Universidad Miguel Hernández

Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica

Contribuciones de la teoría de juegos a la gestión de la producción y la logística

ELISABETH GUTIÉRREZ NÚÑEZ

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por la Universidad Miguel Hernández, realizada bajo la dirección de los doctores D. Joaquín Sánchez Soriano y Dña. Natividad Llorca Pascual.

D. JOAQUIN SÁNCHEZ SORIANO, Catedrático de Universidad del departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche y Dña. NATIVIDAD LLORCA PASCUAL, Profesora Titular de Universidad del departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche

CERTIFICAN:

Que la presente memoria "Contribuciones de la teoría de juegos a la gestión de la producción y la logística" ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica dentro del programa de doctorado de Tecnologías Industriales y de Telecomunicación de la Universidad Miguel Hernández de Elche por el ingeniero Dña. ELISABETH GUTIÉRREZ NÚÑEZ, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autorizan la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universidad Miguel Hernández, firmando el presente certificado.

Elche, 19 de junio de 2017.

Fdo. Dr. Joaquín Sánchez Soriano

Fdo. Dra. Natividad Llorca Pascual

A mi madre

A Joaquín y Nati por dedicarme su tiempo

A Geor por enseñarme su vocación personal hacia el trabajo

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis concluye una etapa importante en mi vida como es mi formación académica y deseo expresar mi sincero agradecimiento a las personas que lo han hecho posible.

Deseo manifestar mi agradecimiento a mis directores de tesis, Joaquín y Nati, los cuales han invertido en mí lo más preciado que una persona puede tener: su tiempo. Gracias no sólo por este trabajo sino por todos los conocimientos que he adquirido al estar con vosotros. Deseo y espero que me permitáis continuar trabajando con vosotros pues no tiene precio para mí el tiempo que podáis compartir conmigo.

Quiero agradecer a mi familia, Mario y Pablo, su apoyo incondicional y su comprensión a lo largo de este camino. Soy una persona extraordinariamente afortunada por compartir mi vida con vosotros.

Gracias Dios mío por acompañarme en tantas noches con pocas horas de sueño.

Quiero agradecer a mis amigos su compañía y la confianza que siempre han mostrado depositar en mí. Especialmente deseo nombrar a Cristina Bolaños Collado, Juan Manuel Bellón, Pia Cramling, Micaela Ilundain, Ana Mata, Javier Llorens, Rafael Sebastiá, Georgina Sebastiá Blanes y Paloma Payá.

Por último deseo mostrar mi agradecimiento dentro de mi entorno profesional, tanto a Ángel Gimenez Sierra como a Sonia Hernández Ferrer por el apoyo mostrado hacia el trabajo que realizo. Quiero también mencionar a Catalina Espín pues es el ejemplo vivo de dedicación y amor a su profesión, espejo en el que cualquier profesional debe querer verse reflejado en algún momento de su vida.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta memoria se describen y analizan, desde la perspectiva de la Teoría de Juegos, dos situaciones relacionadas con los campos de la producción y la logística.

La Teoría de Juegos es la disciplina que estudia la modelización y análisis de situaciones de conflicto y cooperación entre varios decisores, que se denominan jugadores y se suponen racionales. Los trabajos de Zermelo [79], sobre algunas clases de juegos bipersonales de suma nula con información perfecta, y la demostración del teorema del minimax bajo condiciones generales por von Neumann [75] son algunos de los trabajos pioneros en Teoría de Juegos.

John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern publicaron en 1944 el libro "Theory of Games and Economic Behaviour" [76], que significó el punto de partida de la Teoría de Juegos como disciplina científica independiente.

Se suele diferenciar entre dos enfoques de la Teoría de Juegos: el cooperativo y el no cooperativo, dependiendo de si los jugadores disponen o no de mecanismos que les permitan alcanzar acuerdos vinculantes. La Teoría de Juegos cooperativos aborda problemas tales como el reparto de los beneficios derivados de la cooperación. En los juegos no cooperativos los agentes toman sus decisiones de forma independiente, sin tener ningún compromiso con los otros jugadores.

Los juegos cooperativos se clasifican en Juegos con Utilidad Transferible (juegos TU) y Juegos con Utilidad No Transferible (juegos NTU). En los primeros, se asume la existencia de algún objeto de cambio que puede representar la utilidad que se puede transferir linealmente de un jugador a otro; mientras que en los últimos esto no es posible. En los Juegos con Utilidad Transferible se distingue entre juegos en forma de función característica y juegos con estructuras de particiones, Thrall y Lucas [69], también conocidos como juegos con externalidades.

Las aplicaciones de la Teoría de Juegos dentro del ámbito económico se han extendido a otras áreas como las Ingenierías, la Medicina, las Ciencias Sociales y del Comportamiento, las Ciencias Políticas o la Biología Evolutiva. Una consecuencia de los grandes avances en las últimas décadas es, por ejemplo, la concesión en 1994 del Premio Nobel de Economía a los teóricos de juegos John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten. Al que le han seguido los otorgados a Aumann y Schelling en 2005, a Hurwicz, Maskin y Myerson en 2007, a Roth y Shapley en 2012, y a Jean Tirole en 2014.

En la primera parte de la presente memoria, Capítulos 2 a 5, se aborda el análisis de los juegos de producción lineal (Owen [53]) con un recurso común. En la segunda parte, Capítulo 6, se estudia el problema de transporte en el contexto de los juegos de elección múltiple. Al final de cada capítulo, hemos incorporado un epígrafe de comentarios en el que se resumen los resultados más interesantes del mismo y las cuestiones que han quedado abiertas. La primera parte que ha sido desarrollada en colaboración con los profesores Sánchez Soriano, Llorca y Mosquera, y aparece recogida en los trabajos "On the effects of a common-pool resource on cooperation among firms with linear technologies" [25], "Equilibria in a competitive model arising from linear production situations with a common-pool resource" [28] y "Sustainable allocation of greenhouse gas emission permits for firms with Leontief technologies" [26], el segundo aceptado para su publicación en TOP y el último en proceso de revisión; está compuesta por cuatro capítulos en los que se aborda el estudio de situaciones de producción lineal (LP) en las que se emplea un recurso común, gestionado por un agente externo a los productores, del que se dispone de una cantidad limitada, por lo que puede llegar a ser escaso.

¿Por qué estudiar este tipo de problemas? En la literatura podemos encontrar muchas situaciones relacionadas con la gestión de recursos naturales que son necesarios para las empresas para poder producir. En estas situaciones, si estos recursos no se gestionan adecuadamente, se puede llegar a producir la conocida como Tragedia de los Comunes (Hardin [29]), es decir, su sobrexplotación. No es difícil encontrar ejemplos de este tipo de situaciones en la realidad. Además, la aplicación de la Teoría de Juegos a la gestión de recursos naturales es también un tema recurrente en la literatura (véase, por ejemplo, Dinar et al. [14] entre otros). Un problema de actualidad desde hace más de 20 años, que puede enmarcarse dentro del tipo de problemas de producción con un recurso común externo, es el de las emisiones de CO_2.

En el Capítulo 2 de esta memoria presentamos una breve introducción a la Teoría de Juegos cooperativos, haciendo hincapié en algunos conceptos de solución, así como en los juegos en forma de función característica con estructuras de particiones que se utilizarán a lo largo de la misma. Asimismo, se incluye una sección dedicada a describir algunos resultados básicos de Programación Lineal. Se incluye también una sección correspondiente a los juegos de producción lineal y una última sección en la que se introduce la existencia de un recurso común gestionado por un agente externo a los productores y que se encuentra en una cantidad limitada, dando lugar a los juegos de producción lineal con un recurso común externo, en adelante juegos LPP.

En el Capítulo 3 se abordan los nuevos juegos LPP introducidos en el capítulo anterior. Se analizan dichas situaciones en función de la información de que disponen los jugadores con respecto a cómo se va a distribuir el recurso común externo. El caso en que los jugadores carecen de la mencionada información se estudia bajo dos enfoques: el pesimista y el optimista. En ambos casos nos centramos en el núcleo de los correspondientes juegos.

En el Capítulo 4 se estudian los juegos LPP desde un enfoque no cooperativo. Se define un juego no cooperativo asociado al problema que sirva para la obtención de una asignación del recurso externo entre los productores. Se analizan los equilibrios de Nash en estrategias puras que existen en dichos juegos, obteniéndose un conjunto muy grande, por lo que parece razonable utilizar algún tipo de mecanismo para distribuir el recurso, cuando es escaso, que nos conduzca a la selección de un equilibrio de Nash que pueda tener buenas propiedades. Un método para ello se verá en el capítulo siguiente.

En el Capítulo 5 se utilizan técnicas de bancarrota, habituales en la distribución de recursos escasos, para obtener distribuciones en el núcleo del juego asociado. Dada una situación LPP asumimos que el gestor del recurso común anuncia qué regla de bancarrota se utilizará para repartir. Por lo tanto, se complementa tanto el Capítulo 3 como el Capítulo 4, el primero por la información disponible y el segundo por la forma de elegir un equilibrio. En función de la regla de bancarrota seleccionada (proporcional ($PROP$), constrained equal awards (CEA), constrained equal losses (CEL), Talmud (TAL), etc.) se definen diferentes juegos con externalidades. Se utilizarán reglas como la proporcional o la CEA para evitar la posibilidad de que una empresa no reciba nada, por lo que quedaría excluida del sistema. Se estudia el núcleo de estos juegos porque se pretende comprobar si los beneficios generados por la asignación del recurso común son coalicionalmente estables. Asímismo, se estudia si las reglas son compatibles con incentivos.

Los tres capítulos anteriores se pueden aplicar, por ejemplo, a la gestión de los permisos de emisión de dióxido de carbono. El enfoque sería diferente a los dos planteamientos más comunes en este ámbito, donde se pretende controlar las emisiones contaminantes, que son la implantación de impuestos (tasas) o la implantación de sistemas en los que existe un límite máximo de permisos de emisiones, y donde se permite a las empresas comprar y vender dichos permisos en un mercado para ello.

Por un lado, en los sistemas en los que existe una tasa sobre las emisiones, se fija el precio por unidad de éstas, pero se deja sin definir la cantidad máxima de emisión. Por otro lado, en un sistema con un límite máximo de emisiones y la posibilidad de comerciar con los permisos, se establece la cantidad de emisiones máximas permitidas, pero se deja sin definir el precio de mercado ("cap and trade"). Cada modelo tiene su propio efecto en el comportamiento de las empresas con respecto a sus decisiones operativas (véase, por ejemplo, Bai y Chen [5], Hong et al. [31] y Yenipazarli [78].

Los intentos de abordar las emisiones contaminantes a través de los precios fijando tasas en lugar de límites a las cantidades emitidas se han analizado en Cooper [12] y Nordhaus [49], entre otros. Nordhaus [49] compara los mecanismos orientados a la cantidad de emisiones permitidas con los mecanismos de control del precio y sugiere que estos últimos son más eficientes que los primeros. Por otro lado, Keohane [39], por ejemplo, dice que los sistemas orientados a la cantidad de emisiones tienen interesantes ventajas en comparación con la aplicación de tasas. El sistema de comercio de emisiones de la Unión Europea aplica la tipología cap and trade y es probablemente el sistema de comercio más conocido. He et al. [30] compara la eficacia y eficiencia de los sistemas orientados a la cantidad de emisiones permitidas y los sistemas orientados a la aplicación de tasas en el contexto de la generación de energía. Ambos sistemas son ampliamente utilizados en la práctica, (véase el estudio realizado por Carl y Fedor [30] sobre las tasas aplicadas en el carbón y los sistemas de control de las emisiones permitidas) y han atraído considerable atención durante las últimas decadas donde existe mucha literatura al respecto. Existen diversos artículos a favor del sistema de gestión orientado a la cantidad de emisiones permitidas, como el mencionado de Keohane [39], y muchos otros a favor del sistema que emplea la aplicación de tasas, véase por ejemplo Avi-Yonah y Uhlmann [4], y también otras opciones como la denominada "válvula de seguridad", Jacoby et al. [37], que plantea una combinación de ambos métodos.

El enfoque que se plantea en los capítulos 3 a 5 puede considerarse un método híbrido para el control de las emisiones de gas, teniendo en cuenta que determina tanto las cantidades como los precios y permite una especie de mercado de permisos. Hasta donde sabemos no existen otros modelos que planteen un enfoque como el que proponemos. Nuestro enfoque permitiría mitigar algunas de las deficiencias potenciales de ambos sistemas. En particular, la sobreestimación del límite de emisiones en el sistema orientado a limitar la cantidad permitida, el no control de la reducción de emisiones, si es que existe, en el sistema de aplicación de tasas, y las dificultades de medir cuántas compañías contaminan realmente en ambos sistemas. Los dos primeros inconvenientes están relacionados con la posibilidad de no tener éxito en la reducción de emisiones y el último está asociado al conocimiento de las autoridades sobre las emisiones reales. Así mismo nuestra propuesta se ajustaría a las condiciones establecidas por el Acuerdo de París (CMNUCC, 2015) [74], donde, a través de un acuerdo vinculante, 188 países se han comprometido a controlar sus emisiones de gases de efecto invernadero, contrariamente a lo sucedido con el Protocolo de Kyoto en el que sólo algunos países se comprometieron, y se han fijado las contribuciones nacionales que se revisarán a la baja cada cinco años. Un resumen interesante sobre el tema se puede encontrar en Carraro [11] . Por lo tanto, cada país tiene un límite para cada período que debe ser distribuido entre los sectores involucrados. Al mismo tiempo, con nuestro modelo nos aseguraríamos que cada tonelada de CO_2 emitida tenga un precio. Mediante la introducción de esta tasa (precio por unidad emitida) se pueden alcanzar dos objetivos: recaudar fondos para todos los países -porque tienen que invertir en investigación, desarrollo y transferencia de nuevas tecnologías- y apoyo financiero para los países en desarrollo, que necesitan dicho apoyo para el cumplimiento de los compromisos que se establecen en el acuerdo.

En la segunda parte de esta memoria, se estudian los problemas de transporte. Un problema de transporte finito describe una situación en la que las demandas de cierto bien de un conjunto de minoristas deben ser cubiertas por las ofertas realizadas por un conjunto de productores de dicho bien. El transporte de una unidad de mercancía desde un productor hasta un minorista genera un beneficio. El objetivo de los agentes implicados es maximizar el beneficio total derivado del transporte. Esta parte ha sido desarrollada en colaboración con los profesores Sánchez Soriano, Llorca y Branzei y aparece recogida en el trabajo "On new solution concepts for multi-choice two-sided market games" [27].

En el Capítulo 6, después de analizar los juegos asociados a problemas de transporte finitos siguiendo el modelo descrito en Sánchez Soriano et al. [60], se aborda el estudio de las situaciones de transporte de elección múltiple. Se estudian el núcleo y el prenúcleo de los juegos de transporte de elección múltiple y se introduce un concepto de solución tipo núcleo, que denominamos núcleo de Owen. Por último, introducimos un nuevo concepto de solución, que llamaremos conjunto de contribuciones igualitarias por pares, del que estudiamos las propiedades que satisface.

En conclusión, a lo largo de esta memoria, se estudian, desde la perspectiva de la Teoría de Juegos, dos problemas habituales en el ámbito de la organización industrial, la gestión de la producción y el transporte, lo que da pie al título de esta tesis doctoral.

Capítulo 2

Algunos juegos de producción

En este capítulo abordamos el estudio de las situaciones en las que un cierto número de empresas desean coordinarse a la hora de planificar su producción utilizando para ello los recursos y técnicas de producción que poseen en conjunto. La Teoría de Juegos cooperativos resulta una herramienta muy eficaz en el análisis de este tipo de situaciones. Por ello, comenzamos el capítulo proporcionando una serie de conceptos básicos sobre estos juegos, así como con una sección de preliminares sobre Programación Lineal. A continuación, describimos los juegos de producción lineal introducidos por Owen e introducimos los juegos de producción lineal en los que existe un recurso externo, que es necesario comprar para producir y del que sólo se dispone de una cantidad limitada.

2.1. Juegos cooperativos

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan alcanzar acuerdos vinculantes (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que se trata de estudiar los resultados que puede obtener cada uno de los subconjuntos de jugadores (coaliciones) que se puedan formar.

Los juegos cooperativos se clasifican en juegos con utilidad transferible (juegos TU) y juegos con utilidad no transferible (juegos NTU). En los primeros, se asume la existencia de algún objeto de cambio que puede representar la utilidad y, además, ésta se puede transferir linealmente de un jugador a otro, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse libremente entre los jugadores que la componen, mientras que en los segundos esto no es posible. Este capítulo se centra en juegos con utilidad transferible.

2.1.1. Conceptos básicos sobre juegos TU en forma de función característica

En esta sección se recogen todos aquellos conceptos básicos de los juegos TU en forma de función característica que son utilizados en esta memoria, junto con otros que sirven para dar completitud al contenido presentado. La determinación de los elementos que componen un juego cooperativo TU en forma de función característica incluye la especificación de los decisores que intervienen en el mismo, que denominaremos jugadores, y la función característica, que define la ganancia que puede obtener cada coalición de jugadores.

Definición 2.1 *Un juego cooperativo con utilidad transferible* (TU) *es un par* (N, v)*, donde* N *es cualquier conjunto finito de números naturales que identifican a los jugadores, y* v *es la función característica definida sobre* $2^N = \{S \mid S \subset N\}$ *con valores reales, que verifica* $v(\varnothing) = 0$.

Los diferentes elementos que aparecen en esta definición se pueden interpretar como sigue. Los subconjuntos de N, que denotaremos por S, representan a las posibles coaliciones de jugadores que se pueden formar. El valor de la coalición S, $v(S)$, representa la utilidad que los miembros de S pueden garantizarse si deciden cooperar, independientemente de lo que haga el resto de jugadores (es decir, los miembros de $N \setminus S$). El término transferible supone la existencia de un bien, totalmente divisible, cuya utilidad para los jugadores es directamente proporcional a su cantidad.

Denotaremos por G^N al conjunto de todos los juegos cooperativos TU con conjunto de jugadores N, y por G al conjunto de todos los juegos TU.

Dados dos juegos (N, v), $(N, w) \in G^N$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se pueden definir los siguientes juegos:

- El juego producto por un escalar, $(N, \lambda v) \in G^N$, cuya función característica se define como

$$(\lambda v)(S) = \lambda v(S), \text{ para toda coalición } S \subset N.$$

- El juego suma, $(N, v + w) \in G^N$, cuya función característica se define como

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \text{ para toda coalición } S \subset N.$$

El conjunto de todos los juegos TU en forma de función característica y conjunto de jugadores N, G^N, con la operación interna suma y la externa producto por un escalar así definidas, es un espacio vectorial real. En 1953, Shapley [64] probó que dicho espacio tiene dimensión $2^n - 1$, donde $n = \mid N \mid$, y que los llamados juegos de unanimidad constituyen una base del mismo.

Se dice que un juego (N, v) es de unanimidad si existe una coalición $T \subset N$, tal que su función característica se puede expresar, para toda coalición $S \subset N$, de la siguiente manera,

$$u(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subset S \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así pues, cualquier juego TU se puede expresar de manera única como una combinación lineal de dichos juegos. Es decir, si $(N, v) \in G^N$

$$v = \sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \lambda_T u_T,$$

donde u_T denota el juego de unanimidad correspondiente a la coalición T y el escalar λ_T es el número real dado por

$$\lambda_T = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T|-|S|} v(S).$$

Dado un juego $(N, v) \in G^N$ se pueden distinguir los siguientes tipos de jugadores:

- Un jugador i se dice que es un títere, si para toda $S \subset N \setminus \{i\}$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}).$$

- Un jugador i se dice que es nulo, si para toda $S \subset N$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

- Dos jugadores i, j se dice que son simétricos, si para toda $S \subset N \setminus \{i, j\}$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

Además de éstos, podemos considerar otros dos tipos de jugadores, derivados de las propiedades de complementariedad y de sustitubilidad estudiadas por Shapley [65] en las soluciones óptimas del problema de asignación:

- Dos jugadores i, j se dice que son complementarios, si para toda $S \subset N \setminus \{i, j\}$

$$\begin{aligned} v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\}) &\geq v(S \cup \{i\}) - v(S), \\ v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{i\}) &\geq v(S \cup \{j\}) - v(S). \end{aligned}$$

- Dos jugadores i, j se dice que son sustitutos, si para toda $S \subset N \backslash \{i, j\}$

$$\begin{aligned} v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\}) &\leq v(S \cup \{i\}) - v(S), \\ v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{i\}) &\leq v(S \cup \{j\}) - v(S). \end{aligned}$$

Normalmente, las propiedades que posee la función característica del juego son las que se utilizan para distinguir distintos tipos de juegos. Así, un juego $(N, v) \in G^N$ se dice:

- *0-normalizado:* Si $v(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.
- *monótono:* Si $v(S) \leq v(T)$, $\forall S, T \subset N$ tales que $S \subset T \subset N$.
- *aditivo:* Si $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \subset N$.
- *superaditivo:* Si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, $\forall S, T \subset N$ tales que $S \cap T = \emptyset$.
- *convexo:* Si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$, $\forall S, T \subset N$.

Los juegos convexos fueron introducidos por Shapley [67]. Se puede probar que la condición dada anteriormente es equivalente a la siguiente:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),$$

para todo $i \in N$ y cualesquiera S, $T \subset N$, tales que $S \subset T \subset N \backslash \{i\}$.

Intuitivamente podemos observar que, si una coalición S está contenida en otra coalición T, el juego es convexo si la contribución de un jugador i a T es mayor que a S. Es decir, un juego es convexo si la aportación de un jugador a una coalición no decrece al incorporar más jugadores a esa coalición. Si un juego es convexo entonces también es superaditivo.

Además, las nociones de subaditividad y concavidad son las mismas cambiando el sentido de la desigualdad.

2.1.2. Conceptos de solución

Al analizar un juego cooperativo con utilidad transferible, uno de los principales problemas que se plantean es cómo repartir la utilidad disponible, derivada de la cooperación, entre los jugadores. Dado el juego $(N, v) \in G^N$, un reparto o pago de beneficios (o costes) entre todos los jugadores es un elemento de $\mathbb{R}^N$, donde cada una de las coordenadas indica lo que le corresponde a cada uno de los jugadores.

A la hora de buscar repartos razonables, la primera condición que surge de forma natural es imponer la distribución de los beneficios totales $v(N)$ entre los diferentes jugadores. Los vectores $x \in \mathbb{R}^N$ que satisfacen dicha condición, conocida como eficiencia,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \tag{2.1}$$

se denominan pagos eficientes o preimputaciones del juego (N, v).

Otra de las condiciones que deberíamos exigir a los repartos es que el pago al jugador i, a través del vector x, sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego, es decir, que satisfagan la propiedad de racionalidad individual:

$$x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N. \tag{2.2}$$

Las preimputaciones que cumplen este principio se llaman imputaciones del juego (N, v). El conjunto de todas ellas se denota por $I(v)$. Denotaremos por IG^N al conjunto de todos los juegos cooperativos TU en forma de función característica con conjunto de jugadores N, tales que su conjunto de imputaciones es no vacío, y por

IG al conjunto de todos los juegos TU con $I(v) \neq \varnothing$.

Definición 2.2 *Un concepto de solución para la clase de juegos $G_0 \subset G$, es una aplicación punto a conjunto, Ψ, definida sobre $G_0 \subset G$, que a cada juego $(N, v) \in G_0$ le asocia un subconjunto de vectores de pago, $\Psi(v) \subset \mathbb{R}^N$. Un concepto de solución que asigna un único elemento de $\mathbb{R}^N$ a cualquier juego de G_0, se denomina valor.*

Uno de los conceptos de solución más utilizados es el núcleo de un juego. Un antecedente del concepto de núcleo, en un contexto económico, se puede encontrar en el trabajo de Edgeworth [16]. La formalización de la definición del núcleo fue introducida por Gillies [23]. Es un concepto de solución conjuntista, es decir, proporciona un conjunto de repartos que son propuestas de pago difícilmente rechazables por las diferentes coaliciones que se pueden formar. Una propuesta de reparto que conceda a una coalición menos de lo que sus miembros se pueden garantizar sin contar con apoyos, puede ser cuestionada por dicha coalición que, en tal caso, podría optar por abandonar la coalición total, N. El concepto de solución denominado núcleo está basado en exigir que sus elementos verifiquen la racionalidad para todas las coaliciones; es decir, que los miembros de cada coalición reciban un pago que sea mayor o igual que el valor de dicha coalición:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \text{para toda } S \subset N. \tag{2.3}$$

Definición 2.3 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$, su núcleo se define como el conjunto*

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = v(N) \ \ y \ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \text{para toda } S \subset N \right\}.$$

Cuando un elemento x del núcleo se propone como una distribución del beneficio total, $v(N)$, cada coalición S obtendrá al menos tanto como puede conseguir por sí misma, puesto que $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. Obsérvese que los elementos del núcleo son imputaciones, ya que además de (2.3) también cumplen las condiciones (2.1) y (2.2). Por lo que, el núcleo es un subconjunto del conjunto de las imputaciones.

Uno de los principales problemas que plantea este concepto de solución es que, en general, no se puede garantizar que sea distinto del vacío. Bondareva [7] y Shapley [66], independientemente, caracterizaron la clase de juegos con núcleo no vacío. Para ello, Shapley introdujo el concepto de coaliciones equilibradas.

Definición 2.4 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$, una colección $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ de subconjuntos no vacíos de N se dice que es equilibrada si existen escalares positivos $\lambda_1, ..., \lambda_m$, denominados pesos, tales que para todo $i \in N$*

$$\sum_{j: i \in S_j} \lambda_j = 1.$$

Definición 2.5 *Si, para cualquier coalición equilibrada, se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v(S_j) \leq v(N),$$

entonces se dice que el juego (N, v) es equilibrado.

El teorema siguiente (Bondareva-Shapley) se da sin demostración, ésta puede consultarse en [7] y [66].

Teorema 2.6 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$, su núcleo es no vacío si y sólo si (N, v) es un juego equilibrado.*

Definición 2.7 *Un juego $(N, v) \in G$ se dice que es totalmente equilibrado si cualquier subjuego (S, v_S) es equilibrado, para toda coalición $S \subset N$, $S \neq \varnothing$.*

Otra propuesta de reparto es el valor de Shapley [64], que propone como pago a cada jugador un promedio ponderado de sus contribuciones marginales a todas las coaliciones de las que forma parte.

Definición 2.8 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$ y una permutación θ se define el vector de pago marginal asociado a θ, x^θ, como*

$$x_i^\theta = v\left(P_i^\theta \cup \{i\}\right) - v\left(P_i^\theta\right) \text{ con } i = 1,...,n, \text{ donde } P_i^\theta = \{j \in N \,|\theta(j) < \theta(i)\}.$$

Definición 2.9 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$ se define el valor de Shapley del mismo como*

$$\Phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Theta^N} x^\theta,$$

donde Θ^N es el conjunto de todas las permutaciones de N.

En 1981 Tijs [72] introduce otro concepto de reparto, el τ valor, que está basado en la búsqueda de un compromiso entre dos puntos que representan las máximas y las mínimas expectativas de los jugadores. El pago utópico (máxima expectativa) de un jugador, representa la contribución marginal del jugador a la coalición total, es decir, es lo máximo que el jugador podría pedir. El derecho mínimo (mínima expectativa) de un jugador es el máximo, entre las coaliciones a las que pertenece, de las cantidades que resultan de calcular para cada jugador lo que le queda en cada coalición después de que el resto de jugadores se lleven su pago utópico.

Definición 2.10 *Dado un juego $(N, v) \in G^N$ y un jugador $i \in N$ se define el pago utópico del jugador i como el valor $M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\})$.*

Definición 2.11 *Dado un juego $(N,v) \in G^N$ y un jugador $i \in N$ se define el derecho mínimo del jugador i como el valor* $m_i(N,v) = \max_{S:i\in S} \left\{ v\left(S\right) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_j(N,v) \right\}$.

Definición 2.12 *Un juego (N,v) se dice que es de compromiso admisible si verifica que*

1. $m(N,v) \leq M(N,v)$ *y*
2. $\sum_{i=1}^{n} m_i(N,v) \leq v\left(N\right) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(N,v)$.

En particular, los juegos equilibrados son de compromiso admisible.

Definición 2.13 *Sean $(N,v) \in G^N$ un juego TU de compromiso admisible, $m(N,v)$ el vector de derechos mínimos y $M(N,v)$ el vector de los pagos utópicos de los jugadores. Se define el τ valor como el reparto que satisface*

$$\tau(N,v) = m(N,v) + \alpha\left(M(N,v) - m(N,v)\right),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i\in N} \tau_i(N,v) = v(N)$.

Con el τ valor cada jugador recibe su mínimo derecho más una cantidad añadida que depende de su pago utópico. Es conocido que, el τ valor no tiene por qué ser un elemento del núcleo.

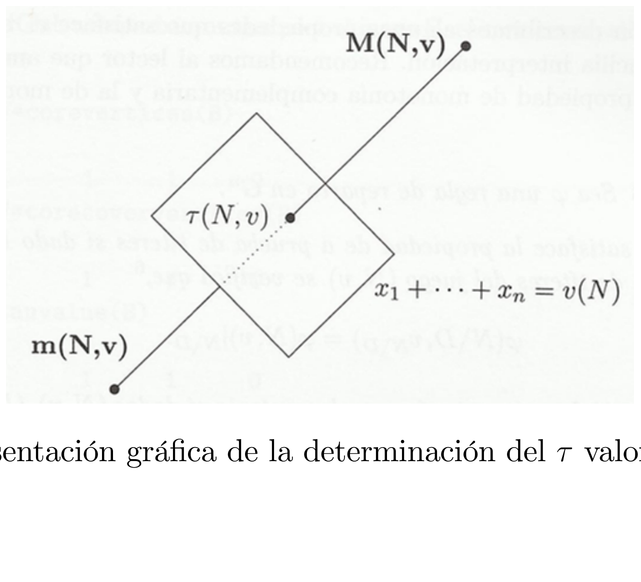

Fig. 2.1: Representación gráfica de la determinación del τ valor. (Fuente: [44])

2.1.3. Juegos con estructuras de particiones

En los juegos cooperativos con utilidad transferible y en forma de función característica, dicha función asigna un número real a cada coalición, llamado valor de la coalición. Sin embargo, una función característica como la definida en la Sección 2.1.1 no puede modelar situaciones en las que el beneficio de una coalición cualquiera depende de otras coaliciones que se pueden formar entre los jugadores no partícipes en la primera, es decir, cuando existen externalidades. De hecho, las externalidades a la coalición son una característica importante de muchas situaciones que se pueden modelizar como un juego cooperativo. Por ejemplo, en el Protocolo de Kyoto, los pagos de los firmantes no sólo dependían de las acciones tomadas por ellos, sino también de las medidas adoptadas por los países no signatarios. Los juegos con utilidad transferible en forma de función característica con estructuras de particiones introducidos por Thrall y Lucas [69] son una forma de presentar la información sobre estas externalidades. Una función característica en forma de estructuras de particiones, si la utilidad es transferible, asigna un número real a cada coalición, pero teniendo en cuenta, además, cada partición que se pueda formar, llamado el valor de la coalición en la partición.

Estos juegos se han estudiado de forma teórica, si bien en el presente trabajo se utilizan en el contexto de los juegos de producción lineal con un recurso común externo. Como se ha mencionado previamente, en estos juegos los pagos a una coalición S dependen no sólo de los recursos de los miembros de S, sino también de cómo los que no están en S formen coaliciones.

Representaremos por $\mathcal{P}(N)$ el conjunto de todas las particiones de N y por $P = \{S_1,...,S_k\}$ a una de esas particiones o estructuras de coalición, donde las coaliciones $S_1,\ldots,S_k$ son disjuntas y su unión es N. El par $(S|\, P)$ tal que $S \in P$ se denomina usualmente una coalición embebida.

Definición 2.14 *Un juego cooperativo en forma de función característica con estructuras de particiones viene definido por* $(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet|P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)})$*, donde* N *representa el conjunto de jugadores,* $\mathcal{P}(N)$ *el conjunto de todas las particiones de* N *y* $V(S|P)$ *con* $S \in P$ *es un número real que representa el beneficio que una coalición* $S \subset N$ *puede obtener cuando se forma la partición* P*.*

Obsérvese que el beneficio que una coalición puede obtener depende de las coaliciones formadas por los otros jugadores en $P \in \mathcal{P}(N)$.

Dada una partición $P \in \mathcal{P}(N)$, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se dice que es factible en P si satisface que $\sum_{i\in S} x_i \leq V(S|P), \forall S \in P$. Denotamos por $\mathcal{F}^P$ el conjunto de todos los vectores factibles en P y $\mathcal{F} = \cup_{P\in\mathcal{P}(N)}\mathcal{F}^P$ denota el conjunto de todos los vectores factibles.

Dados dos vectores x, x' en $\mathbb{R}^n$, decimos que x domina x' mediante S y lo denotamos por $x \; dom_S \; x'$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\sum_{i\in S} x_i \leq V(S|P), \forall P \in \mathcal{P}(N)$ tal que $S \in P$,
2. $x_i > x_i', \forall i \in S$.

Decimos que x domina x' si exite $S \subset N$ tal que $x \; dom_S \; x'$, y lo denotamos $x \; dom \; x'$.

El núcleo de un juego cooperativo en forma de función característica con estructuras de particiones se define como

$$C(V) = \{x \in \mathcal{F} \,|\, \nexists x' \in \mathcal{F} \text{ tal que } x' \; dom \; x\}.$$

Sin embargo, si consideramos otra definición de dominancia, entonces obtendremos un núcleo diferente. Por lo tanto, si cambiamos la condición 1 por

$\overline{1}.$ $\sum_{i\in S} x_i \leq V(S|P)$, para alguna $P \in \mathcal{P}(N)$ con $S \in P$, obtenemos un concepto más restrictivo de dominancia que denotamos por $\overline{dom_s}$ y $\overline{dom}$, respectivamente. El núcleo correspondiente se define ahora como

$$\overline{C}\left(V\right)=\left\{x\in\mathcal{F}\left|\nexists x'\in\mathcal{F}\text{ tal que }x'\ \overline{dom}\ x\right.\right\}.$$

Asociados a cada juego en forma de función característica con estructuras de particiones se pueden introducir dos juegos cooperativos $(N,v^{-})\in G^N$ y $(N,v^{+})\in G^N$, donde sus funciones características vienen dadas por:

$$\begin{aligned} v^{-}\left(S\right)&=\text{mín}\left\{V\left(S|\,P\right)|P\in\mathcal{P}(N)\text{ tal que }S\in P\right\},\\ v^{+}\left(S\right)&=\text{máx}\left\{V\left(S|\,P\right)|P\in\mathcal{P}(N)\text{ tal que }S\in P\right\}.\end{aligned}$$

(N,v^{-}) representa un punto de vista pesimista sobre la ganancia que la coalición S puede obtener, mientras que (N,v^{+}) representa un punto de vista optimista sobre la ganancia que dicha coalición puede obtener. Funaki y Yamato [20] probaron que si $V\left(\{N\}|\,N\right)>\sum\limits_{S\in P}V\left(S|\,P\right),\forall P\in\mathcal{P}(N)$, entonces

$$\begin{aligned}&a)\ C(V)=C(v^{-})\text{ y}\\ &b)\ \overline{C}\left(V\right)=C(v^{+}).\end{aligned}$$

Dadas $P,P'\in\mathcal{P}(N)$, P' es un refinamiento de P si para toda $S'\in P'$ existe $S\in P$ tal que $S'\subset S$ y se denota mediante $P'\subset P$. Utilizando el concepto de refinamiento surge de forma natural una ordenación en el conjunto de las particiones, y con dicha ordenación $(\mathcal{P}(N),\subset)$ es un retículo[1].

2.2. Programación Lineal

Un modelo matemático se dice que pertenece a la Programación Lineal (PL) si la función objetivo y las restricciones que definen el problema son funciones lineales

[1]Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado en el cual existen el supremo y el ínfimo.

de las variables de decisión que implican lo siguiente:

1. Existe proporcionalidad en la función objetivo y las restricciones. Esto significa que si producir una unidad de un producto necesita 3 horas de un determinado recurso, producir 10 unidades requerirá 30 horas.

2. Aditividad. Por ejemplo, si el objetivo es maximizar el beneficio y se fabrican dos productos con beneficios de 8 y 3 unidades monetarias respectivamente, se obtiene un beneficio de 11 unidades monetarias.

En general, un problema lineal se puede formular de la siguiente manera:

$$P: \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ \text{s.a}: & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde c^T denota el vector transpuesto del $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Nos referiremos a este problema como programa o problema primal. Un vector x' es una solución (factible) de este problema si verfica que $Ax' \leq b$ y $x' \geq 0$. Tal solución primal es óptima si $c^T x' \geq c^T x$, para cualquier solución x de P.

El problema dual del programa P es el siguiente problema de minimización

$$D: \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ \text{s.a}: & A^T y \geq c \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Un vector y' es una solución (factible) del dual si satisface $A^T y' \geq c$ e $y' \geq 0$. Dicha solución dual es óptima si $b^T y' \leq b^T y$, para cualquier solución y de D.

La siguiente relación entre las soluciones de ambos problemas se conoce como dualidad débil.

Teorema 2.15 (Dualidad Débil) *Sean x una solución de P e y una solución de D. Entonces, $c^T x \leq b^T y$.*

La demostración de éste y la de los dos resultados siguientes se pueden consultar en cualquier texto de PL, véanse por ejemplo los de Winston [77] o Murty [47]. Esta relación es más fuerte si existe solución óptima en alguno de los problemas del par primal-dual, como muestra el teorema siguiente.

Teorema 2.16 (Dualidad Fuerte) *Si P o D tienen solución óptima, entonces el otro problema también tiene y los valores de ambas funciones objetivo son iguales.*

Otro resultado importante que nos proporciona información acerca de las soluciones primales y duales es el siguiente.

Teorema 2.17 (Holguras Complementarias) *Sean x una solución de P e y una solución de D. Entonces, x es una solución óptima de P e y una solución óptima de D si, y sólo si, $x^T(A^T y - c) = 0$ e $y^T(b - Ax) = 0$.*

Para una interpretación en términos económicos del último resultado véase el texto clásico de Gale (Teorema 1.2 en [21]), donde se analizan como casos particulares los problemas de producción lineal y de transporte.

2.3. Juegos de producción lineal

En esta sección describimos los juegos de producción lineal introducidos por Owen en 1975 [53], cuyas funciones de producción son tales que los inputs deben combinarse en proporciones fijas, la denominada función de producción de Leontief, que es una de las más utilizadas en la literatura de producción.

En una situación LP, los conjuntos N, Q y G[2] representarán, respectivamente, a los productores, recursos y productos. La matriz de producción $A \in \mathbb{R}_+^{Q \times G}$ describe las técnicas de producción lineal de la siguiente manera. Cada técnica de producción sirve para fabricar un producto $j \in G$, por lo que se puede asociar con la columna j de la matriz de producción. Asimismo, se necesitan $A_{kj} = a_{kj}$ unidades del recurso $k \in Q$ para producir una unidad del producto $j \in G$. Los recursos de que disponen los productores se encuentran resumidos en la matriz de recursos $B \in \mathbb{R}_+^{Q \times N}$, donde el productor $i \in N$ posee $B_{ki} = b_k^i$ unidades del recurso $k \in Q$. Los precios vienen dados por el vector $p \in \mathbb{R}_+^G \backslash \{0\}$.

Se supone que existe una cantidad positiva de cada recurso, es decir, que para todos los recursos $k \in Q$ existe un productor i tal que $b_k^i > 0$. Además, si hay un producto j con un precio de mercado positivo, no se permite “output sin input” y, por lo tanto, existe al menos un recurso $k \in Q$ con $a_{kj} > 0$. Por último, se asume también que todo lo que se produce se puede vender en el mercado.

Para maximizar su beneficio, el productor $i \in N$ necesita un plan óptimo de producción $x \in \mathbb{R}_+^G$, que le indicará cuánto debe producir de cada mercancía. No todos los planes de producción son factibles, puesto que cada productor sólo puede hacer uso de sus recursos. La cantidad de recursos que se necesita en un plan de producción x, Ax, no debe exceder la cantidad de recursos de que dispone el productor $i \in N$, $Be^i = b^i$, donde e^i denota el i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^N$. Además, los planes de producción deben ser no negativos, ya que sólo estamos interesados en producir cantidades no negativas de productos, y su beneficio es igual a $p^T x$.

[2] Utilizaremos esta denominación siempre que no exista confusión con el conjunto G de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible introducidos en la sección 2.1.2.

El siguiente programa lineal de maximización de beneficios es el correspondiente al productor $i \in N$

$$\text{máx}\left\{p^T x | Ax \leq b^i, x \geq 0\right\}.$$

Si la coalición S de productores coopera, todos sus recursos se unen. En conjunto dicha coalición dispone de una cantidad $Be^S = b(S)$ de recursos, donde $e^S \in \mathbb{R}^N$, con $e_t^S = 1$, si $t \in S$ y $e_t^S = 0$, si $t \notin S$. Con estos recursos, la coalición desea maximizar su beneficio:

$$P_S : \text{máx}\left\{p^T x | Ax \leq b^S, x \geq 0\right\},$$

donde P_S denota el programa lineal primal para la coalición S. El problema dual, D_S, correspondiente a la coalición S es el siguiente:

$$D_S : \text{mín}\left\{y^T b^S | A^T y \geq p, y \geq 0\right\}.$$

El vector y se puede entender como un vector de precios sombra para los recursos, ya que la condición $A^T y \geq p$ se podría interpretar de la siguiente manera. Si una compañía desea comprar los recursos b^S de la coalición S y está pensando pagar y_k por cada unidad de recurso $k \in Q$, entonces para cualquier producto $j \in G$ el valor de los recursos necesarios para fabricar una unidad de dicho producto, de acuerdo con los precios en y, debería ser al menos tan grande como los precios de mercado p_j. En otro caso, la coalición S no estaría de acuerdo con su venta.

En el problema de producción lineal, la teoría de la dualidad constituye una herramienta para obtener repartos justos. La idea es remunerar las aportaciones de recursos que realiza cada agente al proceso productivo según los precios sombra correspondientes.

Sean $F_p(S)$ y $F_d(S)$ los conjuntos de soluciones factibles de los problemas primal y dual, respectivamente, para la coalición S.

$$F_p(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^G | Ax \leq b^S,\, x \geq 0\right\}$$

$$F_d(S) = \left\{ y \in \mathbb{R}^Q | A^T y \geq p,\, y \geq 0 \right\}$$

Obsérvese que $F_d(S)$ no depende de S. En este problema la región factible no depende de la coalición que se forme; sin embargo, la solución del problema, y el valor de la función característica (v) sí que dependen de cada coalición.

Se denota por $v_p(S)$ y $v_d(S)$ los valores óptimos de los programas:

$$v_p(S) = \text{máx} \left\{ p^T x | x \in F_p(S) \right\}$$

$$v_d(S) = \text{mín} \left\{ y^T b^S | y \in F_d(S) \right\}$$

y $O_p(S)$ y $O_d(S)$ son conjuntos de soluciones óptimas:

$$O_p(S) = \left\{ x \in F_p(S) | p^T x = v_p(S) \right\}$$

$$O_d(S) = \left\{ y \in F_d(S) | y^T b^S = v_d(S) \right\}.$$

Por las hipótesis impuestas se puede asegurar que los conjuntos $F_p(S)$, $F_d(S)$, $O_p(S)$ y $O_d(S)$ son no vacíos, y los valores óptimos de ambos problemas son finitos. Así pues, empleando dualidad se tiene que $v_p(S) = v_d(S)$ para todas las coaliciones S.

Una situación LP puede describirse mediante una 4-tupla (N, A, B, p). Asociado a dicha situación se puede definir el juego (N, v), que es el juego LP de maximización de beneficios, donde la función característica v asigna a cualquier coalición no vacía de jugadores S el valor del problema P_S, siendo $v(\oslash) = 0$,

$$v(S) = v_p(S) = \text{máx} \left\{ p^T x | Ax \leq b^S,\, x \geq 0 \right\}.$$

Si dos productores cooperan, podrán producir al menos lo que obtendrían si trabajaran de forma independiente. Así pues, su beneficio conjunto será al menos la suma de sus beneficios individuales. Un razonamiento análogo se podría aplicar al beneficio máximo que pueden obtener todos los productores si deciden cooperar y trabajar juntos. En estos problemas de varios decisores con distintos intereses, es difícil que todos estén de acuerdo con un determinado reparto de los beneficios/costes que resulten del proceso de producción, incluso en el caso en que dicho proceso optimice la utilización de sus recursos. La Teoría de Juegos cooperativos se utiliza para analizar y resolver estos problemas de reparto del beneficio/coste total entre los agentes. Se propone repartir este beneficio conjunto entre todos los agentes, utilizando una de las formas de reparto más conocidas: el núcleo. Se define el núcleo de una situación LP como el núcleo del juego LP correspondiente, $C(v)$.

El siguiente ejemplo (Molina [45]) ilustra los conceptos anteriormente introducidos.

Ejemplo 2.18 *Consideremos la siguiente situación: la producción de PTA (Ácido Tereftálico puro) y de EtG (Etilen-Glicol) en la cuenca Mediterránea está controlada por tres petroquímicas Med1, Med2 y Med3. La capacidad de producción disponible, expresada en toneladas, de cada una de ellas viene recogida en la siguiente tabla:*

	PTA	*EtG*
Med 1	*150000*	
Med 2		*90000*
Med 3	*110000*	*60000*

A partir de estos productos químicos se puede producir fibra textil sintética (PET-fibra) y plástico para botellas (PET-botella). La siguiente tabla recoge las cantidades (en toneladas) de cada producto necesarias para producir una tonelada de cada uno de estos derivados.

	PET-botella	*PET-fibra*
PTA	*0.966*	*0.912*
EtG	*0.365*	*0.344*

La venta en el mercado de fibra textil da un beneficio de 5 unidades monetarias por *tonelada, mientras que la venta de plástico da un beneficio de 6 unidades monetarias por tonelada.*

Por lo tanto, existen tres productores (empresas Med 1, Med 2 y Med 3), $N = \{1, 2, 3\}$*, dos recursos (PTA y EtG), dos productos (PET-botella y PET-fibra) y*

$$A = \begin{bmatrix} 0.966 & 0.912 \\ 0.365 & 0.344 \end{bmatrix}, matriz\ de\ producción$$

$$B = \begin{bmatrix} 150000 & 0 & 110000 \\ 0 & 90000 & 60000 \end{bmatrix}, matriz\ de\ recursos$$

$$p = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, beneficios\ unitarios.$$

El productor 1 no posee cantidad alguna del segundo recurso (véase la primera columna de la matriz de recursos B), mientras que el productor 2 no dispone del primer recurso. Como ambos productos requieren de cierta cantidad positiva de input de cada uno de los dos recursos, un solo productor no puede producir nada. Consecuentemente, $v_p(\{1\}) = v_p(\{2\}) = 0$*. Haciendo uso de sus recursos, el tercer productor obtendría* $v_p(\{3\}) = 683230$*. Si los tres cooperan, dispondrían de una cantidad positiva de cada recurso y podrían usar varios planes de producción*

$$F_p(N) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; \begin{array}{l} 0.966x_1 + 0.912x_2 \leq 260000 \\ 0.365x_1 + 0.344x_2 \leq 150000 \end{array} \right\}.$$

El beneficio de un plan de producción x es: $p^T x = 6x_1 + 5x_2$ *y, por lo tanto, el problema de maximización de beneficios* P_N *para la coalición total es*

$$\text{máx}\{6x_1 + 5x_2 | x \in F_p(N)\}.$$

El beneficio máximo $v(N) = 1614907$ *se obtiene con el plan* $\widehat{x} = (269151.15\ ,\ 0)^T$*. Además,*

$v(1,2) = 931677$, $v(1,3) = 986301$, $v(2,3) = 683230$, *por lo que* $O_p(N) = \left\{(269151.15\ ,\ 0)^T\right\}$*. Mientras que las condiciones:*

$$\begin{aligned}
&x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\\
&x_1 + x_2 \geq 931677\\
&x_1 + x_3 \geq 986301\\
&x_2 + x_3 \geq 683230\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1614907
\end{aligned}$$

determinan el núcleo.

El juego de producción lineal es superaditivo (Owen [53]). Como ya se ha mencionado, Owen probó que estos juegos LP eran totalmente equilibrados, ya que cada subjuego es un juego equilibrado. Para obtener elementos del núcleo utilizando el método propuesto por Owen se procede de la siguiente manera. En lugar de resolver los programas P_S para cualquier coalición $S \subset N$ y calcular $v(S)$ y el núcleo, se puede resolver únicamente el problema dual para la coalición total D_N. Sea y una solución óptima de dicho problema. Si cada productor i obtiene el valor de sus recursos de acuerdo con los precios sombra y, este reparto, $y^T b^i$, es una imputación del núcleo.

El conjunto de imputaciones del núcleo que se pueden obtener de esta forma, se denomina conjunto de Owen [22] correspondiente a la situación de producción lineal (N, A, B, p) y se representa por

$$Owen\,(N, A, B, p) = \left\{ \left(y^T b^i\right)_{i \in N} | y \in O_d\,(N) \right\}.$$

El conjunto de $Owen\,(N, A, B, p)$ es no vacío, puesto que el conjunto de óptimos duales $O_d\,(N)$ es no vacío. Además, cada vector de este conjunto es un elemento de $C\,(v)$.

Teorema 2.19 *Sean la situación* $LP\,(N,A,B,p)$ *y el juego asociado* (N,v)*, entonces* $Owen\,(N,A,B,p) \subset C\,(v)$.

Ejemplo 2.20 *Consideremos la situación LP y su juego correspondiente introducidos en el ejemplo de las empresas productoras de PET. El conjunto de precios sombra factibles para la coalición total viene dado por:*

$$F_d\,(N) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; \begin{array}{l} 0.966y_1 + 0.365y_2 \geq 6 \\ 0.912y_1 + 0.344y_2 \geq 5 \end{array} \right\}.$$

El valor $v\,(N) = 1614907 = \min\{260000y_1 + 150000y_2 | y \in F_d\,(N)\}$ *se alcanza para* $\widehat{y} = (6.211\ ,\ 0)^T$*, luego* $O_d\,(N) = \left\{(6.211\ ,\ 0)^T\right\}$*. El conjunto* $Owen\,(N,A,B,p) = \left\{(931677,\ 0,\ 683230)^T\right\}$ *consiste en un único punto y se tiene que* $Owen\,(N,A,B,p) \subset C\,(v)$*, siendo* $Owen\,(N,A,B,p) \neq C\,(v)$.

La solución que proporciona el conjunto de Owen no tiene por qué ser única. Si D_N tiene solución múltiple, todos los precios duales que dichas soluciones representan son válidos para obtener elementos del conjunto de Owen. Aún en el caso en que D_N tenga solución única, si hay holgura positiva en alguno de los recursos, eliminando el recurso sobrante se obtiene una solución múltiple dual y algunas de las valoraciones duales que dichas soluciones representan permiten obtener elementos en el conjunto de Owen del juego original.

2.4. Juegos de producción lineal con un recurso común

En esta sección se introduce un modelo nuevo que servirá para analizar situaciones de producción lineal donde varias empresas deben cooperar para adquirir un recurso común externo limitado (LPP).

Este tipo de situación se presenta con frecuencia en situaciones de la vida real relacionadas con la gestión de recursos naturales, como cuando los productores necesitan comprar cuotas de dióxido de carbono, agua, gestionar zonas de pesca comunitaria o incluso obtener capital público para invertir en sus empresas.

El recurso común está gestionado por un agente externo y es absolutamente necesario para producir cualquier producto. Aunque intuitivamente pueda parecer que al introducir un pequeño cambio en el modelo LP todo funcionará de manera similar, en este caso, no es cierto, porque, por ejemplo, los juegos que surgen al analizar estas situaciones son juegos con estructuras de particiones y la existencia de distribuciones estables no siempre está garantizada.

Los modelos con un recurso común externo limitado, generalmente, se han abordado en la literatura desde la perspectiva no cooperativa. En ellos, como Hardin [29] señala, puede ocurrir lo que se conoce como tragedia de los comunes, donde el recurso de uso común es sobreexplotado. Esta es la razón principal por la que se ha considerado una perspectiva cooperativa. Driessen y Meinhardt [15] utilizan un juego cooperativo, definido a partir de uno no cooperativo, en el que se obtiene el valor de una coalición (grupo de productores) a partir de un juego bipersonal, donde los miembros de la coalición tratan de maximizar sus beneficios en el peor de los casos. Funaki y Yamato [20] proporcionan un enfoque cooperativo para un modelo de una economía con un recurso de propiedad común donde la demanda es aditiva. En nuestro caso, estamos interesados en estudiar situaciones LP con un recurso común externo limitado desde el punto de vista cooperativo, donde el valor de una coalición se determina teniendo en cuenta no sólo lo que los miembros de la coalición pueden hacer, sino también lo que el resto de jugadores no pertenecientes a la coalición pueden hacer. Por lo tanto, este modelo implica el uso de juegos en forma de función característica con estructuras de particiones como en Funaki y Yamato [20]. En su modelo la distribución de las cuotas de pesca (recurso de propiedad común) entre los pescadores se lleva a cabo en proporción a la cantidad de trabajo desarrollado por cada uno de ellos.

En el caso de la empresas productoras de PET, dichas empresas productoras emiten gases de efecto invernadero en su proceso de producción, 142.4 Kg de gases de efecto invernadero (GEI) por cada 1000 toneladas de PET. Considerando que en el plan óptimo de producción se fabrican 269151.15 toneladas de PET, se estarían emitiendo 38327.1 Kg de GEI.

Las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI) tienen un tope fijado para los diferentes países. A su vez cada país o gobierno firmante del Acuerdo de París debe realizar la distribución interna de los niveles de emisión entre las empresas contaminantes, a través de permisos o cuotas que no pueden ser sobrepasados.

Se supone que dichas empresas van a tener que adquirir las cuotas de CO_2 necesarias para su producción. El gestor del recurso dispone de una cantidad limitada de cuota de carbono para vender, r, y a su vez impone un precio por tonelada emitida, c.

A continuación se introduce formalmente la notación y el modelo matemático que describe la situación anterior.

Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de empresas que se enfrenta a un problema de producción lineal LP para producir un conjunto $G = \{1, ..., g\}$ de bienes a partir de un conjunto de recursos $Q = \{1, ..., q\}$. Existe un agente externo que tiene una cantidad r de un recurso que los agentes necesitan comprar para producir los bienes. Los parámetros del modelo son:

- $b^i \in \mathbb{R}_q^+$ son los recursos disponibles para cada empresa $i \in N$, $b^S = \sum_{i \in S} b^i$. $B \in \mathcal{M}_{q \times n}$ es la matriz de recursos. Se supone que existe una cantidad positiva de cada recurso, es decir, que para todos los recursos $t \in Q$ existe un productor i tal que $b_t^i > 0$.

- El recurso común externo limitado, R, no es titularidad de las empresas productoras sino de un agente externo. Su coste por unidad es c y el total de recurso disponible se denota por r.

- $A \in \mathcal{M}_{(q+1)\times g}$ es la matriz de producción, a_{tj} representa la cantidad de recurso t que se necesita para producir el producto j, donde la última fila está relacionada con el recurso común externo y $a_{(q+1)j} > 0, \forall j \in G$. Por otra parte, no se permite producción sin consumo de recursos y, por lo tanto, existe al menos un $t \in Q$ con $a_{tj} > 0, \forall\, j \in G$.

- $p \in \mathbb{R}^g_{++}$ es el vector de precios. Por otra parte, con el fin de considerar sólo procesos rentables asumimos que $p_j > a_{(q+1)j}c$, $\forall\, j \in G$. Lo que significa que siempre tenemos un margen de beneficio no nulo, ya que sólo se producen bienes si son rentables.

Por lo tanto, una situación de producción lineal con un recurso común externo (LPP) puede ser representada por la 6-tupla (N, A, B, p, r, c).

Para maximizar su beneficio, el productor $i \in N$ necesita un plan óptimo de producción $(x; z) \in \mathbb{R}^{G+1}_+$, que le indica cuánto debe producir de cada bien, x, y sus necesidades del recurso común, z. No todos los planes de producción son factibles ya que el productor tiene que tener en cuenta su cantidad limitada de recursos. Por lo tanto, la cantidad de recursos que se necesitan en un plan de producción factible no debe exceder la cantidad de recursos disponibles para el productor i. Además, un plan de producción factible tiene que ser no negativo ya que sólo estamos interesados en la producción de cantidades no negativas de los productos. El siguiente programa lineal maximiza el beneficio del productor $i \in N$

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^i \\ z \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g, z \geq 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Por lo tanto, un plan de producción óptimo para el productor i es una solución óptima de este programa lineal. Si una coalición S de productores coopera, entonces ponen todos sus recursos en común. Como la coalición pretende maximizar su beneficio debe utilizar el siguiente problema lineal para ello:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g, z \geq 0. \end{array} \tag{2.5}$$

Denotamos mediante $valor\,(S; z)$ el valor de este programa lineal, para cada z.

La demanda óptima del recurso común externo para cada coalición S,

$$d_S = \text{mín}\left\{z \in \mathbb{R}_+ \,|valor\,(S; z) \text{ es máximo}\right\},$$

se obtiene resolviendo el programa lineal (2.5). Cabe destacar que estas demandas óptimas son la cantidad deseada del recurso común para cada coalición S y se pueden ver como sus aspiraciones utópicas a priori, es decir, antes de que se le asigne su parte correspondiente del recurso común.

Aunque podría parecer que estas demandas son superaditivas, es decir $d_S \geq \sum_{i \in S} d_{\{i\}}$, esto no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.21 *Sea* (N, A, B, r, p, c) *una situación* LPP*, con dos productores,* $N = \{1, 2\}$*, que producen tres productos con dos recursos y un recurso común exter-*

no, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ c = 1,\ r = 5.$$

En este caso, $d_{\{1\}} = d_{\{2\}} = 7$ *mientras* $d_{\{1,2\}} = 5$.

A continuación se presenta un resultado técnico que garantiza que una vez que sabemos que se logra un beneficio positivo empleando una determinada cantidad de recurso común externo, cantidades inferiores del recurso común externo limitado también proporcionan beneficios positivos.

Proposición 2.22 *Dado* $S \subset N$, *si existe* z^* *tal que* $valor\,(S; z^*) > 0$, *entonces* $valor\,(S; z) > 0$, *para todo* z *con* $0 < z < z^*$.

Demostración. Sea z tal que $0 < z < z^*$ y x^* la solución óptima correspondiente para $valor\,(S; z^*)$. Definimos $x^z = \frac{z}{z^*}x^*$. El punto $(x^z; z)$ es factible para el problema de producción lineal LP correspondiente a S. Además, se cumple que:

$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{g} p_j x_j^* - cz^* > 0 \Longrightarrow \frac{z}{z^*}\left(\sum_{j=1}^{g} p_j x_j^* - cz^*\right) > 0 \Longrightarrow \\ \sum_{j=1}^{g} p_j \left(\frac{z}{z^*}x_j^*\right) - c\left(\frac{z}{z^*}z^*\right) > 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{g} p_j x_j^z - cz > 0. \end{array}$$

■

A partir de ahora supondremos que para toda S existe un plan de producción factible $(x; z)$ tal que $valor\,(S; z) > 0$. Esta suposición implica que $d_S > 0$ para toda S. Estamos asumiendo que todas las empresas en la industria con tecnología lineal compartida tienen capacidad para generar beneficios estrictamente positivos. En realidad, sólo es necesario suponer que cada empresa, por sí misma, es capaz de generar beneficios positivos, y a partir de ahí es sencillo demostrar que cada coalición también es capaz de generar beneficios positivos.

Supongamos que se forma la partición P y, ya sea a través de un procedimiento cooperativo o a través de un mecanismo competitivo[3], la cantidad de recurso común externo limitado asignado finalmente a la coalición $S \in P$ por el agente gestor es $z_S(P)$. El beneficio que una coalición $S \subset N$ puede obtener viene dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - c z_S(P) \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z_S(P) \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g. \end{array} \tag{2.6}$$

Debemos señalar que $z_S(P)$ está acotado superiormente por r, porque el agente gestor del recurso común no puede asignar más de la cantidad de recurso disponible; mientras que d_S, para toda $S \subset N$, no tiene esa limitación.

Dependiendo del procedimiento empleado para obtener $z_S(P)$, que será menor o igual que su demanda óptima d_S, se pueden definir diferentes juegos. Estos juegos no son juegos TU clásicos, pues no tienen una función característica al uso, sino que son juegos en forma de función característica con estructuras de particiones y la cantidad disponible de recurso común desempeña un papel crucial a la hora de analizarlos.

Definición 2.23 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP. El juego en forma de función característica con estructuras de particiones asociado a esta situación viene dado por*

$$\Big(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet| P)\}_{P \in \mathcal{P}(N)}\Big),$$

donde N es el conjunto de jugadores, $\mathcal{P}(N)$ denota el conjunto de todas las particiones de N y $V(S| P)$, con $S \in P$, se obtiene resolviendo el programa lineal (2.6), para toda $S \subset N$, siendo $z_S(P)$ la cantidad de recurso común disponible para la coalición S cuando se forma la partición P.

[3]En este momento no se especifica ningún procedimiento concreto.

Proposición 2.24 *Sea* (N, A, B, p, r, c) *una situación* LPP *y* $\left(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet| P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\right)$ *su correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones. Entonces,*

$$V(\{N\}| N) \geq \sum_{S\in P} V(S| P), \forall P \in \mathcal{P}(N).$$

Demostración. Dada $P \in \mathcal{P}(N)$, $V(S| P) = valor\,(S; z_S(P)), \forall S \in P$ tal que $\sum_{S\in P} z_S(P) \leq r$. Sea $\left(x^S; z_S(P)\right)$ un plan óptimo para cada coalición $S \in P$. Por lo tanto, $Ax^S \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z_S(P) \end{pmatrix}$ y

$$A\left(\sum_{S\in P} x^S\right) \leq \begin{pmatrix} \sum_{S\in P} b^S \\ \sum_{S\in P} z_S(P) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b^N \\ r \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\left(\sum_{S\in P} x^S; \sum_{S\in P} z_S(P)\right)$ es un plan de producción factible para N y

$$\sum_{S\in P} V(S| P) = \sum_{S\in P} valor\,(S; z_S(P)) \leq valor\left(N; \sum_{S\in P} z_S(P)\right) \leq v(\{N\}| N).$$

■

El corolario siguiente se da sin demostración porque ésta se puede obtener de forma similar a la empleada por Funaki y Yamato [20].

Corolario 2.25 *Sea* (N, A, B, p, r, c) *una situación* LPP, $\left(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet| P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\right)$ *el correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones y* (N, v^-), (N, v^+) *los juegos cooperativos asociados definidos en la Sección 2.1.3. Entonces,* $C(V) = C(v^-)$ *y* $\overline{C}(V) = C(v^+)$.

Si $\left(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet| P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\right)$ es tal que, $\forall S \subset N, \forall P \in \mathcal{P}(N)$ con $S \in P$, $V(S| P) = v(S)$, entonces las dos definiciones de dominancia son equivalentes,

(N, v) es un juego en forma de función característica convencional y el núcleo se reduce a la definición bien conocida para los juegos cooperativos clásicos. A continuación mostramos dos situaciones LPP en las que se cumple la condición anterior.

Dada una partición P, su demanda total es $d(P) = \sum_{S \in P} d_S$. Un conjunto relevante asociado con el recurso común y el conjunto de todas las particiones, es el siguiente:

$$M^{\min} = \{P \in \mathcal{P}(N) \, | d(P) > r \text{ y } P \text{ es minimal para el operador } \subset\},$$

donde "P es minimal para el operador $\subset$" significa que no hay un refinamiento P' de P con $d(P') > r$.

El conjunto anterior se compone de todas aquellas particiones cuyas demandas agregadas sean superiores a la cantidad de recurso común externo disponible. Es relevante porque, como veremos a continuación, los siguientes resultados muestran que si el recurso común externo no es una restricción para el proceso de producción, $M^{\min} = \varnothing$, o es sólo una restricción para la gran coalición, $M^{\min} = \{N\}$, estos juegos son juegos cooperativos TU sin externalidades, es decir, el valor de una coalición no depende de lo que hagan los jugadores que están fuera de esa coalición.

Proposición 2.26 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP. Si $M^{min} = \varnothing$, entonces el juego correspondiente $\left(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet | \, P)\}_{P \in \mathcal{P}(N)}\right)$ es un juego cooperativo sin externalidades.*

Demostración. Si $M^{\min} = \varnothing$, entonces tenemos $d_N \leq r$. Así, $z_S(P) = d_S$ para toda $S \subset N$, debido a que $d(P) \leq r$ para toda P. Por lo tanto, para cada $S \subset N$, $V(S | \, P) = V(S | \, P')$ para toda $P, P' \in \mathcal{P}(N)$ tal que $S \in P$, es decir, para cada coalición el valor no depende de las coaliciones formadas por los otros jugadores. ■

Proposición 2.27 *Sea* (N, A, B, p, r, c) *una situación* LPP*. Si* $\{N\} \in M^{min}$*, entonces* $M^{min} = \{N\}$ *y el juego asociado a esta situación* $\left(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet | P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\right)$ *es un juego cooperativo sin externalidades.*

Demostración. Si $\{N\} \in M^{\min}$, entonces $\{N\}$ es minimal para el operador $\subset$, $d_N > r$ y $d(P) \leq r$ para toda $P \in \mathcal{P}(N)$, $P \neq \{N\}$. Al igual que en la Proposición 2.26, para cada $S \subset N$, $V(S|P) = V(S|P')$ para toda P, $P^{'} \in \mathcal{P}(N)$, es decir, el valor de la coalición S no depende de las coaliciones formadas por los jugadores que no están en S. Por otra parte, el valor de la gran coalición, N,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cr \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^N \\ r \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g. \end{array} \tag{2.7}$$

sólo depende de sí mismo, ya que no existe ninguna partición que incluya a N como subconjunto propio. Por lo tanto, el juego asociado a esta situación es un juego cooperativo TU sin externalidades. ■

2.5. Comentarios

En este capítulo se han descrito los juegos de producción lineal, tratando de modelizar situaciones que surgen en problemas reales. En particular, se han considerando situaciones en las que los productores necesitan comprar un recurso común a todos ellos para producir los bienes, pero la gestión de éste está en manos de un gestor externo pudiendo ser dicho recurso escaso.

El análisis de este modelo nos conduce a un juego en forma de función característica con estructuras de particiones, es decir, surge de forma natural un juego con externalidades. Por lo tanto, los pagos a una coalición S dependen no sólo de los recursos de los miembros de S, sino también de cómo los que no están en S formen coaliciones.

Adicionalmente, se obtiene como resultado que si el recurso común externo no es una restricción para el proceso de producción, o es sólo una restricción para la gran coalición, los juegos que se obtienen son juegos cooperativos TU sin externalidades.

Como posibles líneas de investigación en el futuro, se debe profundizar en las dos restricciones del modelo de producción lineal. La primera de ellas hace referencia a que cada técnica de producción sólo puede tener como resultado la fabricación de un único bien; mientras que en la práctica muchas técnicas de producción obtienen varios productos. La segunda está relacionada con el hecho de que todos los productores puedan usar las mismas técnicas de producción, este supuesto puede no ajustarse a la realidad, ya que algunos productores pueden disponer de ciertas técnicas que no están al alcance de los demás. Por ejemplo Timmer et al. [73] introducen las situaciones que implican la transformación lineal de productos (situaciones LTP). En ellas, de cada técnica de transformación lineal se obtiene al menos una mercancía manufacturada y diferentes productores pueden tener técnicas de producción distintas, por lo que sería interesante analizar este tipo de problemas cuando existe al menos un recurso común externo.

Por otra parte, se ha considerado que el precio del recurso común externo es fijo, en futuras investigaciones deberíamos explorar el caso en el que el precio depende de la demanda.

Otra posible línea de investigación es la introducción de aspectos fuzzy en los juegos de producción lineal con un recurso común externo, tal y como se hace para los juegos de producción lineal en Molina y Tejada [46].

Capítulo 3

Estabilidad en los LPP

Una vez introducido el modelo matemático correspondiente a las situaciones de producción lineal con un recurso común externo (LPP) debemos plantearnos cómo se va a realizar la distribución de dicho recurso, que gestiona un gestor externo a los productores. Se considera que dicho gestor toma un papel pasivo, siendo los productores los que manifiestan sus demandas. Dichas demandas podrán o no satisfacerse totalmente en función de la cantidad de recurso común externo disponible.

Los productores conocen la tecnología que se aplica, el precio de venta, que se ha supuesto fijo, y la cantidad de recurso, ya que se ha asumido que todo el mundo conoce los recursos de los que disponen el resto de jugadores. Por lo tanto, lo único desconocido para los productores es cómo repartir el recurso común externo, es decir, cómo lo va a repartir el gestor. En función de la información de la que disponen los productores con respecto a la forma de repartir dicho recurso común aparecen diferentes enfoques. En este capítulo, veremos que si los productores no disponen de información, entonces se puede utilizar un enfoque optimista o uno pesimista para aproximarnos al problema del reparto del recurso común. Por lo tanto, en función del enfoque se define un juego optimista o un juego pesimista, para los que analizamos a continuación la existencia de repartos estables en dichos juegos, es decir, estudiamos sus núcleos.

3.1. Primeros resultados

Una vez planteada una situación de producción lineal con un recurso común externo, el problema se centra en cómo repartir el recurso común externo entre los diferentes productores.

El siguiente resultado muestra que el juego TU obtenido en las condiciones de la Proposición 2.26, cuando el recurso común externo limitado no es una restricción para el proceso de producción, tiene núcleo no vacío.

Teorema 3.1 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP con $M^{min} = \varnothing$, entonces el juego cooperativo $(N, v) \in G^N$ asociado a esta situación, tal que $v(S) = V(S|\, P)$ $\forall S \subset N$,$\forall P \in \mathcal{P}(N)$, tal que $S \in P$, tiene núcleo no vacío.*

Demostración. El problema dual del problema (2.5)[1] para la gran coalición, N, es

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t + 0 y_{q+1} \\ \text{s.a:} & A^t y \geq p \\ & y_{q+1} \leq c \\ & y \geq 0_{q+1}. \end{array} \tag{3.1}$$

Una solución óptima de (2.5) para la gran coalición N viene dada por $\left(x^N; d_N\right)$, con $d_N \leq r$, y la solución óptima dual correspondiente es $\left(y_q^N; y_{q+1}^N\right)$, donde abusando de la notación de ahora en adelante, representaremos por y^N el vector $\left(y_1^N, ..., y_q^N\right)$.

[1] Se utiliza este problema ya que se establece por hipótesis que el recurso común externo no es escaso para ninguna partición que se pueda formar.

Por dualidad, sabemos que

$$\sum_{j=1}^{g} p_j x_j^N - cd_N = \sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t^N + 0y_{q+1}^N = v\left(N\right).$$

Por lo tanto, el coste del recurso común externo se carga al valor de los recursos, es decir, es descontado del beneficio que pueden obtener por sus recursos. Es fácil comprobar que $\left(y_q^N; y_{q+1}^N\right)$ es factible en el problema dual del (2.5) para cada coalición $S \subset N$, puesto que el conjunto de restricciones es independiente de las cantidades de recursos disponibles. Además, tenemos que para una solución dual óptima $\left(y_q^S; y_{q+1}^S\right)$ asociada con la solución óptima $\left(x^S; d_S\right)$, se cumple que

$$\sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^N + 0y_{q+1}^N \geq \sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^S + 0y_{q+1}^S = v\left(S\right).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i\in S}\left(\sum_{t=1}^{q} b_t^i y_t^N + 0y_{q+1}^N\right) \geq v\left(S\right), \forall S \subset N,$$

y esto implica que $\left(b^i y^N\right)_{i\in N} \in C\left(v\right)$[2]. ■

Corolario 3.2 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP con $M^{min} = \varnothing$. Consideremos el correspondiente juego con estructuras de particiones $\Big(N, \mathcal{P}(N), \{V\left(\bullet| P\right)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\Big)$, y el juego asociado $(N, v) \in G^N$. Entonces, $C\left(V\right) = \overline{C}\left(V\right) = C\left(v\right)$.*

Siguiendo la misma idea de Owen ([53]) y Gellekom et al. ([22]), se introduce el conjunto de Owen de una situación LPP (N, A, B, p, r, c), $Owen\left(N, A, B, p, r, c\right)$, como el conjunto cuyos elementos se pueden obtener a través de una solución óptima del problema (3.1) asociada a la solución óptima de (2.5) $\left(x^N; d_N\right)$ tal que $d_N \leq r$. Luego, cuando $M^{\min} = \varnothing$ una manera de obtener una distribución estable del

[2] Aparentemente, este resultado es igual al obtenido para los juegos LP, pero la diferencia está en que la existencia del recurso externo con un coste condiciona la solución óptima del problema primal.

beneficio total es utilizar el conjunto de Owen de la situación LPP (N, A, B, p, r, c). Debemos mencionar que esto es similar a los resultados clásicos en las situaciones LP. Sin embargo, los juegos en las condiciones de la Proposición 2.27 pueden tener el núcleo vacío, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 *Sea (N, A, B, r, p, c) una situación LPP, con tres productores, $N = \{1, 2, 3\}$, que producen tres productos con tres recursos y un recurso común externo, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 10 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 4 & 18 & 9 \\ 16 & 19 & 2 \end{bmatrix}, p = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, c = 2, r = 10.$$

Las demandas de recurso de cada coalición son:

$$\begin{array}{l} d_{\{1\}} = \frac{4}{3}, d_{\{2\}} = 4, d_{\{3\}} = \frac{4}{5}, \\ d_{\{1,2\}} = \frac{22}{3}, d_{\{1,3\}} = \frac{17}{3}, d_{\{2,3\}} = \frac{42}{5}, d_N = \frac{31}{3}, \end{array}$$

y $\text{mín}\left\{\frac{31}{3}, 10\right\} = 10$. *El juego $(N, v) \in G^N$ correspondiente, asociado con esta situación, viene dado por*

$$\begin{array}{l} v(\{1\}) = 4, v(\{2\}) = 12, v(\{3\}) = \frac{12}{5}, \\ v(\{1,2\}) = 22, v(\{1,3\}) = 13, v(\{2,3\}) = \frac{126}{5}, v(N) = 30, \end{array}$$

y $C(v) = \varnothing$, puesto que $x_1 \leq 4.8$ y $x_2 \leq 17$ y, por tanto, $x_1 + x_2 \leq 21.8$. Obviamente, $C(V) = \overline{C}(V) = \varnothing$.

3.2. Un nuevo concepto de estabilidad

En el ejemplo anterior se puede observar que las particiones de la forma $\{N \backslash \{i\}, \{i\}\}_{i \in N}$ son las únicas particiones estables, es decir, los juegos asociados a la coalición formada por todos los jugadores excepto el jugador i y la coalición formada únicamente por el jugador i tienen núcleo no vacío; mientras que el juego asociado a la gran coalición N es el que tiene su núcleo vacío. Utilizando esta idea, proponemos el siguiente concepto de estabilidad:

Definición 3.4 *Una partición $P \in \mathcal{P}(N)$ se dice que es particionalmente estable si se cumplen las siguientes condiciones, $\forall S \in P$,*

(1) $C\left(v^S\right) \neq \varnothing$;

(2) $\nexists \{T_k\}_{k=1}^{l} \in P$ *de tal manera que* $C\left(v^{S \cup \left\{\bigcup_{k=1}^{l} T_k\right\}}\right) \neq \varnothing$,

donde $\left(S, v^S\right)$ es el juego reducido a la coalición S.

Esta definición de estabilidad es válida tanto para juegos con externalidades (con el concepto de dominancia que corresponda), como para juegos sin externalidades. Además, permite, en cierto sentido, ampliar el concepto de núcleo y estudiar la formación de coaliciones. Obsérvese que cuando el núcleo de un juego es no vacío, entonces la gran coalición es la única configuración que es particionalmente estable.

Proposición 3.5 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP con $\{N\} \in M^{min}$. Entonces, o bien las particiones $\{N\backslash \{i\}, \{i\}\}_{i\in N}$ son las únicas configuraciones particionalmente estables, o bien la gran coalición es la única configuración particionalmente estable si el núcleo del juego es no vacío.*

Demostración. Si el núcleo del juego es no vacío, por definición, la gran coalición es la única configuración particionalmente estable. Si el núcleo es vacío, se tiene que $d_{N\backslash\{i\}} + d_{\{i\}} \leq r, d_N > r$. Los juegos asociados con $\{N\backslash \{i\}\}_{i\in N}$ e $\{\{i\}\}_{i\in N}$ tienen núcleo no vacío por la Proposición 3.1 y cualquier otra partición no satisface la condición (2) de la definición anterior. ■

Cuando el recurso común externo puede ser una restricción para el proceso de producción de alguna partición, es decir, existe una partición P tal que $\sum_{S \in P} d_S > r$, cada coalición de productores $S \in P$ obtendrá una cantidad de recurso común externo a través de un proceso cooperativo o de un mecanismo competitivo. En este capítulo nos centraremos en el caso cooperativo. El caso no cooperativo se estudiará en el capítulo siguiente. Con respecto a la información que tienen los jugadores sobre el proceso, se consideran dos posibilidades: que los jugadores no conocen la forma en la que r será distribuido o que los jugadores conocen la forma que se utilizará para repartir la cantidad total de recurso. En la siguiente sección consideramos el caso en el que los jugadores no conocen cómo se repartirá el recurso común.

3.3. El juego de recurso común externo limitado

En esta sección abordamos la situación descrita en el epígrafe anterior suponiendo que los productores no conocen cómo será asignado el recurso común externo. Por lo tanto, no conocen exactamente el juego en forma de función característica con estructuras de particiones V, por lo que se enfrentan al problema bajo condiciones de incertidumbre. Así pues, pueden examinar el problema del reparto de la cantidad de recurso común externo limitado desde diferentes puntos de vista. Lo que una coalición de productores S espera recibir del recurso común externo limitado puede describirse a través de un juego de recursos que se describirá a continuación. Estos serán juegos cooperativos TU en forma de función característica y pueden definirse a partir de diferentes enfoques. Se considerarán dos casos extremos, dependiendo del punto de vista que se utiliza para abordar la situación: el optimista y el pesimista. El valor de una coalición representará la cantidad de recurso común externo que la coalición espera garantizarse trabajando por sí sola, independientemente de lo que hagan las otras. Que podrá ser cualquier valor entre los obtenidos a partir de los puntos de vista optimista y pesimista. De este modo, el juego de recursos reflejará las expectativas de cada coalición.

Un juego de recurso común asociado a una situación LPP, (N, A, B, r, p, c), es un juego cooperativo $(N, R) \in G^N$, donde N es el conjunto de productores y R es la función característica que, para cada coalición S, representa la cantidad de recurso que piensan los jugadores en S que pueden obtener independientemente de lo que hagan los jugadores en $N \backslash S$.

Una coalición de productores S asume así que su parte de recurso común externo será $R(S)$. Utilizando esta cantidad como $z_S(P)$ en (2.6), para toda $S \subset N$, se obtiene el juego $\left(N, v^R\right) \in G^N$, donde $v^R(S) = valor\,(S; R(S))$. De esta manera, el juego en forma de función característica con estructuras de particiones asociado a la situación LPP (N, A, B, r, p, c) obtenido a partir del juego de recurso común externo (N, R) se reduce al juego $\left(N, v^R\right)$, ya que el valor de una coalición no depende de lo que los demás puedan hacer.

El siguiente teorema establece una condición suficiente para que el juego LPP $\left(N, v^R\right)$ tenga núcleo no vacío cuando $d_N > r$, sin importar desde qué punto de vista se defina el juego de recuso común (N, R).

Teorema 3.6 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP con $d_N > r$, sean $(N, R) \in G^N$ un juego de recurso común externo limitado asociado a dicha situación y $\left(N, v^R\right) \in G^N$ el juego correspondiente. Si $C(R) \neq \varnothing$, entonces $C\left(v^R\right) \neq \varnothing$.*

Demostración. Como $C(R) \neq \varnothing$, existe $u \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(S) = \sum_{i \in S} u_i \geq R(S)$, para toda S, y $u(N) = r$. Sea y^* una solución óptima del dual del problema (2.7), que viene dado por

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t + r y_{q+1} - cr \\ \text{s.a:} & A^t y \geq p \\ & y \geq 0_{q+1}. \end{array} \tag{3.2}$$

Por dualidad sabemos que $\sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t^* + r y_{q+1}^* - cr = v^R(N)$. Por otro lado, $\forall S \subseteq N$

$$\sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^* + u(S)\, y_{q+1}^* - cu(S) \geq \sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^* + R(S)\left(y_{q+1}^* - c\right) \geq v^R(S),$$

donde la última desigualdad se cumple porque y^* es factible en el problema dual de la coalición S e $y_{q+1}^* > c$ con $d_N > r$. Efectivamente:

Supongamos que $y_{q+1}^* \leq c$. Consideramos una variación Δr tal que la solución básica factible no cambie y, además, $r + \Delta r < d_N$.

Entonces

$$valor\,(N; r + \Delta r) = valor\,(N; r) + \left(y_{q+1}^* - c\right) \Delta r.$$

Distinguimos dos casos:

1. Si $\Delta r > 0$.

$$\begin{array}{l} valor\,(N; r + \Delta r) \leq valor\,(N; r) \\ r < r + \Delta r < d_N \Rightarrow \exists \alpha \in (0,1) \text{ tal que } r + \Delta r = \alpha r + (1 - \alpha)\, d_N \end{array}$$

Ahora desde que $\alpha x^r + (1 - \alpha)\, x^{d_N}$ es una solución factible para el problema con $r + \Delta r$, $\left(x^r, x^{d_N}\right)$ es solución óptima para r y d_N, se tiene que

$$valor\,(N; r + \Delta r) \geq \alpha valor\,(N; r) + (1 - \alpha)\, valor\,(N; d_N)$$

Pero $valor\,(N; d_N) > valor\,(N; r + \Delta r)$ por definición de d_N y $valor\,(N; r) \geq valor\,(N; r + \Delta r)$. Por lo tanto, tenemos una contradicción.

2. Si $\Delta r < 0$.

$$\begin{array}{l} valor\,(N; r + \Delta r) = valor\,(N; r) + \left(y^*_{q+1} - c\right) \Delta r \Rightarrow \\ \Rightarrow valor\,(N; r + \Delta r) \geq valor\,(N; r)\,. \\ r + \Delta r < r < d_N \Rightarrow \exists \alpha \in (0, 1) \text{ tal que } \alpha\,(r + \Delta r) + (1 - \alpha)\, d_N = r \end{array}$$

Ahora desde que $\alpha x^{r+\Delta r} + (1 - \alpha)\, x^{d_N}$ es una solución factible para el problema con r, $\left(x^{r+\Delta r}, x^{d_N}\right)$ es solución óptima para $r + \Delta r$ y d_N, respectivamente. Se tiene que,

$$valor\,(N; r) \geq \alpha valor\,(N; r + \Delta r) + (1 - \alpha)\, valor\,(N; d_N)$$

Pero $valor\,(N; d_N) > valor\,(N; r)$ por definición de d_N y $valor\,(N; r + \Delta r) \geq valor\,(N; r)$. Por lo tanto, tenemos una contradicción.

Así que la conclusión es que $y^*_{q+1} > c$.

Por lo tanto, $\left(b^i y^* + u_i \left(y^*_{q+1} - c\right)\right)_{i \in N} \in C\left(v^R\right) \neq \varnothing$. ■

Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7 *Sea (N, A, B, r, p, c) una situación LPP, con dos productores, $N = \{1, 2\}$, que producen tres productos a partir de dos recursos y un recurso común externo, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ c = 1,\ r = 4.$$

Consideremos el juego de recurso común externo, (N, R)*, tal que* $R(\{1\}) = R(\{2\}) = R(\{1,2\}) = 4$*. Entonces* $C(R) = \varnothing$*,* $d_N = 5$ *y* $v^R(\{1\}) = v^R(\{2\}) = 10$*,* $v^R(N) = 28$*, por lo que* $C\left(v^R\right) \neq \varnothing$*.*

El juego del recurso común externo descrito en el Ejemplo 3.7 puede ser obtenido basándonos en el enfoque que se presenta a continuación.

3.3.1. Punto de vista optimista

Desde un punto de vista optimista, una coalición de productores S obtendrá siempre su demanda o, si ésta es mayor que r, la cantidad de recurso disponible. El juego de recurso común externo asociado, (N, R^{opt}), es tal que $R^{opt}(S) = \min\{d_S, r\}$. Utilizando la cantidad $R^{opt}(S)$ en (2.6), para toda $S \subset N$, se obtiene el juego LPP optimista, (N, v^{opt}).

El núcleo $C(v^{opt})$ de esta clase de juegos puede ser no vacío como ilustra el Ejemplo 3.7, pero en muchas ocasiones es vacío, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.8 *Sea* (N, A, B, r, p, c) *una situación* LPP*, con tres productores,* $N = \{1, 2, 3\}$*, que producen dos productos a partir de dos recursos y un recurso común externo, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 80 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix},\ c = 14,\ r = 50$$

y (N, v^{opt}) *es el juego* LPP *optimista asociado. En este caso, el núcleo optimista estará formado por todos los puntos de* $\mathbb{R}^3$ *tales que*

$$x_1 \geq 720, x_2 \geq 920, x_3 \geq 1150,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1650, x_1 + x_3 \geq 1936, x_2 + x_3 \geq 2070, x_1 + x_2 + x_3 = 2300,$$

pero puede verse que no existe un punto que satisfaga todas las desigualdades anteriores, entonces $C(v^{opt}) = \varnothing$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}&d_{\{1\}} = 20, d_{\{2\}} = 20, d_{\{3\}} = 25,\\ &d_{\{12\}} = 40, d_{\{13\}} = 46, d_{\{23\}} = 45, d_N = 66 \text{ y } \min\{66, 50\} = 50,\end{aligned}$$

es fácil comprobar que $C(R^{opt}) = \varnothing$.

Estudiaremos una situación en la que $C(v^{opt})$ es siempre no vacío. Con el fin de analizar dicha situación, cuando $d_N \leq r$, necesitamos algunos resultados previos. El siguiente lema nos dice que cuando el recurso común externo es suficiente para la gran coalición, entonces el valor de la gran coalición es una cota superior para la suma de los valores optimistas en cada partición.

Lema 3.9 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP y (N, v^{opt}) el juego optimista asociado a dicha situación. Si $d_N \leq r$, entonces*

$$\sum_{S\in P} valor\,(S, d_S) \leq valor\,(N, d_N) = v^{opt}(N)\,, \forall P \in \mathcal{P}(N).$$

Demostración. Consideremos el programa lineal (2.5) para la gran coalición N:

$$\begin{array}{ll}\text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz\\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^N \\ z \end{pmatrix}\\ & x \geq 0_g,\ z \geq 0.\end{array} \tag{3.3}$$

Dado $P \in \mathcal{P}(N)$, para cada $S \in P$ existe una solución óptima $\left(x^S; d_S\right)$ del programa lineal (2.5). Así, $\left(\left(\sum_{S\in P} x_j^S\right)_{j=1}^{g}; \sum_{S\in P} d_S\right)$ es una solución factible del programa lineal (3.3), por lo que tenemos por la definición de d_N que

$$\sum_{j=1}^{g} p_j \left(\sum_{S\in P} x_j^S\right) - c\left(\sum_{S\in P} d_S\right) \leq \sum_{j=1}^{g} p_j x_j^N - cd_N, \tag{3.4}$$

donde $\left(x^N; d_N\right)$ es una solución óptima de (3.3) tal que $d_N \leq r$. Si reescribimos (3.4), y tenemos en cuenta que $d_N \leq r$, obtenemos que

$$\sum_{S\in P}\left(\sum_{j=1}^{g} p_j x_j^S - cd_S\right) \leq \sum_{j=1}^{g} p_j x_j^N - cd_N = v^{opt}(N).$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{S\in P} valor\,(S, d_S) \leq v^{opt}(N)$. ■

El siguiente lema, que se da sin demostración, nos muestra dos programas lineales que, aunque tienen diferentes conjuntos de soluciones óptimas, tienen los mismos valores óptimos, es decir, son equivalentes de manera óptima. Las soluciones óptimas del primer problema están contenidas en las del segundo por la definición de d_S. En el segundo, al menos una de las soluciones óptimas se alcanza en $z^* = d_S$, siendo d_S la demanda óptima del recurso común para cada coalición S. Por lo tanto, ambos problemas tienen el mismo valor óptimo. Hay que destacar que sólo difieren en una restricción redundante, $z \leq d_S$, sin embargo, ésta es la clave para demostrar el siguiente teorema. Añadir una condición, $z \leq d_S$, aparentemente inocua, da lugar a un problema muy rico que permite diversos enfoques. Dicha condición redundante resulta necesaria para la resolución del problema aunque no cambia el valor óptimo del mismo.

Lema 3.10 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP. Los siguientes programas lineales son óptimamente equivalentes, para toda S,*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ s.a\!: & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z \end{pmatrix} \\ & z \leq d_S \\ & x \geq 0_g, z \geq 0. \end{array} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ s.a\!: & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g, z \geq 0. \end{array} \tag{3.6}$$

Este resultado previo nos proporciona dos maneras diferentes, pero equivalentes, para abordar los programas lineales. En la demostración del siguiente teorema utilizamos uno u otro en función de cual resulte de mayor utilidad. Este resultado nos dice que la cooperación elimina el conflicto, porque todos podrían ir juntos a comprar la cantidad del recurso común que necesitan sin importar qué mecanismo utiliza el administrador para distribuirlo, independientemente de lo que ocurra con el resto de particiones.

Teorema 3.11 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP y (N, v^{opt}) el juego LPP optimista asociado a dicha situación. Si $d_N \leq r$, entonces $C(v^{opt}) \neq \varnothing$.*

Demostración. Consideremos el programa lineal (3.5) para la gran coalición,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^N \\ z \end{pmatrix} \\ & z \leq d_N \\ & x \geq 0_g, z \geq 0, \end{array} \tag{3.7}$$

que es equivalente al programa lineal (3.6) para la gran coalición, puesto que $d_N \leq r$ su dual viene dado por

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t + 0 y_{q+1} + d_N y_{q+2} \\ \text{s.a:} & A^t y \geq p \\ & y_{q+1} - y_{q+2} \leq c \\ & y \geq 0_{q+2}. \end{array} \tag{3.8}$$

Sean $\left(x^N; d_N\right)$ la solución óptima primal y $\left(y_1^N, y_{q+1}^N, 0\right)$ la solución óptima dual de (3.7) y (3.8), respectivamente, con $d_N \leq r$ e $y_{q+2}^N = 0$. Si $y_{q+2}^N > 0$, entonces tenemos dos casos:

1) $y_{q+1}^N = 0$, entonces tomando $y_{q+2}'^N = 0$ mejoramos la función objetivo, lo que es una contradicción con el hecho de que $\left(y^N, 0, y_{q+2}^N\right)$ sea solución óptima del dual.

2) $y_{q+1}^N > 0$, entonces si hacemos $y_{q+1}'^N = y_{q+1}^N - y_{q+2}^N$ e $y_{q+2}'^N = 0$ mejoramos la función objetivo, por lo que obtenemos de nuevo una contradicción. Por lo tanto, $y_{q+2}^N = 0$.

Es fácil comprobar que $\left(y_q^N, y_{q+1}^N, 0\right)$ es una solución factible para el problema dual de (3.5) para cada coalición S. Si $\left(y_1^S, y_{q+1}^S, y_{q+2}^S\right)$ es una solución óptima dual asociada a $\left(x^S; d_S\right)$, se cumple que

$$\sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^N + 0y_{q+1}^N + d_S y_{q+2}^N \geq \sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^S + 0y_{q+1}^S + d_S y_{q+2}^S = valor(S, d_S) = v^{opt}(S).$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{i\in S} \left(\sum_{t=1}^q b_t^i y_t^N\right) \geq v^{opt}(S)$, $\forall S \subseteq N$, y esto implica que $\left(b^i y^N\right)_{i\in N} \in C\left(v^{opt}\right)$. ■

Los dos resultados siguientes se dan sin demostración por ser ésta trivial, ya que $v^{opt} \geq v^+ \geq v^-$.

Corolario 3.12 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP, $\Big(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet|\, P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\Big)$ el juego correspondiente en forma de función característica con estructuras de particiones y (N, v^+) el juego optimista asociado. Si $d_N \leq r$, entonces $C(v^+) \neq \varnothing$ y $\overline{C}(V) \neq \varnothing$.*

Corolario 3.13 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP, $\Big(N, \mathcal{P}(N), \{V(\bullet|\, P)\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\Big)$ el juego correspondiente en forma de función característica con estructuras de particiones y (N, v^-) el juego pesimista asociado. Si $d_N \leq r$, entonces $C(v^-) \neq \varnothing$ y $C(V) \neq \varnothing$.*

Obsérvese que este teorema se cumple para todos los juegos $\left(N, v^R\right)$, obtenidos a partir de cualquier juego de recurso común externo limitado (N, R) asociado a una situación LPP, porque $v^{opt}(S) \geq v^R(S)$ para cualquier coalición S.

Este resultado es importante por varias razones. En primer lugar, hemos encontrado un caso en el que el núcleo del juego optimista es no vacío. En segundo lugar, el conjunto de Owen es muy fácil de obtener porque se obtiene directamente a partir de las soluciones del problema dual. En tercer lugar, se demuestra que la cooperación entre todos los agentes es importante cuando consigue que el recurso común externo no sea escaso; ya que se debe alcanzar una explotación sostenible del recurso común externo para no caer en una situación de sobreexplotación, tal y como se pone de manifiesto en la conocida como Tragedia de los Comunes, Hardin [29]. Finalmente, en este caso no importa cómo son (N, R) o $z_S(P)$, ya que si todos cooperan no se produce sobreexplotación y el recurso es suficiente. Además, el núcleo es no vacío por lo que se puede obtener un reparto estable del recurso sin necesidad de conocer los juegos intermedios, pues dicho reparto se obtiene a partir del problema dual para la gran coalición.

A primera vista, parece que una condición fácil para asegurar que el núcleo es vacío, cuando $d_N > r$, podría ser que $\exists P \in \mathcal{P}(N)$ tal que $\sum\limits_{S \in P} d_S > r$, sin embargo, esto no es cierto como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.14 *Sea (N, A, B, r, p, c) la situación LPP descrita en el Ejemplo 3.7. En este caso, $d_{\{1\}} = d_{\{2\}} = d_N = 4$, $v^{opt}(1) = v^{opt}(2) = 10$ y $v^{opt}(N) = 28$. Existe una partición, $P = \{\{1\}, \{2\}\}$ donde $d_{\{1\}} + d_{\{2\}} > 4$ y el núcleo es no vacío. Por lo tanto, la condición mencionada no garantiza que el núcleo sea vacío.*

Cuando $d_N > r$ y, $\forall P \in \mathcal{P}(N)$, $\sum\limits_{S \in P} d_S < r$ el núcleo del juego optimista puede ser vacío como se muestra en el Ejemplo 3.3, pero, en general, esto no se cumple como ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.15 *Sea (N, A, B, r, p, c) una situación LPP, con tres productores, $N = \{1, 2, 3\}$, que producen tres productos con tres recursos y un recurso común externo,* *donde*

$$A=\begin{bmatrix}10&8&7\\7&10&5\\3&6&7\\5&2&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}9&6&8\\5&18&6\\17&13&3\end{bmatrix},\ p=\begin{pmatrix}8\\9\\5\end{pmatrix},\ c=1,\ r=5.$$

El juego optimista correspondiente es

$$\begin{array}{ccc} v^{opt}(1)=1.5, & v^{opt}(2)=5.25, & v^{opt}(3)=3.5, \\ v^{opt}(1,2)=13.125, & v^{opt}(1,3)=7.7, & v^{opt}(2,3)=12.25, \end{array}$$

y $v^{opt}(N)=17.5$. *Las demandas son*

$$\begin{array}{ccc} d_{\{1\}}=1, & d_{\{2\}}=1.5, & d_{\{3\}}=1, \\ d_{\{1,2\}}=3.75, & d_{\{1,3\}}=2.2, & d_{\{2,3\}}=3.5, \end{array}$$

con $d_N>5$.

Teniendo en cuenta las condiciones que determinan el núcleo

$$\begin{aligned} & x_i\geq 0,\ i=1,2,3\\ & x_1\geq 1.5\\ & x_2\geq 5.25\\ & x_3\geq 3.5\\ & x_1+x_2\geq 13.125\\ & x_1+x_3\geq 7.7\\ & x_2+x_3\geq 12.25\\ & x_1+x_2+x_3=17.5 \end{aligned}$$

puede observarse que éste es no vacío.

Por lo tanto, cuando $d_N>r$ del Teorema 3.6 podemos extraer una condición suficiente para la no vacuidad del núcleo, pero, en general, no está claro cuando el núcleo del juego optimista es vacío o no.

3.3.2. Punto de vista pesimista

Desde un punto de vista pesimista, una coalición de productores S recibirá lo que los agentes externos a S dejen de utilizar en la partición que minimiza lo que quede para S. Esta situación se puede describir como un juego de recurso común externo (N, R^{pes}), donde $R^{pes}(S) = \min\left\{\min_{P:S\in P}\left\{\max\left\{0, r - \sum_{\substack{T\in P\\ T\neq S}} d_T\right\}\right\}, d_S\right\}$.

Utilizando esta cantidad $R^{pes}(S)$ como $z_S(P)$ en (2.6), para toda $S \subset N$, se obtiene el juego LPP pesimista (N, v^{pes}).

Cuando $d_N \leq r$ el núcleo de este juego es no vacío puesto que evidentemente $C(v^+) \subset C(v^-)$ y $v^{opt} \geq v^+ \geq v^- \geq v^{pes}$, y el núcleo del juego optimista es no vacío. Sin embargo, cuando $d_N > r$ puede ser vacío como se muestra en el Ejemplo 3.3 y, por consiguiente, $C(v^+) = \overline{C}(V) = C(v^-) = C(V) = \varnothing$. Cabe destacar que en el Ejemplo 3.3 los juegos optimista y pesimista coinciden. El siguiente resultado establece una condición para garantizar la no vacuidad del núcleo del juego pesimista.

Teorema 3.16 *Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP y (N, v^{pes}) el juego LPP pesimista asociado a dicha situación. Si $d_N > r$ y $\sum_{i\in N} d_i \geq r$, entonces $C(v^{pes}) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sean $\{d_i\}_{i\in N}$ las demandas individuales de los agentes de N. Consideramos el juego de recurso común externo (N, w), donde $w(S) = \max\left\{0, r - \sum_{i\notin S} d_i\right\}$ y $w(N) = r$. Distinguiremos dos casos:

a) Si $\sum_{i\in N} d_i > r$, (N, w) es un juego de bancarrota estándar y, por lo tanto, tiene núcleo no vacío, entonces existe un $u \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(N) = r$ y

$$u(S) \geq \max\left\{0, r - \sum_{i\notin S} d_i\right\} \geq \min_{P:S\in P}\left\{\max\left\{0, r - \sum_{\substack{T\in P_S\\ T\neq S}} d_T\right\}\right\} \geq$$
$$\min\left\{\min_{P:S\in P}\left\{\max\left\{0, r - \sum_{\substack{T\in P_S\\ T\neq S}} d_T\right\}\right\}, d_S\right\} = R^{pes}(S).$$

Así pues, $C\left(R^{pes}\right) \neq \varnothing$ y por el Teorema 3.6, se obtiene el resultado.

b) Si $\sum\limits_{i \in N} d_i = r$, $d\left(S\right) = \sum\limits_{i \in S} d_i = \max\left\{0, r - \sum_{i \notin S} d_i\right\} \geq \min\limits_{P:S \in P}\left\{\max\left\{0, r - \sum_{\substack{T \in P \\ T \neq S}} d_T\right\}\right\} \geq$ $\min\left\{\min\limits_{P:S \in P}\left\{\max\left\{0, r - \sum_{\substack{T \in P \\ T \neq S}} d_T\right\}\right\}, d_S\right\} = R^{pes}\left(S\right)$.

Por lo tanto, $C\left(R^{pes}\right) \neq \varnothing$ y, entonces, por el Teorema 3.6 $C\left(v^{pes}\right) \neq \varnothing$. ■

Cuando $d_N > r$ y $\sum\limits_{i \in N} d_i < r$, el núcleo del juego pesimista puede ser vacío como en el Ejemplo 3.3 o ser no vacío como ilustra el Ejemplo 3.15, ya que si el núcleo del juego optimista es no vacío el núcleo del juego pesimista también es no vacío.

3.4. Comentarios

En este capítulo se ha analizado la distribución del recurso común externo limitado empleando como concepto de solución el núcleo. En él se ha asumido que los productores no disponen de información sobre cómo realizará el gestor el reparto del recurso común, por ello se han analizado los dos puntos de vista más extremos: el pesimista y el optimista. Dichos enfoques nos permiten definir los correspondientes juegos de recurso común, que a su vez determinan los juegos de beneficios pesimista y optimista.

Se ha demostrado que, si cuando todos los jugadores cooperan el recurso es suficiente, entonces tanto el núcleo del juego optimista como el núcleo del juego pesimista son no vacíos. Además, en este caso, hemos encontrado un procedimiento à la Owen para obtener un reparto del recurso sin necesidad de conocer lo que sucede con las coaliciones intermedias. Así mismo, en el caso de que el recurso no sea suficiente cuando todos los jugadores cooperan, resulta necesaria una condición adicional para que el núcleo del juego pesimista sea no vacío. En el caso del núcleo del juego optimista no se han encontrado condiciones que permitan garantizar su no vacuidad, más allá de la derivada del Teorema 3.6.

Como posibles líneas de investigación futuras debemos mencionar que las condiciones encontradas para garantizar la no vacuidad del núcleo son suficientes pero no son necesarias en general, por lo que sería interesante la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes que garantizaran que los núcleos $C(v^{opt})$ y/o $C(v^{pes})$ fueran no vacíos. No obstante, las condiciones utilizadas en este capítulo son sencillas, por lo que podemos suponer que las condiciones que se puedan encontrar sean mucho más exigentes que las aquí presentadas.

Capítulo 4

Un enfoque no cooperativo

En este capítulo consideraremos un proceso competitivo como mecanismo con el que los productores, o grupos de productores, pueden obtener una parte del recurso común externo. Esto puede ser modelado como un juego no cooperativo entre coaliciones en el que estudiaremos la existencia de equilibrios de Nash y algunos de sus refinamientos. En particular, sus equilibrios de Nash (estrictos), (Nash [48]), en estrategias puras. Por otra parte, todos los equilibrios de Nash estrictos resultarán ser equilibrios fuertes de Nash (Aumann [2]).

4.1. Juegos no cooperativos

Los juegos no cooperativos son los modelos que analizan qué decisiones tomaría cada jugador cuando no existe la posibilidad de acuerdos vinculantes. Básicamente, tenemos un conjunto de jugadores, cada uno con un conjunto de estrategias a su disposición y unas asignaciones de pagos que reciben por cada una de las posibles combinaciones de estrategias. Los juegos no cooperativos se caracterizan por la manera en que elige un jugador y en lo que sabe de los otros jugadores. En general, se supone que los individuos toman sus decisiones independientemente unos de otros, aunque conociendo quiénes son sus oponentes y las posibles estrategias que estos tienen a su disposición. Es decir, son individuos egoístas que tratan de predecir lo que los otros agentes harán para obrar entonces en conveniencia propia.

4.1.1. Conceptos básicos

Existen dos formas de representar un juego no cooperativo: en forma extensiva (en árbol) o en forma normal (estratégica o matricial).

La representación de juegos en forma extensiva presenta los juegos como árboles. Cada vértice o nodo representa un punto donde un jugador toma decisiones. Las líneas que parten de los vértices representan acciones posibles para el jugador que debe tomar la decisión en dicho punto. Cada nodo terminal (hoja) del árbol del juego tiene asociada una n-tupla de pagos, es decir, el pago para cada jugador si el juego acaba en dicho nodo.

La representación de juegos en forma normal (estratégica o matricial) representa una matriz de pagos que muestra los jugadores, las estrategias y las recompensas. Cuando un juego se presenta en forma normal se supone que todos los jugadores actúan simultáneamente sin saber la elección o decisión de los demás. Si los jugadores tienen alguna información acerca de las elecciones de otros jugadores el juego se presenta habitualmente en la forma extensiva.

En el presente capítulo se emplea la forma normal para representar los juegos no cooperativos, empleando para ello la siguiente notación $G = (N, S, \pi)$.

Los elementos básicos para describir un juego no cooperativo en forma normal son:

1- Un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, en este capítulo se considerará siempre que el conjunto de jugadores es finito.

2- Para cada jugador $i \in N$ un conjunto de estrategias S_i.

3- Para cada jugador $i \in N$ una función de pagos $\pi_i : S = \prod_{i \in N} S_i \to \mathbb{R}$.

A cada $n-$tupla $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, donde cada s_i pertenece a S_i, $i \in N$, se le llama combinación o perfil de estrategias. Es un vector n-dimensional cuyas componentes son estrategias, una por cada jugador, y el conjunto de todos los perfiles s es

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n.$$

Al vector $(n-1)-$dimensional obtenido a partir de $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ al suprimir s_i se le denota por s_{-i}. El vector $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ es, por lo tanto, la combinación de estrategias elegidas por todos los jugadores menos el i. El conjunto de todas las combinaciones s_{-i} se representa por

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n.$$

La función de pagos o ganancias π_i, para cada i de N, le asigna a cada combinación de estrategias $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ un número, $\pi_i(s)$, que es la utilidad que al jugador i le reporta el resultado del juego cuando se realiza s. La función de pagos para todos los jugadores la denotaremos por

$$\pi(s) = (\pi_1(s), ..., \pi_n(s)).$$

Los juegos se pueden representar mediante su matriz de pagos, para ello se considera el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias para cada jugador y los pagos (o utilidades) que reciben los jugadores para cada combinación de estrategias.

Representaremos por $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores y por

$$\begin{array}{rl} S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^{m_1}\} & \text{el conjunto de estrategias del jugador 1,} \\ S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^{m_2}\} & \text{el conjunto de estrategias del jugador 2,} \\ & \vdots \\ S_n = \{s_n^1, s_n^2, ..., s_n^{m_n}\} & \text{el conjunto de estrategias del jugador } n. \end{array}$$

En el caso de un juego no cooperativo con dos jugadores toda la información del mismo puede representarse en una tabla de doble entrada como la siguiente:

		Jugador 2		
		s_2^1	...	s_2^n
Jugador 1	s_1^1	$\pi_1(s_1^1, s_2^1), \pi_2(s_1^1, s_2^1)$	...	$\pi_1(s_1^1, s_2^n), \pi_2(s_1^1, s_2^n)$
	...	...	...	...
	s_1^m	$\pi_1(s_1^m, s_2^1), \pi_2(s_1^m, s_2^1)$	...	$\pi_1(s_1^m, s_2^n), \pi_2(s_1^m, s_2^n)$

donde uno de los jugadores es el jugador fila y el otro el jugador columna. Cada una de las filas representa las estrategias del jugador fila y cada una de las columnas las del jugador columna. En cada celda aparecen detallados los pagos que obtendría cada jugador en función de cada perfil de estrategias.

En juegos con tres jugadores, en los que cada uno de ellos tiene un número finito de estrategias, es posible recoger toda la información de la representación estratégica del juego utilizando varias tablas parecidas a las utilizadas para juegos con dos jugadores, procediendo tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 *En un departamento de salud de la Comunidad Valenciana existe interés en adquirir un fármaco para tratar una enfermedad. Existen en el mercado tres marcas comerciales de diferentes laboratorios que generan productos de similares características técnicas, por lo que se debe decidir cuál de los tres productos farmacéuticos adquiere el área de logística. Para ello votan las tres áreas asistenciales involucradas en la decisión de la adquisición: Farmacia, Atención Primaria y*

Hospital de Día Quirúrgico (HDQ). La utilidad que obtiene cada una de estas áreas aparece en la siguiente tabla:

	Farmacia	*A. Primaria*	*HDQ*
Fármaco 1	2	3	2
Fármaco 2	1	2	3
Fármaco 3	3	1	1

Cada una de las áreas vota de forma estratégica por uno de los tres fármacos, lo que quiere decir que cada servicio no vota directamente por el fármaco que más le interesa, sino por aquél que teniendo en cuenta los votos de los otros servicios mayor utilidad le reportaría, y deciden adquirir todos el fármaco que tenga más votos, decidiendo el voto de Farmacia en caso de empate.

Sean Farmacia el jugador 1, Atención Primaria el jugador 2 y Hospital de Día Quirúrgico el jugador 3.

Para cada uno de los jugadores, sus estrategias son:

F1: votar por adquirir el fármaco 1.

F2: votar por adquirir el fármaco 2 .

F3: votar por adquirir el fármaco 3.

Por tanto, $S_1 = S_2 = S_3 = \{F1, F2, F3\}$.

La representación del juego en forma estratégica es:

Farmacia	*A. Primaria* $F1$	$F2$	$F3$
$F1$	$2,3,2$	$2,3,2$	$2,3,2$
$F2$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$
$F3$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$

Si $F1$ es la estrategia de HDQ

Farmacia	*A. Primaria* $F1$	$F2$	$F3$
$F1$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$
$F2$	$1,2,3$	$1,2,3$	$1,2,3$
$F3$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$

Si $F2$ es la estrategia de HDQ

Farmacia	*A. Primaria* $F1$	$F2$	$F3$
$F1$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$
$F2$	$2,3,2$	$1,2,3$	$3,1,1$
$F3$	$3,1,1$	$3,1,1$	$3,1,1$

Si $F3$ es la estrategia de HDQ

En este caso, cada combinación de estrategias lleva asociada un vector de pagos de dimensión tres, cuya primera componente representa el pago que recibe Farmacia, la segunda componente es el pago que recibe APrimaria, recogiendo la tercera componente el pago que recibe HDQ.

Obsérvese que para cada estrategia de HDQ se construye una tabla en la que se van combinando pares de estrategias de Farmacia y APrimaria con la estrategia fijada de HDQ, que aparece al pie de la tabla correspondiente.

4.1.2. Conceptos de equilibrio

En un juego no cooperativo, previamente a la aparición del concepto de equilibrio de Nash, se empleaban análisis relativos a la dominación. Lo que significa que se intenta eliminar del análisis aquellas estrategias que produzcan ganancias inferiores a otras, independientemente de la creencia que se pueda tener sobre el comportamiento de los otros jugadores. Bajo esta premisa es razonable suponer que un jugador racional nunca utilizará ese tipo de estrategias. A este tipo de estrategias se les denomina estrictamente dominadas. Además, un jugador racional no debería esperar que los otros jugadores jueguen estrategias estrictamente dominadas, ni debería pensar que los otros jugadores esperen que él juegue estrategias dominadas.

Este tipo de análisis no permite alcanzar un resultado concluyente en la mayoría de las situaciones, permitiendo en todo caso simplificar en alguna medida los análisis. Por lo tanto, resulta necesario emplear un concepto diferente al de la dominación de estrategias que pueda incluir las propiedades de éste y añada otras propiedades que sean interesantes para poder considerar un perfil de estrategias como solución de un juego. La primera propiedad intuitiva que podemos exigirle a un perfil de estrategias es que las desviaciones unilaterales de los individuos no les produzcan ninguna mejora. En este sentido, esta propiedad parece que es una condición necesaria de estabilidad para un perfil de estrategias y una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales. El concepto de solución que posee esta propiedad es el de equilibrio de Nash [48] cuya definición formal es como sigue:

Definición 4.2 *En el juego $G = (N, S, \pi)$, decimos que el perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador $i \in N$,*

$$\pi_i \left(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*\right) \geq \pi_i \left(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*\right)$$

para toda s_i de S_i.

Es decir, para cada jugador $i \in N$, s_i^* es una solución del problema

$$\max \pi_i \left(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*\right),$$

donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i. O dicho de otro modo, para cada jugador $i \in N$, s_i^* es una respuesta óptima a s_{-i}^*, lo que implica que las desviaciones unilaterales no producen ninguna mejora.

La idea esencial de Nash [48] al definir el concepto de equilibrio es que un equilibrio de un juego es un acuerdo que ninguna de las partes puede romper unilateralmente a discreción para mejorar.

De esta definición se deduce que un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un equilibrio de Nash está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores. Esto no significa que en un equilibrio de Nash cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil.

Así mismo, el concepto de equilibrio de Nash puede refinarse si en vez de contemplar la condición de que las desviaciones unilaterales no producen mejora, utilizásemos la condición de que dichas desviaciones unilaterales lo que producen es una pérdida. Ésta es la idea subyacente del concepto de equilibrio estricto de Nash que se define a continuación:

Definición 4.3 *En el juego $G = (N, S, \pi)$, decimos que el perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un equilibrio estricto de Nash (EEN) si para cada jugador $i \in N$,*

$$\pi_i\left(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*\right) > \pi_i\left(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*\right)$$

para toda s_i de S_i.

Con objeto de ilustrar el concepto de equilibrio de Nash se emplea el conocido ejemplo del dilema del prisionero, (veáse para detalle sobre el mismo Poundstone [55]). Se trata de un problema fundamental de la Teoría de Juegos y muestra que dos personas pueden no cooperar incluso si ello va en contra del interés de ambas, por lo que el equilibrio de Nash en ocasiones da resultados complejos de entender, esto ha dado pie a muchos análisis adicionales.

Ejemplo 4.4 *Dos individuos son detenidos debido a que cometieron cierto delito. Ambos son separados en celdas diferentes y son interrogados individualmente. Ambos tienen dos alternativas: cooperar (no confesar) o no cooperar (confesar el delito). Ellos saben que si ninguno confiesa cada uno irá a prisión por dos años. Pero si uno de los dos confiesa y el otro no, entonces al que confiesa lo dejarán libre y al que no confiesa lo condenarán a 10 años. Si ambos confiesan, los dos irán a prisión por 6 años. La situación se resume en la siguiente matriz:*

		Prisionero 1	
		$C = cooperar\ (no\ confesar)$	$NC = no\ cooperar\ (confesar)$
Prisionero 2	C	$(-2, -2)$	$(-10, -0)$
	NC	$(0, -10)$	$(-6, -6)$

Cabe preguntarse, ¿qué harán los detenidos? ¿Cooperarán entre sí (no confesarán) o se traicionarán el uno al otro (confesarán)? Alguien que esté observando este juego podría pensar que los dos jugadores cooperarán (no confesarán), puesto que en ese caso ambos obtendrían un castigo leve. Sin embargo, la estructura no cooperativa del problema hace que este resultado no sea creíble. Si se pactara la no confesión por parte de los dos, ambos tendrían incentivos para romper el pacto, pues dejando al otro cumpliéndolo (no confesar) y él mismo confesando, el que rompe el pacto obtiene la libertad mientras que al otro lo condenarán a 10 años. De la misma manera, estudiando las otras tres posibilidades del juego observamos que el único resultado creíble es (NC, NC). Luego, la predicción de lo que ocurrirá en el juego es que ambos confesarán y permanecerán en la cárcel 6 años.

El dilema del prisionero tiene un único equilibrio de Nash que se produce cuando ambos jugadores confiesan. A pesar de ello, "ambos confiesan" es peor que "am-

bos cooperan", en el sentido de que el tiempo total de cárcel que deben cumplir es mayor. Sin embargo, la estrategia "ambos cooperan" es inestable, ya que un jugador puede mejorar su resultado desviándose si su oponente mantiene la estrategia de cooperación.

La conclusión en situaciones similares a ésta es que la competencia egoísta puede conducir a estados con recompensas inferiores (en términos de beneficio personal y social) a los estados cooperativos, pero que estos últimos no podrán implementarse a menos que existan refuerzos externos (contratos firmados por ley, con verificación, etc.) que obliguen a las partes a cumplir con el acuerdo de cooperación.

En el ejemplo anterior el juego tiene sólo un equilibrio de Nash. Existen juegos con más de un equilibrio de Nash como muestra el siguiente ejemplo conocido como la batalla de los sexos.

Ejemplo 4.5 *Dos enamorados se citan para salir, no han decidido entre ir al cine o al fútbol que empiezan a la misma hora. Llegada la hora no pueden comunicarse, cada uno se ve obligado a ir directamente a un lugar y a esperar que la decisión del otro sea la misma. Ambos prefieren ir juntos mas que solos a cada sitio, aunque ella (jugador fila) prefiere que sea el cine y él (jugador columna) el fútbol.*

		Él	
		Cine	*Futbol*
Ella	*Cine*	$(3,2)$	$(1,1)$
	Futbol	$(0,0)$	$(2,3)$

Los equilibrios de Nash son (C, C) y (F, F). Esta multiplicidad de equilibrios hace difícil predecir el resultado final.

Existen juegos en los cuales no existe ningún equilibrio de Nash. A continuación se muestra como ejemplo el juego de piedra, papel o tijera.

Ejemplo 4.6 *Consideremos el juego en el que cada jugador elige entre piedra, papel o tijera cuya matriz de pagos viene dada por:*

		Jugador 2		
		Piedra	*Papel*	*Tijera*
Jugador 1	*Piedra*	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
	Papel	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
	Tijera	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

Supongamos que el jugador 1 juega siempre por ejemplo, piedra. Entonces el jugador 2 podría sacar ventaja de ello jugando siempre papel. Este juego no presenta ningún equilibrio de Nash. La existencia de equilibrios de Nash no está garantizada ni siquiera en juegos finitos. Por este motivo, aparece el concepto de estrategias mixtas.

Una estrategia mixta es aquella que permite a los jugadores no sólo poder elegir entre acciones concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias, es decir, acciones que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones concretas.

Definición 4.7 *Sea* $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{m_i}\}$ *el conjunto de estrategias del jugador* $i \in N$*. Una estrategia mixta del jugador* $i \in N$*,* $\sigma_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^{m_i}\}$*, es tal que:* $\sigma_i^j \geq 0$ *y* $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i^j = 1$*.*

Una estrategia pura para cualquier jugador $i \in N$ es una estrategia mixta que asigna una probabilidad de 1 a una acción concreta y 0 al resto: $s_i^j = (0, ..., \underbrace{1}_{j}, ..., 0)$, $j \in \{1, ..., m_i\}$.

Intuitivamente, un perfil de estrategias mixtas es un equilibrio de Nash si, en promedio, ningún jugador puede mejorar su pago cambiando sus estrategias mixtas cuando el resto de los jugadores se mantenga con su estrategia actual.

Al conjunto de estrategias mixtas del jugador $i \in N$ lo denotaremos por $\Delta(S_i)$, indicando con ello que el conjunto de estrategias mixtas de un jugador está formado por todas las probabilidades asignadas sobre S_i,

$$\Delta(S_i) = \left\{ \sigma_i = \left(\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^{m_i}\right) \left| \sigma_i^j \geq 0 \text{ , para } j = 1, 2, ..., m_i \text{ y } \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i^j = 1 \right. \right\}.$$

Definición 4.8 *Dado un juego $G = (N, S, \pi)$ decimos que el perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash (EN) si, para cada jugador $i \in N$,*

$$\pi_i\left(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*\right) \geq \pi_i\left(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*\right)$$

para toda $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. Es decir, para cada jugador i, σ_i^* es una respuesta óptima a σ_{-i}^*.

Ejemplo 4.9 *Consideremos de nuevo la situación del Ejemplo 4.6 en la que una mejor respuesta del jugador 1 sería jugar con estrategias mixtas, es decir, asignarle cierta probabilidad a cada estrategia y en cada jugada elegir aleatoriamente de acuerdo a la distribución elegida. Puede demostrarse que, en este caso, siempre que haya sesgo en estas probabilidades (es decir, cuando se le asigne más probabilidad a una estrategia que a otra), el otro jugador puede sacar ventaja de ello y mejorar su pago esperado. De éste modo, el juego sólo tiene un equilibrio de Nash y es $(1/3, 1/3, 1/3)$, es decir, jugar con igual probabilidad cada estrategia.*

Por lo tanto, el juego piedra, papel o tijera, no tiene equilibrios de Nash en estrategias puras y sí tiene uno en estrategias mixtas.

John Nash [48] introdujo los equilibrios que hoy llevan su nombre en su tesis doctoral, donde se demuestra que cualquier juego finito con un número finito de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Teorema 4.10 *(Nash [48]). En todo juego finito $G = (N, S, \pi)$ existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Cuando los jugadores pueden comunicarse entre sí, el hecho de que un perfil de estrategias no sea vulnerable a desviaciones individuales no garantiza que un perfil de estrategias sea de equilibrio, puesto que un grupo de individuos podría organizar una desviación conjunta si con ello puede beneficiarse. Aumann [2] introdujo la noción de equilibrio fuerte de Nash (EFN). Un perfil de estrategias es un EFN si ninguna coalición puede desviarse no empeorando a ninguno de sus miembros y al menos uno de ellos mejore estrictamente. A continuación se da la definición formal de EFN.

Definición 4.11 *Dado un juego $G = (N, S, \pi)$, decimos que el perfil de estrategias puras $(s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un equilibrio fuerte de Nash (EFN) si $\nexists T \subset N$, tal que existe una estrategia $s_T \in S_T$ de forma que*

$$\pi_i \left(s_T, s_{-T}^* \right) \geq \pi_i \left(s_T^*, s_{-T}^* \right), \forall i \in T,$$

y $\exists i \in T$ tal que

$$\pi_i \left(s_T, s_{-T}^* \right) > \pi_i \left(s_T^*, s_{-T}^* \right).$$

Análogamente se define el equilibrio fuerte de Nash en estrategias mixtas, sustituyendo en la definición anterior s por σ.

Como se dijo anteriormente, antes del equilibrio de Nash se utilizaba el concepto de estrategias dominantes y estrategias dominadas. Obviamente ningún jugador racional hará uso de estrategias dominadas ni esperará que otros jugadores lo hagan. Resulta obvio que todo equilibrio en estrategias dominantes es un equilibrio de Nash.

A continuación se da la definición formal de equilibrio en estrategias dominantes, y el resultado que establece que estos equilibrios son también equilibrios de Nash.

Definición 4.12 *Dado un juego* $G = (N, S, \pi)$*, el perfil de estrategias* s^* *es un equilibrio en estrategias dominantes (EED) si* $\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$*,*$\forall i \in N$*,*$\forall s_i \in S_i$*,*$\forall s_{-i} \in S_{-i}$*.*

Teorema 4.13 *Dado un juego* $G = (N, S, \pi)$*, si el perfil de estrategias* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ *está constituido por estrategias dominantes, entonces* s^* *es un equilibrio de Nash.*

Desafortunadamente, este concepto de solución no siempre es aplicable. Los juegos en los que cada jugador tiene alguna estrategia dominante son más bien la excepción que la regla. En el dilema del prisionero este concepto sí es aplicable, pues en este caso cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, que es confesar. La solución es el perfil (confesar, confesar).

No obstante, un equilibrio de Nash no tiene por qué ser un equilibrio en estrategias dominantes como sucede en el Ejemplo 4.5.

4.2. Equilibrios en los LPP no cooperativos

En esta sección se estudia un modelo de procedimiento competitivo en el que las empresas productoras participan con el fin de obtener una parte del recurso común externo. Se analizará si dicho modelo tiene o no algún equilibrio de Nash que permita predecir el comportamiento de las empresas, obteniendo así una solución al problema planteado del reparto del recurso común externo. Aunque por coherencia con esta memoria el problema se plantea en términos de coaliciones (grupos de productores), los resultados obtenidos son igualmente válidos cuando tomamos en consideración a los productores individualmente.

Sea $P = \{S_1, ..., S_k\}$ una partición de N y $d_i > 0$ la demanda de recurso común para cada coalición $S_i \in P$[1], tal como fue definida en la Sección 2.4 del Capítulo 2. La condición sobre la demanda de recurso común $d_i > 0$ indica que las empresas pueden tener beneficios, ya que si su demanda es nula entonces el proceso no es rentable y las empresas no están interesadas en producir. Las coaliciones en P proceden a solicitar simultáneamente el recurso común que necesitan. Como se definió en el Capítulo 2, dada una partición $P = \{S_1, ..., S_k\}$, su demanda total es $d(P) = \sum_{i=1}^{k} d_i$. Cuando el recurso es escaso aparece un problema. Suponemos que en tales situaciones las coaliciones en P actúan competitivamente y tratan de conseguir la maxima cantidad de recurso común externo posible. Esto puede ser modelado como un juego no cooperativo entre coaliciones.

Para ello, diseñaremos un mecanismo que toma la forma de un juego no cooperativo donde los jugadores pueden estar solos o en grupos (coaliciones). Si los jugadores en total piden más de la cantidad disponible del recurso común, entonces el gestor del recurso no les da nada. Se trata de una penalización que el gestor del recurso común externo (cuotas de dióxido de carbono, agua...) impone a los productores, con el fin de que lleguen a un acuerdo sobre una explotación sostenible del recurso. De este modo, obliga a la autorregulación de los productores. Este problema también se puede abordar a través de otras técnicas, como, por ejemplo, las de bancarrota. Este enfoque lo desarrollaremos en el Capítulo 5.

Este juego obliga a las empresas a actuar de forma conservadora puesto que penaliza el abuso; ya que si todas las empresas productoras requieren demasiado

[1] A lo largo de este capítulo denotaremos d_{S_i} por d_i por una cuestión de economía de notación y siempre que no haya confusión entre la demanda del jugador i y la demanda de la coalición S_i.

recurso común, entonces no se produce el reparto de dicho recurso por parte de la entidad gestora del mismo.

Supongamos que cada coalición $S_i \in P$ elige una cantidad z_i del recurso común externo para comprar que no superará a d_i, es decir, su conjunto de estrategias es $X_i = [0, d_i]$ y su beneficio viene dado por

$$\pi_i (z_1, ..., z_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sum_{i=1}^{k} z_i > r \\ valor\,(S_i; z_i)\,, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Denotamos por (P, X, π) al juego no cooperativo que juegan las coaliciones de P cuando tratan de obtener la mayor cantidad de recurso común.

Distinguiremos dos casos en nuestro análisis, cuando el recurso común externo es suficiente y cuando no lo es, es decir, es escaso. Estudiaremos en primer lugar el caso menos complejo, cuando el recurso común externo es suficiente para satisfacer la demanda de todos los productores.

El siguiente teorema muestra que si la demanda total de recurso común externo de la partición P es menor o igual que la cantidad de recurso común externo disponible existe un único equilibrio de Nash.

Teorema 4.14 *Sea $P = \{S_1, ..., S_k\}$ una partición de N, $(d_1, ..., d_k)$ es el único equilibrio de Nash del juego no cooperativo (P, X, π) si, y sólo si, $d(P) \leq r$.*

Demostración. Primero probaremos que se trata de una condición suficiente. Sea $P = \{S_1, ..., S_k\}$ una partición de N tal que $d(P) \leq r$. Entonces, dada la definición de d_i se cumple que

$$\pi_i (d_1, ..., d_k) = \; valor\,(S_i; d_i) \geq valor\,(S_i; z_i) = \pi_i (d_1, ..., d_{i-1}, z_i, d_{i+1}, ..., d_k)\,,$$

para todo $z_i \leq d_i$ y, por lo tanto, $(d_1, ..., d_k)$ es un equilibrio de Nash.

Supongamos que existe otro equilibrio de Nash $(z_1, ..., z_k)$. Entonces, existe al menos un i tal que $z_i < d_i$, pero por la definición sabemos que

$$d_i = \text{mín} \{z_i \in \mathbb{R}_+ \, | valor\,(S_i; z_i) \text{ es máximo}\}.$$

Así pues, tenemos que $valor\,(S_i; z_i) < valor\,(S_i; d_i)$, lo que contradice el hecho de que $(z_1, ..., z_k)$ sea un equilibrio de Nash.

A continuación debemos probar que se trata de una condición necesaria. Sea $(d_1, ..., d_k)$ el único equilibrio de Nash. Supongamos que $d(P) > r$. Esto implica que $\pi_i\,(d_1, ..., d_k) = 0, \forall i \in \{1, .., k\}$. Distinguimos tres situaciones posibles:

1. $\sum_{i \neq j} d_i > r, \forall j \in \{1, .., k\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < (k-1)\,\varepsilon < \min_{j \in \{1,..,k\}} \left\{ \sum_{i \neq j} d_i - r \right\},$$

entonces, $(d_1 - \varepsilon, ..., d_k - \varepsilon)$ es un equilibrio de Nash. Efectivamente, en primer lugar, se tiene que

$$\pi_i\,(d_1 - \varepsilon, ..., d_k - \varepsilon) = 0, \forall i \in \{1, .., k\},$$

puesto que

$$\sum_{i \neq j} (d_i - \varepsilon) = \sum_{i \neq j} d_i - (k-1)\,\varepsilon > r, \forall j \in \{1, .., k\}.$$

Por otro lado, haciendo uso de las desigualdades anteriores se tiene que para todo $i \in \{1, .., k\}$

$$0 = \pi_i\,(d_1 - \varepsilon, ..., d_j - \varepsilon, ..., d_k - \varepsilon) \geq \pi_i\,(d_1 - \varepsilon, ..., z_i, ..., d_k - \varepsilon) = 0,$$

$\forall z_i \in [0, d_i]$, por lo que $(d_1 - \varepsilon, ..., d_k - \varepsilon)$ es otro equilibrio de Nash, que contradice la hipótesis de unicidad del equilibrio de Nash.

2. $\exists j \in \{1, .., k\}$ tal que $\sum_{i \neq j} d_i < r$.

Elegimos $z_j \leq r - \sum_{i \neq j} d_i$ tal que $valor\,(S_j; z_j) > 0$, ya que sabemos por hipótesis que hay beneficios positivos. Ahora, para $(d_1, ..., z_j, ..., d_k)$ tenemos que

$$valor\,(S_j; z_j) = \pi_j\,(d_1, ..., z_j, ..., d_k) > \pi_j\,(d_1, ..., d_j, ..., d_k) = 0,$$

que es una contradicción porque $(d_1, ..., d_k)$ es un equilibrio de Nash por hipótesis.

3. $\nexists j \in \{1, .., k\}$ tal que $\sum_{i \neq j} d_i < r$.

Todo lo anterior implica que $\sum_{i \neq j} d_i \geq r$,$\forall j \in \{1, .., k\}$ con al menos una igualdad en dichas expresiones, porque en cualquier otro caso estaríamos en la situación 1 y esto es imposible.

Supongamos que para el jugador j se tiene que $\sum_{i \neq j} d_i = r$. Entonces, $\left(d_1, ..., \underbrace{0}_{j}, ..., d_k \right)$ es un equilibrio de Nash, puesto que

$$0 = \pi_j \left(d_1, ..., \underbrace{0}_{j}, ..., d_k \right) \geq \pi_j\,(d_1, ..., z_j, ..., d_k) = 0, \forall z_j \in [0, d_j]\,,$$

dado que $\sum_{i \neq j} d_i + z_j > r, \forall z_j > 0$. Recuérdese que $d_i > 0$ por hipótesis.

Asimismo, para todo $i \neq j$ sabemos que $\forall z_i \in [0, d_i]$,

$$\pi_i \left(d_1, ..., \underbrace{0}_{j}, ..., d_k \right) = valor\ \ (S_i; d_i) \geq valor\ \ (S_i; z_i) = \pi_i \left(d_1, ..., z_i, ..., \underbrace{0}_{j}, ..., d_k \right),$$

por definición de d_i y $\sum_{i \neq j} d_i = r$. Pero, esto de nuevo es una contradicción con respecto a la unicidad de $(d_1, ..., d_k)$ como equilibrio de Nash. ■

En segundo lugar, analizamos el problema, en términos de equilibrios de Nash, cuando la cantidad de recurso común externo no es suficiente para satisfacer las expectativas de demanda de los jugadores, que se pueden agrupar en diferentes coaliciones formando una partición de todo el conjunto. Con esta segunda parte se cubren todos los casos que pueden aparecer en este tipo de situaciones.

El siguiente teorema nos muestra que si la cantidad de recurso común externo no es suficiente para satisfacer las demandas, entonces existe todo un conjunto de equilibrios de Nash.

Teorema 4.15 *Sea $P = \{S_1, ..., S_k\}$ una partición de N. Si $d(P) > r$, entonces el conjunto de todos los equilibrios Nash del juego (P, X, π) viene dado por*

$$EN(P,X,\pi) = \left\{ z \in \prod_{i=1}^{k} [0,d_i] \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{k} z_i = r, \;\; o \\ \sum\limits_{i \neq j} z_i > r, \forall j \in \{1,...,k\}, \;\; o \\ \sum\limits_{i \neq j} z_i = r, z_j = \frac{r}{k-1}, z_j \leq d_j, \forall j \in \{1,...,k\} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Es fácil comprobar que todos los puntos del conjunto son equilibrios de Nash. En el primer caso, debemos tener en cuenta que para $z \in \prod_{i=1}^{k} [0, d_i]$ con $\sum_{i=1}^{k} z_i = r$, si z_j, $z'_j \in [0, d_j]$ tal que $z'_j < z_j$, entonces $valor(S_j; z'_j) \leq valor(S_j; z_j)$. Este resultado se cumple porque $valor\left(S_j; z'_j\right) < valor\left(S_j; d_j\right)$, debido a la unicidad de d_j, $z'_j < d_j$ y $z_j = \alpha z'_j + (1 - \alpha) d_j$ con $\alpha > 0$. Por lo tanto,

$$valor\left(S_j; z_j\right) \geq \alpha valor\left(S_j; z'_j\right) + (1-\alpha) valor\left(S_j; d_j\right) > valor\left(S_j; z'_j\right).$$

Los casos restantes son obvios porque desviaciones unilaterales no producen ningún beneficio. Veamos que componen un listado exhaustivo de todos los equilibrios de Nash. Para ello, distinguiremos dos casos.

1. Supongamos que existe un equilibrio de Nash $z \in \prod_{i=1}^{k} [0, d_i]$, tal que $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i < r$. Entonces, existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $z_j < d_j$, en caso contrario $z_i = d_i, \forall i \in \{1, ..., k\}$, y $\sum_{i=1}^{k} z_i = \sum_{i=1}^{k} d_i = d(P) > r$. Por lo tanto, el jugador j tiene incentivos para desviarse y elegir $z'_j > z_j$ con $\sum\limits_{i \neq j} z_i + z'_j \leq r$ y $z'_j \leq d_j$, por lo que no sería un equilibrio de Nash por argumentos análogos a los utilizados con anterioridad.

2. Supongamos que existe un equilibrio de Nash $z \in \prod_{i=1}^{k} [0, d_i]$, tal que $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i > r$. En este caso, se debe tener en cuenta que $\pi_i(z) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

2.1 Si existe un $j \in \{1,\ldots,k\}$ tal que $\sum\limits_{i\neq j} z_i < r$, si j se desvía de z_j a $r - \sum\limits_{i\neq j} z_i$ obtendrá una cantidad $\pi_j(z_1,\ldots,r-\sum\limits_{i\neq j} z_i,\ldots,z_k) = valor\left(S_j; r - \sum\limits_{i\neq j} z_i\right) > 0$. Por lo tanto, z no sería un equilibrio de Nash.

2.2 Si $\sum\limits_{i\neq j} z_i = r, \forall j \in \{1,...,k\}$, entonces ningún j tiene incentivos para desviarse.

Sin embargo, para todo $j \in \{1,...,k\}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i = \sum\limits_{i\neq j} z_i + z_j = r + z_j$. Si sumamos en j

$$k\sum_{i=1}^{k} z_i = kr + \sum_{i=1}^{k} z_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} z_i = r + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} z_i = r + z_j$$
$$z_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i = K, \forall j \in \{1,...,k\} \text{ y } K \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$r = \sum_{i\neq j} z_i = (k-1)\,K \Rightarrow K = \frac{r}{k-1}.$$

2.2.1 Si existe i tal que $\frac{r}{k-1} > d_i$, tenemos una contradicción con $z_i \in [0, d_i]$.

2.2.2 Si para todo i tenemos que $\frac{r}{k-1} \leq d_i$, entonces z es un equilibrio de Nash.■

El resultado siguiente ilustra cuál es el conjunto de los equilibrios de Nash estrictos, cuando la cantidad de recurso común externo no es suficiente para satisfacer las demandas de los jugadores.

Teorema 4.16 *Sea $P = \{S_1,...,S_k\}$ una partición de N. Si $d(P) > r$, entonces el conjunto de todos los equilibrios estrictos de Nash viene dado por*

$$EEN\,(P,X,\pi) = \left\{ z \in \prod_{i=1}^{k} [0,d_i] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} z_i = r \ \ y\ \forall i \in \{1,...,k\}\,,\ z_i > 0 \right\}. \tag{4.1}$$

Demostración.

1. Cada vector de $EEN\,(P,X,\pi)$ es, obviamente, un equilibrio de Nash por el Teorema 4.15, ya que

$$EEN\,(P,X,\pi) \subset EN\,(P,X,\pi)\,. \tag{4.2}$$

2. Cada vector de $EEN\,(P, X, \pi)$ es un equilibrio estricto de Nash. Distinguimos dos casos:

2.1 $\forall z_i' < z_i$ tenemos que $valor\,(S_i; z_i') < valor\,(S_i; z_i)$. Se verifica el resultado porque $valor\,(S_i; z_i') < valor\,(S_i; d_i)$ debido a la unicidad de d_i, $z_i' < d_i$ y $z_i = \alpha z_i' + (1-\alpha)d_i$ con $\alpha > 0$. Luego,

$$valor\,(S_i; z_i) \geq \alpha valor\,(S_i; z_i') + (1-\alpha) valor\,(S_i; d_i) > valor\,(S_i; z_i').$$

2.2 $\forall z_i' > z_i$ sabemos que $\sum\limits_{j \neq i} z_j + z_i' > r$, lo que implica que $\pi_i\,(z) = 0$ por definición y $valor\,(S_i; z_i) > 0$.

3. Supongamos que existe al menos un equilibrio estricto de Nash no incluido en $EEN\,(P, X, \pi)$. Consideramos dos casos:

3.1 Si $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i > r$, por el Teorema 4.15 sabemos que si z es un equilibrio de Nash, obviamente, no es estricto, porque $\pi_i\,(z) = 0$ por la definición del pago.

3.2 Si $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i = r$ y existe al menos una coalición S_j tal que $z_j = 0$, sabemos por el Teorema 4.15 que es un equilibrio de Nash. Por otro lado, tenemos que $\pi_j\,(z_j, z_{-j}) = 0$ y $\pi_j\left(z_j', z_{-j}\right) = 0$, $\forall z_j' > z_j$. Por lo tanto, éste es un equilibrio de Nash, que no es estricto.

$\blacksquare$

Además, todos los equilibrios estrictos de Nash descritos en (4.1) son equilibrios fuertes de Nash, porque usando un razonamiento similar al utilizado en el resultado previo, no es posible que varias coaliciones se desvíen juntas de tal manera que ninguna de ellas empeore su resultado y al menos una mejore estrictamente. Es fácil comprobar que $z \in \prod\limits_{i=1}^{k} [0, d_i]$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i = r$ con algún $z_j = 0$, es un equilibrio fuerte de Nash que no es estricto. Por lo tanto, los equilibrios estrictos de

Nash forman un subconjunto propio de los equilibrios fuertes de Nash, que a su vez forman un subconjunto de los equilibrios de Nash. El siguiente teorema caracteriza los equilibrios fuertes de Nash, lo incluimos sin demostración porque ésta utiliza argumentos análogos a los empleados en los teoremas anteriores.

Teorema 4.17 *Sea $P = \{S_1, ..., S_k\}$ una partición de N. Si $d(P) > r$, entonces el conjunto de todos los equilibrios fuertes de Nash del juego (P, X, π) viene dado por*

$$EFN\,(P, X, \pi) = \left\{ z \in \prod_{i=1}^{k} [0, d_i] \;\; tal\ que \; \sum_{i=1}^{k} z_i = r \right\}. \tag{4.3}$$

4.3. Comentarios

A la vista de estos resultados cabe concluir que el conjunto de posibles equilibrios es muy grande, por lo que decidir si nos encontraremos con uno u otro es difícil. Lo que parece claro es que los equilibrios de Nash más justos y ventajosos para el mercado, desde el punto de vista de los beneficios, son aquellos que distribuyen todo el recurso, cuando éste es escaso, entre todos los participantes.

Cabe destacar que la coordinación entre las coaliciones es importante a fin de no recibir una cantidad nula del recurso común externo, ya que como se demostró en el Capítulo 3 la cooperación entre todos los agentes es importante cuando consigue que el recurso común externo no sea escaso. Por lo tanto, estamos interesados en alcanzar una explotación sostenible del recurso común externo, para no caer en una situación de sobreexplotación.

Se ha asumido que cada productor conoce los recursos de los demás, se deja para una futura investigación el estudio, en términos de los equilibrios Bayesianos, cuando no se disponga de dicha información. Otra línea de investigación futura es el estudio del problema desde la perspectiva de las subastas. Este problema se presenta cuando la cantidad total de recurso común externo se subasta entre las coaliciones de una partición, donde cada coalición pide la cantidad a comprar y ofrece un precio por unidad de recurso común, como ocurre en el modelo del mercado eléctrico descrito en Sancho et al. [62].

Por todo ello, parece razonable utilizar algún tipo de mecanismo para distribuir el recurso, cuando es escaso, que nos conduzca a un equilibrio de Nash que pueda tener buenas propiedades en el sentido de equidad o justicia. En este sentido, toda esta reflexión nos invita a explorar la posibilidad de utilizar técnicas de bancarrota, que son habituales en la distribución de recursos escasos y que abordamos en el capítulo siguiente.

Capítulo 5

Los LPP como problemas de bancarrota

En este capítulo supondremos que existe un gestor del recurso común, una autoridad gubernamental, que es el encargado de repartir dicho recurso entre los distintos grupos de agentes que están interesados en su compra. Como suponemos que la demanda total del sector es superior a la disponibilidad máxima, el gestor debe establecer un método de reparto con objeto de asignar el recurso común. Una posibilidad es recurrir a los esquemas de arbitraje. Un problema típico donde se suelen aplicar este tipo de soluciones son los problemas de bancarrota.

Los modelos de reparto estándar de bancarrota son problemas en los cuales existe una cantidad de un bien perfectamente divisible que debe ser distribuido entre los agentes involucrados. La demanda de cada agente sobre esta cantidad puede ser representada por un número real positivo. La cantidad total reclamada por los agentes excede la cantidad total disponible, por lo que no todas las reivindicaciones de los agentes pueden ser completamente satisfechas. El estudio de este tipo de problemas ha sido analizado, desde un punto de vista de la Teoría de Juegos, en

O'Neill [52], Aumann y Maschler [3] y Curiel et al. [13] entre otros. Las técnicas de bancarrota han sido ampliamente utilizadas para hacer frente a la escasez de recursos en una enorme variedad de problemas, tales como: la asignación de recursos en redes de telefonía móvil (Lucas-Estañ et al. [43]), el reparto de costes en problemas de conexión a un servicio (Bergantiños et al. [6]) y la gestión de proyectos (Estévez-Fernández [17]). Además, la Teoría de Juegos se ha aplicado en una amplia gama de problemas de gestión de recursos naturales tales como la asignación de recursos pesqueros o de agua (Dinar et al. [14]).

En el presente capítulo, se explora la posibilidad de utilizar técnicas de bancarrota en situaciones de producción lineal con un recurso común externo limitado, para distribuir la cantidad de recurso disponible. Debemos señalar que, hasta donde sabemos, el uso de técnicas de bancarrota en este tipo de problemas es nuevo. La idea subyacente es la siguiente: cuando la cantidad disponible no es suficiente para satisfacer las demandas de las empresas, el gestor del recurso común puede emplear una regla de bancarrota, f, para obtener una distribución razonable entre los diferentes grupos de empresas, que utilizarán su parte para producir y optimizar sus beneficios. Así pues, dada una situación LPP, asumimos que el gestor del recurso común externo, por ejemplo derechos de emisión de dióxido de carbono, anuncia qué regla de bancarrota f se utilizará para repartirlo. A este tipo de situaciones las denominaremos situaciones $f-LPP$. En función de la regla de bancarrota seleccionada (*proporcional* ($PROP$), *constrained equal awards* (CEA), *constrained equal losses* (CEL), *Talmud* (TAL), etc.) se definirán diferentes juegos con externalidades. En el presente capítulo se utilizarán reglas como la proporcional o la CEA para evitar la posibilidad de que una empresa no reciba nada, por lo que quedaría excluida del sistema. Se estudia el núcleo de estos juegos porque se pretende comprobar si los beneficios generados por la asignación del recurso común son coalicionalmente estables.

5.1. Problemas de bancarrota: conceptos básicos

Supongamos que se dispone de una cantidad limitada de un bien perfectamente divisible (dinero, permisos de emisiones, etc.) que hay que distribuir entre varios agentes, cada uno de los cuales realiza una demanda sobre ese bien que puede ser inferior, igual o superior a la cantidad disponible. Una vez que se han planteado todas las peticiones resulta que la suma de las demandas individuales de cada agente supera la cantidad del bien a repartir. Surge por tanto, lo que se denomina un problema de bancarrota, es decir, cómo repartir la cantidad disponible entre todos los agentes.

Formalmente, un problema de bancarrota es un problema de distribución en el que se reparte una cantidad E (perfectamente divisible), denominada estado, de un bien entre un grupo de agentes, siendo esta cantidad insuficiente para satisfacer todas las demandas que los agentes tienen sobre ella. Una solución a un problema de bancarrota es una distribución del estado en función de las demandas de los agentes.

Consideramos situaciones donde el estado, E, va a ser dividido entre n demandantes o acreedores. El conjunto de demandantes se denotará por $N = \{1, 2, ..., n\}$ y $E < \sum_{i \in N} d_i$. El acreedor $i \in N$ demanda una cantidad d_i de E. Así pues, un problema de bancarrota se puede representar por la tripleta (N, E, d). El problema de reparto surge porque la cantidad que se va a dividir es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, puesto que:

$$d_i \geq 0, \forall i \in N \text{ y} \sum_{i \in N} d_i > E.$$

Asociado a este problema se puede definir un juego cooperativo como sigue.

Definición 5.1 *Dado un problema de bancarrota (N, E, d), el juego de bancarrota asociado se define, $\forall S \subset N$, como*

$$v(S) = \max\left\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\right\},$$

y representa lo que queda para los jugadores en S después de que las demandas de los jugadores en $N \setminus S$ se han satisfecho.

Puede observarse que este juego tiene un enfoque pesimista, puesto que cada coalición valora que su coalición complementaria obtendrá todo lo que pide y que para ellos sólo quedará el resto.

Algunas propiedades de los juegos de bancarrota son las siguientes:

1. Son convexos.

2. Tienen núcleo no vacío.

3. El valor de Shapley [64] está en el núcleo.

Como se ha dicho anteriormente, el objetivo es repartir el estado entre los agentes teniendo en cuenta sus demandas. Para ello, utilizaríamos algún tipo de regla. A continuación se da la definición formal de regla de bancarrota.

Definición 5.2 *Una regla de bancarrota es una función f que asigna a cada problema de bancarrota (N, E, d) un vector de pagos $f(N, E, d)$ que verifica:*

1. $0 \leq f_i(N, E, d) \leq d_i, \forall i \in N,$
2. $\sum_{i \in N} f_i(N, E, d) = E.$

La primera condición nos dice que cada agente debe obtener un pago no negativo y dicha cantidad no puede ser superior a su demanda. La segunda condición nos indica que el estado debe ser completamente repartido entre todos los agentes.

Obviamente, hay muchas formas de definir una regla de bancarrota. A continuación se presentan algunas de las más conocidas.

La regla proporcional ($PROP$) divide el estado proporcionalmente a la cantidad que demandan los agentes

$$P_i(N, E, d) = \frac{E}{\sum_{j \in N} d_j} d_i, \forall i \in N.$$

Esta regla ya era conocida en la antigua Grecia y se basa en la idea aristotélica de: "tratar igual a los iguales y desigual a los desiguales, en proporción a sus similitudes y diferencias", contenida en el libro quinto, capítulo III de la obra "Ética a Nicómaco" (Aristóteles [1]).

En la regla de reparto recursivo (RC) (O'Neill [52]) se supone que los agentes son ordenados y según ese orden van descontando del estado la cantidad demandada. Así, el primero obtiene el máximo entre la cantidad demandada y el estado, el segundo el máximo entre su demanda y el estado remanente, y así sucesivamente. El vector de pagos depende del orden y como todas las ordenaciones deberían ser igualmente posibles, para ser justos el orden de los agentes debería ser aleatorio. Esta regla coincide con el valor de Shapley, $\Phi(v)$, del juego de bancarrota (N, v).

$$RC(N, E, d) = \Phi(v)$$

La regla proporcional ajustada (AP) (Curiel et al. [13]) comienza asignando a cada agente su derecho mínimo,

$$m_i = \max \left\{ 0, E - \sum_{j \in N - \{i\}} d_j \right\},$$

que es la cantidad de estado no reclamada por los demás agentes. El estado remanente, $E - m(N)$, se divide proporcionalmente entre todos los individuos utilizando para ello las demandas actualizadas

$$d_i^* = \text{mín}\left\{d_i - m_i, E - \sum_{j\in N} m_j\right\}.$$

La regla AP coincide con el τ valor (Tijs [72]) del juego de bancarrota (N, v),

$$AP(N, E, d) = \tau(v).$$

La regla *constrained equal awards* (CEA) era utilizada como método de reparto por los rabinos en la tradición judía. Esta regla divide el estado de modo que todos los agentes obtienen el mismo pago, bajo la condición de que ninguno recibe una cantidad superior a su demanda. Por lo que, existe un único número real α tal que cada uno recibe

$$\text{mín}\{d_i, \alpha\} \text{ y } E = \sum_{i\in N} \text{mín}\{d_i, \alpha\}.$$

La regla *constrained equal losses* (CEL) divide el estado entre los agentes de modo que todos pierden la misma cantidad, pero sin tener que aportar cantidades de su propio patrimonio, es decir, existe un único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que cada individuo recibe

$$\text{máx}\{0, d_i - \beta\} \text{ y } E = \sum_{i\in N} \text{máx}\{0, d_i - \beta\}.$$

La regla Talmud (TAL) (Aumann y Maschler, [3]), se define como una combinación de las reglas CEA y CEL del siguiente modo:

$$TAL(N, E, d) = \begin{cases} CEA\ (N, E, \frac{d}{2}), & si\ E \leq \frac{\sum d_i}{2} \\ \frac{d}{2} + CEL(N, E, \frac{d}{2}), & si\ E > \frac{\sum d_i}{2} \end{cases},$$

donde d es el vector de demandas.

Resulta interesante la utilización de gráficos hidraúlicos para ilustrar las reglas de bancarrota, Kaminski [38].

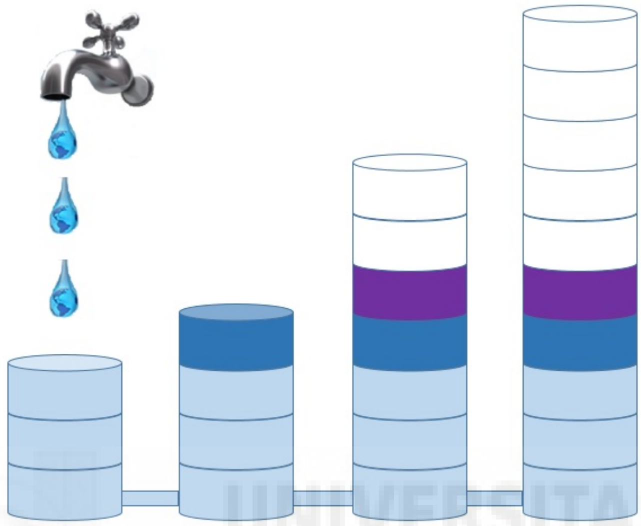

Fig 5.1 Representación de la regla CEA

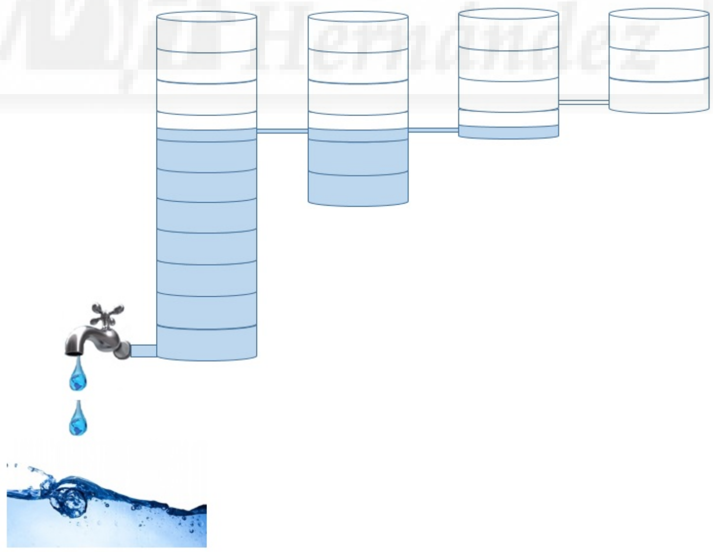

Fig 5.2 Representación de la regla CEL

En el siguiente ejemplo, descrito por el rabino Abraham Ibn Ezra, se calculan las reglas de bancarrota más habituales.

Ejemplo 5.3 *Jacob muere y su hijo Rubén da a conocer, debidamente atestiguado, que su padre le dejó en herencia todo su patrimonio. Su hijo Simeón también aporta documentación en la que se prueba que su padre le dejó en herencia la mitad de su patrimonio. Leví da a conocer que le dejó un tercio y Judá aporta la cuarta petición en la que su padre le otorgaba un cuarto (Rabinovitch [56]). Supongamos que el patrimonio total es de* 120 *unidades. Así pues, se trata del reparto de una herencia de* 120 *unidades monetarias entre los cuatro hijos, cuyas demandas son* $(120, 60, 40, 30)$.

La regla $PROP$ divide el estado proporcionalmente a la cantidad total que demandan los agentes y se obtiene así el reparto proporcional $PROP(N, E, d) = (57.6, 28.8, 19.2, 14.4)$

Para calcular la regla RC debemos tener en cuenta todos los órdenes posibles. Para ello denotamos por A a Reuben, B a Simeón, C a Leví y D a Judah.

Orden de reparto				Reparto			
A	B	C	D	120	0	0	0
A	B	D	C	120	0	0	0
A	C	B	D	120	0	0	0
A	C	D	B	120	0	0	0
A	D	B	C	120	0	0	0
A	D	C	B	120	0	0	0
B	A	C	D	60	60	0	0
B	A	D	C	60	60	0	0
B	C	A	D	20	60	40	0
B	C	D	A	0	60	40	20
B	D	A	C	30	60	0	30
B	D	C	A	0	60	30	30
C	A	B	D	80	0	40	0
C	A	D	B	80	0	40	0
C	B	A	D	20	60	40	0
C	B	D	A	0	60	40	20
C	D	A	B	50	0	40	30
C	D	B	A	0	50	40	30
D	A	C	B	90	0	0	30
D	A	B	C	90	0	0	30
D	B	A	C	30	60	0	30
D	B	C	A	0	60	30	30
D	C	A	B	50	0	40	30
D	C	B	A	0	50	40	30
				57,5	29,2	19,2	14,2

Calculando el promedio de las cantidades anteriores se obtiene el reparto $RC(N, E, d) = (57.5, 29.2, 19.2, 14.2)$.

En la regla AP se calculan primero los derechos mínimos de cada uno, pero dadas las reclamaciones de los hijos estos derechos mínimos se reducen al vector nulo.

A	*120*	*B+C+D*	*130*
B	*60*	*A+C+D*	*190*
C	*40*	*A+B+D*	*210*
D	*30*	*A+B+C*	*220*

Dado que se está demandando más de lo que hay disponible, entonces $m_i = 0$ y $d_i^* = d_i$. Por lo tanto, la regla coincide con la regla proporcional calculada previamente, $AP\ (N, E, d) = (57.6, 28.8, 19.2, 14.4)$.

La regla CEA divide el estado de modo que todos obtienen el mismo pago, bajo la condición de que ninguno recibe una cantidad superior a su demanda, obteniéndose en este caso $CEA\ (N, E, d) = (30, 30, 30, 30)$.

Como la regla CEL divide el estado entre los agentes de modo que todos pierden la misma cantidad, truncada por la demanda, en este caso obtenemos $CEL(N, E, d) = (86.67, 26.67, 6.67, 0)$.

La regla Talmud (TAL) en este caso es $CEA\ (N, E, \frac{d}{2})$, ya que $E \leq \frac{\sum d_i}{2}$porque $E = 120 \leq \frac{\sum d_i}{2} = \frac{120+60+40+30}{2} = 125$. La división en este caso sigue el siguiente proceso. La cantidad $\frac{d_4}{2}$ es la primera que se proporciona a todos los acreedores. La cuota del acreedor con menor demanda se fija en $\frac{d_4}{2}$. La cantidad restante de E se divide entre todos los acreedores, excluyendo el de menor demanda, hasta que todos obtengan $\frac{d_3}{2}$. La cuota del siguiente acreedor se fija en $\frac{d_3}{2}$ y de nuevo el remanente de E se divide entre los acreedores, excluyendo los dos de menor demanda que ya han obtenido las cuotas fijadas, y hasta que todos obtengan $\frac{d_2}{2}$, y así se continúa el proceso. Por lo tanto, $TAL = (55, 30, 20, 15)$.

En el estudio de los juegos de producción lineal con un recurso común externo, nos centraremos en la utilización de la regla CEA, puesto que dicha regla nos permite obtener equilibrios estrictos de Nash, ya que siempre asigna cantidades estrictamente positivas a todos los agentes. Aunque existen otras reglas como, por ejemplo, la TAL que también cumplen esta condición, hemos elegido ésta por motivos relacionados con la no manipulación por uniones como se verá posteriormente.

5.2. Reglas de bancarrota y situaciones LPP

Dada una partición $P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ de N, si los elementos en esta partición reclaman más cantidad de recurso común externo de la disponible, $d(P) > r$, el problema al que se enfrenta la partición P puede ser modelado como un problema de bancarrota. Debemos mencionar que dicho problema no es un problema estándar de bancarrota, puesto que la demanda de la coalición puede diferir de la suma de las demandas de todos sus miembros, $d_S \neq \sum_{i \in S} d_i$. En él, el conjunto de coaliciones debe repartirse la cantidad r de recurso común según el vector de demandas, $(d_{S_1}, ..., d_{S_k})$, asociadas a la partición. Así pues, podemos representar el problema de bancarrota mediante $(P, r, (d_{S_1}, ..., d_{S_k}))$. Obsérvese que cuando consideramos la partición $P = \left\{\{i\}_{i \in N}\right\}$, aunque el problema de bancarrota no es estándar podría ser tratado como un problema de bancarrota clásico, si se considera que las demandas son aditivas $d_S = \sum_{i \in S} d_i$.

En estas condiciones, cuando $d(P) > r$, el gestor del recurso común externo puede emplear técnicas de bancarrota para obtener una distribución razonable de r entre las diferentes coaliciones. Sea (N, A, B, p, r, c) una situación LPP, suponemos que el gestor del recurso común externo, anuncia qué regla de bancarrota f se utilizará para repartir y denominamos (N, A, B, p, r, c, f) una situación $f - LPP$. En función de la regla de bancarrota seleccionada (proporcional ($PROP$), *constrained equal awards* (CEA), *constrained equal losses* (CEL), Talmud (TAL), etc.) se pueden definir diferentes juegos con externalidades.

Definición 5.4 *Sea* (N, A, B, p, r, c, f) *una situación* $f - LPP$*. El juego* $f - LPP$ *en forma de función característica con estructuras de particiones asociado a esta situación viene dado por* $\left(N, \mathcal{P}(N), \left\{V^f\left(\bullet | P\right)\right\}_{P\in\mathcal{P}(N)}\right)$, *donde* N *es el conjunto de jugadores,* $\mathcal{P}(N)$ *denota el conjunto de todas las particiones de* N *y* $V^f\left(S | P\right)$ *se obtiene como*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cf\left(S | P\right) \\ s.a: & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ f\left(S | P\right) \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g \end{array} \tag{5.1}$$

para toda $S \subset N$*, utilizando como máximo la cantidad de recurso común externo que* S *ha obtenido aplicando la regla de bancarrota* f *al problema de bancarrota* $(P, r, (d_{S_1}, ..., d_{S_k}))$ *tal que* $P \in \mathcal{P}(N)$*, con* $S \in P$*, es decir,* $f\left(S | P\right)$*.*

Obsérvese que $V^f\left(S | P\right) = valor\left(S; f\left(S | P\right)\right)$. Cuando no haya posibilidad de confusión, denotaremos este juego $f - LPP$ por $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$.

De forma similar al trabajo de Funaki y Yamato [20] necesitamos probar, en nuestro contexto, el resultado siguiente con el objetivo de simplificar el estudio del núcleo para conseguir asignaciones coalicionalmente estables.

Proposición 5.5 *Sea* (N, A, B, p, r, c, f) *una situación* $f - LPP$ *y* $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ *el correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones. Entonces,*

$$V^f\left(\{N\} | N\right) \geq \sum_{S\in P} V^f\left(S | P\right), \forall P \in \mathcal{P}(N).$$

Demostración. Dada $P \in \mathcal{P}(N)$, $V^f\left(S | P\right) = valor\left(S; f\left(S | P\right)\right)$, $\forall S \in P$. Sea $\left(x^S; f\left(S | P\right)\right)$ un plan óptimo para cada coalición $S \in P$. Por lo tanto,

$$Ax^S \leq \begin{pmatrix} b^S \\ f\left(S | P\right) \end{pmatrix} \text{ y } A\left(\sum_{S\in P} x^S\right) \leq \begin{pmatrix} \sum_{S\in P} b^S \\ \sum_{S\in P} f\left(S | P\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^N \\ r \end{pmatrix}.$$

Distinguimos dos casos:

1. Si $d_N \geq r,\ f(N|\{N\}) = r$, entonces $\left(\sum_{S\in P} x^S; \sum_{S\in P} f(S|P)\right)$ es un plan de producción factible para N y, por consiguiente, se tiene que

$$\sum_{S\in P} valor\,(S;f\,(S\,|P)) \leq valor\left(N; \sum_{S\in P} f\,(S\,|P)\right) \leq V^f\,(N|\,\{N\})\,.$$

2. Si $d_N < r,\ f(N|\{N\}) = d_N$. Ahora $\left(\sum_{S\in P} x^S; \sum_{S\in P} f(S|P)\right)$ es una solución factible del problema (3.6) para N

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cz \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^S \\ z \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g, z \geq 0. \end{array}$$

Por definición de d_N, tenemos que

$$valor\,(N;d_N) \geq \sum_{j=1}^{g} p_j \left(\sum_{S\in P} x^S\right) - c\sum_{S\in P} f\,(S\,|P) = \sum_{S\in P} valor\,(S;f\,(S\,|P))\,.$$

■

De la misma manera que en el Capítulo 3, aquí pueden definirse los juegos optimista y pesimista asociados al juego $f - LPP$ en forma de función característica con estructuras de particiones, $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$,

$$v_f^+(S) = \max_{P:S\in P} V^f\,(S|P) \text{ y } v_f^-(S) = \min_{P:S\in P} V^f\,(S|P)\,. \tag{5.2}$$

Teorema 5.6 *Sea (N, A, B, p, r, c, f) una situación $f - LPP$ y $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ el correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones. Entonces se tiene que $C(V^f) = C(v_f^-)$ y $\overline{C}\left(V^f\right) = C(v_f^+)$.*

Demostración. No se incluye explícitamente la demostración, ya que teniendo en cuenta la Proposición 5.5 la demostración sigue el mismo esquema de razonamiento que el desarrollado en Funaki y Yamato [20].■

Con el fin de ilustrar cómo obtener el juego $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ se proporciona el siguiente ejemplo, donde se utiliza la regla CEA para el reparto del recurso. Aunque es posible utilizar cualquier regla de bancarrota, la elección dependerá de las características del problema y de las propiedades que se consideren interesantes o relevantes para la regla que se utilice.

Ejemplo 5.7 *Sea (N, A, B, r, p, c) una situación LPP con tres empresas, $N = \{1, 2, 3\}$, que producen dos productos empleando dos recursos y necesitan un recurso común externo, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 80 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix}, p = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}, c = 14, \ r = 50.$$

Las posibles particiones en N y sus demandas asociadas son

$$\begin{array}{ll} P^1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, d^1 = (20, 20, 25), & P^2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, d^2 = (40, 25), \\ P^3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, d^3 = (46, 20), & P^4 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}, d^4 = (45, 20), \\ P^5 = \{\{1, 2, 3\}\}, d^5 = 66. & \end{array}$$

Si aplicamos la regla CEA a todos los problemas de bancarrota asociados a las particiones antes descritas, se obtiene

$$\begin{array}{ll} CEA\left(P^1, 50, d^1\right) = (16.67, 16.67, 16.67), & CEA\left(P^2, 50, d^2\right) = (25, 25), \\ CEA\left(P^3, 50, d^3\right) = (30, 20), & CEA\left(P^4, 50, d^4\right) = (30, 20), \\ CEA\left(P^5, 50, d^5\right) = 50. & \end{array}$$

Empleando estas cantidades en sus propios procesos de producción, cada coalición *alcanzará un valor dentro de cada partición*

$V^{CEA}(\{1\}|\, P^1) = 666.67,\quad V^{CEA}(\{2\}|\, P^1) = 766.67,\quad V^{CEA}(\{3\}|\, P^1) = 766.67,$
$V^{CEA}(\{1,2\}|\, P^2) = 1150,\quad V^{CEA}(\{3\}|\, P^2) = 1150,$
$V^{CEA}(\{1,3\}|\, P^3) = 1380,\quad V^{CEA}(\{2\}|\, P^3) = 920,$
$V^{CEA}(\{2,3\}|\, P^4) = 1380,\quad V^{CEA}(\{1\}|\, P^4) = 720,$
$V^{CEA}(\{1,2,3\}|\, P^5) = 2300.$

Es fácil observar que éste es un juego con externalidades, ya que, por ejemplo, lo que el agente 1 *recibe en la partición* P^1*,* $V^{CEA}(\{1\}|\, P^1)$*, es diferente de lo que obtiene en la partición* P^4*,* $V^{CEA}(\{1\}|\, P^4)$*. Esto se debe a que lo que una empresa obtiene depende no sólo de su propia coalición,* $\{1\}$*, sino también de cómo se organizan los otros jugadores, actuando separados,* $\{\{2\},\{3\}\}$*, o juntos,* $\{2,3\}$*.*

Empleando los juegos optimista y pesimista asociados a un juego $f-LPP$ con estructuras de particiones, se definen los núcleos optimista y pesimista de un juego $f-LPP$.

Definición 5.8 *Sea* $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ *un juego* $f-LPP$ *en forma de función característica con estructuras de particiones. El núcleo optimista se define mediante*

$$C\left(v_f^+\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n |\ x(S) \geq v_f^+(S)\ \forall S\ y\ x(N) = V^f(N)\right\} = \overline{\mathcal{C}}\left(V^f\right).$$

El núcleo pesimista viene dado por

$$C\left(v_f^-\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n |\ x(S) \geq v_f^-(S)\ \forall S\ y\ x(N) = V^f(N)\right\} = \mathcal{C}\left(V^f\right).$$

El núcleo optimista está incluido en el pesimista, por lo tanto, si el núcleo optimista es no vacío el pesimista también lo es. Sin embargo, en muchas ocasiones, el núcleo optimista es vacío como ilustra el ejemplo siguiente. Esto significa que el núcleo optimista representa un mayor nivel de exigencia de los jugadores con respecto a lo que piensan que deben obtener.

Ejemplo 5.9 *Sea* (N, A, B, r, p, c, CEA) *la situación* $CEA - LPP$ *descrita en el Ejemplo 5.7 y* $\left(N, \mathcal{P}(N), V^{CEA}\right)$ *su juego asociado. En este caso, el núcleo optimista será el conjunto de* $x \in \mathbb{R}^3$ *tales que*

$$x(\{1\}) \geq 720, x(\{2\}) \geq 920, x(\{3\}) \geq 1150,$$
$$x(\{1,2\}) \geq 1150, x(\{1,3\}) \geq 1380, x(\{2,3\}) \geq 1380, x(\{1,2,3\}) = 2300.$$

Pero este conjunto es vacío, ya que $720 + 920 + 1150 > 2300$, *en consecuencia,* $\overline{\mathcal{C}}\left(V^{CEA}\right) = \varnothing$. *Sin embargo, es fácil comprobar que* $(700, 800, 800)$ *pertenece al núcleo pesimista*

$$\mathcal{C}\left(V^{CEA}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} x(\{1\}) \geq 666.67, x(\{2\}) \geq 766.67, x(\{3\}) \geq 766.67, \\ x(\{1,2\}) \geq 1150, x(\{1,3\}) \geq 1380, x(\{2,3\}) \geq 1380, \\ x(\{1,2,3\}) = 2300 \end{array} \right\}.$$

Sea $\left(N, v_f^+\right)$ el juego optimista $f - LPP$ para toda regla de bancarrota f. Si $d_N \leq r$ se tiene que $\overline{\mathcal{C}}\left(V^f\right) \neq \varnothing$, empleando argumentos similares a los utilizados en el Capítulo 3 y teniendo en cuenta que $V^f(S|\, P)$ se obtiene de (5.1). Si $d_N > r$ el núcleo optimista puede ser vacío como ilustra el ejemplo anterior. Con objeto de asegurar que el núcleo pesimista es no vacío, es necesario considerar algunas condiciones adicionales.

Los juegos optimista y pesimista inducen dos juegos de recurso común externo $\left(N, R_f^+\right)$ y $\left(N, R_f^-\right)$ de la siguiente manera. Para el caso del juego optimista tendríamos el siguiente conjunto de particiones para cada coalición $S \subset N$:

$$\arg \max_{P : S \in P} V^f(S\,|P) = \mathcal{M}_S^+,$$

donde $\mathcal{M}_S^+$ es un conjunto de particiones. Entonces, para cada partición $Q \in \mathcal{M}_S^+$, se obtiene una cantidad de recurso $f(S\,|Q)$. Elegimos Q de manera que $f(S\,|Q)$ sea mínima y definimos el juego de recursos optimista como $R_f^+(S) = f(S\,|Q)$. Entre todas las particiones que proporcionan el máximo valor óptimo elegimos la más eficiente, es decir, la que necesita una menor cantidad de recurso común externo.

Para el caso del juego pesimista tendríamos el siguiente conjunto de particiones para cada coalición $S \subset N$:

$$\arg \min_{P:S\in P} V^f (S\,|P) = \mathcal{M}_S^-,$$

donde $\mathcal{M}_S^-$ es un conjunto de particiones. Luego, para cada $Q \in \mathcal{M}_S^-$, puede obtenerse $f(S\,|Q)$. Consideraremos Q tal que $f(S\,|Q)$ es mínimo y definimos el juego de recursos pesimista como $R_f^-(S) = f(S\,|Q)$.

Hay que destacar el papel fundamental que estos juegos de recursos desempeñarán en el Teorema 5.11, porque cuando los núcleos de los juegos de recurso común son no vacíos, entonces los núcleos de (N, v_f^+) y (N, v_f^-) son no vacíos también si $d_N > r$. Estos juegos están basados en lo que los agentes (empresas) demandan al gestor del recurso limitado y en lo que esperan conseguir de acuerdo con la regla de bancarrota utilizada. Por lo tanto, tienen un gran impacto en los beneficios. Claramente, (N, R_f^+) y (N, R_f^-) dependen de la regla de bancarrota f, de las particiones y de la situación de producción lineal con un recurso común limitado. Asimismo, $R_f^+(S) \geq R_f^-(S)$, $\forall S \subset N$. Esto implica que $C(R_f^+) \subset C(R_f^-)$ y $C(R_f^+)$ es más exigente que $C(R_f^-)$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho, donde $C(R_f^-) \neq \varnothing$ y $C(R_f^+) = \varnothing$.

Ejemplo 5.10 *Sea (N, A, B, r, p, c, CEA) la situación $CEA - LPP$ descrita en el Ejemplo 5.7. El correspondiente (N, R_{CEA}^+) viene dado por*

$R_{CEA}^+(\{1\}) = 20,\ R_{CEA}^+(\{2\}) = 20,\ R_{CEA}^+(\{3\}) = 25$
$R_{CEA}^+(\{1,2\}) = 25,\ R_{CEA}^+(\{1,3\}) = 30,\ R_{CEA}^+(\{2,3\}) = 30,\ R_{CEA}^+(N) = 50$

y (N, R_{CEA}^-) es

$R_{CEA}^-(\{1\}) = 16.67,\ R_{CEA}^-(\{2\}) = 16.67,\ R_{CEA}^-(\{3\}) = 16.67$
$R_{CEA}^-(\{1,2\}) = 25,\ R_{CEA}^-(\{1,3\}) = 30,\ R_{CEA}^-(\{2,3\}) = 30,\ R_{CEA}^-(N) = 50.$

Es fácil comprobar que el núcleo de (N, R_{CEA}^+) es vacío, mientras que el núcleo de (N, R_{CEA}^-) es no vacío ya que $(16.67, 16.67, 16.67) \in C(R_{CEA}^-)$.

El siguiente resultado es relevante porque establece que si el gestor del recurso común externo realiza una asignación estable de recurso entre las empresas, entonces se puede obtener una distribución estable de los beneficios, y así ningún agente puede quejarse de las asignaciones de recurso común externo o de los beneficios obtenidos. En el teorema siguiente se requiere que $\sum\limits_{i\in N} d_i > r$ con objeto de asegurar que los núcleos pesimista y optimista sean no vacíos.

Teorema 5.11 *Sea* (N, A, B, r, p, c, f) *una situación* $f - LPP$ *y* $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ *su correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones tal que* $d_N > r$*. Entonces* $C\left(R_f^-\right) \neq \varnothing$ *(resp.* $C\left(R_f^+\right) \neq \varnothing$*) implica que* $C(V^f) \neq \varnothing$ *(resp.* $\overline{C}\left(V^f\right) \neq \varnothing$*).*

Demostración. El problema dual del problema de producción lineal para la gran coalición viene dado por

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{g} p_j x_j - cr \\ \text{s.a:} & Ax \leq \begin{pmatrix} b^N \\ r \end{pmatrix} \\ & x \geq 0_g. \end{array} \tag{5.3}$$

Sea y^* una solución de su problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t + r y_{q+1} - cr \\ \text{s.a:} & A^t y \geq p \\ & y \geq 0_{q+1}. \end{array} \tag{5.4}$$

Igual que se demostró en el Teorema 3.6, si $d_N > r$, entonces $y_{q+1}^* > c$.

Sea $h \in C\left(R_f^-\right)$, entonces $\sum_{t=1}^{q} b_t^N y_t^* + r y_{q+1}^* - cr = v_f^-(N)$. Además, $\forall S \subset N$

$$\sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^* + \left(\sum_{i\in S} h_i\right) y_{q+1}^* - c\left(\sum_{i\in S} h_i\right) = \sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^* + (y_{q+1}^* - c)\sum_{i\in S} h_i \geq$$
$$\sum_{t=1}^{q} b_t^S y_t^* + (y_{q+1}^* - c) R_f^-(S) \geq v_f^-(S),$$

donde la última desigualdad se cumple porque y^* es factible para el problema dual de la coalición S, e $y^*_{q+1} > c$. Por lo tanto,

$$\left(\sum_{t=1}^{q} b_t^i y_t^* + h_i\left(y^*_{q+1} - c\right)\right)_{i\in N} \in \mathcal{C}\left(V^f\right).$$

El mismo esquema puede utilizarse para deducir la no vacuidad de $\overline{\mathcal{C}}\left(V^f\right)$. ■

En el siguiente corolario requerimos de la condición $\sum_{i\in N} d_i > r$ para tener un problema de bancarrota $\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right)$, con el objetivo de asegurar la no vacuidad del núcleo. Esta condición juega un papel clave y, permite al gestor del recurso fijar una cantidad de recurso lo suficientemente pequeña para que la condición se satisfaga y así garantizar la existencia de asignaciones de recursos estables y consecuentemente la existencia de distribución de beneficios estables.

Corolario 5.12 *Sea (N, A, B, p, r, c, f) una situación $f - LPP$ y $\left(N, \mathcal{P}(N), V^f\right)$ el correspondiente juego en forma de función característica con estructuras de particiones, tal que $d_N > r$ y $\sum_{i\in N} d_i > r$. Si $f\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \in C\left(R_f^-\right)$ (resp. $f\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \in C\left(R_f^+\right)$), entonces $C\left(V^f\right) \neq \varnothing$ (resp. $\overline{C}\left(V^f\right) \neq \varnothing$).*

Demostración. La demostración sigue el mismo razonamiento que la demostración del Teorema 5.11 si se emplea $f\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \in C\left(R_f^-\right)$ en lugar de $h \in C\left(R_f^-\right)$. ■

Debemos destacar la importancia de este resultado, ya que nos permite resolver un problema difícil obteniendo una asignación estable de una manera sencilla. Porque cuando el gestor del recurso limitado establece el máximo de recurso disponible, puede disminuir esta cantidad hasta que la suma de las demandas individuales de las empresas sea mayor que dicha cantidad. Entonces, todas las empresas cooperarán y, si el gestor del recurso utiliza una asignación en el núcleo del juego de recurso común, entonces somos capaces de encontrar un elemento del núcleo à la Owen utilizando dualidad y una regla de bancarrota. Esto garantiza al menos una distribución estable de los ingresos pero, en general, puede existir más de una.

La condición $f\left(N, r, (d_i)_{i \in N}\right) \in C\left(R_f^-\right)$ no puede ser eliminada como muestra el ejemplo siguiente, donde, en particular, se usa la regla proporcional.

Ejemplo 5.13 *Sea (N, A, B, r, p, c) la situación LPP descrita en el Ejemplo 5.7. Cuando aplicamos la regla proporcional a los problemas de bancarrota asociados a cada partición, obtenemos*

$$\begin{array}{ll} PROP\left(P^1, 50, d^1\right) = (15.38, 15.38, 19.23), & PROP\left(P^2, 50, d^2\right) = (30.77, 19.23), \\ PROP\left(P^3, 50, d^3\right) = (34.85, 15.15), & PROP\left(P^4, 50, d^4\right) = (34.62, 15.38), \\ PROP\left(P^5, 50, d^5\right) = 50. & \end{array}$$

Utilizando estas cantidades en sus propios procesos de producción, el valor de cada coalición viene dado por

$$\begin{array}{lll} V^{PROP}\left(\{1\} | P^1\right) = 646.08, & V^{PROP}\left(\{2\} | P^1\right) = 707.48, & V^{PROP}\left(\{3\} | P^1\right) = 884.58, \\ V^{PROP}\left(\{1,2\} | P^2\right) = 1415.42, & V^{PROP}\left(\{3\} | P^2\right) = 884.58, & \\ V^{PROP}\left(\{1,3\} | P^3\right) = 1603.1, & V^{PROP}\left(\{2\} | P^3\right) = 696.9, & \\ V^{PROP}\left(\{2,3\} | P^4\right) = 1592.52, & V^{PROP}\left(\{1\} | P^4\right) = 646.08, & \\ V^{PROP}\left(\{1,2,3\} | P^5\right) = 2300. & & \end{array}$$

En este caso, $d_N > 50$ y $\sum_{i \in N} d_i > 50$. Sin embargo,

$$\begin{array}{l} R^-_{PROP}\left(\{1\}\right) = 15.38, R^-_{PROP}\left(\{2\}\right) = 15.15, R^-_{PROP}\left(\{3\}\right) = 19.23 \\ R^-_{PROP}\left(\{1,2\}\right) = 30.77, R^-_{PROP}\left(\{1,3\}\right) = 34.85, R^-_{PROP}\left(\{2,3\}\right) = 34.62, R^-_{PROP}\left(N\right) = 50. \end{array}$$

y $(15.38, 15.38, 19.23)$ no pertenece a $C\left(R^-_{PROP}\right)$ porque éste es vacío ya que, si escribimos las restricciones que definen el núcleo, se tiene que:

$$\begin{array}{l} x\left(\{1\}\right) \geq 15.38 \\ x\left(\{2\}\right) \geq 15.15 \\ x\left(\{3\}\right) \geq 19.23 \\ x\left(\{1,2\}\right) \geq 30.77 \\ x\left(\{1,3\}\right) \geq 34.85 \\ x\left(\{2,3\}\right) \geq 34.62 \\ x\left(\{1,2,3\}\right) = 50. \end{array}$$

Como se puede observar la suma de los pagos de los jugadores sería a lo sumo 49.76 *que claramente no coincide con* 50*, por lo que no se cumple la eficiencia.*

El juego pesimista con la regla proporcional, en este caso vendría dado por:

$v^{-}_{PROP}(\{1\}) = 646.08,\quad v^{-}_{PROP}(\{2\}) = 696.9,\quad v^{-}_{PROP}(\{3\}) = 884.58,$
$v^{-}_{PROP}(\{1,2\}) = 1415.42,\quad v^{-}_{PROP}(\{1,3\}) = 1603.10,\quad v^{-}_{PROP}(\{2,3\}) = 1592.52,$
$v^{-}_{PROP}(\{1,2,3\}) = 2300$

y haciendo un razonamiento similar al anterior veríamos que $C\left(v^{-}_{PROP}\right) = \varnothing$.

Las implicaciones de la inestabilidad en la asignación del recurso común externo pueden conducir a la inestabilidad en la distribución de los beneficios, como muestra el ejemplo anterior. Así, el sistema producirá quejas de los agentes respecto a la asignación de recurso común. Como resultado, surgirá insatisfacción con la asignación del recurso común. Esto nos invita a buscar reglas en las que la asignación de recurso común sea estable, es decir, que esté en el núcleo del juego de recursos, y, por lo tanto, proporcione una distribución estable de los beneficios.

5.3. Uso de la regla CEA

Nos centraremos en el uso de la regla CEA por varias razones. Ante todo, porque beneficia a las empresas con menores demandas sobre el recurso común; mientras que, por ejemplo, la regla CEL beneficia aquellas empresas con mayores demandas. En segundo lugar, porque como se demostrará, el reparto obtenido con la aplicación de la regla CEA se encuentra en el núcleo del juego de recursos pesimista bajo ciertas condiciones, lo que asegura una distribución estable de los beneficios. En tercer lugar, hay que destacar que tiene la propiedad de ser inmune a las fusiones, es decir si k, $j \in N$ se unen, entonces

$$CEA_{kj}\left(N^{*}, r, (d^{*}_{i})_{i\in N^{*}}\right) \leq CEA_{k}\left(N, r, (d_{i})_{i\in N}\right) + CEA_{j}\left(N, r, (d_{i})_{i\in N}\right),$$

donde $N^* = N\backslash\{k,j\} \cup \{kj\}$.

Esto significa que cuando dos empresas se unen no mejora la cantidad de recurso común que consiguen, lo que implica que no es manipulable por las uniones, es decir, la regla es inmune a manipulaciones estratégicas cuando un grupo de empresas se fusiona con el objetivo de presentarse como una sola, para más detalles se puede consultar el trabajo de Thomson [71].

Como se ha dicho anteriormente, cuando se considera la regla CEA, el núcleo pesimista es no vacío bajo ciertas condiciones, como se establece en el Corolario 5.17. Antes de llegar a esta conclusión necesitamos algunos resultados previos.

Lema 5.14 *Sea (N, A, B, r, p, c, f) una situación $f - LPP$ con $d_N > r$ y $\sum_{i\in N} d_i > r$. Dada $S \subset N$, si $R_f^-(S) = d_S$ entonces* $\arg \min_{P:S\in P} V^f(S|P) = \{P \in \mathcal{P}(N) | S \in P\}$.

Demostración. Si $Q \notin \arg \min_{P:S\in P} V^f(S|P)$, entonces $V^f(S|Q) > \min_{P:S\in P} V^f(S|P)$. Partiendo de $R_f^-(S) = d_S = \min\{z \in \mathbb{R}_+ | valor(S; z) \text{ es máximo}\}$,

$$\min_{P:S\in P} V^f(S|P) = \max_{P:S\in P} V^f(S|P) \quad \text{y} \quad V^f(S|Q) > \max_{P:S\in P} V^f(S|P),$$

lo cual es una contradicción. ■

Este resultado garantiza que si una coalición en el caso pesimista obtiene todas sus necesidades, entonces en todas las particiones obtiene los mismos beneficios. El siguiente teorema nos dice que si no hay posibilidad de manipulación por fusión, el núcleo del juego de asignación pesimista es no vacío.

Teorema 5.15 *Sea (N, A, B, r, p, c, f) una situación $f - LPP$ tal que $d_N > r$ y $\sum_{i\in N} d_i \geq r$. Si ,$\forall S \subset N$,*

$$\sum_{i\in S} f_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq f_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\backslash S}, r, \left(d_S, (d_i)_{i\in N\backslash S}\right)\right) = f\left(S \middle| S \cup \{i\}_{i\in N\backslash S}\right),$$

entonces $C\left(R_f^-\right) \neq \varnothing$.

Demostración. En primer lugar, demostraremos que $f\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \in C\left(R_f^-\right)$.

Dado $S \subset N$. Distinguimos dos casos:

a) $\left\{S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right\} \in \arg \min\limits_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right)$. Esto implica que $f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) \geq R_f^-(S)$, por la definición de $R_f^-(S)$. Además, por hipótesis $\sum\limits_{i\in S} f_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq f_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}, r, \left(d_S, (d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right) = f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) \geq R_f^-(S)$.

b) $\left\{S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right\} \notin \arg \min\limits_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right)$. Consideramos dos situaciones:

b.1) Si $d_S + \sum_{i\in N\setminus S} d_i \leq r$, entonces tenemos que

$$\sum_{i\in S} f_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq f_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}, r, \left(d_S, (d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right) = d_S \geq R_f^-(S),$$

donde la primera desigualdad se obtiene por hipótesis y la última se cumple siempre.

b.2) Si $d_S + \sum_{i\in N\setminus S} d_i > r$, ya que $\left\{S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right\} \notin \arg \min\limits_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right)$, tenemos que $V^f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) > \min\limits_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right)$.

Asumimos que $f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) < R_f^-(S) < d_S$, donde la última desigualdad se cumple por el Lema 5.14. Esto implica que $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que

$$R_f^-(S) = \alpha f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) + (1-\alpha)\, d_S.$$

Considerando las soluciones $(x^1; z^1)$ y $(x^2; z^2)$ del problema (5.1) con $f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right)$ y d_S, respectivamente. Entonces, $\alpha\left(x^1; z^1\right) + (1-\alpha)\left(x^2; z^2\right)$ es una solución factible del problema (5.1) con $R_f^-(S)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\min_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right) \geq \\
&\alpha V^f\left(S \left| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right.\right) + (1-\alpha)\, valor\left(S; d_S\right) > \\
&\min_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right),
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se debe a la linealidad del problema (5.1) y la última se cumple ya que $\left\{S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right\} \notin \arg \min\limits_{P:S\in P} V^f\left(S\,|P\right)$ y la definición de d_S. Por lo tanto, obtenemos una contradicción y

$$\sum_{i\in S} f_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq f\left(S \middle| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right) \geq R_f^-\left(S\right).$$

Consecuentemente, $f\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \in R_f^-\left(S\right)$. ■

El siguiente resultado establece una clase de propiedad de inmunidad a las fusiones para la regla CEA en nuestro marco de trabajo[1].

Proposición 5.16 *Sea (N, A, B, r, p, c, CEA) una situación $CEA-LPP$ con $d_N > r$ y $d_i + d_j \geq \frac{2r}{n}$, para todo i, $j \in N$. Entonces $\forall S \subset N$,*

$$CEA\left(S\right) = \sum_{i\in S} CEA_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq$$
$$CEA_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}, r, \left(\textstyle\sum_{i\in S} d_i, (d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right) = CEA\left(S \middle| S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}\right).$$

Demostración. Es fácil comprobar que $d_i + d_j \geq \frac{2r}{n}$, para todo i, $j \in N$, implica $\sum\limits_{i\in N} d_i \geq r$. Pueden surgir dos casos:

1) $d_S \geq \sum\limits_{i\in S} d_i$. En este caso, por la propiedad de inmunidad a las fusiones se tiene que

$$CEA\left(S\right) = \sum_{i\in S} CEA_i\left(N, r, (d_i)_{i\in N}\right) \geq CEA_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}, r, \left(\textstyle\sum_{i\in S} d_i, (d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right).$$

Mediante la definición de la regla CEA, $CEA\left(S\right) \leq \sum_{i\in S} d_i$. Por lo tanto,

$$CEA_S\left(S \cup \{i\}_{i\in N\setminus S}, r, \left(\textstyle\sum_{i\in S} d_i, (d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right) \leq \textstyle\sum_{i\in S} d_i$$

[1] Aunque la regla proporcional es la única regla de bancarrota no manipulable en problemas de bancarrota estándar, en este contexto puede ser manipulable. En el Ejemplo 5.13 $R_{PROP}^-\left(\{1\}\right) + R_{PROP}^-\left(\{3\}\right) = 15.38 + 19.23 = 34.71 < 34.85 = R_{PROP}^-\left(\{1, 3\}\right)$.

y por la definición de la regla CEA y la hipótesis planteada, tenemos que

$$CEA_S\left(S\cup\{i\}_{i\in N\setminus S},r,\left(\sum_{i\in S}d_i,(d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right)=CEA_S\left(S\cup\{i\}_{i\in N\setminus S},r,\left(d_S,(d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right).$$

2) $d_S<\sum\limits_{i\in S}d_i$.

Podemos distinguir dos subcasos:

2.1) Si $CEA(S)\geq d_S$, entonces el resultado se cumple directamente.

2.2) $CEA(S)<d_S$, entonces tenemos que $\sum_{i\in N\setminus S}d_i+d_S>r$ ya que $\sum_{i\in N}d_i>r$. Por lo tanto, por la propiedad de inmunidad a las fusiones

$$\begin{aligned}&CEA(S)\geq CEA_S\left(S\cup\{i\}_{i\in N\setminus S},r,\left(\sum_{i\in S}d_i,(d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right)\\&=CEA_S\left(S\cup\{i\}_{i\in N\setminus S},r,\left(d_S,(d_i)_{i\in N\setminus S}\right)\right),\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por la definición de la regla CEA y $CEA(S)<d_S<\sum\limits_{i\in S}d_i$. Así, el resultado siempre se cumple. ■

Corolario 5.17 *Sea (N,A,B,r,p,c,CEA) una situación $CEA-LPP$ con $d_N>r$ y $d_i+d_j\geq\frac{2r}{n}$, para todo i, $j\in N$. Entonces $C\left(V^f\right)\neq\varnothing$.*

Demostración. Para probar este corolario sólo tenemos que emplear el Teorema 5.15 y la Proposición 5.16 junto con el Corolario 5.12, y así podemos construir un elemento del núcleo pesimista. ■

Si el gestor del recurso común fija la cantidad r de tal manera que se cumplen las condiciones en los resultados anteriores, entonces podemos obtener una asignación estable del recurso de forma sencilla, empleando dualidad (véase el Corolario 5.12 y el Corolario 5.17). Aunque esto puede dar lugar a una asignación extrema tal y como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.18 *Sea* (N, A, B, r, p, c, CEA) *la situación* $CEA - LPP$ *descrita en el Ejemplo 5.7 y* $\left(N, \mathcal{P}(N), V^{CEA}\right)$ *su correspondiente juego asociado a la situación* $CEA - LPP$*. Vimos que* $(16.67, 16.67, 16.67) \in C\left(R^{-}_{CEA}\right)$*. Una solución óptima para el programa dual del problema lineal de la gran coalición es* $y_1^* = y_2^* = 0$ *e* $y_3^* = 60$*. Así, la asignación* $(766.67, 766.67, 766.67) \in C\left(v^{-}_{CEA}\right)$*, pero esta distribución de los beneficios es extrema, porque todos los beneficios extra derivados de la cooperación son asignados al jugador 1.*

Sin embargo, el núcleo es mucho mayor, por ejemplo, $(700, 800, 800) \in C\left(v^{-}_{CEA}\right)$*. Asumiendo que los beneficios son en euros, este resultado puede obtenerse a partir de la distribución inicial del recurso* $(16.67, 16.67, 16.67)$ *lo que significa la compraventa del recurso común entre las empresas de la siguiente manera:*

El jugador 1 vende $3\frac{1}{3}$ *unidades a los jugadores 2 y 3 a* 50 *euros por unidad. Así, el jugador 1 obtendrá* 600 *euros a partir de su propia producción empleando 10 unidades. Esa empresa ha pagado* $16\frac{2}{3} \times 14$ *por comprar recurso común externo y recibe* $6\frac{2}{3} \times 50$ *por vender parte del recurso común. Así, obtendrá un beneficio de* 700 *euros.*

El jugador 2 (y respectivamente el jugador 3) obtendrán 1200 *euros a partir de su producción empleando* 20 *unidades de recurso común externo. Este jugador paga* $16\frac{2}{3} \times 14$ *al gestor para comprar recurso común y* $3\frac{1}{3} \times 50$ *por comprar recurso al jugador 1. Esto le generará un beneficio neto de* 800 *euros.*

Este ejemplo describe cómo a partir de una asignación estable del recurso común podemos alcanzar, a través de un mercado con pagos multilaterales, una distribución estable de los beneficios. Esto ha generado 700 *euros para el gestor, vía tasas y controlando una cantidad de recurso común externo de 50 unidades, es decir, ha aplicado un control cuantitativo sobre el recurso y no ha tenido ninguna influencia en el mercado. Sin embargo, el gestor ha establecido las bases para obtener un resultado estable, como se indica en los Corolarios 5.12 y 5.17.*

5.4. Introducción al diseño de mecanismos

Leonid Hurwicz[2] en su artículo "*Optimality and informational efficiency in resource allocation processes*" del año 1960 [34] define un mecanismo como un juego en el que los participantes envían mensajes a un centro mediador que recomienda a cada uno de ellos una determinada acción que dé el resultado deseado al juego. La mayor parte de la teoría económica pretende entender cómo son los mecanismos que funcionan en la actualidad, así como explicar y predecir los resultados que generan. Sin embargo, la teoría del diseño de mecanismos va en sentido contrario, primero identifica los resultados deseados o, lo que es lo mismo, el objetivo u objetivos que se quieren alcanzar, para posteriormente ver si se pueden o no diseñar mecanismos que permitan alcanzar esos objetivos. Sin embargo, la idea de Hurwicz no fue realmente aplicable a gran variedad de situaciones hasta la publicación de su trabajo de 1972 [35]. En dicho trabajo se introdujo la compatibilidad de incentivos, que permite que se pueda incorporar al análisis la existencia de información privada de los individuos que ellos usan estratégicamente. Por lo tanto, si se acepta que los individuos pueden comportarse de forma deshonesta, o no hacer caso de la recomendación del centro mediador, el mecanismo les da incentivos suficientes para que compartan esa información privada y actúen de acuerdo con lo que el mecanismo establece. Si al final se logra un equilibrio racional en el que todo el mundo sea honesto con el centro mediador, se dice que el mecanismo es compatible con incentivos.

En nuestro caso buscamos diseñar un mecanismo que en cualquier situación a cualquier jugador le convenga decir la verdad, es decir, revelar lo que realmente necesita cada empresa de recurso común. Así es como el gestor con este tipo de mecanismo conocería las verdaderas demandas del recurso común externo de las

[2] El Nobel de Economía de 2007 se concedió a Leonid Hurwicz, Eric Maskin y Roger Myerson por haber establecido las bases de la teoría de diseño de mecanismos.

empresas.

Formalmente, sea Θ el conjunto de todas las posibles necesidades de recurso común. Sea $N = \{1, ..., n\}$ el conjunto de todas las empresas que solicitan dicho recurso. Sea Γ el conjunto de todas las asignaciones factibles de recurso común.

Definición 5.19 *Una regla de asignación (mecanismo directo) es una función* $F : \Theta^N \rightarrow \Gamma$.

Dada una regla de asignación F y un vector de necesidades $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$, el pago de la empresa i viene dado por

$$\pi_i\left(F\left(\theta\right)\right) = valor\left(i; F_i\left(\theta\right)\right).$$

En nuestro caso el pago de la empresa coincide con el valor óptimo del problema lineal definido en (5.1) para el productor $i \in N$ que ha obtenido una cantidad $F_i(\theta)$ del recurso cuando los jugadores han declarado como vector de necesidades θ. Si declararan otro vector de necesidades, obtendrían una cantidad de recurso común posiblemente diferente.

Por lo tanto, las empresas que pertenecen a N se enfrentan a un juego no cooperativo en el que todas tienen el mismo conjunto de alternativas, Θ. Cada empresa sabe su necesidad real de recurso común externo, pero no conoce las necesidades de las otras empresas, en otras palabras, la información es privada. Una estrategia para la empresa i es una función de Θ en sí misma, $\sigma_i : \Theta \rightarrow \Theta$. El conjunto de todas sus estrategias viene dado por Σ y es el mismo para todos los jugadores.

Definición 5.20 *Un perfil* σ^* *es un equilibrio si*

$$\pi_i\left(F\left(\sigma^*\left(\theta\right)\right)|\theta_i\right) \geq \pi_i\left(F\left(\sigma_i\left(\theta_i\right); \sigma^*_{-i}\left(\theta_{-i}\right)\right)|\theta_i\right), \forall i \in N \ y \ \forall \sigma_i \in \Sigma,$$

donde $\sigma^*(\theta) = \left(\sigma_1^*(\theta_1), ..., \sigma_{i-1}^*(\theta_{i-1}), \sigma_i^*(\theta_i), \sigma_{i+1}^*(\theta_{i+1}), ..., \sigma_n^*(\theta_n)\right)$ *y* $\sigma_{-i}^*(\theta_{-i}) = \left(\sigma_1^*(\theta_1), ..., \sigma_{i-1}^*(\theta_{i-1}), \sigma_{i+1}^*(\theta_{i+1}), ..., \sigma_n^*(\theta_n)\right).$

Por lo tanto un perfil de equilibrio es tal que dados los pagos que recibe, π_i, en función de sus necesidades, θ_i, y de lo declarado en función de ellas, $\sigma_i(\theta_i)$, pudiendo ser estas veraces o no, no tiene incentivos a desviarse pues se verían reducidos dichos pagos.

Definición 5.21 *Un perfil* σ^* *es un equilibrio en estrategias dominantes si se cumple que*

$$\pi_i\left(F\left(\sigma_i^*(\theta_i); \sigma_{-i}(\theta_{-i})\right)|\theta_i\right) \geq \pi_i\left(F\left(\sigma_i(\theta_i); \sigma_{-i}(\theta_{-i})\right)|\theta_i\right), \forall i \in N, \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \text{ y } \forall \sigma_i \in \Sigma.$$

Definición 5.22 *Una regla de asignación (mecanismo directo),* F*, es compatible con incentivos (decir la verdad o strategy-proofness) si el perfil de estrategias* $\sigma^*(\theta) = (\sigma_1^*(\theta_1), ..., \sigma_n^*(\theta_n)) = (\theta_1, ..., \theta_1) = \theta$ *es un equilibrio en estrategias dominantes del juego.*

5.5. La regla CEA como mecanismo directo de asignación.

A priori el gestor del recurso común externo podría no conocer las necesidades reales de las empresas, por esta razón en este apartado nos centraremos en el diseño de un mecanismo que sea justo para las empresas y que, al mismo tiempo, les haga decir la verdad respecto a las cantidades que demandan. Por lo tanto, al trasladar el diseño de mecanismos al caso concreto de la compra de permisos de emisión, el gestor del recurso podría obtener información relevante que le permitiría saber cuánto y cómo reducir la cantidad máxima de emisiones. Además, podría ser más justo porque su asignación estaría basada en datos reales no manipulados por las empresas. En ese contexto, podríamos utilizar como regla de asignación F la regla CEA y θ representa todos los posibles permisos de emisión, por lo que es un intervalo cuyos valores pueden variar de cero a infinito. El teorema siguiente demuestra que la regla CEA como mecanismo de asignación es compatible con incentivos.

Teorema 5.23 *Sea (N, A, B, r, p, c, CEA) una situación $CEA - LPP$. La regla CEA como mecanismo (directo) de asignación es compatible con incentivos.*

Demostración. Sea $\{S_1, \ldots, S_k\}$ una partición de las empresas que solicitan recurso común externo y sea $d = (d_1, \ldots, d_k)$ el vector de sus necesidades reales. Sea $\Theta = [0, +\infty)$.

Consideremos el siguiente perfil de estrategias $(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k))$ y distingamos dos situaciones:

1. Si $CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) < d_i$, entonces tenemos que $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j(d_j) > r$.

Ahora, debemos considerar tres subcasos:

1.1. Si $\sigma_i(d_i) > d_i$, por definición de la regla CEA obtenemos

$$CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) = CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_k(d_k)),$$

Por lo tanto,

$$\pi_i(CEA_i(d_i; \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i) = \pi_i(CEA_i(\sigma_i(d_i); \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i).$$

1.2. Si consideramos $\sigma_i(d_i)$ tal que

$$CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) \leq \sigma_i(d_i) \leq d_i,$$

entonces por la definición de la regla CEA nos encontramos en la misma situación que en (1.1).

1.3. Si $\sigma_i(d_i) < CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k))$, entonces, independientemente de la relación entre $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j(d_j)$ y r, tenemos que

$$CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_k(d_k)) < CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) < d_i.$$

Supongamos que

$$\pi_i(CEA_i(d_i; \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i) < \pi_i(CEA_i(\sigma_i(d_i); \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i).$$

Tomamos $0 < \alpha < 1$, tal que

$$\alpha d_i + (1-\alpha) CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_k(d_k)) = CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)).$$

Considerando las soluciones óptimas x^1 y x^2 del problema (5.1) cuando usamos como cantidad de recurso común d_i y $CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_k(d_k))$ respectivamente, entonces, $\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2$ es una solución factible del problema (5.1) cuando usamos como cantidad de recurso común $CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k))$. Por lo tanto, tenemos que

$$\alpha valor(S_i; d_i) + (1-\alpha) \pi_i(CEA_i(\sigma_i(d_i); \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i) \le \pi_i(CEA_i(d_i; \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i),$$

pero, por definición, $valor(S_i; d_i)$ debe ser mayor que $\pi_i(CEA_i(d_i; \sigma_{-i}(d_{-i})) | d_i)$ lo que es una contradicción.

2. Si $CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) = d_i$, entonces pueden surgir dos casos:

2.1. $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j(d_j) \le r$. En esta situación, distinguimos dos subcasos:

2.1.1. Si $\sigma_i(d_i) > d_i$, por la definición de la regla CEA tenemos que

$$CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., d_i, ..., \sigma_k(d_k)) < CEA_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_k(d_k)).$$

Aunque por definición de d_i, sabemos que

$$\pi_i\left(CEA_i\left(d_i;\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right)=valor\left(S_i;d_i\right)\geq\pi_i\left(CEA_i\left(\sigma_i\left(d_i\right);\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right).$$

2.1.2. Si $\sigma_i\left(d_i\right)<d_i$, por la definición de la regla CEA tenemos que

$$CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,d_i,...,\sigma_k\left(d_k\right)\right)>CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,\sigma_i\left(d_i\right),...,\sigma_k\left(d_k\right)\right),$$

y empleando la definición de d_i, obtenemos

$$\pi_i\left(CEA_i\left(d_i;\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right)=valor\left(S_i;d_i\right)\geq\pi_i\left(CEA_i\left(\sigma_i\left(d_i\right);\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right).$$

2.2. $\sum\limits_{j=1}^{k}\sigma_j\left(d_j\right)>r$. Distinguimos dos subcasos:

2.2.1. Si $\sigma_i\left(d_i\right)>d_i$, empleando la definición de la regla CEA podemos obtener

$$CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,d_i,...,\sigma_k\left(d_k\right)\right)\leq CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,\sigma_i\left(d_i\right),...,\sigma_k\left(d_k\right)\right).$$

Teniendo en cuenta la definición de d_i, sabemos que

$$\pi_i\left(CEA_i\left(d_i;\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right)=valor\left(S_i;d_i\right)\geq\pi_i\left(CEA_i\left(\sigma_i\left(d_i\right);\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right).$$

2.2.2. Si consideramos $\sigma_i\left(d_i\right)<d_i$, por la definición de la regla CEA sabemos que

$$CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,d_i,...,\sigma_k\left(d_k\right)\right)>CEA_i\left(\sigma_1\left(d_1\right),...,\sigma_i\left(d_i\right),...,\sigma_k\left(d_k\right)\right),$$

y teniendo en cuenta la definición de d_i, obtenemos

$$\pi_i\left(CEA_i\left(d_i;\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right)=valor\left(S_i;d_i\right)\geq\pi_i\left(CEA_i\left(\sigma_i\left(d_i\right);\sigma_{-i}\left(d_{-i}\right)\right)|d_i\right).$$

Por lo tanto, $\sigma_i\left(d_i\right)=d_i$ es una estrategia dominante para $i\in N$. Así, $\sigma_i\left(d_i\right)=d_i$, para todo i, es un equilibrio en estrategias dominantes y la regla CEA es compatible con incentivos. ∎

De esta manera, aplicando este mecanismo las empresas tienen que decir la verdad sobre sus necesidades reales de recurso común. Es fácil encontrar ejemplos donde la regla proporcional, como mecanismo directo no cumple la compatibilidad de incentivos, porque si un agente incrementa artificialmente su demanda, entonces recibirá una mayor cantidad de recurso común. Por lo tanto, tiene incentivos para no declarar sus necesidades reales tal como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.24 *Sea (N, A, B, r, p, c) la situación LPP descrita en el Ejemplo 5.13. Sea (N, A, B, r, p, c) una situación LPP con tres empresas, $N = \{1, 2, 3\}$, que producen dos productos empleando dos recursos y necesitan permisos de emisión de dióxido de carbono, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 80 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix},\ c = 14,\ r = 50.$$

Consideremos la partición $P^1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ cuya demanda asociada es $d^1 = (20, 20, 25)$. Cuando aplicamos la regla proporcional al problema de bancarrota asociado a dicha partición obtenemos

$$PROP\left(P^1, 50, d^1\right) = (15.38, 15.38, 19.23)$$

Por ejemplo, es fácil comprobar que la empresa 1 tiene incentivos para ser deshonesta y mentir, con objeto de obtener una mayor cantidad de permisos de emisión, ya que si solicita una cantidad superior a 20 obtendría una cantidad superior a 15.38 aumentando así su producción y, por tanto, sus beneficios.

5.6. Comentarios

Se ha demostrado que si la aplicación de una regla de bancarrota f a situaciones LPP obtiene un reparto que pertenece al núcleo del juego de recursos pesimista asociado a dicha regla, entonces, a partir de esa asignación y por dualidad podemos obtener elementos del núcleo del juego pesimista por lo que éste será no vacío.

El modelo presentado en este capítulo es un sistema de arbitraje, que dota al gestor del recurso común externo de dos instrumentos de gestión: una tasa (precio fijo por unidad) y un límite (o tope) del recurso común, permitiéndose la transferencia de utilidad entre las empresas. Por un lado, la introducción del límite máximo permite reducir progresivamente las tecnologías que abusan de los recursos naturales. Esto se puede conseguir si el gestor del recurso actúa de tal manera que las condiciones del Corolario 5.12 se cumplan. En el caso de las emisiones de CO_2, según el Acuerdo de París, su reducción debe hacerse de forma progresiva cada cinco años, por lo que éstas reducciones podrían realizarse de tal modo que se alcanzaran las condiciones del Corolario 5.12. Por otro lado, imponer una tasa garantiza dos cosas. En primer lugar, aquellas tecnologías que requieran de una mayor cantidad de recurso común externo se verán sustituidas por tecnologías más eficientes que consuman una menor cantidad de dicho recurso, en el caso del ejemplo de las emisiones contaminantes, las tecnologías más contaminantes irán dejando paso a nuevas tecnologías menos contaminantes que las sustituyan, debido al incremento del coste de producción por la necesidad de comprar mayor cantidad de permisos de emisión. En segundo lugar, proporciona ingresos para poder destinar fondos a dos tipos de proyectos fundamentales: financiar proyectos I+D+i para mejorar las tecnologías productivas, que pueden incluir la sustitución de las tecnologías más contaminantes o menos eficientes por otras menos contaminantes, o más eficientes tal y como se ha mencionado previamente.

Las transferencias de utilidad entre las empresas se modelan por medio de juegos TU con externalidades. Nuestro modelo ofrece ideas y herramientas para obtener una asignación sostenible del recurso común externo permitiendo a su vez una distribución justa del mismo.

Con nuestro enfoque hemos sido capaces de encontrar un elemento del núcleo à la Owen en el que la regla de bancarrota, una vez que se fija en el Corolario 5.12, o con el uso de la regla CEA en el Corolario 5.17, forma parte de la construcción de la imputación. Además, la regla CEA como mecanismo cumple con la compatibilidad de incentivos y, por lo tanto, las empresas tienen un incentivo para declarar sus necesidades reales de recurso común externo.

El uso de la regla CEA en este contexto está motivado por el hecho de que asigna siempre una cantidad positiva para cada demandante y, de este modo no se excluye a ninguna empresa del sistema. Además, se ha demostrado que la regla CEA, como mecanismo directo de asignación, es compatible con incentivos y, por lo tanto, declarar las verdaderas necesidades de recurso común es un equilibrio en estrategias dominantes. Se pueden utilizar otras reglas de bancarrota como la proporcional o la Talmud, que tampoco excluyen del sistema a ninguna empresa, pero la regla proporcional puede dar lugar a insatisfacción en la asignación del recurso común (como se ha visto) y ambas, la regla proporcional y la Talmud, no son compatibles con incentivos, por lo que no declarar las verdaderas necesidades de recurso común podría ser una estrategia adecuada para las empresas y, consecuentemente, la asignación de recursos se realizararía sobre una base no real de necesidades, lo que podría conducir a una asignación no estable.

Además del enfoque empleado en este capítulo mediante el uso de técnicas de bancarrota, estas situaciones podrían abordarse mediante el diseño de otros modelos diferentes, por ejemplo, mediante el empleo de subastas, que serán objeto de estudio en futuras investigaciones.

Capítulo 6

Algunos juegos de logística

En el presente capítulo se aborda el estudio de situaciones de transporte de elección múltiple y se plantea un nuevo concepto de solución para estas situaciones.

Una situación de transporte describe una situación en la que hay dos grupos de agentes, proveedores y minoristas[1]. Cada proveedor posee un número fijo de unidades de un bien y cada minorista quiere comprar un determinado número de unidades. El transporte de una unidad de la mercancía entre un proveedor y un minorista genera un cierto beneficio. El objetivo de los agentes cooperantes es maximizar el beneficio total de la negociación. Desde Shapley y Shubik [68], donde se introdujeron los juegos de asignación asociados a problemas de asignación, se han desarrollado diferentes generalizaciones relacionadas con los modelos de mercado bilateral y situaciones de transporte. Los juegos de mercado bilateral y los juegos de transporte se estudian desde la perspectiva de la Teoría de Juegos en Thompson [70], Samet et al. [57], Sánchez-Soriano [58], Sánchez-Soriano et al. [59] [60], entre otros. Se demostró que estos juegos tienen un núcleo no vacío mediante la construcción de un elemento del

[1]Un problema de transporte puede verse también como una situación de mercado bilateral.

núcleo a través del programa dual. Al conjunto de todos los elementos obtenidos de esta manera se denomina conjunto de Owen. Llorca et al. [42] caracterizan el conjunto de Owen de los juegos de transporte. Un enfoque diferente, cooperativo-competitivo, se da en Fragnelli y Sánchez-Soriano [19].

Los juegos cooperativos de elección múltiple introducidos por Hsiao y Raghavan [32] y [33] y van den Nouweland et al. [51] son extensiones naturales de los juegos cooperativos tradicionales. En un juego cooperativo clásico cada jugador puede tener sólo dos opciones relacionadas con la cooperación, participar o no, mientras que en un marco de elección múltiple cada jugador puede tener varias oportunidades de participación dentro de un conjunto finito de niveles de actividad.

En la clase de juegos de elección múltiple, se han definido varios conceptos de solución inspirados en el núcleo (Gillies [23]). Una extensión del núcleo de los juegos de elección múltiple con utilidad transferible fue propuesta por van den Nouweland et al. [51]. Grabisch y Xie [24] estudiaron el prenúcleo de un juego de elección múltiple que contiene al núcleo. Un estudio del núcleo en el contexto de los juegos de clan de elección múltiple se presenta en Branzei et al. [8]. En este capítulo se considera también una extensión diferente del núcleo en juegos TU de elección múltiple denominada el núcleo de Owen. Este concepto de solución se inspira en el núcleo por unidad de nivel introducido por Hwang y Liao [36].

6.1. Juegos cooperativos de elección múltiple

En un juego cooperativo de elección múltiple cada jugador tiene un número finito de niveles de actividad con los que puede cooperar con los otros jugadores. En términos generales, los juegos cooperativos TU clásicos pueden ser vistos como juegos cooperativos de elección múltiple donde cada jugador tiene sólo dos niveles de actividad: participar plenamente y no participar en absoluto.

Los juegos cooperativos de elección múltiple fueron introducidos por Hsiao y Raghavan [32] y [33], y extensamente estudiados también en Calvo y Santos [9], Calvo et al. [10], van den Nouweland [50] y van den Nouweland et al. [51].

A continuación se introducen los conceptos básicos en juegos cooperativos de elección múltiple.

Sea N un conjunto de jugadores finito no vacío, de la forma $\{1,...,n\}$. En un juego de elección múltiple cada jugador $i \in N$ tiene un número finito de niveles de participación con los que puede elegir jugar. En general, el número de niveles de actividad de dos jugadores puede ser diferente. La recompensa que un grupo de jugadores puede obtener depende del esfuerzo de los jugadores que cooperan. Esto se formaliza suponiendo que cada jugador $i \in N$ tiene m_i+1 niveles de participación con los que jugar, incluyendo la no participación. Denotamos por $M_i = \{0,...,m_i\}$ al conjunto de niveles del jugador i, donde el nivel 0 significa no participar. En el contexto de elección múltiple los elementos de $M^N = \prod_{i\in N} M_i$ se denominan coaliciones y la coalición $m = (m_1,...,m_n)$ juega el papel de la gran coalición en los juegos TU clásicos. La coalición vacía $(0,...,0)$ también se denota por 0. Para su uso posterior se introduce la notación $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$. La función característica $\overline{v} : M^N \to \mathbb{R}$ con $v(0,...,0) = 0$ proporciona, para cada coalición $s = (s_1,...,s_n) \in M^N$, el beneficio que los jugadores pueden obtener cuando cada jugador i juega con su nivel de actividad $s_i \in M_i$.

Para representar de forma sencilla ciertos aspectos de los juegos de elección múltiple necesitamos introducir la siguiente notación.

Definición 6.1 *Una matriz incompleta,* $[a_{ij}]$ *con* $i \in N$ *y* $j \in \{1,...,\text{máx}\{m_1,...,m_n\}\}$, *es una matriz tal que* $a_{ij} \in \mathbb{R}$, *si* $i \in N$ *y* $j \le m_i$, *y* a_{ij} *se representa por* $(*)$, *si*

$i \in N$ y $j > m_i$.

Para operar con estas matrices se adopta el convenio siguiente

$$* \times k = 0, * \times * = *, * + k = k \text{ y } * + * = *, \text{ tal que } k \in \mathbb{R}.$$

Definición 6.2 *Dados $N = \{1, ..., n\}$ y el vector $m = (m_1, ..., m_n)$, el conjunto de todas las matrices incompletas con n filas, $\max\{m_i\}$ columnas y m_i valores reales en la fila i-ésima se representa por $\mathcal{M}_m^N$.*

Definición 6.3 *Un juego cooperativo de elección múltiple es una tripleta $(N, m, \overline{v})$, donde N es el conjunto de jugadores, $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ es el vector que describe el número de niveles de actividad para todos los jugadores y $\overline{v} : M^N \to \mathbb{R}$ es la función característica.*

Cuando no hay posibilidad de confusión se denotará el juego $(N, m, \overline{v})$ por $\overline{v}$ y el conjunto de todos los juegos de elección múltiple con un conjunto de jugadores N por MC^N.

Definición 6.4 *Una matriz de pagos para el juego $\overline{v}$ es una matriz incompleta $x \in \mathcal{M}_m^N$, donde cada una de las filas representa los pagos por nivel de un jugador.*

Definición 6.5 *Se define el vector de pagos agregados X como la cantidad que percibe cada jugador por todos sus niveles de actividad.*

Cabe preguntarse cómo se relacionan ambos conceptos, es decir, qué relación existe entre el vector de pagos por nivel de un jugador y el vector de pagos agregados de dicho jugador. A continuación se establece dicha relación utilizando los operadores pago agregado y distribución de pagos por nivel.

Definición 6.6 *El operador pago agregado es una función* $\Pi : \mathcal{M}_m^N \to \mathbb{R}^N$ *tal que,* $\forall x \in \mathcal{M}_m^N$, $\Pi(x) = x \cdot 1_{\text{máx}\{m_i\}}$, *donde* $1_{\text{máx}\{m_i\}}$ *es el vector columna con todos sus elementos iguales a* 1*.*

Definición 6.7 *El operador distribución de pagos por nivel es una aplicación* Π^{-1} : $\mathbb{R}^N \to \mathcal{M}_m^N$ *en la que,* $\forall X \in \mathbb{R}^N$, $\Pi^{-1}(X) = \left\{x \in \mathcal{M}_m^N \;\middle|\; x \cdot 1_{\text{máx}\{m_i\}} = X\right\}$*.*

El operador pago agregado le asigna a cada agente la suma de lo que obtiene con todos y cada uno de sus niveles de participación. El operador distribución de pagos por nivel divide el pago agregado que obtiene un agente entre todos sus niveles de participación.

Ejemplo 6.8 *Considérese una situación en la que hay dos jugadores* $N = \{1{,}2\}$*. El primer jugador tiene dos niveles de participación, mientras que el segundo sólo tiene uno. Supongamos que la matriz de pagos viene dada por*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & * \end{bmatrix}.$$

Mediante los operadores Π *y* Π^{-1} *se obtendrían las siguientes asignaciones.*

$$\begin{aligned} \Pi \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & * \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \Pi^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & * \end{bmatrix} | a + b \; = 5 \right\}. \end{aligned}$$

Definición 6.9 *Un juego* $\overline{v} \in MC^N$ *es 0-normalizado si ningún jugador puede ganar algo trabajando por sí solo, es decir,* $\overline{v}(je^i) = 0$*, para todo* $i \in N$ *y* $j \in M_i$*, donde* $e^i = \left(0, 0, ..., \underbrace{1}_{i}, 0, ..., 0\right)$*.*

Definición 6.10 *Un juego $\overline{v} \in MC^N$ es aditivo si el valor de cada coalición s es igual a la suma de los valores de los jugadores cuando estos trabajan solos con el nivel que trabajaban en s, es decir, $\overline{v}(s) = \sum_{i \in N} \overline{v}(s_i e^i)$, para todo $s \in M^N$.*

Sean x e y dos matrices de pago para el juego $\overline{v}$, decimos que x es débilmente menor que y si, para cada $s \in M^N$,

$$X(s) = \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{s_i} x_{ik} \leq \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^{s_i} y_{ik} = Y(s).$$

Obsérvese que esto no implica que $x_{ij} \leq y_{ij}$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$. El ejemplo siguiente ilustra este punto.

Ejemplo 6.11 *Sea $(N, m, \overline{v})$ un juego de elección múltiple con $N = \{1, 2\}$, $m = (2, 1)$ y $\overline{v}((1, 0)) = \overline{v}((0, 1)) = 1$, $\overline{v}((2, 0)) = 2$, $\overline{v}((1, 1)) = 3$ y $\overline{v}((2, 1)) = 5$. Consideramos las matrices de pago x y z definidas por*

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & * \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & * \end{bmatrix}.$$

La matriz de pago, x es débilmente menor que z, ya que $X((1, 0)) \leq Z((1, 0))$, $X((1, 1)) \leq Z((1, 1))$ y $X(s) \leq Z(s)$, para cualquier s. Esto es debido a que el jugador 1 obtiene 3 por jugar con su segundo nivel en ambas matrices de pago, aunque según la matriz de pagos z, el jugador 1 consigue 2 por jugar con su primer nivel y, de acuerdo con la matriz de pagos x, el jugador 1 consigue sólo 1 con su primer nivel.

Dado $\overline{v} \in MC^N$, una matriz de pagos $x \in \mathcal{M}_m^N$ se dice que es eficiente si $X(m) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} = \overline{v}(m)$ y se denomina racional por incremento de nivel si, para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$, x_{ij} es al menos el incremento del valor que el jugador i puede obtener cuando trabaja sólo y cambia su actividad del nivel $j - 1$ al nivel j, es decir, $x_{ij} \geq \overline{v}(je^i) - \overline{v}((j - 1) e^i)$.

Definición 6.12 *Dado $\overline{v} \in MC^N$, una matriz de pagos $x \in \mathcal{M}_m^N$ es una imputación de $\overline{v}$ si es eficiente y racional por incremento de nivel.*

Denotamos el conjunto de imputaciones de un juego $\overline{v} \in MC^N$ por $I(\overline{v})$. Puede observarse que

$$I(\overline{v}) \neq \varnothing \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \overline{v}(m_i e^i) \leq \overline{v}(m).$$

Definición 6.13 *(Nouweland et al., [51]) El núcleo de un juego de elección múltiple $\overline{v} \in MC^N$ se compone de todos los $x \in I(\overline{v})$ que satisfacen $X(s) \geq \overline{v}(s)$, para todo $s \in M^N$,*

$$C(\overline{v}) = \{x \in I(\overline{v}) \mid X(s) \geq \overline{v}(s), \text{ para todo } s \in M^N\}.$$

Definición 6.14 *(Grabisch and Xie [24]) El prenúcleo de $\overline{v} \in MC^N$ viene dado por*

$$\mathcal{PC}(\overline{v}) = \{x \in \mathcal{M}_m^N \mid X(m) = \overline{v}(m) \text{ y } X(s) \geq \overline{v}(s), \text{ para todo } s \in M^N\}.$$

Nótese que el prenúcleo es una generalización directa del núcleo de los juegos cooperativos con utilidad transferible en forma de función característica.

6.2. Juegos de transporte

Un problema de transporte describe una situación en la que las demandas de cierta mercancía por los minoristas deben ser cubiertas por las ofertas de los proveedores de dicha mercancía. El transporte de una unidad del bien desde un proveedor hasta un minorista genera un cierto beneficio. El objetivo de proveedores y minoristas es maximizar el beneficio total derivado del transporte.

Formalmente, sean P el conjunto de los proveedores y Q el conjunto de minoristas. El proveedor $i \in P$ tiene p_i artículos del bien y el minorista $j \in Q$ necesita

q_j unidades. Por lo tanto, la oferta del bien del proveedor $i \in P$ es de p_i unidades y la demanda del minorista $j \in Q$ es de q_j unidades. Supondremos que tanto las ofertas, p_i, como las demandas, q_j, son números enteros positivos para todo $i \in P$ y $j \in Q$, suponemos además que se trata de bienes indivisibles. El hecho de no tener en cuenta ofertas y demandas iguales a cero es porque en ese caso los proveedores o minoristas implicados serían irrelevantes, ya que no tendrían nada que suministrar o que demandar. El beneficio de la venta de una unidad del bien entre el proveedor i y el minorista j es b_{ij}, un número real no negativo. Todos estos beneficios se encuentran recogidos en una matriz $B = [b_{ij}]_{i\in P, j\in Q}$. Por lo que, un problema de transporte $\mathcal{T}$ se puede describir por la 5-tupla (P, Q, B, p, q), donde $p = (p_i)_{i\in P}$ y $q = (q_j)_{j\in Q}$ son los vectores que contienen, respectivamente, las ofertas y demandas de la mercancía.

El problema clásico de transporte se puede modelar de varias maneras. En el modelo clásico el objetivo es determinar el número de unidades a transportar desde cada proveedor i para satisfacer la demanda de cada minorista j, de manera que se consiga el máximo (mínimo) beneficio (coste). Por lo tanto, el problema puede escribirse como

$$\max \left\{ \sum_{(i,j)\in P\times Q} b_{ij} t_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{j\in Q} t_{ij} \leq p_i, \text{ para todo } i \in P \\ \sum\limits_{i\in P} t_{ij} \geq q_j, \text{ para todo } j \in Q \\ t_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \text{ para todo } i \in P \text{ y } j \in Q \end{array} \right\},$$

donde t_{ij} representa la cantidad de bien transportada desde i a j.

Una condición necesaria para que dicho problema sea factible es que la suma de las ofertas sea mayor o igual que el total de las demandas, es decir, $\sum_{i\in P} p_i \geq \sum_{j\in Q} q_j$. Si esta condición se cumple con igualdad, el problema se denomina equilibrado y, en este caso, las desigualdades de las restricciones se pueden sustituir por igualdades.

Nuestro interés se centra en asociar un juego cooperativo con utilidad transferible a cada problema de transporte. Así pues, para cada subconjunto de jugadores, nos gustaría poder relacionar el valor de la función característica con el valor del subproblema de transporte correspondiente. Sin embargo, sólo podríamos considerar aquellos programas en que se cumpliese la condición adicional $\sum_{i\in P} p_i \geq \sum_{j\in Q} q_j$. Para evitar situaciones en las que dicha condición no se verifica, usaremos un problema de transporte que se puede describir de la siguiente manera: "cómo alcanzar el máximo beneficio transportando desde los proveedores a los minoristas tanto como sea posible". Además, se exige que cada minorista reciba a lo sumo una cantidad igual a su demanda. En estas condiciones, el programa correspondiente puede ser formulado como

$$\text{máx}\left\{ \sum_{(i,j)\in P\times Q} b_{ij}t_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{j\in Q} t_{ij} \leq p_i, \text{ para todo } i\in P \\ \sum\limits_{i\in P} t_{ij} \leq q_j, \text{ para todo } j\in Q \\ t_{ij}\in\mathbb{Z}_+, \text{ para todo } i\in P \text{ y } j\in Q \end{array} \right\}.$$

Como la matriz del sistema de restricciones es totalmente unimodular (véase Murty [47]) y los vectores de ofertas y demandas son enteros, todos los puntos extremos del poliedro factible tienen coordenadas enteras (la demostración se puede consultar en Schrijver [63]).

El problema dual del problema anterior relajado vendrá dado por el siguiente programa lineal

$$\text{mín}\left\{ \sum_{i\in P} p_i u_i + \sum_{j\in Q} q_j v_j \;\middle|\; \begin{array}{l} u_i + v_j \geq b_{ij},\ \forall\, i\in P, \forall\, j\in Q \\ u_i, v_j \geq 0,\ \forall\, i\in P, \forall\, j\in Q. \end{array} \right\}.$$

Un plan de transporte $T = [t_{ij}]_{i\in P, j\in Q}$ es una matriz de números enteros no negativos, donde t_{ij} es el número de unidades del bien que se han de transportar desde el proveedor i al minorista j. Cada proveedor $i \in P$ no puede suministrar más de p_i unidades del bien, $\sum_{j\in Q} t_{ij} \leq p_i$. Análogamente, cada minorista $j \in Q$

necesita recibir a lo sumo q_j unidades, $\sum_{i\in P} t_{ij} \leq q_j$. El máximo beneficio que los proveedores y minoristas pueden alcanzar es

$$v_p(\mathcal{T}) = \text{máx}\left\{ \sum_{(i,j)\in P\times Q} b_{ij}t_{ij} \mid T \text{ es un plan de transporte} \right\}.$$

Un plan de transporte T se denomina también una solución factible para el problema de transporte $\mathcal{T}$. Un plan de transporte es óptimo si $\sum\limits_{(i,j)\in P\times Q} b_{ij}t_{ij} = v_p(\mathcal{T})$.

Para el problema dual del problema de transporte relajado denotamos su valor óptimo por:

$$v_d(\mathcal{T}) = \text{mín}\left\{ \sum_{i\in P} p_i u_i + \sum_{j\in Q} q_j v_j \;\middle|\; \begin{array}{l} u_i + v_j \geq b_{ij},\ \forall\ i\in P, \forall\ j\in Q \\ u_i, v_j \geq 0,\ \forall\ i\in P, \forall\ j\in Q. \end{array} \right\}.$$

Además, es conocido que $v_p(\mathcal{T}) = v_d(\mathcal{T})$.

Dado un problema de transporte $\mathcal{T}$, se construye el juego cooperativo de utilidad transferible (N, v) correspondiente, teniendo en cuenta que el conjunto de jugadores, $N = P\cup Q$, está formado por dos conjuntos disjuntos de agentes, proveedores y minoristas. Sea $S\subset N$, $S\neq\varnothing$ una coalición de jugadores, denotaremos por $P_S = P\cap S$ y $Q_S = Q\cap S$ a sus respectivos proveedores y minoristas. Si $S = P_S$, entonces no hay minoristas presentes en S y, por lo tanto, los proveedores de S no pueden envíar sus mercancias. En este caso, el valor $v(S)$ de la coalición S es cero. Análogamente, si $S = Q_S$ entonces los minoristas en S no pueden recibir ninguna unidad del bien y $v(S) = 0$. En cualquier otro caso, el valor $v(S)$ depende de todos los posibles planes de transporte para dicha coalición. Un plan de transporte, $T(S)$, para la coalición S es un plan de transporte para el problema de transporte correspondiente a la coalición, es decir, para $\mathcal{T}_S := (P_S, Q_S, [b_{ij}]_{i\in P_S, j\in Q_S}, (p_i)_{i\in P_S}, (q_j)_{j\in Q_S})$. En este caso,

$$\begin{array}{rcll} v(S) = & v_p(\mathcal{T}_S) = & \text{máx} & \sum\limits_{(i,j)\in P_S\times Q_S} b_{ij}t_{ij} \\ & & \text{s.a :} & \sum\limits_{j\in Q_S} t_{ij} \leq p_i, \text{ para todo } i \in P_S \\ & & & \sum\limits_{i\in P_S} t_{ij} \leq q_j, \text{ para todo } j \in Q_S \\ & & & t_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \text{ para todo } i \in P_S \text{ y } j \in Q_S \end{array}$$

es el valor para la coalición S.

Denotaremos por TG el conjunto de todos los juegos de transporte.

Cuando todas las ofertas, p_i, y las demandas, q_j, son iguales a 1, obtenemos problemas de asignación, denominados así porque se pueden interpretar como el problema de asignar los proveedores a los minoristas. En los juegos de asignación finitos (Shapley y Shubik, [68]) el núcleo coincide con el conjunto de soluciones duales óptimas para el problema correspondiente a la coalición total. En Sánchez-Soriano et al. [60] se muestra que en los juegos de transporte finitos el conjunto de soluciones duales óptimas permite obtener elementos que están en el núcleo, pero no genera todo el núcleo.

Dado un problema de transporte (P, Q, B, p, q), el conjunto de Owen asociado a dicha situación se define como,

$$OwenSet(P,Q,B,p,q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists(\alpha;\beta) \in O_d(N) \text{ tal que } x_i = p_i\alpha_i \text{ si } i \in P \\ \text{y } x_j = q_j\beta_j \text{ si } j \in Q \end{array} \right\},$$

donde $O_d(N)$ denota el conjunto de las soluciones duales para la gran coalición, es decir,

$$O_d(N) = \arg\min_{(\alpha,\beta)} \left\{ \sum_{i\in P} p_i\alpha_i + \sum_{j\in Q} q_j\beta_j \,\middle|\, \alpha_i + \beta_j \geq t_{ij}, \alpha_i, \beta_j \geq 0, \forall i \in P, \forall j \in Q \right\}.$$

Cualquier elemento del conjunto de Owen proporciona un elemento del núcleo del juego correspondiente.

Cada elemento $\alpha_i, i \in P$, β_j, $j \in Q$, de un vector $(\alpha;\beta) \in O_d(N)$ representa el beneficio que un proveedor o un minorista obtendrá por unidad de sus bienes. En Sánchez-Soriano et al. [60] se presenta un análisis detallado de la relación entre el núcleo y el conjunto de Owen de una situación de transporte.

Ejemplo 6.15 *Consideremos el problema de transporte* $\mathcal{T}=(P,Q,B,p,q)$, *con* $P=\{1,2\}$, $Q=\{1,2\}$, $p=\{3,2\}$, $q=\{1,1\}$ *y* $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$.

El problema de transporte correspondiente a la gran coalición sería,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & t_{11}+t_{12}+t_{21}+10t_{22} \\ \text{s.a} & t_{11}+t_{12} \leq 3 \\ & t_{21}+t_{22} \leq 2 \\ & t_{11}+t_{21} \leq 1 \\ & t_{12}+t_{22} \leq 1 \\ & t_{ij} \geq 0, \text{ para todo } i \in P \text{ y } \ j \in Q. \end{array}$$

Su dual tiene la siguiente expresión:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 3\alpha_1+2\alpha_2+\beta_1+\beta_2 \\ \text{s.a}: & \alpha_1+\beta_j \geq 1, \text{ para todo } j \in Q \\ & \alpha_2+\beta_1 \geq 1 \\ & \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ & \alpha_i,\beta_j \geq 0, \text{ para todo } i \in P, \ j \in Q. \end{array}$$

En este caso, el conjunto de óptimos duales está formado por un único punto, $O_d(\mathcal{T})=\{(0,0;1,10)\}$, *que a su vez es también el único elemento del núcleo que se puede obtener usando los precios dados por el problema dual para la gran coalición. Sin embargo, el punto* $(0,1;1,9)$ *es un elemento del núcleo del correspondiente juego de transporte que no se puede obtener a través del dual. Por lo tanto, el conjunto de Owen está estrictamente contenido en el núcleo.*

Dados dos juegos (N, v) y (N, w) de transporte finitos y un escalar (positivo) λ, el juego producto por un escalar $(N, \lambda v)$ es un juego de transporte, sin embargo, el juego suma $(N, v + w)$ no es en general un juego de transporte. Por otra parte, los juegos de transporte son $0-$normalizados y superaditivos. Además, como su función característica es no negativa también son monótonos. Respecto a los tipos de jugadores debemos señalar que cada jugador de P es complementario con cada uno de Q, pero los jugadores de P y Q son sustitutos entre sí.

6.3. Juegos de transporte de elección múltiple

En los apartados anteriores se han introducido los juegos de elección múltiple, así como los juegos de transporte clásicos. Nos planteamos ahora analizar los juegos de transporte en un contexto de elección múltiple. Para ello, las ofertas y las demandas se considerarán como los diferentes niveles de participación de los jugadores en el juego. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación.

Ejemplo 6.16 *Considérese la siguiente situación en la que hay un proveedor $P = \{S_1\}$ que tiene tres lotes de fármacos en venta y dos minoristas $Q = \{B_1, B_2\}$ que cada uno quiere comprar dos lotes de dicho fármaco. El proveedor debe decidir a quien vende los lotes, obteniendo como beneficio por la venta de cada uno de ellos 1 euro. Supongamos que el proveedor ha decidido vender dos lotes del fármaco al minorista 1 y un lote al minorista 2, obteniendo un beneficio total de 3 euros. Asociado a esta situación podemos definir el siguiente juego cooperativo (N, v):*

$$
\begin{aligned}
&v(\oslash) = 0,\\
&v(S_1) = 0, v(B_1) = 0, v(B_2) = 0,\\
&v(S_1B_1) = 2, v(S_1B_2) = 2, v(B_1B_2) = 0,\\
&v(S_1B_1B_2) = 3,
\end{aligned}
$$

pero, además, podríamos definir el siguiente juego cooperativo de elección múltiple $(N, m, \overline{v})$*:*

$$\begin{aligned}
&\overline{v}\,(0;b_1,b_2) = 0,\ \forall b_1 = 0,1,2 \text{ y } b_2 = 0,1,2\\
&\overline{v}\,(1;b_1,b_2) = 1,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 \geq 1\\
&\overline{v}\,(2;b_1,b_2) = 1,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 = 1\\
&\overline{v}\,(2;b_1,b_2) = 2,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 \geq 2\\
&\overline{v}\,(3;b_1,b_2) = 1,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 = 1\\
&\overline{v}\,(3;b_1,b_2) = 2,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 = 2\\
&\overline{v}\,(3;b_1,b_2) = 3,\ \forall b_1,b_2 \text{ tal que } b_1 + b_2 \geq 3.
\end{aligned}$$

Sabemos que en las situaciones de elección múltiple debemos indicar con qué grado de participación se involucra en la coalición cada uno de los jugadores. En nuestro caso denotaremos por r el vector que representa el nivel de participación de cada uno de los proveedores, es decir, el número de unidades que cada uno de ellos oferta y por s el vector de los niveles de participación de los minoristas, es decir, el número de unidades que cada uno de ellos quiere comprar. Se define

$$\operatorname{car}(r) = \{i \in P \mid r_i > 0\} \text{ y } \operatorname{car}(s) = \{j \in Q \mid s_j > 0\}.$$

Definición 6.17 *Sea* $\mathcal{T}=(P, Q, B, p, q)$ *un problema de transporte, un juego de transporte de elección múltiple es una tripleta* $(N, m, \overline{v})$*, donde* $N = P \cup Q$*,* $m = (p; q)$ *es el perfil de participación máxima de los jugadores y* $\overline{v} : M^N \to \mathbb{R}$ *es la función característica, con* $\overline{v}(0; 0) = 0$*, que especifica el valor para cada coalición* $(r; s) \in M^N$*,*

$$\overline{v}(r;s) = \\ \text{máx}\left\{\begin{array}{l} \sum_{(i,j)\in\operatorname{car}(r)\times\operatorname{car}(s)} b_{ij}t_{ij} \mid \\ T\,(\operatorname{car}(r) \cup \operatorname{car}(s)) \text{ es un plan de transporte factible para} \\ \left(car\,(r)\,,\ car\,(s)\,,\ [b_{ij}]_{i\in car(r), j\in car(s)}\,,\ r,\ s\right) \end{array}\right\}$$

Se denotará por TGM el conjunto de todos los juegos de transporte de elección múltiple.

Ejemplo 6.18 *Sea* (P, Q, B, p, q) *una situación de transporte, con un proveedor,* $P = \{1\}$, *el cual posee tres lotes de fármacos,* $p = (3)$, *y dos minoristas,* $Q = \{2, 3\}$, *que demandan dos lotes cada uno,* $q = (2, 2)$ *y* $B = (1, 1)$. *La función característica, para las coaliciones con valor no nulo, del correspondiente juego de transporte de elección múltiple viene dada por*

$$\begin{array}{llll}
\overline{v}\,(1;1,0) = 1, & \overline{v}\,(1;2,0) = 1, & \overline{v}\,(1;0,1) = 1, & \overline{v}\,(1;0,2) = 1,\\
\overline{v}\,(2;1,0) = 1, & \overline{v}\,(2;2,0) = 2, & \overline{v}\,(2;0,1) = 1, & \overline{v}\,(2;0,2) = 2,\\
\overline{v}\,(3;1,0) = 1, & \overline{v}\,(3;2,0) = 2, & \overline{v}\,(3;0,1) = 1, & \overline{v}\,(3;0,2) = 2,
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{llll}
\overline{v}\,(1;1,1) = 1, & \overline{v}\,(1;2,1) = 1, & \overline{v}\,(1;1,2) = 1, & \overline{v}\,(1;2,2) = 1,\\
\overline{v}\,(2;1,1) = 2, & \overline{v}\,(2;2,1) = 2, & \overline{v}\,(2;1,2) = 2, & \overline{v}\,(2;2,2) = 2,\\
\overline{v}\,(3;1,1) = 2, & \overline{v}\,(3;2,1) = 3, & \overline{v}\,(3;1,2) = 3, & \overline{v}\,(3;2,2) = 3.
\end{array}$$

6.4. Conceptos de solución tipo núcleo

Al igual que se estudian los conceptos de solución tipo núcleo en los juegos de transporte clásicos, estos conceptos de solución pueden analizarse en el contexto de los juegos de transporte de elección múltiple. En esta sección, se estudiará cómo son el núcleo y el prenúcleo de los juegos de transporte de elección múltiple. Y Se introducirá otro concepto de solución para los juegos-TU de elección múltiple tipo núcleo llamado núcleo de Owen. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo queda el núcleo y el prenúcleo de un juego de transporte de elección múltiple.

Ejemplo 6.19 *Retomando la situación de transporte descrita en el Ejemplo 6.18,* *el núcleo del juego de transporte de elección múltiple quedaría como:*

$$C\left(N,(p;q),\overline{v}\right)=$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} x_{11}\geq\overline{v}\left(1;0,0\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right) \\ x_{12}\geq\overline{v}\left(2;0,0\right)-\overline{v}\left(1;0,0\right) \\ x_{13}\geq\overline{v}\left(3;0,0\right)-\overline{v}\left(2;0,0\right) \\ y_{11}\geq\overline{v}\left(0;1,0\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right) \\ y_{12}\geq\overline{v}\left(0;2,0\right)-\overline{v}\left(0;1,0\right) \\ y_{21}\geq\overline{v}\left(0;0,1\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right) \\ y_{22}\geq\overline{v}\left(0;0,2\right)-\overline{v}\left(0;0,1\right) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{racionalidad por} \\ \textit{incremento de nivel} \end{array} \\ X\left(r_1;s_1,s_2\right)=\sum_{k=1}^{s_1}x_{1k}+\sum_{k=1}^{b_1}y_{1k}+\sum_{k=1}^{b_2}y_{2k}\geq\overline{v}\left(r_1;s_1,s_2\right) \\ X\left(3;2,2\right)=\sum_{k=1}^{3}x_{1k}+\sum_{k=1}^{2}y_{1k}+\sum_{k=1}^{2}y_{2k}=\overline{v}\left(3;2,2\right) \end{array} \right\}.$$

Dado que

$$\begin{array}{c} x_{11}\geq\overline{v}\left(1;0,0\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right)=0-0=0, \\ x_{12}\geq\overline{v}\left(2;0,0\right)-\overline{v}\left(1;0,0\right)=0-0=0, \\ x_{13}\geq\overline{v}\left(3;0,0\right)-\overline{v}\left(2;0,0\right)=0-0=0, \\ y_{11}\geq\overline{v}\left(0;1,0\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right)=0-0=0, \\ y_{12}\geq\overline{v}\left(0;2,0\right)-\overline{v}\left(0;1,0\right)=0-0=0, \\ y_{21}\geq\overline{v}\left(0;0,1\right)-\overline{v}\left(0;0,0\right)=0-0=0, \\ y_{22}\geq\overline{v}\left(0;0,2\right)-\overline{v}\left(0;0,1\right)=0-0=0, \end{array}$$

entonces

$$C\left(N,(p;q),\overline{v}\right)=$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} X\left(r_1;s_1,s_2\right)=\sum_{k=1}^{s_1}x_{1k}+\sum_{k=1}^{b_1}y_{1k}+\sum_{k=1}^{b_2}y_{2k}\geq\overline{v}\left(r_1;s_1,s_2\right) \\ X\left(3;2,2\right)=\sum_{k=1}^{3}x_{1k}+\sum_{k=1}^{2}y_{1k}+\sum_{k=1}^{2}y_{2k}=\overline{v}\left(3;2,2\right) \end{array} \right\}.$$

Y el prenúcleo queda descrito por

$$\begin{aligned}
\mathcal{PC}\left(N,(p;q),\overline{v}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} X\left(r_1;s_1,s_2\right) \geq \overline{v}\left(r_1;s_1,s_2\right) \\ X\left(3;2,2\right) = \overline{v}\left(3,2,2\right) \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} y_{21} = y_{22} = 0 \\ 0 \leq y_{11} \leq 1 \\ 0 \leq y_{21} \leq 1 \\ x_{11} + x_{12} \geq 1 \\ x_{11} + y_{11} \geq 1 \\ x_{11} + y_{21} \geq 1 \\ x_{11} + x_{12} + y_{11} \geq 2 \\ x_{11} + x_{12} + y_{21} \geq 2 \\ 0 \leq x_{13} \leq 1 \\ X\left(3;2,2\right) = \overline{v}\left(3;2,2\right) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C\left(N,(p;q),\overline{v}\right) = \mathcal{PC}\left(N,(p;q),\overline{v}\right).$$

Lo visto en el anterior ejemplo no se trata de una situación particular sino que, en general, el núcleo y el prenúcleo coinciden tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 6.20 *Dado un problema de transporte* (P,Q,B,p,q)*. Sea* $(N,(p;q),\overline{v})$ *el juego cooperativo de elección múltiple asociado, entonces se tiene que*

$$C\left(N,(p;q),\overline{v}\right) = \mathcal{PC}\left(N,(p;q),\overline{v}\right).$$

Demostración. Basta con observar que las restricciones correspondientes a la racionalidad por incremento de nivel se reducen a que los pagos por nivel sean mayores o iguales a 0, lo que implica que el núcleo y el prenúcleo coinciden. ■

A continuación estudiaremos la relación entre el núcleo del juego de transporte clásico y el núcleo del juego de transporte de elección múltiple. Para ello haremos uso de los operadores pago agregado y distribución de pagos por nivel (véase la Sección 6.1). En la siguiente proposición se establece dicha relación.

Proposición 6.21 *Dado un problema de transporte* (P, Q, B, p, q). *Sean* (N, v) *y* $(N, (p; q), \overline{v})$ *el juego cooperativo y el juego cooperativo de elección múltiple asociado, respectivamente, entonces se tiene que,*

1. $\Pi\left(C\left(N, (p; q), \overline{v}\right)\right) \subset C\left(N, v\right).$
2. $\forall X \in C\left(N, v\right), \ \Pi^{-1}\left(X\right) \cap C\left(N, (p; q), \overline{v}\right) \neq \varnothing.$

Por lo tanto, $\Pi\left(C\left(N, (p; q), \overline{v}\right)\right) = C\left(N, v\right)$.

Demostración.

Sea $x \in C\left(N, (p; q), \overline{v}\right)$, entonces $X\left(r,s\right) \geq \overline{v}\left(r,s\right), \forall\left(r,s\right) \in M^N$. En particular, $\forall S \subset N$, $X\left(p_S,q_S\right) \geq \overline{v}\left(p_S,q_S\right) = v\left(S\right)$. Además, se tiene que

$$X\left(p_S,q_S\right) = \sum_{i\in P\cap S} \sum_{j=1}^{p_i} x_{ij} + \sum_{i\in Q\cap S} \sum_{j=1}^{q_i} x_{ij} =$$
$$\sum_{i\in P\cap S} e^{i^T} \ x \ 1_{\text{máx}\{p_i,q_j\}} + \sum_{j\in Q\cap S} e^{i^T} \ x \ 1_{\text{máx}\{p_i,q_j\}} = \sum_{i\in S} e^{i^T} \Pi\left(x\right),$$

por lo tanto,

$$\sum_{i\in S} e^{i^T} \Pi\left(x\right) \geq v\left(S\right), \forall S \subset N.$$

Lo que implica que $\Pi\left(x\right) \in C\left(N, v\right)$.

Sea $X \in C\left(N, v\right)$, entonces

$$\sum_{i\in S} X_i \geq v\left(S\right), \forall S \subset N, \text{ y } \sum_{i\in N} X_i = v\left(N\right).$$

Tomamos $x'_{i1} = X_i$, $\forall i \in N$, y $x'_{ij} = 0$, $\forall j > 1 \ \forall i \in N$. Sea $(r;s) \in M^N$,

$$X'(r;s) = \sum_{i\in P}\sum_{j=1}^{r_i} x'_{ij} + \sum_{k\in Q}\sum_{j=1}^{s_i} x'_{ij} = \sum_{i\in\ car(r)} X_i + \sum_{i\in\ car(s)} X_i \geq v\,(car\,(r) \cup car\,(s))\,.$$

Sea $T = car\,(r) \cup car\,(s)$, entonces

$$X'(r;s) \geq v\,(T) = \overline{v}\,(p_T,q_T) \geq \overline{v}\,(r;s)\,,$$

ya que cualquier solución factible del problema $(car\,(r)\,,\ car\,(s)\,,\ B_T,\ r,\ s)$ es factible en $(car\,(r)\,,\ car\,(s)\,,\ B_T,\ p_T,\ q_T)$. Por lo tanto, $x' \in \Pi^{-1}(X)$ pertenece a $C\,(N,(p;q),\overline{v})$.
■

El operador de pago transforma $C\,(N,(p;q),\overline{v})$ en $C\,(N,v)$ de forma unívoca. Sin embargo, el operador distribución de pagos por nivel sobre $C\,(N,v)$ sólo nos garantiza que alguno de sus elementos pertenezca a $C\,(N,(p;q),\overline{v})$.

Al igual que en los problemas de transporte clásicos estudiamos el conjunto de Owen, en los juegos de transporte de elección múltiple analizaremos un concepto de solución análogo que denominamos núcleo de Owen.

Un vector de pagos por unidad es una función $y : N \to \mathbb{R}$, donde $y_h = y(h)$ representa el pago por unidad que el jugador h recibe, para todo $h \in N$. Por lo tanto, $m_h{\cdot}y_h$ es el pago total que recibe el jugador h, es decir, cada jugador recibe el mismo pago por cada una de las unidades que tiene.

A partir de un vector de pagos por unidad se puede obtener una matriz incompleta de pagos, $x \in \mathcal{M}^N_{(p;q)}$, considerando $x_{hk} = y_h$, para todo $h \in N$ y $k \in M_h^+$; donde cada agente recibe la misma cantidad por cada uno de sus niveles.

Definición 6.22 *Dado el problema de transporte* (P, Q, B, p, q)*, sea* $(N,(p;q),\overline{v})$ *el juego de elección múltiple asociado. El núcleo de Owen para el juego de transporte* *de elección múltiple* $(N,(p;q),\overline{v})$ *se define como*

$$OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v}) = \left\{ x \in \mathcal{M}^N_{(p;q)} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{hk} = y_h,\ \text{para todo } h \in N \ \text{y } k \in M_h^+, \\ X(p;q) = \overline{v}(p;q), \\ X(r;s) \geq \overline{v}(r;s) \text{ para todo } (r;s) \in MC^{N,m} \end{array} \right\}.$$

Resulta sencillo comprobar que el núcleo de Owen está incluido en el núcleo y cada uno de sus elementos representa una distribución estable en la que a los jugadores se les paga por igual en todos sus niveles.

Proposición 6.23 *Sea* (P,Q,B,p,q) *un problema de transporte y* $(N,(p;q),\overline{v})$ *el juego de transporte de elección múltiple asociado con él. Entonces,*

$$OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v}) \subset C\,(N,(p;q),\overline{v})\,.$$

Demostración. La demostración se sigue de la propia definición del OwenCore.

■

Ejemplo 6.24 *Continuando con el Ejemplo 6.19 se ilustra cómo quedaría el núcleo de Owen:*

$$\begin{aligned} OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v}) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11} = x_{12} = x_{13} \\ y_{11} = y_{12} \\ y_{21} = y_{22} \\ X\,(r_1;s_1,s_2) \geq \overline{v}\,(r_1;s_1,s_2) \\ X\,(3;2,2) = \overline{v}\,(3;2,2) \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \right\} \subset C\,(N,(p;q),\overline{v})\,. \end{aligned}$$

La inclusión del núcleo de Owen en el núcleo del juego puede ser estricta como ilustra el ejemplo anterior.

A continuación se establece la relación entre el conjunto de Owen y el núcleo de Owen.

Proposición 6.25 *Sea (P, Q, B, p, q) un problema de transporte y sea $(N, (p; q), \overline{v})$ el juego de transporte de elección múltiple asociado con él. Entonces, existe una biyección entre el conjunto de Owen, $OwenSet(P, Q, B, p, q)$, y el núcleo de Owen, $OwenCore\,(N, (p; q), \overline{v})$. Por lo tanto, el núcleo de Owen es no vacío .*

Demostración. Sea $\overline{X} = \left(\overline{X}_1, ..., \overline{X}_n\right)$ un elemento del $OwenSet(P, Q, B, p, q) \neq \varnothing$ tal que $\overline{X}_i = p_i\alpha_i$, si $i \in P$, y $\overline{x_j} = q_j\beta_j$, si $j \in Q$, donde $(\alpha; \beta) \in O_d(N)$. Entonces la matriz incompleta de pagos

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{X}_1}{p_1} & ... & \frac{\overline{X}_1}{p_1} & * & ... & * \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\overline{X}_n}{q_n} & ... & \frac{\overline{X}_n}{q_n} & * & ... & * \end{bmatrix} \in \Pi^{-1}\left(\overline{X}\right)$$

En primer lugar, sabemos que $\Pi\left(\overline{x}\right) = \overline{v}(p; q) = v(N)$ porque el vector $(\alpha; \beta)$ es solución óptima del problema dual asociado a N.

Sea $(r; s) \in M^N$, entonces, se tiene que el problema dual asociado al problema de transporte $\mathcal{T}(r, s) = (car(r),\ car(s),\ B_{(car(r);car(s))},\ r,\ s)$ viene dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{i\in car(r)} p_i u_i + \sum_{j\in car(s)} q_j v_j \\ \text{s.a :} & u_i + v_j \geq b_{ij},\ \forall\ i \in car(r), \forall\ j \in car(s) \\ & u_i, v_j \geq 0,\ \forall\ i \in car(r), \forall\ j \in car(s). \end{array}$$

Ahora es sencillo comprobar que el vector $(\alpha; \beta)$ es una solución factible para ese problema. Por lo tanto, se tiene que

$$\sum_{i \in car(r)} r_i \alpha_i + \sum_{j \in car(s)} s_j \beta_j \geq v_d\left(\mathcal{T}(r,s)\right) = \overline{v}(r;s).$$

Por lo tanto, $\overline{x} \in OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v})$ y, en consecuencia, al núcleo $C\,(N,(p;q),\overline{v})$. Además, es inmediato comprobar que $\overline{x}$ es el único elemento de $\Pi^{-1}\,(\overline{x})$ que pertenece al $OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v})$.

A la inversa, sea

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & ... & x_{1p_1} & * & ... & * \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & ... & x_{nq_n} & * & ... & * \end{bmatrix}$$

un elemento del núcleo de Owen, es decir, $x_{hk} = y_h$, para todo $h \in N$ y $k \in M_h^+$, entonces $\Pi\,(x) = (p_1 y_1, ..., q_n y_n)$.

Por otra parte, el problema dual asociado a N es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{i \in P} p_i u_i + \sum_{j \in Q} q_j v_j \\ \text{s.a :} & u_i + v_j \geq b_{ij},\ \forall\ i \in P, \forall\ j \in Q \\ & u_i, v_j \geq 0,\ \forall\ i \in P, \forall\ j \in Q. \end{array}$$

Entonces, como x está en el $OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v})$ se tiene que

$$y_i + y_j \geq \overline{v}\left(e^i; e^j\right) = b_{ij}.$$

Por lo tanto, el vector $(y_1, ..., y_n)$ es una solución factible del problema dual. Pero, como sabemos que $\sum_{i \in P} y_i + \sum_{j \in Q} y_j = \overline{v}(p;q) = v(N)$ porque $x \in OwenCore\,(N,(p;q),\overline{v})$, $(y_1, ..., y_n)$ es una solución óptima del problema dual. Por lo tanto, $\Pi\,(x)$ pertenece al conjunto de Owen.

■

La biyección existente, a través del operador de pagos agregados, entre el conjunto de Owen y el núcleo de Owen en los juegos de transporte de elección múltiple permite que, desde el punto de vista de los beneficios agregados, ambos modelos (clásicos y de elección múltiple) puedan ser considerados como equivalentes. Mientras que desde un punto de vista desagregado no lo son, porque en el modelo de elección múltiple obtenemos información sobre cómo cada agente consigue una determinada cantidad por cada unidad de cada uno de sus recursos.

6.5. Un nuevo concepto de solución

En esta sección introducimos un nuevo concepto de solución para la clase de los juegos TU de elección múltiple. La motivación para considerar un nuevo conjunto de soluciones se basa en que el núcleo, aunque es no vacío, puede tener puntos muy extremos.

La nueva solución que se propone se basa en la simetría existente entre los jugadores de P y de Q a la hora de generar beneficio, es decir, para generar beneficio siempre es necesaria la participación de un jugador de P y un jugador de Q. Por esta razón, parece razonable pensar en la distribución igualitaria del beneficio entre pares. Esta idea da lugar a la nueva solución, que estará muy relacionada con la propiedad estandar para 2 jugadores que podemos encontrar en la caracterización de numerosas soluciones en teoría de juegos (Sánchez-Soriano [61]).

Por ello, llamaremos a la nueva solución conjunto de contribuciones igualitarias por pares (EC).

Ejemplo 6.26 *Consideremos de nuevo la situación del Ejemplo 6.18 en la que hay un proveedor, que tiene tres lotes en venta, y dos minoristas, que demandan dos lotes cada uno. En el juego de transporte de elección múltiple correspondiente podemos* *considerar el siguiente conjunto de matrices incompletas:*

$$\left\{ x \in \mathcal{M}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11} \geq \overline{v}\,(1;2,2) - \overline{v}\,(0;2,2) = 1, \\ x_{12} \geq \overline{v}\,(2;2,2) - \overline{v}\,(1;2,2) = 1, \\ x_{13} \geq \overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(2;2,2) = 1, \\ y_{11} \geq \overline{v}\,(3;1,2) - \overline{v}\,(3;0,2) = 1, \\ y_{12} \geq \overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(3;1,2) = 0, \\ y_{21} \geq \overline{v}\,(3;2,1) - \overline{v}\,(3;2,0) = 1, \\ y_{22} \geq \overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(3;2,1) = 0, \\ X\,(3;2,2) = \overline{v}\,(3;2,2)\,, \end{array} \right\},$$

que representan el conjunto de contribuciones marginales por nivel de los agentes.

Sin embargo, dada la estructura de los problemas de transporte, parece más razonable considerar una contribución igualitaria, puesto que su contribución depende de forma simétrica de otro agente:

$$\begin{array}{l} x_{11} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(1;2,2) - \overline{v}\,(0;2,2)\right) = \frac{1}{2}, \\ x_{12} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(2;2,2) - \overline{v}\,(1;2,2)\right) = \frac{1}{2}, \\ x_{13} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(2;2,2)\right) = \frac{1}{2}, \\ y_{11} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(3;1,2) - \overline{v}\,(3;0,2)\right) = \frac{1}{2}, \\ y_{12} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(3;1,2)\right) = 0, \\ y_{21} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(3;2,1) - \overline{v}\,(3;2,0)\right) = \frac{1}{2}, \\ y_{22} \geq \frac{1}{2}\left(\overline{v}\,(3;2,2) - \overline{v}\,(3;2,1)\right) = 0, \\ X\,(3;2,2) = \overline{v}\,(3;2,2)\,. \end{array}$$

Este conjunto de restricciones nos define el siguiente conjunto de matrices incompletas que llamaremos de contribuciones igualitarias por pares:

$$EC\,(N,(p;q),\overline{v}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ y_{11} & y_{12} & * \\ y_{21} & y_{22} & * \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11} \geq \frac{1}{2} \\ x_{12} \geq \frac{1}{2} \\ x_{13} \geq \frac{1}{2} \\ y_{11} \geq \frac{1}{2} \\ y_{12} \geq 0 \\ y_{21} \geq \frac{1}{2} \\ y_{22} \geq 0 \\ X\,(3{,}2{,}2) = \overline{v}\,(3{,}2{,}2) \end{array} \right\}.$$

Si consideramos el operador de pago agregado Π *obtenemos:*

$$\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)=\left\{\left(\frac{3}{2}+x,\frac{1}{2}+y,\frac{1}{2}+z\right)\middle|x+y+z=\frac{1}{2}\right\}.$$

También podemos considerar el mismo enfoque para el juego de transporte clásico, obteniendo el siguiente conjunto de distribuciones:

$$EC\left(N,v\right)=$$
$$\left\{(x_1;y_1,y_2)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1\geq\frac{1}{2}\left(v\left(R_1S_1S_2\right)-v\left(S_1S_2\right)\right)=\frac{3}{2}\\ y_1\geq\frac{1}{2}\left(v\left(R_1S_1S_2\right)-v\left(R_1S_2\right)\right)=\frac{1}{2}\\ y_2\geq\frac{1}{2}\left(v\left(R_1S_1S_2\right)-v\left(R_1S_1\right)\right)=\frac{1}{2}\\ x_1+y_1+y_2=3\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\left(\tfrac{3}{2}+x,\tfrac{1}{2}+y,\tfrac{1}{2}+z\right)\middle|x+y+z=\tfrac{1}{2}\right\}.$$

A la vista de estos dos conjuntos se observa que $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ *determina de forma unívoca* $EC\left(N,v\right)$ *a través del operador de pago agregado.*

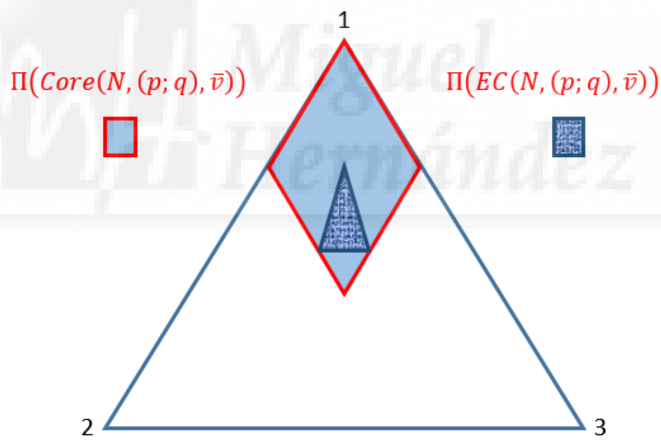

Fig. 6.1: Representación gráfica de los pagos agregados del Ejemplo 6.26

Así mismo, en la Figura 6.1 se aprecia que $\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)$ *está contenido en* $\Pi\left(C\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)$ *y está formado por distribuciones más o menos "equilibradas" entre los agentes.*

Definición 6.27 *Sea* (P,Q,B,p,q) *una situación de transporte y* $(N,(p;q),\overline{v})$ *el juego cooperativo de transporte de elección múltiple asociado con ella. El conjunto* *de contribuciones igualitarias por pares, $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$, es el conjunto de matrices incompletas de pagos que satisfacen eficiencia y, para todo $h \in N$ y $k \in M_h^+$,*

$$x_{hk} \geq \frac{\overline{v}\left(k, m_{-h}\right) - \overline{v}\left(k-1, m_{-h}\right)}{2},$$

donde $m = (p;q)$ y $m_{-h} = (m_1, m_2, \ldots, m_{h-1}, m_{h+1}, \ldots, m_{n-1}, m_n)$.

Las desigualdades que definen $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ expresan que cuando un agente pone una unidad de esfuerzo, si el resto de agentes están en su nivel máximo, tiene que conseguir al menos la mitad del aumento del beneficio generado por dicha unidad. Consideramos la mitad porque el agente estará emparejado con otro agente y, por ello, parece razonable que el beneficio generado se divida a partes iguales entre ambos.

De igual modo que se introduce la definición del conjunto de contribuciones igualitarias por pares para el juego de transporte de elección múltiple, podemos definir el concepto de solución análogo para los juegos de transporte convencionales.

Definición 6.28 *Sea (P,Q,B,p,q) una situación de transporte y (N,v) el juego de transporte asociado con ella. El conjunto de contribuciones igualitarias por pares, $EC(N,v)$, es el conjunto de distribuciones de pago que satisfacen eficiencia y, para todo $i \in N$,*

$$x_i \geq \frac{v(N) - v(N \setminus \{i\})}{2}.$$

En el resultado siguiente se establece la relación que existe entre $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ y $EC(N,v)$, a través de los operadores de pago agregado, Π, y distribución de pagos por nivel Π^{-1}.

Proposición 6.29 *Dado un problema de transporte (P,Q,B,p,q). Sean (N,v) y $(N,(p;q),\overline{v})$ el juego cooperativo asociado y el juego cooperativo de elección múltiple* *asociado a dicho problema, respectivamente. Entonces, se tiene que*

1. $\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right) \subset EC\left(N,v\right)$.
2. $\forall X \in EC\left(N,v\right)$, $\Pi^{-1}\left(EC\left(N,v\right)\right) \cap EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right) \neq \varnothing$.

Por lo tanto, $\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right) = EC\left(N,v\right)$

Demostración.

Sea $x \in EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$, para cada $h \in N$, tenemos que

$$x_{hk} \geq \frac{\overline{v}\left(k,m_{-h}\right) - \overline{v}\left(k-1,m_{-h}\right)}{2}, \ \forall k \in M_h^+.$$

Sumando en k, obtenemos que

$$\sum_{k \in M_h^+} x_{hk} \geq \frac{\overline{v}\left(1,m_{-h}\right) - \overline{v}\left(0,m_{-h}\right)}{2} + \frac{\overline{v}\left(2,m_{-h}\right) - \overline{v}\left(1,m_{-h}\right)}{2} + ... + \frac{\overline{v}\left(m\right) - \overline{v}\left(m_h,m_{-h}\right)}{2}.$$

Como se trata de una suma telescópica tenemos que

$$\sum_{k \in M_h^+} x_{hk} \geq \frac{\overline{v}\left(m\right) - \overline{v}\left(0,m_{-h}\right)}{2} = \frac{v\left(N\right) - v\left(N \setminus \{h\}\right)}{2}.$$

Por la definición de Π y la definición del conjunto de contribuciones igualitarias por pares para el juego de transporte, tenemos que $\Pi\left(x\right) \in EC\left(N,v\right)$ y, consecuentemente, $\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right) \subset EC\left(N,v\right)$.

Sea ahora $X \in EC\left(N,v\right)$, para cada $i \in N$, tenemos que

$$X_i \geq \frac{v\left(N\right) - v\left(N \setminus \{i\}\right)}{2}.$$

El lado derecho de la desigualdad se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{v(N)-v(N\setminus\{i\})}{2}=\frac{\overline{v}(m_i,m_{-i})-\overline{v}(m_{i-1},m_{-i})}{2}+...+\frac{\overline{v}(1,m_{-i})-\overline{v}(0,m_{-i})}{2}.$$

Sea

$$\alpha_i=X_i-\left(\frac{v(N)-v(N\setminus\{i\})}{2}\right)\geq 0,\ \forall i\in N.$$

Entonces, construimos la siguiente matriz incompleta

$$x_{ik}=\frac{v(k,m_{-i})-v(k-1,m_{-i})}{2}+\frac{\alpha_i}{m_i},\ \forall k\in M_h^+.$$

Es sencillo comprobar que $x\in EC(N,(p;q),\overline{v})$.

■

Así pues, $EC(N,v)$ determina al menos un elemento de $EC(N,(p;q),\overline{v})$ a través del operador distribución de pagos por nivel. Mientras que $EC(N,(p;q),\overline{v})$ determina de forma unívoca $EC(N,v)$ a través del operador de pago agregado. Esto significa que desde el punto de vista agregado los pagos en ambos modelos (clásico y de elección múltiple) son equivalentes en términos de la contribución igualitaria (EC); pero no desde un punto de vista desagregado porque en el modelo de elección múltiple obtenemos información sobre lo que consigue cada agente por cada una de las unidades del bien. La razón de por qué sucede esto reside en la estructura especial de los problemas de transporte.

A la vista del resultado obtenido en el Ejemplo 6.26 podríamos preguntarnos si el pago agregado del conjunto de contribuciones igualitarias por pares está siempre contenido en el conjunto de pagos agregados que ofrece el núcleo. Sin embargo, la respuesta es negativa como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.30 *Consideremos la siguiente situación en la que hay un proveedor que tiene tres lotes de fármacos, no divisibles, para vender y dos minoristas, que cada* *uno quiere comprar tres lotes de fármacos, donde la matriz de beneficios por unidad viene dada por el vector* (1,1)*. En este caso,*

$$C\left(N,(p;q),\overline{v}\right)=\left\{\left[\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\end{array}\right]\left|\begin{array}{l} X\left(r_1;s_1,s_2\right)\geq\overline{v}\left(r_1;s_1,s_2\right)\\ X\left(3;3,3\right)=\overline{v}\left(3;3,3\right)\end{array}\right.\right\}.$$

Si aplicamos el operador de pago agregado $\Pi\left(C\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)=\{(3;0,0)\}$*. Mientras que si aplicamos el operador de pago agregado a* $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$*, obtenemos*

$$\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)=\left\{\left(\frac{3}{2}+x,\ y,\ z\right)\middle|\, x+y+z=\frac{3}{2}\right\}.$$

Luego, en este caso

$$\Pi\left(Core\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right)\subset\Pi\left(EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)\right).$$

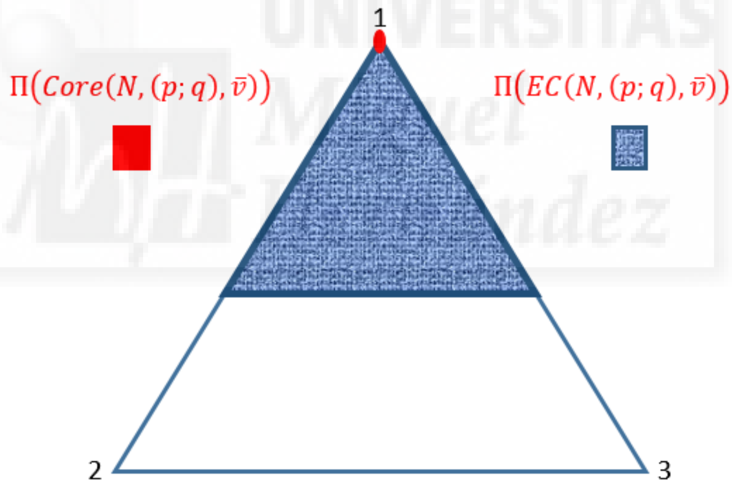

Fig. 6.2: Representación gráfica de los pagos agregados del Ejemplo 6.30

El siguiente ejemplo muestra que $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ puede reducirse a un único punto.

Ejemplo 6.31 *Consideremos una situación en la que hay dos proveedores, el primero tiene tres lotes de fármacos en venta y el segundo tiene dos lotes en venta. Hay también dos minoristas, el primero quiere comprar dos lotes de fármacos y el segundo* *quiere comprar tres lotes. La matriz de beneficios por unidad es la siguiente*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cada proveedor debe decidir a quien vende los lotes, intentando obtener el máximo beneficio por la venta. En el caso de que el primer proveedor venda sus lotes al primer comprador obtendría 2 euros por unidad, en cambio si se los vende al segundo obtendría 4 euros por unidad a su vez. El segundo proveedor puede vender sus lotes al primer comprador obteniendo 4 euros por unidad, o vendérselos al segundo comprador por 3 euros cada uno. Así obtendríamos que:

$$EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right) = \{(2{,}2{,}2{,}2{,}2;2{,}2{,}2{,}2{,}2)\} \text{ y } EC(N,v) = \{(6{,}4;4{,}6)\}.$$

La siguiente proposición muestra algunos resultados sobre la estructura de $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ en los problemas de transporte de elección múltiple.

Proposición 6.32 *Dada una situación de transporte (P,Q,B,p,q). Sea $(N,(p;q),\overline{v})$ el juego cooperativo de elección múltiple asociado, entonces se cumple que*

1. $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ *es siempre no vacío.*
2. $EC\left(N,(p;q),\overline{v}\right)$ *es o un punto único o la envolvente convexa de* $\sum_{i\in P} p_i + \sum_{j\in Q} q_j$ *puntos.*

Demostración.

1. Por la Proposición 6.29 es suficiente probar que $EC\left(N,v\right) \neq \varnothing$. Consideremos $k \in P$ (análogamente $h \in Q$) y sea $O_p(P,Q,B,p,q)$ el conjunto de todos los planes óptimos de transporte. Entonces,

$$v\left(N\right) - v\left(N - \{k\}\right) \leq \min_{T\in O_p(P,Q,B,p,q)} \left\{ \sum_{j\in Q} p_{kj} t_{kj} \right\}.$$

En efecto, $\forall T \in O_p(P,Q,B,p,q)$, $[t_{ij}]_{\substack{i\in P\setminus\{k\}\\ j\in Q}}$ es un plan de transporte factible para $(P\setminus\{k\},Q,[b_{ij}]_{i\in P\setminus\{k\}},p_{-k},q)$, por lo tanto,

$$v(N-\{k\}) \geq \sum_{i\in P\setminus\{k\}}\sum_{j\in Q} p_{ij}t_{ij}.$$

En particular,

$$v(N-\{k\}) \geq \max_{T\in O_p(P,Q,B,p,q)} \left\{ \sum_{i\in P\setminus\{k\}}\sum_{j\in Q} p_{ij}t_{ij} \right\}.$$

Así pues, tenemos que $\forall T \in O_p(P,Q,B,p,q)$,

$$\begin{aligned} v(N)-v(N-\{k\}) &\leq \sum_{j\in Q} p_{kj}t_{kj},\ \forall k\in P,\\ v(N)-v(N-\{h\}) &\leq \sum_{i\in P} p_{ih}t_{ih},\ \forall h\in Q. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\sum_{i\in P}(v(N)-v(N\setminus\{i\}))+\sum_{j\in Q}(v(N)-v(N\setminus\{j\}))\leq 2v(N).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in P}(v(N)-v(N\setminus\{i\}))+\sum_{j\in Q}(v(N)-v(N\setminus\{j\}))\right)\leq v(N),$$

lo que implica que $EC(N,v)\neq\varnothing$.

2. Por la Definición de $EC(N,(p;q),\overline{v})$ tenemos que $EC(N,(p;q),\overline{v}) =$

$$\left\{ x\in\mathcal{M}_m^N \;\middle|\; \begin{array}{c} X(m)=\overline{v}(m) \\ x_{ij}=\frac{1}{2}(\overline{v}(j,m_{-i})-\overline{v}(j-1,m_{-i}))+\alpha_{ij},\alpha_{ij}\geq 0,\forall i\in N \text{ y } \forall j\leq m_i \\ x_{ij}=*,\ \forall i\in N \text{ y } \forall j>m_i \end{array} \right\}$$

donde $m=(p;q)$. Por lo tanto,

$$EC(N,(p;q),\overline{v})=\{\gamma\}\ \oplus\left\{\alpha\in\mathcal{M}_m^N \;\middle|\; \sum_{i\in N\ ,\ j\leq m_i}\alpha_{ij}=\overline{v}(m)-\Gamma,\ \alpha_{ij}\geq 0\right\},$$

donde $\gamma \in \mathcal{M}_m^N$ tal que $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{v}\left(j,m_{-i}\right) - \overline{v}\left(j-1,m_{-i}\right)\right)$, si $j \leq m_i$, y $\gamma_{ij} = *$, si $j > m_i$, $\Gamma = \sum\limits_{i\in N, j\leq m_i} \gamma_{ij}$, $M = \sum\limits_{i\in N} m_i$ y $\oplus$ se define como sigue:

$$A \oplus B = \{a + b \,| a \in A \ \ , b \in B\}\,,\; A,\, B \subset \mathbb{R}^N.$$

Como consecuencia de esto:

1. Si $\overline{v}\left(m\right) = \Gamma$, entonces $EC\left(N, (p;q), \overline{v}\right)$ consiste en un sólo punto,
2. Si $\overline{v}\left(m\right) > \Gamma$, entonces $EC\left(N, (p;q), \overline{v}\right)$ es la envolvente convexa de $\sum_{i\in P} p_i + \sum_{j\in Q} q_j$ puntos.

■

6.6. Propiedades

A continuación se definen una serie de propiedades que estudiaremos si son satisfechas por el nuevo concepto de solución introducido en la sección anterior.

Dado un juego $(N, (p;q), \overline{v}) \in TGM$, sea SOL una solución para esta clase de juegos de transporte de elección múltiple.

- Eficiencia (EFF): Se dice que SOL satisface eficiencia, si para todo juego $(N, (p;q), \overline{v}) \in TGM$ se tiene que $x\left((p;q)\right) = \overline{v}\left((p;q)\right), \forall X \in SOL\left(N, (p;q), \overline{v}\right)$.
- No vacuidad (NE): Se dice que SOL satisface no vacuidad, si para todo juego $(N, (p;q), \overline{v}) \in TGM$ se verifica que $SOL\left(N, (p;q), \overline{v}\right) \neq \varnothing$.
- Estándar para dos jugadores. $(S2)$: Se dice que SOL satisface estándar para dos jugadores si para todo juego $(N, (p;q), \overline{v}) \in TGM$ tal que $|N| = 2$ se tiene que, para todo $x \in SOL\left(N, (p;q), \overline{v}\right)$, se cumple que $x_{1j} = x_{2j}$, para todo $j \leq \min\left\{m_1,m_2\right\}$.

La propiedades de eficiencia, no vacuidad y estándar para dos jugadores son propiedades habituales en la literatura de Teoría de Juegos cuando se aborda la caracterización de soluciones. Las siguientes propiedades que introducimos están relacionadas con la simetría de los jugadores y han sido adaptadas a la situación concreta que se estudia.

- Simetría de nivel cruzada ($CL-SYM$): Se dice que SOL satisface la propiedad de simetría de nivel cruzada, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que para los jugadores i y k, sus niveles j_i y j_k cumplen las condiciones

  1. $j_i = j_k$ (el mismo nivel de actividad)
  2. $\overline{v}\left(s_{-\{i,k\}},\, j_i,\, s_k\right) - \overline{v}\left(s_{-\{i,k\}},\, j_i - 1,\, s_k\right) = \overline{v}\left(s_{-\{i,k\}},\, s_i,\, j_k\right) - \overline{v}\left(s_{-\{i,k\}},\, s_i,\, j_k - 1\right)$, para todo $s_{-\{i,k\}}$ y $s_i = s_k \leq j_i = j_k$ (las mismas contribuciones marginales),

  entonces, para todo $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij_i} \neq x_{kj_k}$, existe $x' \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x'_{ij_i} = x_{kj_k}$ y $x'_{kj_k} = x_{ij_i}$.

- Simetría de nivel ($L-SYM$): Se dice que SOL satisface la propiedad de simetría de nivel, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que si j y h son dos niveles de actividad para el jugador i tales que

  $\overline{v}\left(s_{-\{i\}},\, j\right) - \overline{v}\left(s_{-\{i\}},\, j-1\right) = \overline{v}\left(s_{-\{i\}},\, h\right) - \overline{v}\left(s_{-\{i\}},\, h-1\right)$, para todo $s_{-\{i\}}$,

  entonces, para todo $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij} \neq x_{ih}$, existe $x' \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x'_{ij} = x_{ih}$, y $x'_{ih} = x_{ij}$.

- Simetría de esfuerzo extra ($EE-SYM$): Se dice que SOL satisface la propiedad de simetría de esfuerzo extra, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que para los jugadores i y k sus niveles j_i y j_k cumplen la condición:

  $\overline{v}\left((p;q)_{-\{i\}},\, j_i\right) - \overline{v}\left((p;q)_{-\{i\}},\, j_i - 1\right) = \overline{v}\left((p;q)_{-\{k\}},\, j_k\right) - \overline{v}\left((p;q)_{-\{k\}},\, j_k - 1\right)$,

  entonces, para $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij_i} \neq x_{kj_k}$, existe $x' \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x'_{ij_i} = x_{kj_k}$ y $x'_{kj_k} = x_{ij_i}$.

Las propiedades de simetría de nivel cruzada y simetría de esfuerzo extra hacen referencia a la simetría de niveles entre jugadores; pero mientras que la de esfuerzo extra sólo hace referencia a las contribuciones a la gran coalición, la simetría de nivel cruzada hace referencia a todas las coaliciones. Por último, la propiedad de simetría de nivel hace referencia a la simetría existente entre niveles para un mismo jugador.

A continuación, se introducirán propiedades relacionadas con la monotonía en los pagos que recibe cada jugador por nivel de actividad.

- Recompensas decrecientes (DR): Se dice que SOL satisface la propiedad de recompensas decrecientes, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que existe $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij} \leq x_{ij-1}$, para todo $i \in N$ y $j \leq m_i$.

- Recompensas crecientes (IR): Se dice que SOL satisface la propiedad de recompensas crecientes, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que existe $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij} \geq x_{ij-1}$, para todo $i \in N$ y $j \leq m_i$.

- Recompensas constantes (CR): Se dice que SOL satisface la propiedad de recompensas constantes, si para todo juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ se tiene que existe $x \in SOL\,(N,(p;q),\overline{v})$ tal que $x_{ij} = x_{ij-1}$, para todo $i \in N$ y $j \leq m_i$.

Proposición 6.33 *$EC\,(N,m,\overline{v})$ satisface las siguientes propiedades definidas anteriormente EFF, NE, $S2$, DR, $L-SYM$ y $EE-SYM$.*

Demostración.

(EFF) EC satisface eficiencia por la propia definición del concepto de solución.

(NE) EC es siempre no vacío por la Proposición 6.32.

$(S2)$ Sea el juego $(N,(p;q),\overline{v}) \in TGM$ asociado al problema (P,Q,B,p,q), tal que $|N|=2$, entonces si $N=P$ o $N=Q$ es evidente que se cumple la propiedad $S2$, porque todos los niveles recibirán 0 como pago. En otro caso, sea $P=\{1\}$ y $Q=\{2\}$, y $p_1=p\leq q_2=q$ y la matriz $B=(b)$, el otro caso se demuestra de forma análoga. Entonces, $\forall x \in EC\,(N,(p;q),\overline{v})$ se tiene que

$$\begin{aligned} x_{1j} &\geq \frac{\overline{v}\,(j;q)-\overline{v}\,(j-1,\,q)}{2}=\frac{b}{2},\ j\leq p,\\ x_{2j} &\geq \frac{\overline{v}\,(p;j)-\overline{v}\,(p,\,j-1)}{2}=\begin{cases}\frac{b}{2},\ \text{si } j\leq p,\\ 0,\ \text{si } j>p.\end{cases}\end{aligned}$$

Además, $\overline{v}\,(N)=pb$. Tomando los pagos en x para cada jugador se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{1j}\geq p\frac{b}{2}\ \text{y}\sum_{j=1}^{q} x_{2j}\geq p\frac{b}{2},$$

por lo tanto, por la condición de eficiencia obtenemos

$$\sum_{j=1}^{p} x_{1j}=p\frac{b}{2}\implies x_{1j}=\frac{b}{2}\ \forall j\leq p,$$

y

$$\sum_{j=1}^{q} x_{2j}=p\frac{b}{2}\implies x_{2j}=\frac{b}{2}\ \forall j\leq p\ \text{y}\ x_{2j}=0,\ \forall j>p.$$

En consecuencia, EC satisface $S2$.

$(L-SYM)$[2]. Por la Proposición 6.32 sabemos que

$$EC\,(N,(p;q),\overline{v})=\left\{x\in\mathcal{M}_m^N\,\middle|\,x_{ij}=\gamma_{ij}+\alpha_{ij}\ \text{con}\sum_{i\in N}\sum_{j\leq m_i}\alpha_{ij}=\overline{v}\,(m)-\Gamma,\ \alpha_{ij}\geq 0\right\}.$$

Si para un jugador i sus niveles de actividad j y h satisfacen la condición dada en la propiedad $(L{-}SYM)$, entonces se tiene que $\gamma_{ij}=\gamma_{ih}$. Ahora, si $x\in EC\,(N,(p;q),\overline{v})$

[2] En realidad, EC satisface una propiedad mucho más débil, porque sólo necesita que se cumpla la condición en $(L-SYM)$ para $s_{-\{i\}}=m_{-\{i\}}$.

es tal que $x_{ij} \neq x_{ih}$, entonces, existen α y $\beta \geq 0$, $\alpha \neq \beta$ tal que $x_{ij} = \gamma_{ij} + \alpha$ y $x_{ih} = \gamma_{ih} + \beta$. Construimos la siguiente matriz incompleta $x' \in \mathcal{M}_m^N$:

$$x'_{ab} = \begin{cases} x'_{ab} = x_{ab},\ \forall a \in N \setminus \{i\}\ \ \forall b \leq m_a, \\ x'_{ij} = \gamma_{ij} + \beta, \\ x'_{ih} = \gamma_{ih} + \alpha, \\ x'_{ik} = x_{ik},\ \forall k \neq j,h. \end{cases}$$

Es evidente que $x' \in EC\,(N, (p;q), \overline{v})$ y $x'_{ij} = x_{ih}$ y $x'_{ih} = x_{ij}$.

$(EE - SYM)$. Sean dos jugadores i y k en las condiciones de la propiedad $(EE - SYM)$. Por la Proposición 6.32 sabemos que $\gamma_{ij_i} = \gamma_{kj_k}$. Sea ahora $x \in EC\,(N, (p;q), \overline{v})$ tal que $x_{ij_i} \neq x_{kj_k}$. Definimos $x' \in \mathcal{M}_m^N$ de la siguiente forma

$$x'_{ab} = \begin{cases} x'_{ab} = x_{ab}\ \forall a \in N \setminus \{i,k\}\ \ \forall b \leq m_a, \\ x'_{ij_i} = x_{kj_k}, \\ x'_{kj_k} = x_{ij_i}, \\ x'_{ij} = x_{ij}, \forall j \neq j_i \\ x'_{kj} = x_{kj},\ \forall j \neq j_k. \end{cases}$$

(DR). Es suficiente demostrar que $\gamma_{ij} \leq \gamma_{i(j-1)}, \forall i \in N\ \forall j \leq m_i$, por la estructura de EC.

Sean $i \in N$ y $j \leq m_i$. Tenemos que demostrar que

$$\overline{v}\,(j, m_{-i}) - \overline{v}\,(j-1, m_{-i}) \leq \overline{v}\,(j-1, m_{-i}) - \overline{v}\,(j-2, m_{-i})\,.$$

Pero esto es cierto, puesto que los jugadores del mismo tipo son sustitutos en los problemas de transporte, por lo tanto, si consideramos cada uno de los niveles de actividad como un jugador, se tiene que su contribución disminuirá cuantos más jugadores (niveles de actividad) iguales a él haya previamente. ■

Proposición 6.34 *$EC\,(N, (p;q), \overline{v})$ no satisface, en general, las siguientes propiedades $CL - SYM$, IR y CR.*

Demostración.

$(CL-SYM)$ EC no satisface, en general, $CL-SYM$ porque las contribuciones que figuran en la propiedad no hacen referencia a situaciones en las que todos contribuyen lo máximo excepto uno. Por lo tanto, podría darse el caso que los jugadores fuesen simétricos hasta un cierto nivel, pero no para el último nivel de actividad, lo que haría que no fuesen simétricos desde la perspectiva de EC.

$(IR+CR)$ Consideremos la siguiente situación

$$\left(P=\{1\}\,,\,Q=\{2{,}3\}\,,\,B=(2{,}1)\,,\,(p;q)=(3;1{,}1)\right)$$

$(N,(p;q),\overline{v})$ vendrá dado por: $\overline{v}\,(k;0{,}0)=0,\ \forall k=1,2,3,$
$\overline{v}\,(0;i{,}j)=0,\ \forall i=0{,}1\ \forall j=0,1,$

$$\begin{array}{lllll}\overline{v}\,(1;1{,}0)=2, & \overline{v}\,(1;0{,}1)=1, & \overline{v}\,(1;1{,}1)=2, & \overline{v}\,(2;1{,}0)=2, & \overline{v}\,(2;0{,}1)=1,\\ \overline{v}\,(2;1{,}1)=3, & \overline{v}\,(3;1{,}0)=2, & \overline{v}\,(3;0{,}1)=1, & \overline{v}\,(3;1{,}1)=3, & \end{array}$$

Entonces, por la Proposición 6.32 tenemos que

$$\begin{array}{llll} x_{11}=1+\alpha_{11} & x_{21}=1+\alpha_{21} & x_{31}=\frac{1}{2}+\alpha_{31} & \sum\alpha_{ij}=0\\ x_{12}=\frac{1}{2}+\alpha_{12} & & & \\ x_{13}=0+\alpha_{13} & & & \end{array}$$

$$EC=\left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & * & *\\ \frac{1}{2} & * & * \end{pmatrix}\right\}$$

y es evidente que no se cumplen las propiedades IR y CR. ■

Finalmente, no se tiene una caracterización completa de la solución EC puesto que faltaría, al menos, una definición de juego reducido y una propiedad de consistencia adecuadas que permitieran dicha caracterización.

6.7. Comentarios

En este capítulo hemos estudiado los juegos de transporte de elección múltiple. Se ha utilizado un concepto de solución para los juegos cooperativos de elección múltiple basado en el conjunto de Owen.

Se ha demostrado que, desde el punto de vista de los beneficios agregados, ambos modelos (clásico y de elección múltiple) son "equivalentes", pero no desde un punto de vista desagregado de los beneficios; debido a que en el modelo de elección múltiple obtenemos información sobre la cantidad que cada agente obtiene para cada uno de sus niveles de participación.

Hemos introducido un nuevo concepto de solución para los juegos de transporte basado en las contribuciones igualitarias, del que se han establecido ciertas propiedades razonables.

La forma de demostrar la no vacuidad del núcleo de Owen y, por lo tanto, del núcleo también es válida para los juegos de elección múltiple en mercados unilaterales, por ejemplo, en los denominados juegos de *pooling*. Una situación de *pooling*, Potters y Tijs [54], aparece cuando un conjunto de agentes que son dueños de los derechos de propiedad de varios productos básicos intercambiables deciden cooperar, poniendo en común sus derechos de propiedad con el fin de lograr el mayor beneficio posible. Las situaciones de *pooling* pueden verse como tipos especiales de los modelos de mercado unilateral que están relacionados con los modelos de transporte, como se plantea en Kosheroy et al. [40] y Fragnelli et al. [18].

Capítulo 7

Referencias

Bibliografía

[1] Aristoteles (sIV a.C.) *Ética a Nicómaco.*

[2] Aumann, R.J. (1959) *Acceptable points in general cooperative n-Person Games.* In contributions to the Theory of Games, vol. IV, Annals of Mathematics Studies 40 (eds. A.W.Tucker and R.D. Luce), Princeton, N.J.: Princeton University Press, pp 287-324.

[3] Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985) *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud.* Journal of Economic Theory 36, pp 195-213.

[4] Avi-Yonah, R. y Uhlmann, D. (2009) *Combating global climate change: why a carbon tax is a better response to global warming than cap and trade.* Stanford Environmental Law Journal 28, pp 3-50.

[5] Bai, Q. y Chen, M. (2016) *The distributionally robust newsvendor problem with dual sourcing under carbon tax and cap-and-trade regulations.* Computers & Industrial Engineering 98, pp 260-274.

[6] Bergantiños, G., Gómez-Rúa, M., Llorca, N., Pulido, M. y Sánchez-Soriano, J. (2012) *A cost allocation rule for k-hop minimum cost spanning tree problems.* Operations Research Letters 40, pp 52-55.

[7] Bondareva, O.N. (1963) *Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games.* Problemy Kybernetiki 10, pp 119-139.

[8] Branzei, R., Llorca, N., Sánchez-Soriano, J. y Tijs, S.H. (2009) *Multi-choice total ClanGames and their core.* TOP 17, pp 123-138.

[9] Calvo, E. y Santos, J.C. (2000) *A value for multi-choice games.* Mathematical Social Sciences 40, pp 341-354.

[10] Calvo, E., Gutierrez, E. y Santos, J.C. (2000) *The multi-choice consistent value.* International Journal of Game Theory 29, pp 177-188.

[11] Carraro, C. (2016) *The Paris Agreement: key points and future prospects.* International Center for Climate Governance.

[12] Cooper, R. (1998) *Toward a real treaty on global warming.* Foreing Affaires 77, pp 66-79.

[13] Curiel, I.J., Maschler, M. y Tijs, S.H. (1987) *Bankruptcy Games.* Zeitschrift für Operations Research Series 31, pp 143-159.

[14] Dinar, A., Albiac, J. y Sanchez Soriano, J. (2008) *Game Theory and policymaking in natural resources and the environment.* Routledge, New York.

[15] Driessen, T.S.H. y Meinhardt, H. (2001) *(Average) Convexity of common-pool and oligopoly TU-games.* International Game Theory Review 3, pp 141-158.

[16] Edgeworth, F.Y. (1881) *Mathematical Psychics.* London: Kegan.

[17] Estévez-Fernández, A. (2012) *A game theoretical approach to sharing penalties and rewards in projects.* European Journal of Operational Research 216, pp 647-657.

[18] Fragnelli, V., Llorca, N., y Tijs, S.H. (2007) *Balancedness of the Class of infinite permutation games and related classes of games.* International Game Theory Review 9, pp 425-435.

[19] FRAGNELLI, V. y SANCHEZ SORIANO, J. (2010) *Two-Sided market situations with existing contracts.* Social choice and Welfare 34, pp 295-313.

[20] FUNAKI, Y. y YAMATO, T. (1999) *The core of an economy with a common pool resource: A partition function form approach.* International Journal of Game Theory 28, pp 157-171.

[21] GALE, D. (1960) *The Theory of Linear Economic Models.* New York: McGraw-Hill.

[22] GELLEKOM, J.R.G. VAN, POTTERS, J.A.M., REIJNIERSE, J.H., TIJS, S.H. y ENGEL, M.C. (2000) *Characterization of the Owen Set of Linear Production Processes.* Games and Economic Behavior 32, pp 139-156.

[23] GILLIES, D.B. (1953) *Some Theorems on N-person Games.* Ph.D. Dissertation, Princeton University, Princeton.

[24] GRABISCH, M. y XIE, L. (2007) *A new investigation about the core and Weber set of multi-choice games.* Mathematics of Operations Research 66, pp 491-512.

[25] GUTIÉRREZ, E., LLORCA, N., MOSQUERA, M. y SÁNCHEZ-SORIANO, J. (2016*a*) *On the effects of a common-pool resource on cooperation among firms with linear technologies.* ArXiv: 1602.00525 [math.OC].

[26] GUTIÉRREZ, E., LLORCA, N., MOSQUERA, M. y SÁNCHEZ-SORIANO, J. (2016*b*) *Sustainable allocation of greenhouse gas emission permits for firms with Leontief technologies.* Mimeo. Submitted.

[27] GUTIÉRREZ, E., LLORCA, N., BRANZEI, R. y SÁNCHEZ-SORIANO, J. (2016*c*) *On new solution concepts for multi-choice two-sided market games.* Mimeo.

[28] GUTIÉRREZ, E., LLORCA, N., MOSQUERA, M. y SÁNCHEZ-SORIANO, J. (2017) *Equilibria in a competitive model arising from linear produc-*

tion situations with a common-pool resource. TOP, online first: 02-02-2017 DOI:10.1007/S11750-017-0438-3.

[29] HARDIN, G. (1968) *The tragedy of commons.* Science 162, pp 1243-1248.

[30] HE, Y , WANG, L. y WANG, J. (2012) *Cap-and-trade vs. carbon taxes: A quantitative comparison from generation expansion planning perspective.* Computers & Industrial Engineering 63, pp 708-716.

[31] HONG, Z., CHU, C. y YU, Y. (2016) *Dual-mode production planning for manufacturing with emission constraints.* European Journal of Operational Research 251, pp 96-106.

[32] HSIAO, C.R. y RAGHAVAN, T.E.S. (1993) *Monotonicity and dummy free property for multi-choice cooperative games.* International Journal of Game Theory 21, pp 301-312.

[33] HSIAO, C.R. y RAGHAVAN, T.E.S. (1993) *Shapley value for multi-choice cooperative games (I).* Games and Economic Behavior 5, pp 240-256.

[34] HURWICZ, L. (1960) *Optimality and informational efficiency in resource allocation processes*, Mathematical Methods in the Social Sciences, edited by Stanford University Press.

[35] HURWICZ, L. (1972) *On informationally descentralized systems*, Decision and Organization, edited by C.B. McGuire and R. Radner, North Holland, Amsterdam.

[36] HWANG, Y. y LIAO, Y. (2010) *The unit-level-core for multi-choice games: the replicated core for TU games.* Journal of Global Optimization 47, pp 161-171.

[37] JACOBY, D.H. y ELLERMAN, A.D. (2004) *The safety valve and climate policy.* Energy Policy 32, pp 481-491.

[38] Kaminski, M. (2000) *Hydraulic Rationing.* Mathematical Social Sciences 40, pp 131-155.

[39] Keohane, N. (2009) *Cap and trade rehabilitated: Using tradable permits to control U.S. greenhouse gases.* Review of Environtmental Economics and Policy 3, pp 42-62.

[40] Kosheroy, G., Tijs, S.H. y Miquel, S. (2006) *Equilibria for pooling situations.* International Journal of Game Theory 34, pp 123-130.

[41] Llorca, N. (2001) *Juegos cooperativos semi-infinitos asociados a problemas de programación lineal.* Tesis Doctoral, Universidad Miguel Hernandez, Elche.

[42] Llorca, N., Molina, E., Pulido, M. y Sánchez-Soriano, J. (2004) *On the Owen Set of transportation situations.* Theory and Decision 56, pp 215-228.

[43] Lucas-Estañ, M.C., Gozálvez, J. y Sánchez-Soriano, J. (2012) *Bankruptcy-based radio resource management for multimedia mobile networks.* Transactions on Emerging Telecommunications Technologies 23, pp 186-201.

[44] Mirás calvo, M.A. y Sánchez Rodríguez, E. (2008) *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab.* Servicio de publicaciones de la Universidad de Vigo.

[45] Molina, E. (1998) *Imputación de costes y beneficios: Aportaciones desde la teoría de juegos cooperativos.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

[46] Molina, E. y Tejada, J. (2006) *Linear production games with fuzzy control.* Fuzzy sets and systems 157, pp 1362-1383.

[47] Murty, K.G. (1983) *Linear Programming.* New York: Wiley.

[48] NASH, J.F. (1950) *Non cooperative Games.* Ph.D. Dissertation Princeton University.

[49] NORDHAUS, W.D. (2007) *To tax or not tax: Alternative Approaches to slowing global warming.* Review of Environtmental Economics and Policy 1, pp 26-44.

[50] NOUWELAND VAN DEN, A. (1993) *Games and graphs in Economic situations.* Ph.D Thesis. Tilburg University.

[51] NOUWELAND VAN DEN, A., POTTERS, J., TIJS, S.H. y ZARZUELO, J. (1995) *Cores and related solution concepts for multi-choice games.* Mathematical Methods of Operations Research 41, pp 289-311.

[52] O'NEILL, B. (1982) *A problem of rights arbitration from the Talmud.* Mathematical Social Sciences 2, pp 345-371.

[53] OWEN, G. (1975) On the Core of Linear Production Games. *Mathematical Programming* 9, 358-370.

[54] POTTERS, J.A.M., y TIJS, S.H. (1987) *Pooling: Assignment with property rights.* Methods of Operations Research 57, pp 495-508.

[55] POUNDSTONE, W. (1995) *El dilema del prisionero. Madrid, Alianza editorial.*

[56] RABINOVITCH, N. (1973) *Probability and Statistical Inference in Medieval Jewish Literature.* University of Toronto Press.

[57] SAMET, D., TAUMAN, Y. y ZANG, I. (1984) *An Application of the Aumann-Shapley Prices for Cost Allocation in Transportation Problems.* Mathematics of Operations Research 9, pp 25-42.

[58] SÁNCHEZ-SORIANO, J. (1998) *El problema del transporte. Una aproximación desde la Teoría de Juegos.* Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, Murcia.

[59] Sánchez-Soriano, J., Llorca, N., Tijs, S.H. y Timmer, J. (2001) *Semi-infinite Assignment and Transportation Games.* Editores: M.A. Goberna Torrent, M.A. López Cerdá. Semi-Infinite Programming: Recent Advances 57, pp 349-363.

[60] Sánchez-Soriano, J., López, M.A. y García-Jurado, I. (2001) *On the Core of Transportation Games.* Mathematical Social Sciences 41, pp 215-225.

[61] Sánchez-Soriano, J. (2003) *The pairwise egalitarian solution.* European journal of operational research 150, pp 220-231.

[62] Sancho, J., Sánchez-Soriano, J., Chazarra, J.A. y Aparicio, J. (2008) *Design and implementation of a decision support system for competitive electricity markets.* Decision Support Systems 44, pp 765-784.

[63] Schrijver, A. (1986) *Theory of Linear and Integer Programming.* Chichester: Wiley.

[64] Shapley, L.S. (1953) *A Value for $n-$person Games. Contributions to the Theory of Games II.* Annals of Mathematical Studies 28, eds. H.W. Khun y A. W. Tucker, Princeton Academic Press, pp 307-317.

[65] Shapley, L.S. (1962) *Complements and Substitutes in the Optimal Assignment Problem.* Naval Research Logistics Quartely 9, pp 45-48.

[66] Shapley, L.S. (1967) *On Balanced Sets and Cores.* Naval Research Logistics Quartely 14, pp 453-460.

[67] Shapley, L.S. (1971) *Cores of Convex Games.* International Journal of Game Theory 1, pp 11-26.

[68] Shapley, L.S. y Shubik, S. (1971) *The Assignment Game I: The Core.* International Journal of Game Theory 1, pp 111-130.

[69] THRALL, R.M. y LUCAS, W.F. (1963) *N-person games in partition function form.* Naval Research Logistic Quarterly 10, pp 281-298.

[70] THOMPSON, G.L. (1980) *Computing the Core of a Market Game.* Extremal Methods and Systems Analysis 174, ed. V. Balakrishnan, Springer, pp 312-334.

[71] THOMSON, W. (2015) *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankrupty and taxation problems: an update.* Mathematical Social Sciences 74, pp 41–59.

[72] TIJS, S.H. (1981) *Bounds for the Core and the τ-Value.* Editores: Moeschlin, O., y Pallaschke, D. Game Theory and Mathematical Economics, Amsterdam, The Netherlands: North Holland Publishing company pp 123-132.

[73] TIMMER, J., BORM, P. y SUIJS, J. (2000) *Linear transformation of products: games and economies.* Journal of Optimization Theory and Applications 105, pp 677-706.

[74] UNFCCC (2015) *Adoption of the Paris Agreement*, Paris, France.

[75] VON NEUMANN, J. (1928) *Zur Thoerie der Gesellschaftsspiele.* Mathematische Annalen 100, pp 295-320.

[76] VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton: Princeton University Press.

[77] WINSTON, W.L. (1994) *Operations Research: Applications and Algorithms.* Belmont: Duxbury Press.

[78] YENIPAZARLI, A. (2016) *Managing new and remanufactured products to mitigate envoponmental damage under emissions regulation.* European Journal of Operational Research 249, pp 117-130.

[79] ZERMELO, E. (1913) *Uber eine Anwendung der Mengenlhere auf die Theorie des Schachspiels.* Proceedings 5th International Congress of Mathematicians 2, pp 501-504.