modelo RFLP

En esta aportación se reformula el modelo original del problema de localización de instalaciones no fiables, enunciado en [Snyder and Daskin, 2005]. A partir del estudio de ciertos aspectos relativos a sus propiedades poliédricas los autores identifican todas las facetas del mismo asociadas a cliques, se obtienen otras facetas del problema de localización de instalaciones no fiables y se estudian algunas condiciones de las soluciones óptimas. Finalmente, se propone una formulación compacta para el problema y se prueba su eficacia mediante un amplio estudio computacional.

#### 1. Analizando el RFLP como unproblema de empaquetamiento de conjuntos

Del modelo RFLP se deduce que las restricciones (1.2) y (1.3) implican:

$$\sum_{r \in R} Y_{ijr} \leq X_j \quad \forall i \in I, j \in J. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, se sustituyen las restricciones (1.2) y (1.3) por la desigualdad (2.1).

Del estudio poliédrico del modelo RFLP se sigue que todas las facetas asociadas a cliques del problema de empaquetamiento asociado al RFLP son:

$$\sum_{j \in J} Y_{ijr} + \sum_{j \in NF} \sum_{s=0}^{r-1} Y_{ijs} \leq 1 \quad \forall i \in I, r \in R, |F| \geq 2, \quad (2.2)$$

$$x_j + \sum_{r \in R} Y_{ijr} \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.3)$$

$$\sum_{w \in R: w \geq r} Y_{ijw} + \sum_{t \in NF} \sum_{w=0}^r Y_{itw} \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in F, r \in R, \quad (2.4)$$

donde  $x_j = 1 - X_j \forall j \in J$ . Las restricciones (2.2) implican que las desigualdades (1.1) son facetas clique cuando  $|F| \geq 2$ , las facetas clique (2.3) fortalecen (1.2) y (1.3) y las facetas asociadas a cliques (2.4) introducen nuevas restricciones. Además, las tres familias de restricciones ayudan a fortalecer el RFLP simplemente deshaciendo la transformación  $x_j = 1 - X_j$ .

## 2. Reducción de tamaño y cortes adicionales

El analizar algunas propiedades de las soluciones óptimas del modelo RFLP servirá primero para establecer dos condiciones para fijar a cero determinadas variables y posteriormente para introducir varias familias de cortes que, a pesar de que no son desigualdades válidas del poliedro factible, son satisfechas por cualquier solución óptima.

Si la distancia entre el cliente  $i$  y la planta  $j$  es menor que la distancia entre el cliente  $i$  y la ubicación  $r$ -ésima más cercana, entonces no resultará óptimo el que la planta  $j$  suministre servicio al cliente  $i$  después del  $r$ -ésimo fallo consecutivo. Por tanto, sea  $D_h^i$  la distancia entre el cliente  $i$  y la  $h$ -ésima planta más cercana al cliente  $i$ , si  $(X^*, Y^*)$  es una solución óptima del modelo RFLP, entonces:

$$Y_{ijr}^* = 0 \text{ para todo } i \in I, j \in J, r \in R : d_{ij} < D_r^i \quad (2.5)$$

Por otra parte, cualquier planta  $j$  cuya distancia al cliente  $i$  supere a la penalización por no servicio  $\theta_i$ , no será óptimo que brinde en ninguna preferencia servicio a



dicho cliente  $i$ :

$$Y_{ijr}^* = 0 \text{ para todo } i \in I, j \in J, r \in R : d_{ij} > \theta_i. \quad (2.6)$$

Además se prueba que cualquier solución óptima del modelo RFLP satisface las siguientes restricciones:

a) Para todo  $i \in I, j, k \in J, r \in R : d_{ij} < d_{ik}$  se cumple que

$$\sum_{w=r}^{|F|} Y_{ijw} + \sum_{w=0}^r Y_{ikw} \leq 1 \quad (2.7)$$

b) Para todo  $j \in J$  sucede que

$$x_j + \sum_{r=0}^{\min\{G_{ij}, |F|\}} Y_{ijr} = 1 \quad (2.8)$$

donde  $G_{ij}$  es el orden de preferencia de  $j$  por  $i$ .

c) Para todo  $i \in I, j \in J$  también se cumple que

$$x_j + Y_{ij0} - \sum_{k \in J: G_{ik} < G_{ij}} x_k \geq 1 - M_{ij} \quad (2.9)$$

donde  $M_{ij} = |\{k \in J : G_{ik} < G_{ij}\}|$ .

Tanto la colección de variables fijadas a cero, como estas desigualdades permiten reducir el conjunto de candidatos a solución óptima y por lo tanto reducen la complejidad computacional del problema RFLP.

### 3. Resultados computacionales

En las pruebas computacionales se utilizaron las siguientes formulaciones alternativas del RFLP:

$$(\mathbf{P}_1) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6)\}$$

$$(\mathbf{P}_2) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (2.5), (2.6)\}$$

$$(\mathbf{P}_3) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (2.3), (2.5), (2.6)\}$$

$$(\mathbf{P}_4) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6)\}$$

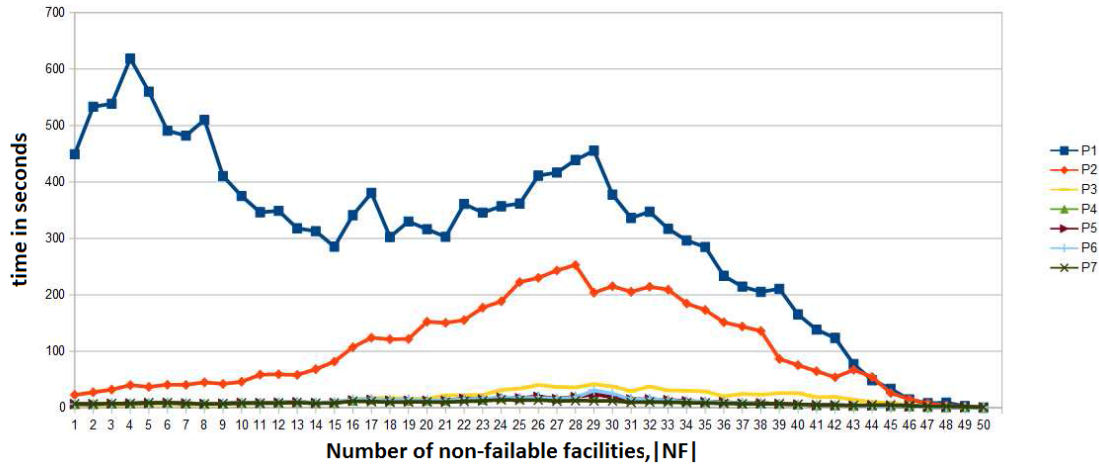


Figura 2.1: Tiempo promedio para 50 plantas y 50 clientes

$$(P_5) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7)\}$$

$$(P_6) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8)\}$$

$$(P_7) \text{ mín}\{\alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2 : (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9)\}$$

$P_1$  es la formulación original reseñada en [Snyder and Daskin, 2005].  $P_2$  es  $P_1$  más la mejora obtenida al añadir ceros.  $P_3$  es la mejora de  $P_2$  conseguida al remplazar (1.2) y (1.3) por (2.3).  $P_4$  es la mejora de  $P_3$  lograda al añadir la desigualdad debida al clique (2.4). Finalmente  $P_5$ ,  $P_6$  y  $P_7$  se obtienen al añadir a  $P_4$  los cortes adicionales: (2.7), (2.8) y (2.9) sucesivamente.

De entre los distintos experimentos computacionales, en este resumen comentaremos dos tablas, pudiendo encontrarse en la propia publicación los detalles correspondientes a las bases de datos así como a los distintos parámetros utilizados. Las curvas de las Figuras 2.1 y 2.2 representan el tiempo promedio medidos en segundos de dichas pruebas y porcentaje promedio de LP gap, en función de las distintas plantas de tipo  $NF$  fijadas, representando cada punto un promedio de 30 pruebas.

A partir de las Figuras 2.1 y 2.2, se observa fácilmente que el hecho de fijar las variables a cero reduce significativamente el tiempo computacional. Las desigualdades (1.2), (1.3) junto con la desigualdad (2.3) reducen aún más significativamente el tiempo de cálculo así como el LP gap. En ambas figuras, los valores obtenidos para ( $P_1$ ) y ( $P_2$ ) son mucho más elevados que los obtenidos

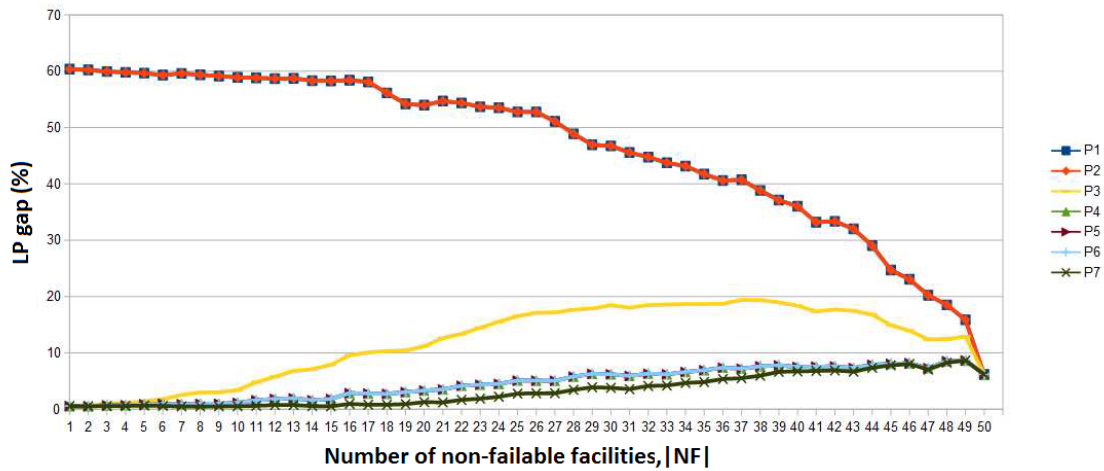


Figura 2.2: LP gap promedio para 50 plantas y 50 clientes

mediante el resto de configuraciones, por lo que no se observa la mejora obtenida por dichas configuraciones.

Analizando la Figura 2.1 podemos observar que la curva del tiempo para  $P_1$  presenta claramente dos máximos: en torno a 600 segundos cuando  $|NF| = 4$  y en torno a 450 segundos cuando  $|NF| = 29$ . La curva del tiempo para  $P_2$  presenta un máximo en torno a 250 segundos, alcanzado también cuando  $|NF| = 29$ . No obstante, los tiempos promedio obtenidos son inferiores a 100 segundos para resolver  $P_1$  cuando  $|NF| \geq 43$  así como para resolver  $P_2$  cuando  $|NF| \leq 15$  o  $|NF| \geq 39$ . Las curvas de tiempo para  $P_3 \dots P_7$  no superan en ningún caso los 100 segundos. Analizando la Figura 2.2, los mayores valores de LP gap se alcanzan en las curvas  $P_1$  así como  $P_2$ , coincidiendo ambos. Las líneas para  $P_1$  y  $P_2$  decrecen con el número de plantas de tipo  $NF$ , produciéndose los mayores valores de LP gap en torno al 60% correspondiendo a problemas en los que  $|NF| = 1$ , mientras que el valor más pequeño se acerca al 8% correspondiendo a  $|NF| = 50$ . La curva que representa el patrón de LP gap para  $P_3$  siempre se halla por debajo del 20%. Los LP gaps para las diferentes formulaciones  $P_3 \dots P_7$  claramente coinciden con  $|NF| \leq 5$ , en cuyo caso son 0 o cuando  $|NF| = 50$  encontrándose entonces entre el 5 y el 10%.

## 2.2. Relajación lineal de las variables de asignación del modelo RFLP

En [Snyder and Daskin, 2005] se asume erróneamente que el dominio de las variables de asignación del RFLP puede ser remplazado por su relajación continua, es decir, que es suficiente con exigir

$$0 \leq Y_{ijr} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in I, j \in J, r \in R \quad (2.10)$$

en lugar de (1.6).

Sin embargo, esta afirmación no siempre es válida, tal y como podemos observar en el siguiente ejemplo surgido al tratar de demostrar dicha asunción durante el transcurso de la investigación en [Alcaraz et al., 2015]:

### Ejemplo 1

La solución óptima al modelo RFLP para la instancia dada por los parámetros  $I = \{1\}$ ,  $J = \{1, 2\}$ ,  $NF = \{1\}$ ,  $F = \{2\}$ ,  $d_{11} = 100$ ,  $d_{12} = 110$ ,  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $\alpha = 0,5$  y  $q = 0,9$ . es  $X_1^* = 1$  y  $X_2^* = 0$  es:

$$(Y_{1jr}^*)_{(j \in J) \times (r \in R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con valor objetivo:  $v^* = \alpha(f_1 X_1 + h_1(d_{11} Y_{111}^* + d_{12} Y_{121}^*)) + (1 - \alpha)h_1(d_{11} Y_{111}^* + d_{12}(1 - q)Y_{121}^* + d_{11} q Y_{112}^* + d_{12} q(1 - q)Y_{122}^*) = 0,5 * 1 * 100 + 0,5 * 1 * 100 = 100$

Sin embargo, si todas las variables de asignación fuesen relajadas entonces la solución óptima de este problema relajado sería mejor que  $(X^*, Y^*)$ . Efectivamente, la solución proporcionada por  $X_1 = X_2 = 1$  y

$$(Y_{1jr})_{(j \in J) \times (r \in R)} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

es válida para el problema relajado y su valor objetivo  $v$  es menor que  $v^*$ ,  $v = \alpha(f_1 X_1 + h_1(d_{11} Y_{111} + d_{12} Y_{121})) + (1 - \alpha)h_1(d_{11} Y_{111} + d_{12}(1 - q)Y_{121} + d_{11} q Y_{112} +$

$$d_{12}q(1 - q)Y_{122}) = 0,5 * 1 * (100 * 0,75 + 110 * 0,25) + 0,5 * 1 * (100 * 0,75 + 110 * 0,1 * 0,25 + 110 * 0,9 * 0,1 * 0,25) = 91,3625$$

De hecho, en pruebas computacionales realizadas, la magnitud del error cometido al relajar el carácter entero de de todas las variables de asignación varía con  $q$  y con el número de plantas que no fallan. La Figura 2.3 muestra el porcentaje de error relativo (% GAP) cometido en función de la variación del número de plantas tipo  $NF$ . Se observa que para números de plantas tipo  $NF$  inferiores a 50 existen pequeños errores. A partir de  $|NF| > 50$  dichos errores aumentan progresivamente al incrementarse el número de plantas tipo  $NF$  existentes. Para todos los  $q$  estudiados, se alcanza un error máximo en  $|NF| = 98$  % GAP  $\simeq 10$  % en  $q = 0,9$ ). Cuando la totalidad de las plantas son fiables ( $|NF| = 101$ ), ya no se produce error.

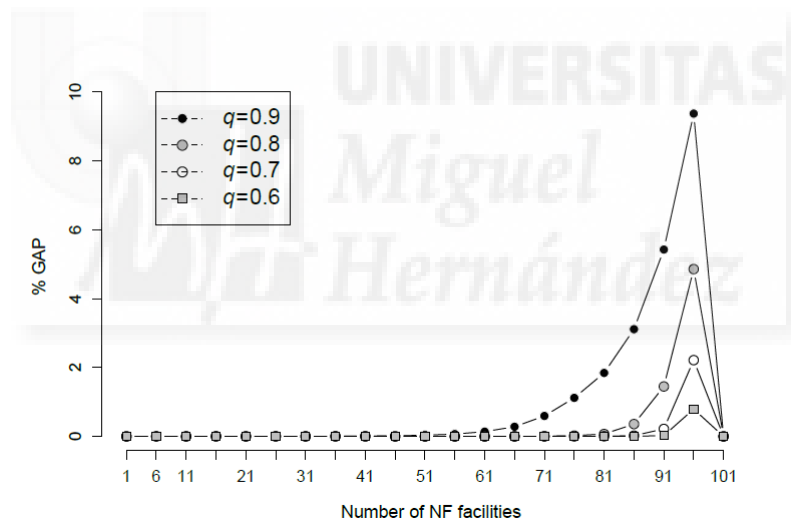


Figura 2.3: Variación promedio del error para los valores de  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$

Todo lo anterior sugiere que el conjunto de restricciones del modelo RFLP es débil. Obsérvese que en el Ejemplo 3.2 mediante la solución fraccional  $(X, Y)$  tan solo se sirve parcialmente la demanda solicitada: el 25 % de la misma en caso de que la planta primaria falle.

De hecho, la principal contribución de esta aportación consiste en añadir la familia de restricciones

$$\sum_{j \in NF} \sum_{r \in R} Y_{ijr} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.11)$$

al modelo RFLP, la cual garantiza el suministro completo, resultando entonces válido el utilizar (2.10) en lugar de (1.6).

Demostramos también que es correcta la relajación del carácter entero de todas las variables de asignación en el modelo original si se cumple  $d_{ik} \leq (1 - q)d_{il}$  y  $d_{ik} \leq ((1 - 2q)/(1 - q)^2)d_{il}$  para todo  $k \in F$ , para todo  $l \in NF$  tal que  $d_{ik} \leq d_{il}$ .

Por otra parte, si las anteriores condiciones no se cumpliesen, sería también válido relajar tan solo aquellas variables de asignación  $Y_{ijr}$  tales que  $j \in F$ ; así como relajar solamente aquellas variables de asignación  $Y_{ijr}$  tales que  $j \in NF$ .

Para demostrarlo, en nuestro estudio enunciamos inicialmente una serie de transformaciones que aplicadas sobre una solución cualquiera del problema con todas las variables de asignación relajadas permiten obtener otras soluciones con mejor valor objetivo. Basándonos en dichas transformaciones, probamos las distintas formas correctas de relajar el carácter entero de las variables de asignación. Para ello, desarrollamos distintos algoritmos de forma que en cada iteración transforman una solución cualquiera del problema relajado en otra, buscando alcanzar la solución óptima, que resulta ser entera.

### 2.3. Introducción de capacidades en el modelo RFLP

En esta aportación se considera el modelo RFLP introduciendo limitaciones de capacidad en las plantas. Propondremos varios modelos en los que fijaremos restricciones de capacidad estrictas en el escenario en el cual ningún fallo ha sucedido, y demás acotaremos la esperanza de la sobrecarga. Sin embargo, se permitirán pequeñas infracciones sobre los límites de capacidad cuando algún fallo ocurra, puesto que en situaciones de emergencia las plantas pueden servir demandas ligeramente superiores a sus capacidades.

Para modelar la sobrecarga nos basaremos en el modelo RFLP. En primer lugar

añadiremos restricciones que impidan que las asignaciones primarias rebasen las limitaciones de capacidad  $Q_j$  para toda planta  $j \in J$ :

$$\sum_{i \in I} h_i Y_{ij0} \leq Q_j X_j \quad j \in J \quad (2.12)$$

A partir de este modelo básico proponemos las siguientes variantes añadiendo en cada una de ellas distintas restricciones para acotar la sobrecarga esperada:

### 1. Límites sobre las cargas esperadas.

Una primera y sencilla aproximación, destinada a tratar de evitar violaciones de las restricciones de capacidad demasiado frecuentes o de gran envergadura, consiste en mantener la demanda esperada total en cada planta por debajo de una determinada cantidad. También podemos mantener esta limitación tan solo en un número de plantas. Ello se puede conseguir utilizando las siguientes variables adicionales:

- $v_j \in \mathbb{R}_+$ : cantidad de exceso de demanda esperada permitida sobre la capacidad de la planta  $j \in J$ .
- $u_j \in \{0, 1\}$ : indica en qué plantas  $j \in J$  la demanda esperada puede exceder la capacidad  $Q_j$ .

Los límites anteriormente mencionados pueden establecerse usando las siguientes restricciones

$$\sum_{i \in I} h_i \sum_{r \in R} q^r Y_{ijr} \leq Q_j X_j + v_j \quad j \in J \quad (2.13)$$

$$v_j \leq V u_j \quad j \in J \quad (2.14)$$

$$\sum_{j \in J} u_j \leq \gamma \quad (2.15)$$

$$v_j \geq 0 \quad j \in J \quad (2.16)$$

$$u_j \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.17)$$

Las restricciones (2.13) se usan para calcular los valores de las variables  $v_j$ , y las restricciones (2.14) son usadas para identificar las plantas donde estas variables son positivas, así como para establecer sus límites  $V$ . Un límite  $\gamma$  sobre el número de plantas en las que las variables  $v$  pueden ser positivas es fijado mediante la restricción (2.15). Finalmente, las restricciones (2.16) y (2.17) fijan los dominios de las nuevas variables. Nos referiremos a esta formulación como CRFLP-LEL( $V, \gamma$ ).

## 2. Acotación de la sobrecarga esperada.

Se entiende por sobrecarga de una planta  $j$  en un escenario dado, la demanda excedida sobre la capacidad de producción de la planta  $j$  en dicho escenario. Una medida global de la sobrecarga del sistema la proporciona la sobrecarga esperada. Sea  $\lambda_{jr}$  la sobrecarga en la planta  $j$  causada por las asignaciones a la misma en el nivel  $r$  considerando también las asignaciones en los niveles inferiores. Hemos probado que la expresión

$$\sum_{r>0} \left[ \sum_{j \in F} \left( (1-q)q^r \right) \lambda_{jr} + \sum_{j \in NF} q^r \lambda_{jr} \right] \quad (2.18)$$

es una cota superior de la sobrecarga esperada. Por tanto, un modelo que acota dicha sobrecarga esperada mediante el valor  $V$  consiste en añadir al modelo básico las siguientes restricciones:

$$\sum_{s=1}^r \sum_{i \in I} h_i Y_{ijs} \leq Q_j + v_{jr} \quad \forall j \in J, r \in R \quad (2.19)$$

$$\lambda_{j1} = v_{j1} \quad \forall j \in J \quad (2.20)$$

$$\lambda_{jr} = v_{jr} - v_{jr-1} \quad \forall j \in J, r > 1 \quad (2.21)$$

$$\sum_{j \in F} \sum_{r>0} q^r (1-q) \lambda_{jr} + \sum_{j \in NF} \sum_{r>0} q^r \lambda_{jr} \leq V \quad (2.22)$$

$$\lambda_{jr}, v_{jr} \geq 0 \quad \forall j \in J, r \in R \quad (2.23)$$

A esta formulación la denominaremos en lo sucesivo CRFLP-B1( $V$ ). Las variables continuas adicionales  $\lambda_{jr}$  y  $v_{jr}$  son necesarias para calcular el valor de (2.18). Las restricciones (2.20) – (2.21) son necesarias para fijar correctamente los valores de las variables  $\lambda_{jr}$ , y la restricción (2.22) se utiliza para calcular y limitar el valor de



la sobrecarga esperada. Finalmente, los dominios de las nuevas variables son fijados mediante la restricción (2.23).

3. **Un estimador lineal de la sobrecarga esperada.** Proponemos usar un modelo de regresión lineal obtenido a partir de un amplio conjunto de instancias generadas aleatoriamente. Para cada una de estas instancias, hemos obtenido diversas soluciones, probando todas las formulaciones presentadas en este trabajo con diferentes parámetros. Para cada solución hemos calculado la correspondiente sobrecarga esperada a la vez que una serie de características de las soluciones. Definimos  $\lambda_{\bullet 1}, \dots, \lambda_{\bullet 4}$  como:

$$\lambda_{\bullet r} = \sum_{j \in J} \lambda_{jr} \quad (2.24)$$

Tras analizar diferentes modelos propuestos, la aproximación lineal que produjo el mejor ajuste ( $R^2 = 0,9537$ ) fue

$$\hat{E}(X, Y) = 0,722844q\lambda_{\bullet 1} + 0,335816q^2\lambda_{\bullet 2} + 0,233097q^3\lambda_{\bullet 3} + 0,374673q^4\lambda_{\bullet 4} \quad (2.25)$$

A este modelo propuesto nos referiremos como CRFLP-LR( $V$ )

4. **Usando capacidades escalonadas.** Se trata de un modelo en el que proponemos escalar las capacidades  $Q_j$  mediante potencias de diferentes factores de escala  $\beta > 1$  utilizando el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{s=0}^r \sum_{i \in I} h_i Y_{ijs} \leq \beta^r Q_j \quad j \in J, r \geq 1 \quad (2.26)$$

Intuitivamente, puede interpretarse como la posibilidad de asignar a las plantas demandas mayores que su capacidad, siendo tanto mayor cuanto más altos sean los niveles de asignación. A partir de esta idea, se construyen capacidades auxiliares para las plantas, aumentando *escalonadamente* dichas capacidades auxiliares en cada nivel  $r$ . Esta nueva formulación la denotaremos CRFLP-S( $\beta$ ) donde  $S$  hace referencia a este escalonamiento.

Respecto a la experiencia computacional, comentaremos en este resumen la Tabla 2.1. En la propia publicación se detallan las instancias utilizadas para obtenerla, así como los

distintos parámetros empleados. Dicha tabla muestra los promedios para cinco medidas de diferentes aspectos sobre un conjunto de instancias que ilustran el comportamiento de la solución:  $v^*$  representa el valor óptimo,  $E(X, Y)$  el valor de la sobrecarga esperada en la solución óptima,  $\mathbb{P}(\text{sobrecarga})$  representa la probabilidad de que se produzca sobrecarga (calculada como la suma de las probabilidades de todos los escenarios con sobrecarga positiva), *Ficticia* mide la demanda esperada en la planta ficticia, es decir, la suma de las demandas que la planta ficticia recibe en cualquiera de todos los escenarios posibles ponderada por la probabilidad del escenario, y  $t$  es el tiempo en segundos de resolución del problema.

Analizando la Tabla 2.1, puede observarse que el modelo RFLP obviamente alcanza las soluciones más económicas y resulta ser el de mayores sobrecargas así como de mayor probabilidad de sobrecarga. Además, la demanda recibida en la planta ficticia es menor en las soluciones RFLP con valores reducidos de probabilidad de fallo ( $q = 0,05$  y  $q = 0,1$ ) sin embargo, toma valores intermedios cuando  $q = 0,2$ . RFLP también suele requerir menos tiempo computacional. Pese al incremento económico y de carga computacional, los modelos propuestos reducen tanto la sobrecarga esperada como la probabilidad de que se produzca.

Según la Tabla 2.1 el modelo CRFLP-S(1,1) es el único con pequeñas sobrecargas y pequeña probabilidad de sobrecarga, pero en contraste, es una de las soluciones más caras así como de mayor demanda para la planta ficticia: el modelo CRFLP-S(1,1) fuerza drásticamente la reducción de sobrecarga a costa de perder clientes e incrementar la inversión. Los modelos CRFLP-B1(3) y CRFLP-LR(3) son también efectivos para reducir la sobrecarga esperada y la probabilidad de sobrecarga en comparación con RFLP, dejando a menos clientes sin servicio.

En términos de tiempo computacional, todos los modelos resultan muy efectivos: cuando  $q = 0,05$  o  $q = 0,1$  y casi todas las instancias precisan menos de cuatro minutos en ser resueltas. Incluso cuando  $q = 0,2$  los tiempos computacionales para los modelos CRFLP-B1(V), CRFLP-LR(V) y CRFLP-S( $\beta$ ), aun siendo mayores, todavía son contenidos.

Model	RFLP	CRFLP-LEL			CRFLP-BI		CRFLP-LR		CRFLP-S					
		$V = 0; \gamma =  J $	$V = 1; \gamma =  J $	$V = 2; \gamma =  J $	$V = \infty; \gamma = 1$	$V = \infty; \gamma = 2$	V=3	V=6	V=3	V=6	$\beta = 1,1$	$\beta = 1,2$	$\beta = 1,3$	
v*	q=0.05	8997.20	9019.43	9010.38	9004.69	8997.20	8997.20	9378.19	9143.23	9287.02	9051.44	9536.01	9417.45	9327.98
	q=0.10	9271.78	9344.00	9336.11	9330.02	9271.78	9271.78	9992.57	9676.36	9898.64	9652.82	10038.18	9802.78	9667.60
	q=0.20	9995.34	10066.36	10064.61	10063.03	9995.34	9995.34	10975.59	10512.67	10636.21	10503.05	10879.70	10451.35	10215.46
E(X, Y)	q=0.05	5.19	4.99	5.13	5.17	5.19	5.19	1.64	3.90	2.53	4.65	0.46	1.03	1.75
	q=0.10	8.72	7.44	7.57	7.69	8.72	8.72	1.20	3.22	1.73	3.80	0.66	1.68	2.63
	q=0.20	12.73	8.63	8.69	8.71	12.72	12.72	1.27	4.60	3.48	4.49	1.30	3.68	5.76
P(sobrecarga)	q=0.05	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.06	0.07	0.07	0.07	0.04	0.05	0.06
	q=0.10	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.06	0.09	0.07	0.10	0.06	0.08	0.09
	q=0.20	0.21	0.17	0.18	0.18	0.21	0.21	0.05	0.12	0.09	0.11	0.07	0.14	0.15
Ficticia	q=0.05	0.26	0.32	0.30	0.27	0.26	0.26	1.92	0.94	1.68	0.56	2.39	1.87	1.52
	q=0.10	0.91	0.98	0.97	0.94	0.91	0.91	2.28	1.37	1.92	1.36	2.67	1.74	1.28
	q=0.20	2.44	1.58	1.58	1.58	2.44	2.44	2.63	1.62	1.16	1.55	3.38	2.29	1.41
t	q=0.05	7.75	29.63	11.94	10.88	7.54	7.45	30.20	32.33	31.71	17.82	59.41	42.17	39.59
	q=0.10	6.95	126.24	109.40	73.77	7.31	7.27	80.41	64.24	244.17	55.50	241.71	89.74	62.76
	q=0.20	7.25	68.19	71.06	83.51	7.49	7.43	236.17	954.25	744.68	944.17	1252.76	344.71	49.83

Tabla 2.1: Promedios para las instancias con 50 localizaciones y 20 clientes



# CAPÍTULO 3

---

## Desarrollos futuros y conclusiones

---

En este capítulo se presenta la línea actual de trabajo, continuando la investigación que constituye el cuerpo de la tesis. Proponemos un algoritmo heurístico para obtener la frontera Pareto eficiente del problema de localización de instalaciones no fiables y mostramos los resultados computacionales obtenidos. Por último, expresaremos algunas conclusiones.

### 3.1. Análisis de la frontera Pareto eficiente del RFLP

La elección del valor de  $\alpha$  que promedia la función objetivo puede resultar complicado especialmente en los casos en los que los dos objetivos no están balanceados equilibradamente, dado que ambos tomarían valor en rangos de distintas dimensiones. Sería por tanto preferible seleccionar una solución óptima a partir de un conjunto de soluciones distribuidas a lo largo de la frontera Pareto eficiente, en vez de fijar un  $\alpha$  determinado.

Varios heurísticos y metaheurísticos han sido desarrollados y aplicados para resolver

problemas de localización de dos objetivos, pero hasta donde conocemos, ninguno de ellos ha sido aplicado al problema RFLP. Hemos desarrollado un algoritmo basado en NSGA-II, con la finalidad de obtener la frontera Pareto óptima del problema RFLP.

### Diseño del algoritmo heurístico

La Figura 3.1 muestra el ciclo principal del algoritmo genético que hemos diseñado. Primero se obtiene una población inicial de tamaño  $N$ , la cuál cambia tras cada iteración del algoritmo. A partir de la población actual  $P_t$  se crea una población de descendientes  $Q_t$ , para combinar posteriormente ambas, obteniendo la población  $R_t$  de tamaño  $2N$ . Con la finalidad de reducir a  $N$  el tamaño de la población combinada, se seleccionan los  $N$  individuos con mejor rango de dominancia, obteniendo de esta manera la nueva población  $P_t$ . Este ciclo es repetido hasta que el criterio de parada decide finalizar, extrayendo entonces de la población vigente las soluciones no dominadas que conformarán el conjunto de soluciones definitivo a suministrar al decisor. Respecto al criterio de parada, puede establecerse mediante varias opciones: fijar un tiempo de cálculo determinado, fijar un número de iteraciones sin que se produzcan cambios en la población, o una mezcla de ambos.

---

```

P0=Generate_initial_population()
t=0
while not(stopping criterion) do
    Qt=Make_new_population(Pt)
    Rt=Pt ∪ Qt
    F=Fast_non_dominated_sort(Rt)
    Pt+1=∅ and i=1
    until |Pt+1| + |Fi| < N
        Pt+1=Pt+1 ∪ Fi
        i=i+1
    if |Pt+1| + |Fi| = N
        Pt+1=Pt+1 ∪ Fi
    else
        i_distance_assignment(Fi)
        Sort(Fi, idistance)
        Pt+1=Pt+1 ∪ Fi[1:(N-|Pt+1|)]
    t=t+1
return Pt

```

---

Figura 3.1: Algoritmo principal

Un aspecto determinante en el comportamiento de un algoritmo genético es diseñar adecuadamente la forma en la que se codifican las soluciones. En este caso hemos usado un cromosoma de longitud variable en el que cada gen es codificado usando un alfabeto binario que representa el índice de una planta abierta.

Respecto al proceso de creación de una nueva población, este se realiza mediante tres pasos diseñados a medida: la selección de los padres, el cruce y la incorporación de los descendientes a la población actual.

### **Métricas de rendimiento: una nueva métrica de diversidad**

Antes de introducir las pruebas computacionales llevadas a cabo, comentaremos varias medidas empleadas con la finalidad de comparar la calidad del conjunto de soluciones obtenido. Estas medidas suelen ser de dos tipos: métricas para evaluar la convergencia y métricas para evaluar la diversidad de las soluciones.

Una de las métricas de convergencia existentes en la literatura, la función  $\Upsilon(X)$ , mide la proximidad de un conjunto de soluciones no dominadas  $X$  respecto a la frontera Pareto eficiente  $X^*$ . Sean  $w_1(x_i)$  y  $w_2(x_i)$  respectivamente los valores del primer y segundo objetivo de una solución  $x_i$ . Para obtener  $\Upsilon(X)$  primero se calcula la menor distancia Euclídea normalizada desde cada  $x_i$  hasta  $X^*$  según:

$$D_i = \min_{j \in X^*} \sqrt{\left( \frac{w_1(x_i) - w_1(x_j^*)}{\max_1 - \min_1} \right)^2 + \left( \frac{w_2(x_i) - w_2(x_j^*)}{\max_2 - \min_2} \right)^2}$$

donde  $\max_1$  y  $\max_2$  son los máximos valores posibles de cada objetivo, y  $\min_1$  y  $\min_2$  los mínimos valores posibles. Entonces, el valor de  $\Upsilon(X)$  es calculado como el promedio de estas distancias normalizadas:

$$\Upsilon(X) = \frac{\sum_{i=1}^{|X|} D_i}{|X|}$$

Dados dos conjuntos de soluciones no dominadas, entonces aquel con mayor valor de  $\Upsilon$  es más distante de la frontera Pareto óptima.

Además de medir la cercanía del conjunto de soluciones obtenidas a la frontera Pareto eficiente, es interesante medir su dispersión a lo largo de dicha frontera. Una de las

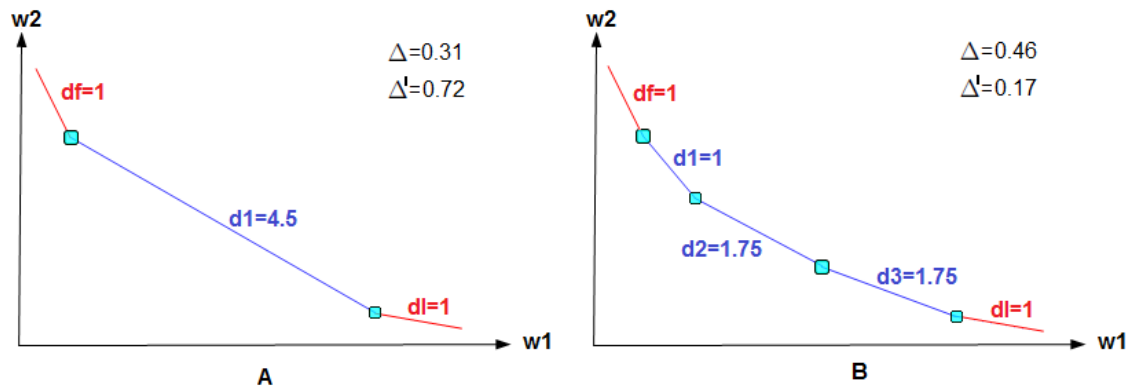


Figura 3.2: Comparativa de las métricas  $\Delta$  y  $\Delta'$

métricas más usadas es la función  $\Delta$ , propuesta en [Deb et al., 2002]. Para calcularla, se calcula primero la distancia Euclídea  $d_k$  entre las soluciones consecutivas en  $X$ . Se calcula también el promedio  $\bar{d}$  de estas distancias consecutivas. Posteriormente, se obtienen las dos soluciones extremas de  $X^*$ . Sea  $d_l$  la distancia entre una de estas soluciones extremas y la más cercana a ella de  $X$ ; y  $d_f$  la otra distancia extrema. Entonces, la métrica  $\Delta$  viene dada por:

$$\Delta(X) = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{|X|-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (|X| - 1)\bar{d}}$$

Valores de  $\Delta$  cercanos a 0 suelen representar una distribución amplia y uniforme de las soluciones no dominadas; en contraste, en distribuciones pobres, la métrica toma valores positivos distantes de 0, pudiendo incluso exceder el valor de 1.

En [Deb et al., 2002] se comenta que para dos distribuciones con idénticos valores de  $d_f$  y  $d_l$  la métrica  $\Delta$  toma un valor más elevado en aquella distribución peor. Sin embargo la Figura 3.2 muestra un contraejemplo para este supuesto. Es obvio que la diversidad y cubrimiento de B es mejor que A. Sin embargo,  $\Delta(A) = 0,31$ , mientras que  $\Delta(B) = 0,46$ . Sugerimos una nueva métrica para medir la diversidad de un conjunto de soluciones, dada por:

$$\Delta'(X) = \frac{|d_f - \bar{d}'| + |d_l - \bar{d}'| + \sum_{i=1}^{|X|-1} |d_i - \bar{d}'|}{(|X| + 1)\bar{d}'}$$



donde  $\bar{d}' = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{|X|-1} d_i}{|X|+1}$ . Esta métrica representa la proporción de desviación respecto al promedio de distancias, incluyendo las distancias extremas. La nueva métrica en el contraejemplo expuesto, presenta los valores  $\Delta'(A) = 0,72$  y  $\Delta'(B) = 0,17$ . Según la métrica  $\Delta'$ , B está mejor distribuida que A, como cabía esperar.

### Experiencia computacional

Respecto a la experiencia computacional hemos utilizado las instancias de 50 nodos obtenidas a partir de las existentes en:

[http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/Engl/uflp\\_dg\\_eng.html](http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/Engl/uflp_dg_eng.html)

al igual que en las investigaciones anteriores. Los costes fijos utilizados han sido  $f_j = 500 \forall j \in F$ , el coste de emergencia  $\theta_i = 100 \forall i$ . El parámetro  $q$  ha sido fijado a 0.05.

Hasta donde conocemos, actualmente no existe un método para obtener la frontera Pareto eficiente del problema RFLP. Por ello, para obtener la frontera Pareto eficiente de las instancias analizadas, se ha obtenido para cada instancia las soluciones resultantes al resolver de manera exacta el modelo lineal fijando el valor de  $\alpha$  a lo largo del intervalo  $[0, 1]$  e incrementándolo sucesivamente mediante pasos de longitud 0,1. Por otro lado, hemos procesado el algoritmo heurístico, deteniéndolo tras 100 iteraciones sin cambios en la nueva población generada. Finalmente, hemos considerado como frontera Pareto eficiente cada punto no dominado procedente del conjunto formado por la unión de las soluciones obtenidas por ambos métodos.

	Exacto	Heurístico	% Coincidentes	% No dominadas	% Dominadas
GapA	5.63	19.70	23.01	71.40	5.58
GapB	5.27	19.93	13.19	71.26	15.55
GapC	5.27	19.10	0	74.35	25.65
Total	5.39	18.58	12.14	72.37	15.49

Tabla 3.1: Promedios del número de soluciones

La Tabla 3.1 muestra el promedio del número de soluciones obtenidas mediante cada método, así como distintos porcentajes. Cada celda de las filas GapA, GapB y GapC es

el promedio obtenido tras procesar 30 instancias, procesándose 90 instancias en total. La columna *Exacto* contiene el promedio del número de soluciones obtenidas mediante el método exacto, y la columna *Heurístico* el número de soluciones no dominadas obtenidas mediante el algoritmo heurístico. La columna 3, *Coincidentes*, contiene el porcentaje de soluciones heurísticas que han sido obtenidas también mediante el método exacto. La columna 4 muestra el porcentaje de soluciones heurísticas no dominadas mediante el conjunto de soluciones exactas, y la columna 5, el porcentaje de soluciones heurísticas dominadas.

Podemos observar que el promedio total del número de soluciones obtenidas mediante el método exacto así como mediante el algoritmo heurístico son 5,39 y 18,58 respectivamente. Obviamente, todas las soluciones obtenidas por el método exacto son no dominadas, mientras que un 15,49% de las soluciones heurísticas son dominadas por alguna solución exacta. Cabe destacar que del total de soluciones de la frontera Pareto eficiente, el 84,51% lo proporciona el algoritmo heurístico, frente al 28,61% que son obtenidas mediante el método exacto. El 13,12% de las soluciones se obtienen mediante ambos métodos y solo el 15,49% de las soluciones heurísticas son dominadas. La Tabla 3.1 ya evidencia la buena convergencia del algoritmo heurístico debido al elevado número de soluciones no dominadas y coincidentes obtenidas.

	$\Upsilon$ Heurístico	$\Delta'$ Exacto	$\Delta'$ Heurístico
GapA	0.0036	0.88	0.76
GapB	0.0447	0.82	0.67
GapC	0.0242	0.78	0.73
Total	0.0242	0.83	0.72

Tabla 3.2: Métricas

La Tabla 3.2 muestra los valores promedio de las métricas de convergencia y dispersión. Las primera columna muestra los valores promedios de la métrica  $\Upsilon$ , la proximidad a 0 de los promedios obtenidos, enfatiza la calidad convergente del método. Obsérvese que los valores de  $\Upsilon$  para el método exacto no son reseñados puesto que,

obviamente, estos son 0.

Respecto a las medidas de diversidad, la dispersión del conjunto de soluciones obtenidas mediante el método heurístico, mejora en todos los casos la dispersión obtenida mediante el método exacto.

	Exacto	Heurístico
GapA	658.47	90.07
GapB	447.93	92.13
GapC	720.97	105.70
Total	609.12	95.97

Tabla 3.3: Promedio de tiempos

Finalmente, la Tabla 3.3 muestra el tiempo de procesamiento empleado para resolver cada grupo de instancias mediante cada método. Observando los promedios totales, el método exacto tarda en resolver cada instancia un promedio de 609,12 segundos (11 modelos lineales con  $\alpha$  entre 0 y 1 son resueltos para cada una de las 90 instancias) frente una media de 95,97 segundos que necesita el método heurístico.

## 3.2. Conclusiones

En la primera aportación se presentó una formulación compacta para el problema de localización de instalaciones no fiables. Los resultados computacionales resultaron satisfactorios, ilustrando que dicha formulación mejora la formulación original en un amplio conjunto de instancias de diferentes tamaños. Se resaltó también la influencia del número de plantas que no fallan sobre la dificultad de resolución del problema.

La segunda aportación, evidenció el error que podría cometerse al relajar el carácter entero de las variables de asignación en el modelo RFLP original. La relajación correcta del carácter entero de las variables contribuye considerablemente a mejorar el tiempo de resolución computacional. La principal conclusión de la segunda contribución es la

aportación del conjunto de restricciones (2.11) que permite la correcta relajación del carácter entero de las variables de asignación para cualquier instancia.

En el tercer trabajo se propusieron y analizaron cuatro modelos alternativos para la inclusión de las limitaciones de capacidad en el problema RFLP. Los modelos propuestos se obtuvieron siguiendo diferentes motivaciones, aunque todos ellos persiguieron el mismo objetivo: contener las sobrecargas de capacidad de las instalaciones y contener también las probabilidades de que estas se produzcan.

Por último, en el estudio sobre la obtención de las soluciones Pareto eficientes del problema RFLP, se diseñó un algoritmo que proporciona un conjunto de soluciones con una elevada convergencia, así como una buena dispersión a lo largo de la frontera Pareto óptima, proponiéndose además, una nueva métrica para medir la diversidad de distintos conjuntos de soluciones.



# CAPÍTULO 4

---

## Separatas

---

- *J. Alcaraz, M. Landete, J. F. Monge, and J. L. Sainz-Pardo. (2015) Strengthening the reliability Fixed-charge location model using clique constraints. Computers & Operations Research, 60(1):14-26*

---

# Separatas

---

- *J. L. Sainz-Pardo, J. Alcaraz, M. Landete, and J. F. Monge. (2016) On relaxing the integrality of the allocation variables of the reliability fixed-charge location problem. Journal of Global Optimization, Doi: 10.1007/s10898-016-0439-z*



---

# Separatas

---

- *J. L. Sainz-Pardo, M. Albareda-Sambola, M. Landete, and J. F. Monge. (2016) Introducing capacities in the location of unreliable facilities. Optimization Online, No. 5451, Vol. 05*



---

## Bibliografía

---

- J. Alcaraz, M. Landete, and J.F. Monge. Design and analysis of hybrid metaheuristics for the reliability p-median problem. *European Journal of Operational Research*, 222: 54–64, 2012.
- J. Alcaraz, M. Landete, J.F. Monge, and J.L. Sainz-Pardo. Strengthening the reliability fixed-charge location model using clique constraints. *Computers & Operations Research*, 60(1):14–26, 2015.
- O. Berman, D. Krass, and M. Menezes. Facility reliability issues in netpaper p-median problems: strategic centralization and co-location effects. *Operations Research*, 55: 332–352, 2007.
- O. Berman, D. Krass, and M. Menezes. Locating facilities in the presence of disruptions and incomplete information. *Decision Sciences*, 40(4), 2009.
- T. Cui, Y. Ouyang, and Z.M. Shen. Reliable facility location design under the risk of disruptions. *Operations Research*, 58(4):998–1011, 2010.
- K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, 2002.
- Z. Drezner. Heuristic solution methods for two location problems with unreliable facilities. *Journal of the Operational Research Society*, 38:509–514, 1987.



- 
- K. Fleszar. An effective vns for the capacitated p-median problem. *European Journal of Operational Research*, 191:612–622, 2008.
- G. Laporte, S. Nickel, and F. Saldanha da Gama. Location science. *Springer*, Springer. ISBN 978-3-319-13111-5, 2015.
- S.D. Lee and W.T. Chang. On solving the discrete location problem when the facilities are prone to failure. *Applied Mathematical Modelling*, 31:817–831, 2007.
- Q. Li, B. Zeng, and A. Savachkin. Reliable facility location design under disruptions. *Computers & Operations Research*, 40(4):901–909, 2013.
- X. Li. Reliable facility location design and traffic sensor deployment under probabilistic disruptions. *PhD University of Illinois*, 2011.
- X. Li and Y. Ouyang. Reliable sensor deployment for netpaper traffic surveillance. *Transportation Research Part B*, 45(1):218–231, 2010.
- M. Lim, M. S. Daskin, A. Bassamboo, and S. Chopra. A facility reliability problem: Formulation, properties, and algorithm. *Naval Research Logistics*, 57(1):58–70, 2010.
- M. Melo, S. Nickel, and F. Saldanha-Da-Gama. Facility location and supply chain management, a review. *European Journal of Operational Research*, 196:401–412, 2009.
- N. Mladenovic, J. Brimberg, P. Hansen, and J.A. Moreno-Pérez. The p-median problem: a survey of metaheuristic approaches. *European Journal of Operational Research*, 179: 927–939, 2007.
- Y. Ouyang, X. Li, C.P.L. Barkan, A. Kawprasert, and Y.C. Lai. Optimal locations of railroad wayside defect detection installations. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24(5):309–319, 2009.
- P. Peng, L.V Snyder, A. Lim, and Z. Liu. Reliable logistics netpapers design with facility disruptions. *Transportation Research Part B*, 45:1190–1211, 2011.
-

- 
- R. Rajagopal and P. Varaiya. Health of californias loop detector system. *California PATH Research Report*, UCB-ITS-PRR-2007-13, 2007.
- C. Revelle, H. Eiselt, and M. Daskin. A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science. *European Journal of Operational Research*, 184:817–848, 2008.
- C.S. ReVelle and H.A. Eiselt. Location analysis: A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research*, 165:1–19, 2005.
- J.L. Sainz-Pardo, M. Albareda-Sambola, M. Landete, and J.F. Monge. Introducing capacities in the location of unreliable facilities. *Optimization Online*, No. 5451, Vol. 05, 2016a.
- J.L. Sainz-Pardo, J. Alcaraz, M. Landete, and J.F. Monge. On relaxing the integrality of the allocation variables of the reliability fixed-charge location problem. *Journal of Global Optimization*, 1-18 Doi: 10.1007/s10898-016-0439-z, 2016b.
- Z.M. Shen, R.L. Zhan, and J. Zhang. The reliable facility location problem: Formulations, heuristics, and approximation algorithms. *Inform Journal On Computing*, 23:470–482, 2011.
- L.V. Snyder. Facility location under uncertainty: A review. *IIE Transactions*, 38:537–554, 2006.
- L.V. Snyder and M.S. Daskin. Reliability models for facility location: the expected failure cost case. *Transportation Science*, 39:400–416, 2005.
- L.V. Snyder, Z. Atan, P. Peng, Y. Rong, A. Schmitt, and B. Sinsoysal. Or/ms models for supply chain disruptions: a review. *Technical report*, 2010.
- R.L. Zhan. Models and algorithms for reliable facility location problems and system reliability optimization. *PhD University of Florida*, 2007.
-