

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE.

TESIS DOCTORAL:

Transformaciones homográficas de modelos tridimensionales.
Análisis proyectivo para el desarrollo de una aplicación infográfica.

AUTOR: D. FRANCISCO IRLES MAS.



Dirigida por: Dr. Ramón Maestre López-Salazar

Departamento de Expresión Gráfica y Cartografía.

Universidad de Alicante.

Título del programa de doctorado: Tecnologías Industriales.

ÍNDICE:

	Página:
1. PRELIMINARES.	6
1.1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1.1. ELECCIÓN DEL TÍTULO Y MOTIVACIÓN.	7
1.1.2. MARCO ACADÉMICO.....	7
1.1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO.....	8
1.2. OBJETIVOS.....	9
1.3. EXPERIENCIA PREVIA.....	9
1.4. METODOLOGÍA.....	10
1.4.1. Generalidades.....	10
1.4.2. Fases de elaboración de la tesis.....	10
2. ESTADO DEL ARTE. ANTECEDENTES.....	12
2.0. INTRODUCCIÓN.....	13
2.1. LA GEOMETRÍA CLÁSICA.....	14
2.2. EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA.....	18
2.2.1. Definición de homografía.....	18
2.2.2. Coordenadas homogéneas.....	19
2.2.3. Ecuación de una homografía.....	19
2.2.4. Clasificación de las homografías.....	20
2.2.5. Homografías especiales.....	23
2.2.6. Cuádricas.....	24
2.3. LA INFOGRAFÍA.....	27

3. HOMOGRAFÍAS EN EL PLANO.	32
3.1. DESARROLLO TEÓRICO.....	33
3.1.1. Según el trazado clásico.	33
3.1.2. Homologías asociadas, homografías ordenadas y desordenadas.....	34
3.1.3. Según geometría proyectiva.....	37
3.2. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA <i>HOMOGRAF</i>	39
3.2.1. Las distintas versiones.....	39
3.2.1.1. Las primeras versiones: <i>Homo.lsp</i> v.0 y <i>Homo1.lsp</i>	40
3.2.1.2. La segunda versión: <i>Homograf.1</i>	48
3.2.1.3. La tercera y cuarta versión: <i>Homograf2002</i> y <i>Homograf.lsp</i>	52
3.2.2. Ejemplos y aplicaciones.....	54
3.2.2.1. Fotogrametría de una sola fotografía oblicua.....	54
3.2.2.2. Montaje fotográfico.....	55
3.2.2.3. Obtención de dibujos 2D en perspectiva cónica.....	55
3.2.2.4. Fotogrametría de una sola fotografía con corrección de fuga.....	55
3.2.2.5. Obtención de perspectivas cilíndricas ortogonales u oblicuas y cónicas.....	56
3.2.2.6. Deformación de perspectivas.....	57
3.2.2.7. Obtención de anaglifos.....	57
3.2.2.8. Trazado de curvas cónicas.....	58
3.2.2.9. Corrección de cartografía 2D.....	59
4. HOMOGRAFÍAS EN EL ESPACIO 3D.....	62
4.1. DESARROLLO TEÓRICO.....	63
4.1.1. Según trazado clásico.....	63

4.1.2. Estudio de la homografía 3D de una figura plana.....	66
4.1.3. Homologías asociadas, homografías ordenadas y desordenadas.....	69
4.1.4. Homologías pseudo-regulares.....	72
4.1.5. Según geometría proyectiva.....	73
4.2. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA <i>HOMOGRAF3D.LSP</i>	76
4.2.1. Limitaciones.....	77
4.2.2. Ejemplos y aplicaciones.....	79
4.2.2.1. Superficies homólogas de una superficie esférica. Cuádricas.....	79
Superficie de elipsoides.....	80
Superficies de hiperboloides de dos hojas.....	80
Superficies de paraboloides.....	82
Deformación de un poliedro geodésico pseudoregular.....	84
Deformación de una cúpula poliédrica de trapezoides simétricos.....	87
4.2.2.2. Generación proyectiva de las cuádricas regladas.....	88
4.2.2.3. Arquitectura ilusoria y escenografías teatrales.....	91
Palacio Spada de Roma.....	91
Cámara Ames.....	96
4.2.2.4. Bajorrelieves.....	99
4.2.2.5. Arquitectura oblicua y estereotomía.....	103
4.2.2.6. Transformación de modelos de elementos finitos.....	107
5. CONCLUSIONES.....	108
5.1. CONCLUSIONES.....	109
5.2. FUTURAS INVESTIGACIONES.....	110

6. FUENTES DE LA INFORMACIÓN	111
6.1. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS GENERALES.....	112
6.1.1. Libros y manuales.....	112
6.1.2. Revistas.....	113
6.1.3. Comunicaciones en Congresos y Seminarios.....	113
6.1.4. Otras tesis.....	115
6.1.5. Internet.....	115
6.2 PROGRAMAS INFORMÁTICOS.....	116
6.3. PROCEDENCIA DE LAS ILUSTRACIONES.....	116
ANEXO 1: Listados de Homograf y Homograf3D.....	118
Introducción.....	119
Listado de Homo.lsp v.0.....	120
Listado de Homo1.lsp v.0.....	122
Listado de <i>Homograf</i> .1 en LISP.....	127
Listado de <i>Homograf</i> .1 en C.....	131
Listado de <i>Homograf</i> .lsp.....	141
Listado de <i>Homograf</i> 2002 en C.....	146
Listado de <i>Homograf</i> .mnu.....	156
Listado de <i>Homograf</i> 3D.lsp.....	157
ANEXO 2: Resumen de la tesis.....	169
ANEXO 3: Abstract en Castellano.....	176
ANEXO 4: Abstract en Inglés.....	178



1. PRELIMINARES.

1.1. INTRODUCCIÓN.

1.1.1. ELECCIÓN DEL TÍTULO Y MOTIVACIÓN.

El tema elegido para tesis “Transformaciones homográficas de modelos tridimensionales. Análisis proyectivo para el desarrollo de una aplicación infográfica.” se perfila en octubre de 2008, con el inicio de un año sabático concedido al autor con finalidad de avanzar en su tesis. Pero el estudio de las homologías en dos dimensiones viene de años atrás y nació de la colaboración con el director de tesis Dr. Ramón Maestre en los principios de la elaboración de su tesis.

La motivación de elegir el tema de la tesis viene por cuatro motivos. El primero, el interés por el dibujo técnico y en especial por los sistemas CAD por parte del autor. Éste interés le ha llevado a la situación laboral de profesor T.E.U. de Expresión Gráfica y de CAD en la titulación de Industriales de la Universidad Miguel Hernández de Elche, y antes de Dibujo Técnico y Sistemas de representación en Obras Públicas de la Universidad de Alicante; con asignaturas, como se puede entender, muy afines al tema de la tesis. En segundo lugar, se motiva por dar continuidad a la línea de investigación sobre homologías 2D abierta por la colaboración con Ramón Maestre a partir del año 1995 y a la que se ha dedicado gran esfuerzo, obteniendo como resultado numerosas publicaciones, entre las que destacan las que incluyen el programa para resolución de homologías “*Homograf*” desarrollado por el autor y que ha sido objeto de explotación comercial. En tercer lugar, el carácter novedoso de abordar las homologías 2D y 3D desde una plataforma de dibujo que constituye un estándar en España como es Autocad, es incluso novedosa a nivel general de aplicaciones infográficas, que si bien existen un escaso número de aplicaciones que resuelven la homologías 2D, sólo se ha encontrado una que resuelva las homologías en 3D y está desarrollada en entorno Matlab y no sobre un editor gráfico. Por último motivo es las numerosas aplicaciones de una herramienta como *Homograf*, en campos como son la fotogrametría, la obtención de perspectivas, bajos relieves y diseño ilusorio aplicado a arquitectura o a otros campos.

1.1.2. MARCO ACADÉMICO.

La tesis se enmarca dentro del programa de doctorado de “Tecnologías Industriales” de la Universidad Miguel Hernández de Elche en el que se está matriculado, habiéndose obtenido la suficiencia investigadora en octubre de 2002, tras haber cursado los créditos necesarios en las materias:

1er curso, 2000-01:

Fabricación asistida por ordenador CAD/CAM. 3cr.
Ingeniería avanzada de vehículos automóviles 3cr.
Ingeniería de diseño 3cr.
Procesamientos avanzados en visión artificial 3cr.

Redes neuronales e inteligencia artificial 3cr.
Técnicas de aprendizaje en inteligencia artificial 3cr.
Visión tridimensional 3cr.

2º curso, 2001-02:

Se realiza un trabajo tutelado de 12 cr. titulado “Análisis correlado de aceleraciones medidas con cámara de alta velocidad y acelerómetros I.C.P. en ensayos de impacto.”

De estas materias cabe destacar las de Procesamientos avanzados en visión artificial y Visión tridimensional, que han introducido al autor en conocimientos de geometría proyectiva aplicada a la fotorestitución, dando las bases matemáticas de cálculo matricial que han permitido desarrollar la presente tesis y que en los siguientes capítulos se abordan. También resulta vinculado a la temática de la tesis el trabajo tutelado al trabajarse con fotogrametría a partir de videos.

Se puede observar que hay cierta dilación en el tiempo desde que se inicia en 1995 la investigación con la primera versión de *Homograf*, pero hay que tener presente que el que suscribe, en aquellos momentos era titulado medio en Ingeniería Técnica de Obras Públicas por la U.P.V., y que es en los años 1997-2000 cuando cursa como segundo ciclo la licenciatura de Investigación y Técnicas de Mercado en la Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas de Elche. Posteriormente a partir del 2002 por circunstancias personales se ha centrado en labores docentes, dejando de lado esta línea de investigación. Agradecer aquí la iniciativa y el apoyo continuado del Profesor Dr. Ramón Maestre a lo largo de todos estos años.

1.1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO.

La presente tesis se estructura en seis capítulos y cuatro anexos.

En este primer capítulo de preliminares se expone el marco en que se redacta la tesis, los motivos, sus objetivos y metodología seguida.

En el capítulo dos se exponen los antecedentes, desde un enfoque multidisciplinar: gráfico, matemático e informático. Desestimando hacer un estudio histórico que carecería del carácter novedoso que debe tener toda tesis y sería una simple réplica de lo que en otras tesis se ha hecho.

Los capítulos tres y cuatro abordan las homografías en plano (2D) y en el espacio (3D) respectivamente, y constituyen el cuerpo principal de la tesis; se ha estructurado en dos capítulos, pues responde a dos objetivos bien diferenciados: un programa para trabajar con dibujos 2D y otro para trabajar en 3D, que tendrán también aplicaciones prácticas muy distintas, aunque eso sí los algoritmos utilizados finalmente tienen muchas similitudes desde el punto de vista matemático.

En el capítulo cinco se enumeran las distintas conclusiones que se obtienen, tanto del estudio de la homografías planas como de las espaciales y se apuntan futuras líneas de investigación que se abren tras esta tesis.

1.2. OBJETIVOS.

Como objetivos de la presente tesis se marca lograr una aplicación informática que consiga resolver las homologías en 2D y 3D en el entorno de Autocad, por ser éste el más extendido en el mercado español, entre los editores gráficos vectoriales de ámbito general. Para lo cual será necesario resolver previamente desde el punto de vista matemático los problemas, e implementar los algoritmos necesarios en uno de los lenguajes de programación aceptados por Autocad. Finalmente otro objetivo será emplear las aplicaciones infográficas creadas para ilustrar con ejemplos algunas de sus utilidades.

1.3. EXPERIENCIA PREVIA.

La experiencia del que suscribe en los temas relacionados con la presente tesis se inicia en sus estudios de primer ciclo en la Ingeniería Técnica de Obras Públicas (ITOP), en concreto en las asignaturas de Dibujo Técnico, Sistemas de Representación; donde se aprenden los conceptos de homología plana y homología entre secciones planas de cuerpos piramidales. Estos conceptos gráficos se consolidan y amplían en los más de ocho años que imparte, ya como profesor, las asignaturas citadas.

La asignatura de álgebra de la ITOP, será también clave para sentar los conocimientos básicos que permitan estudiar el problema de las homografías desde el punto de vista matemático y de la Geometría Proyectiva, iniciándose en ésta última el autor en los cursos de doctorado.

En programación la experiencia se inicia en la asignatura de topografía de segundo de ITOP, aprendiéndose el lenguaje algorítmico y a programar en Basic en la asignatura de tercero de Aplicaciones Informáticas. Pero será en el trabajo fin de carrera titulado “PERCON: Perspectivas Cónicas mediante ordenador” donde realmente se inicia el autor en la programación gráfica, realizando en lenguaje Pascal un programa que obtenía perspectivas cónicas de elementos constructivos cuando el Autocad de aquella época aun no lo hacía.

La experiencia en programas de CAD, de los que se ha sido autodidacta, se afianza con la impartición de múltiples cursos de especialista universitario y a diversos organismos, para terminar impartiendo en los últimos nueve años las asignaturas de Expresión Gráfica y CAD en la titulación de Ingenieros Industriales. En la mayoría de los casos el programa empleado ha sido Autocad, y en algunos de los cursos se ha introducido a la programación en Autolisp.

Esta programación en Autolisp se ha aprendido a través de colaboraciones en diversos proyectos de investigación en la Universidad de Alicante, donde se ha realizado aportaciones a nivel gráfico que en múltiples ocasiones han requerido de programación en

Autolisp, de las que podríamos destacar la digitalización de pluviogramas, la modificación de un programa para el desarrollo y desalabeo de chapa con Autocad, la creación de una aplicación para elaborar planos de señalización viaria, etc. Además de aprender programación gráfica se ha estudiado para ello en cierta medida la estructura de datos de Autocad y la de sus ficheros DXF.

1.4. METODOLOGÍA.

1.4.1. GENERALIDADES.

La metodología seguida para elaborar esta tesis ha sido en primer lugar el estudio de los antecedentes geométricos, para después diseñar los primeros algoritmos de *Homograf* en el plano y programar las primeras versiones de la aplicación infográfica. En esta tarea se ha seguido el método de ensayo y error, dando lugar a versiones del programa cada vez más robustas. Conseguido un programa eficaz se han buscado las aplicaciones 2D del mismo y se han documentado con ejemplos que se han publicado.

Seguidamente se estudió el problema desde la geometría proyectiva, siempre buscando algoritmos más robustos y simples. Se buscan precedentes tanto algebraicos como infográficos. Se resuelve el problema matemático de la homografías en el plano, y se programa el algoritmo diseñado primero en un lenguaje de programación tipo intérprete, pues permite un mejor seguimiento, y después se tradujo a un lenguaje de programación compilado para su comercialización.

Finalmente resuelto el problema en 2D se decide abordar el 3D, pero esta vez directamente desde la geometría proyectiva. Se resuelve el problema matemático, diseñándose el algoritmo y programándose *Homograf 3D* que resuelve las homografías en el espacio, para finalmente generar una serie de ejemplos de sus aplicaciones siguiendo la metodología de los tratados clásicos de geometría, pero usando el programa creado y un editor 3D como es Autocad.

1.4.2. FASES DE ELABORACIÓN DE LA TESIS.

La línea de investigación con cuyos resultados se redacta la presente tesis se ha estructurado en tres fases claramente diferenciadas:

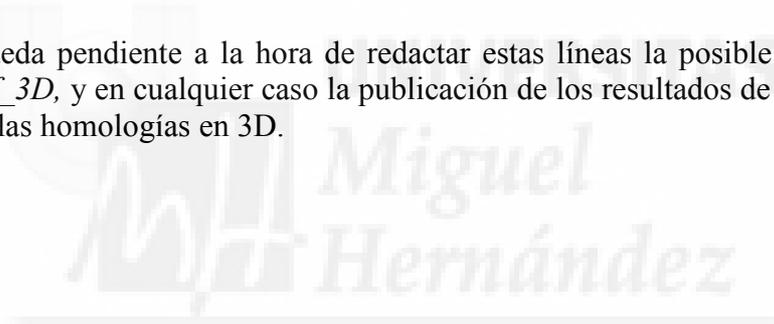
Primera Fase: Basada en la colaboración con Ramón Maestre en la elaboración de su tesis “Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura“. Donde se estudiaron las construcciones geométricas de las homografías 2D y se programaron las primeras versiones del programa, programas que se sometían a un exhaustivo chequeo de su uso por parte del autor, de Ramón Maestre y otros colaboradores del departamento, no obteniéndose resultados suficientemente buenos para casos particulares con coincidencias y paralelismos. Problema que quedó resuelto al estudiar en

profundidad las posibilidades de Autocad y ver que permitía resolver las transformaciones proyectivas (homografías) por medio del comando “tablero” y acceder a la matriz de transformación mediante la función “tablet” de Autolisp, es así como se programó la primera versión de *Homograf* que se tradujo a lenguaje C y se comercializó. Con lo que se multiplicó el número de usuarios que validaron el programa y aportaron sugerencias para las nuevas versiones.

Segunda Fase: Basada en la adquisición de nuevos conocimientos desde la Geometría Proyectiva a raíz de los cursos de doctorado. Es en esta fase en la que ya se programa la segunda versión comercializada de *Homograf*, en la que se determina la matriz de la transformación proyectiva en 2D y por tanto se prescinde de utilizar el comando “tablero”. También se incluyeron modificaciones sugeridas por los usuarios a fin de simplificar la instalación y manejo del programa.

Tercera Fase: Es en la que se resuelve el problema matemático de la homografías en el espacio 3D, se programa *Homograf_3D* y se analizan y ejemplifican algunas de sus utilidades. Entre ellas destacan la arquitectura ilusoria, la escenográfica y el dibujo de cuádricas.

Queda pendiente a la hora de redactar estas líneas la posible comercialización de *Homograf_3D*, y en cualquier caso la publicación de los resultados de toda la investigación referida a las homologías en 3D.





2. ESTADO DEL ARTE. ANTECEDENTES.

2.0. INTRODUCCIÓN.

En la presente tesis no se ha optado por hacer un estudio del estado del arte desde el punto de vista histórico, por entender que debe estudiarse el estado actual de conocimientos sobre la materia, sin tener trascendencia la cronología histórica de los avances. Se opta por este enfoque ya que la tesis toca campos multidisciplinares: geométrico, algebraico e infográfico, de forma que hacer historia de todos ellos sería extensísimo y dudosamente aportaría más luz sobre los conceptos actuales, que sí son expuestos en la presente tesis, y que constituyen realmente el estado del arte y no la historia de este arte. Y es por ello que se entiende suficiente hacer un estudio de los conocimientos actuales sobre las transformaciones homográficas desde las distintas disciplinas relacionadas, como pueden ser la geometría clásica, el álgebra, la geometría proyectiva y la informática gráfica, sin caer en repeticiones de estudios históricos que aparezcan en otras tesis afines, ya que esto carecería del aspecto novedoso que debe caracterizar toda tesis.

Como dice José Luis Cabanes en su tesis: *“La geometría proyectiva y el álgebra constituyen el haz y el envés de las transformaciones de una figura que comporta su representación técnica. La geometría proyectiva se ha gestado históricamente a partir de las definiciones dadas por Staudt, Chasles o Poncelet, con escasa sistematización de las consecuencias numéricas de sus transformaciones. Por otro lado, la denominada geometría analítica ha venido tratando las transformaciones propias de la representación técnica con escaso interés por lo geométrico. Ha faltado pues la teoría capaz de enunciar ordenadamente la identidad consustancial de ambos planteamientos. El desarrollo de los espacios vectoriales ha proporcionado el armazón coherente preciso el cual permite evidenciar cómo los principios algebraicos y los proyectivos conjuntamente, son los que fundamentan la geometría de la representación técnica, de manera que toda relación proyectiva puede ser identificada también de forma numérica, susceptible por tanto, de tratamiento informatizado.”*¹

Es cierto que los enfoques dados por el álgebra son muy abstractos y con escaso análisis de sus aplicaciones geométricas. Y viceversa los tratados de geometría clásica y proyectiva carecen o son muy poco sistematizados los estudios numéricos. Ha venido a ser la informática gráfica el nexo de unión de disciplinas que han evolucionado en cierta medida por separado. En especial, en nuestro caso, un programa de dibujo vectorial estándar del mercado español como es Autocad sobre el que es posible programar nuevas aplicaciones y que ha servido de plataforma base para la implementación² de las distintas versiones de *Homograf*.

¹ CABANES GINÉS, José Luis, *Tesis doctoral: Rectificación fotogramétrica de objetos planos por métodos gráficos basados en principios proyectivos*, U.P.V. 2002, p.6.

² En desarrollo de sistemas informáticos, la implementación es la etapa donde efectivamente se programa un determinado algoritmo en un lenguaje específico.

2.1. LA GEOMETRÍA CLÁSICA.

En cuanto a la geometría descriptiva las homologías 2D están estudiadas desde tiempos del matemático francés Desargues (1591–1661), al cual debemos el siguiente teorema:

Dados dos triángulos sin elementos comunes, si sus lados se cortan dos a dos en puntos alineados, las rectas que unen sus vértices concurren en el mismo punto.

*Recíprocamente: Dados dos triángulos sin elementos comunes, si las rectas que unen sus vértices son concurrentes, sus lados se cortan dos a dos en puntos alineados.*³

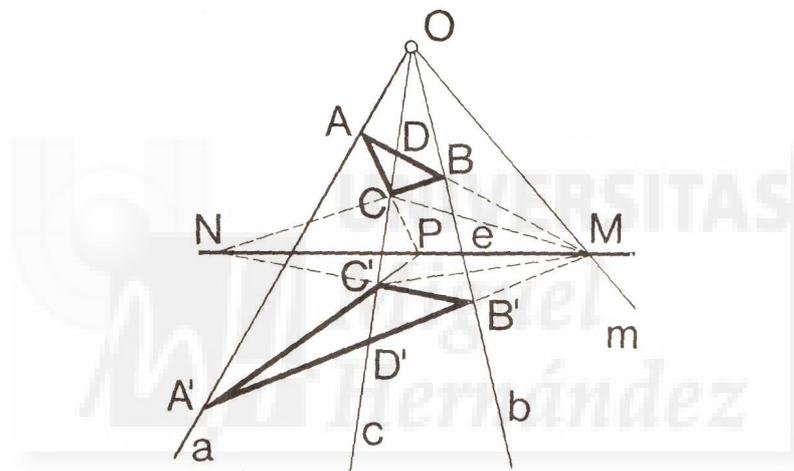


Figura 2.1: Homología plana.

La construcción de la homología plana expuesta puede considerarse como la proyección sobre un plano del caso tridimensional de una homología entre dos figuras planas, que es el más común expuesto en los tratados de geometría descriptiva, al emplearse en la obtención de secciones planas de pirámides y conos. En este caso el eje de homología es la intersección de los planos que contienen a las dos secciones planas homólogas y el centro de la homología el vértice de la radiación piramidal o cónica.

En lo relativo a las homografías en tres dimensiones entre geometrías de tercera categoría, es decir volúmenes o superficies, son mucho más escasas las referencias encontradas desde la geometría descriptiva clásica.

³ IZQUIERDO ASENSI, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980, p.66

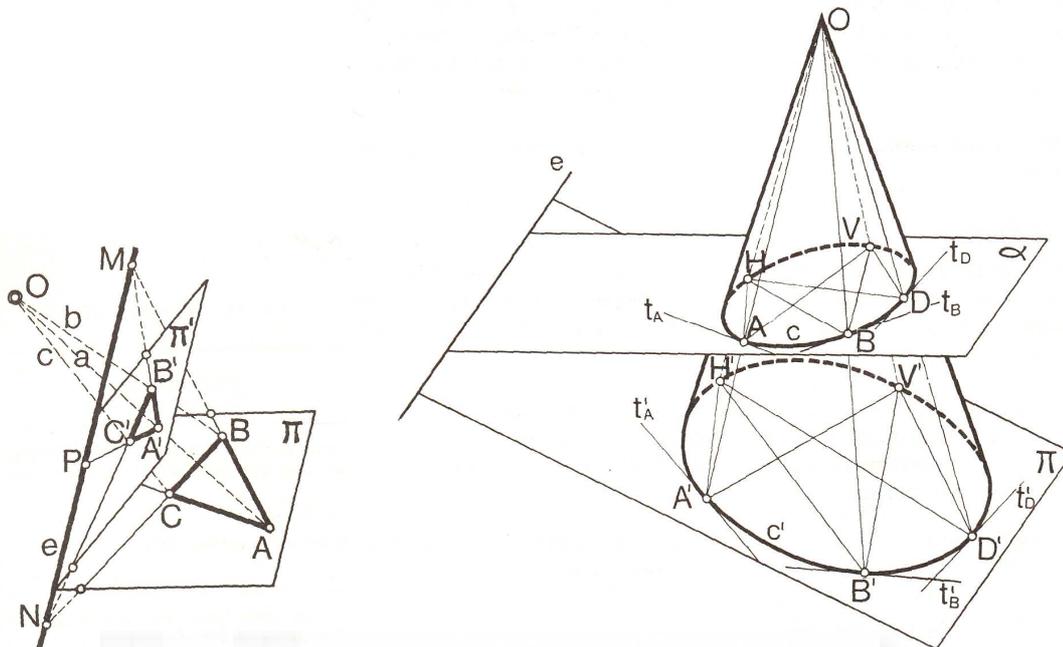


Figura 2.2: Homología tridimensional entre figuras planas.

La geometría clásica estudia las homologías 3D desde hace bastantes años, la bibliografía más antigua manejada es el libro *Rouché et Comberousse, Traité de Géométrie. Deuxième Partie. Géométrie dans l'espace. Paris, Gauthier-Villars, Nouvelle Édition 1922*, en el que después de estudiarse con profundidad las homologías 2D aparecen unas breves notas sobre cómo se define la homología 3D, de la existencia de un plano de homología donde se cortan los pares de rectas homólogas, mencionándose también sus aplicaciones a la escenografía y a los bajos relieves, es decir en aquellas realizaciones artísticas tridimensionales donde lo que se pretende es reducir notablemente una de las dimensiones, ya sea en decorados o en los bajos relieves labrados sobre muros.

En los recientes tratados, por ejemplo el de Izquierdo Asensi, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980, también encontramos referencias a las homografías y las homologías entre espacios tridimensionales superpuestos:

Una homografía entre espacios superpuestos queda determinada por los elementos siguientes:

Cinco pares de planos homólogos, de modo que cuatro de ellos no sean de la misma radiación. Cinco pares de puntos homólogos, de modo que cuatro de ellos no sean coplanarios.

...

...

...

Análogamente a la homología plana, el plano homólogo del impropio de cada forma se llama plano límite. Los planos límite son paralelos al de homología, equidistan de V y C y están situados entre ambos o fuera de ellos.⁴

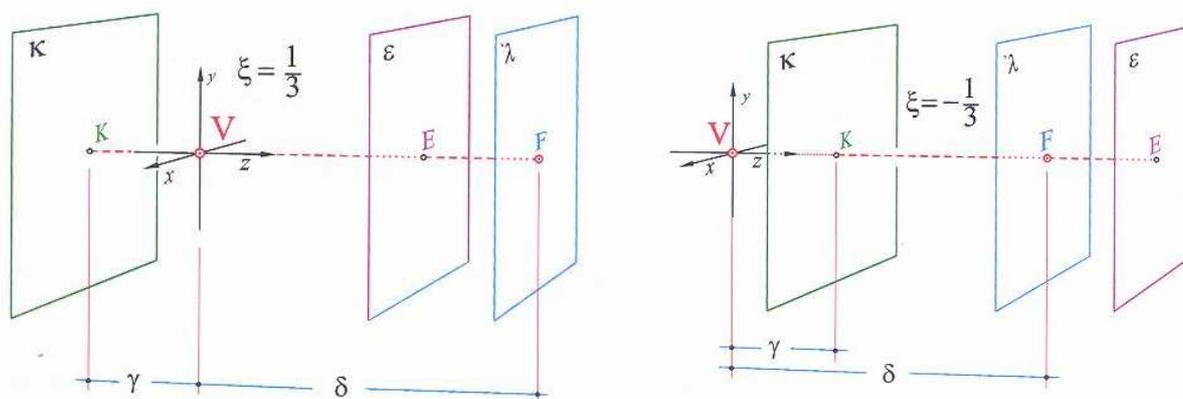


Figura 2.4: La disposición de los planos límites κ y λ siempre es paralela al plano de homología ε , pudiendo estar exteriores al centro V y el plano de homología (izquierda) o interiores (derecha), según sea el signo del coeficiente de homología $\xi = \gamma/\delta$ positivo o negativo respectivamente. También se cumple que las distancias $V\kappa = \varepsilon\lambda$

En la publicación más reciente localizada sobre el tema, *Homología en 3D* de Manuel Fernández, encontramos el precedente más afín a esta tesis. En él se introducen las homologías 3D desde el punto de vista matemático con ilustraciones en perspectiva de los planteamientos. Planteamiento matemático que se realiza fijando el sistema de coordenadas en una posición muy particular respecto de los elementos característicos de la homología, en concreto con el eje Z sobre el rayo proyectante principal (rayo perpendicular al plano de homología desde el centro de homología). Con este enfoque en un sistema de referencia particular se simplifica la formulación, pero se limita la posición del sistema de referencia y se eluden las homografías que llamaremos en esta tesis “desordenadas”. Con esto implementan un programa en Matlab que resuelve las homologías 3D.

Después pasa a estudiar cómo definir homologías 3D, pero lo hace en sistema diédrico, sistema que no abandona ya en el resto del libro donde se estudian las homologías planas, la generación proyectiva de las cuádricas no regladas y de las regladas, secciones planas de las cuádricas, intersección con una recta, etc.

También aborda las homologías en el plano donde define lo que llama homología “biaxial” (ver figura 2.5), toma una homología 2D y manteniendo fijos el eje de homología $e-e'$ y el coeficiente de homología γ/δ desplaza el centro de homología V sobre la trayectoria $v-v'$, obteniendo dos rectas dobles $e-e'$ y $v-v'$, de forma que los puntos de las

⁴ IZQUIERDO ASENSI, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980, p.137 y 138, si bien la figura 2.3 es de VILLANUEVA BARTRINA, Lluís, *Arquitectura escenògrafica i geometria*, Revista D'Art [0211-0768], any: 1994, Vol.:1, núm.:20, Pàg.: 132

rectas límite F_1 y K_1 se desplazan sobre las rectas de trazo y dos puntos, concurrentes en $1-1$.

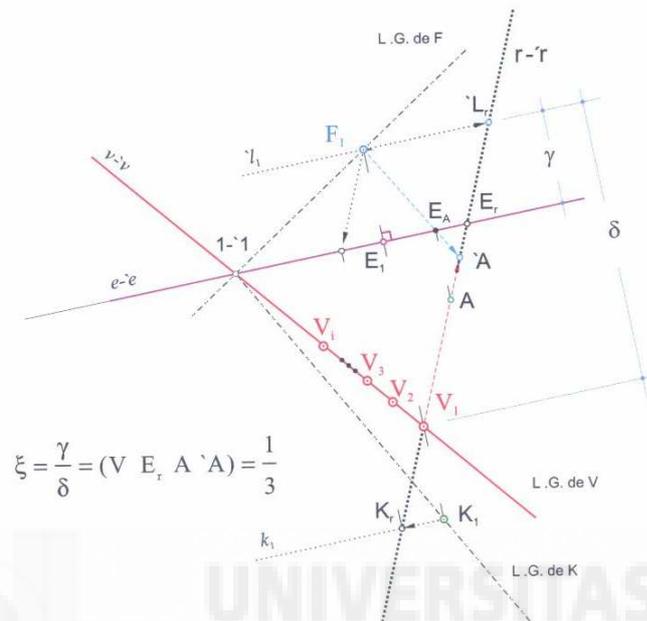


Figura 2.5: Elementos de homología biaxial.

La principal diferencia del enfoque que se da en esta tesis es abordar los problemas en lugar de en diédrico directamente en 3D, a través de Autocad, y que la formulación que emplearemos no está supeditada a un sistema de coordenadas particular, abarcándose como se verá el concepto más general de las homografías y no sólo las homologías.

2.2. EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA.

Desde la disciplina matemática es la llamada geometría proyectiva la que estudia las homografías, con un fuerte apoyo en los conceptos básicos del álgebra lineal. Es basándonos en los *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas* de Ángel Montesdeoca y en el libro *Álgebra lineal y geometría* de J. García García, M. López Pellicer, como se redactan las siguientes líneas.

2.2.1. DEFINICIÓN DE HOMOGRAFÍA.

Una homografía se define como una proyectividad biyectiva $f(x) = x'$ entre dos espacios n -dimensionales, es decir, una función que asigna a cada elemento x un elemento x' tal que para algún λ , perteneciente a R , se cumple $\lambda x' = A \cdot x$, siendo A una matriz invertible. En particular asigna a cada elemento otro de su misma especie, a un punto corresponde otro punto, a una recta otra recta, a un plano otro plano, etc. Y es reversible y unívoca, de forma que a un objeto origen corresponde un sólo objeto imagen y viceversa.

En general se define entre espacios n -dimensionales, pero en esta tesis nos ceñiremos a espacios R^2 y R^3 , pero trabajando en los espacios proyectivos P^2 y P^3 en

coordenadas homogéneas, ya que presenta ventajas como por ejemplo tratar numéricamente puntos del infinito. Hay que hacer notar que en la bibliografía consultada sólo se expone las definiciones para el caso n-dimensional y pone los ejemplos sólo en \mathbb{R}^2 , siendo muy escuetas las aportaciones en \mathbb{R}^3 , por lo que tiene carácter novedoso en la presente tesis el abordar de forma extensiva el problema en \mathbb{R}^3 .

2.2.2. COORDENADAS HOMOGÉNEAS.

En el caso de una homografía de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , para definir la coordenadas homogéneas nos basaremos en el caso del plano proyectivo \mathbb{P}^2 , y tendremos que tomar como espacio vectorial asociado \mathbb{R}^3 con origen en O, punto situado en la normal a \mathbb{P}^2 por el origen de coordenadas O' y a la distancia unidad de \mathbb{P}^2 . Tomamos en \mathbb{R}^3 los ejes coordenados XYZ, tales que la ecuación de \mathbb{P}^2 sea $z = 1$ y los ejes XY sean paralelos a X'Y' respectivamente, tal y como se muestra en la figura 2.6.

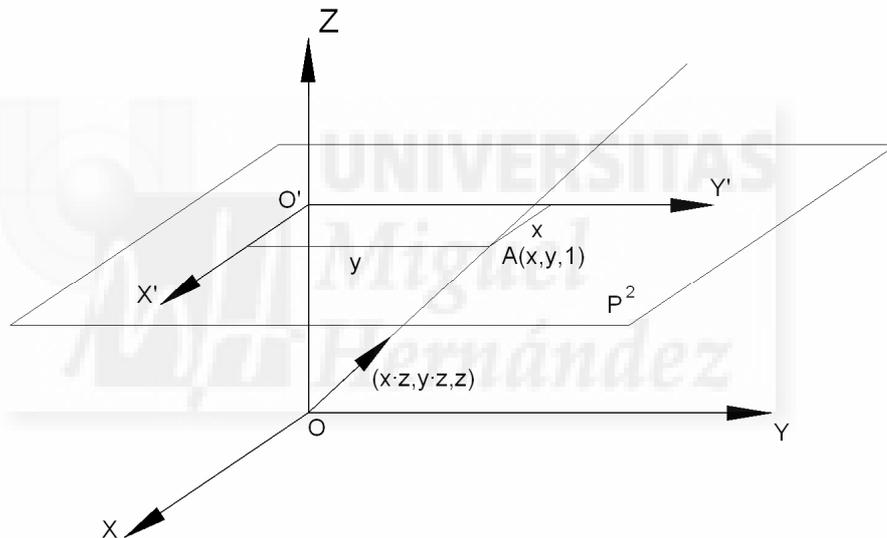


Figura 2.6.: Interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas.

Si un punto A del plano \mathbb{P}^2 tiene de coordenadas cartesianas (x,y) , le corresponderán las coordenadas homogéneas $(x,y,1)$ o cualquier otro vector de la recta OA de coordenadas $(x \cdot z, y \cdot z, z)$ con $z \neq 0$.

Un punto impropio del plano \mathbb{P}^2 estará dado por la dirección de la recta $y = m \cdot x$, el vector correspondiente en \mathbb{R}^3 es cualquiera que sea paralelo a esa recta, luego las coordenadas homogéneas del punto impropio son $(\lambda, \lambda \cdot m, 0)$ con $\lambda \neq 0$ o en particular $(1, m, 0)$.

2.2.3. ECUACIÓN DE UNA HOMOGRAFÍA.

Como se ha comentado anteriormente, una homografía es una función $f(x)=x'$ entre dos espacios \mathbb{R}^n que tiene por ecuación la expresión $\lambda x' = Ax$, donde λ es un factor de escalado; x' es el vector columna de dimensión $n+1$ que define el punto imagen en

coordenadas homogéneas; A es una matriz cuadrada de dimensión $n+1$ que ha de ser invertible; y x es el vector columna de dimensión $n+1$ que define el punto origen en coordenadas homogéneas. En la presente tesis trabajaremos con dimensiones $n=2$ y $n=3$, quedando respectivamente las ecuaciones:

Para R^2 :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para R^3 :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

2.2.4. CLASIFICACIÓN DE LAS HOMOGRAFÍAS.

La clasificación de las homografías desde el punto de vista algebraico se realiza en base a la existencia de puntos dobles y rectas dobles. Es decir en base a cuantos puntos y cuantas rectas son homólogas de si mismas. Se demuestra que:

Los puntos dobles son los vectores propios de la matriz A .

Las rectas dobles se determinan a partir de los vectores propios de la matriz traspuesta A^t .

Para la obtención de los vectores propios debemos primero obtener los valores propios de la matriz A , es decir, aquellos valores, λ , reales o complejos que satisfacen que el determinante $|A - \lambda I| = 0$, siendo I la matriz identidad. A esta expresión se le denomina ecuación característica de la matriz A .

En la bibliografía reseñada se analizan los distintos casos para una homografía entre espacios R^2 , no realizándose el análisis para R^3 . Tampoco se abordará en la presente tesis, pues se obtienen demasiadas combinaciones.

Hay que tener presentes las siguientes propiedades:

- La multiplicidad del valor propio λ es mayor o igual que el número de puntos dobles de λ ; además el número de puntos dobles coincide con $3 - \text{rango}(A - \lambda I)$.
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, P_1 es el punto doble de λ_1 y r_2 es una recta doble de λ_2 , entonces P_1 pertenece a r_2 .
- Sean P_1 un punto doble de λ_1 y r_1 una recta doble de λ_1 , entonces P_1 pertenece a r_1 si y sólo si la multiplicidad de λ_1 es mayor o igual que 1.

Para la clasificación de las homografías de R^2 en R^2 , los casos posibles de tipos de raíces del polinomio característico son los siguientes:

Caso I:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ simples, reales y distintas, por tanto el rango de $(A-\lambda_i I)=2$ con $i=1,2,3$; tendremos tres puntos dobles P_i y tres rectas dobles r_i , con $i=1,2,3$:

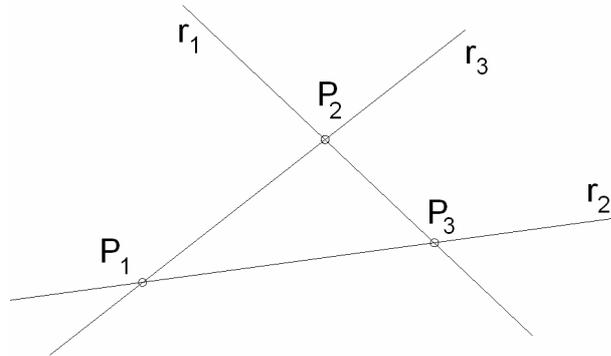


Figura 2.7: Puntos y rectas dobles en el caso I.

Con λ_1 obtenemos P_1 y r_1 . Con λ_2 obtenemos P_2 y r_2 . Con λ_3 obtenemos P_3 y r_3 .

Caso II:

λ_1 simple y real; λ_2 y λ_3 complejas conjugadas, por tanto el rango de $(A-\lambda_1 I)$ es igual a 2; con λ_1 obtenemos un punto doble P_1 y una recta doble r_1 , con P_1 no perteneciente a r_1 .

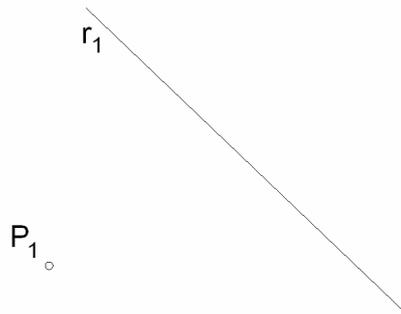


Figura 2.8: Punto y recta doble en el caso II.

Caso III:

λ_1 simple y λ_2 doble con el rango de $(A-\lambda_1 I)$ igual a 2 y el rango de $(A-\lambda_2 I)$ igual a 2; tendremos dos puntos dobles y dos rectas dobles: con λ_1 obtenemos el punto doble P_1 y la recta doble r_1 y con λ_2 obtenemos P_2 y r_2 .

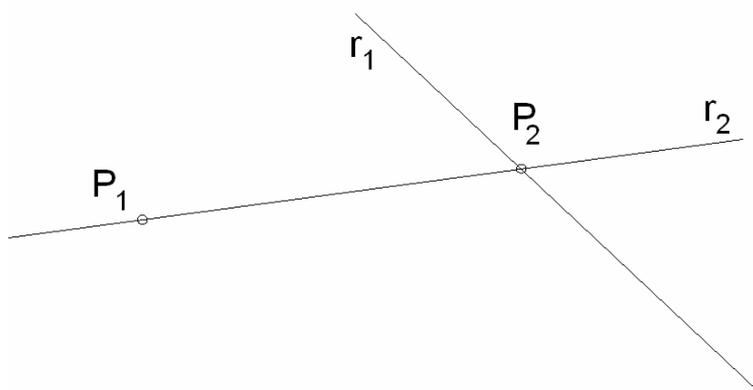


Figura 2.9: Puntos y rectas dobles en el caso III.

Caso IV:

λ_1 simple y λ_2 doble con el rango de $(A-\lambda_1 I)$ igual a 2 y el rango de $(A-\lambda_2 I)$ igual a 1; este es el caso de las homologías. Tendremos infinitos puntos dobles e infinitas rectas dobles: con λ_1 obtenemos P_1 que será el centro de homología, y r_1 que será el eje de homología; y con λ_2 obtenemos P_2 y r_2 , Q_2 y s_2 , etc., es decir un haz de rectas dobles que pasan por el centro de homología e infinitos puntos dobles situados sobre el eje de homología.

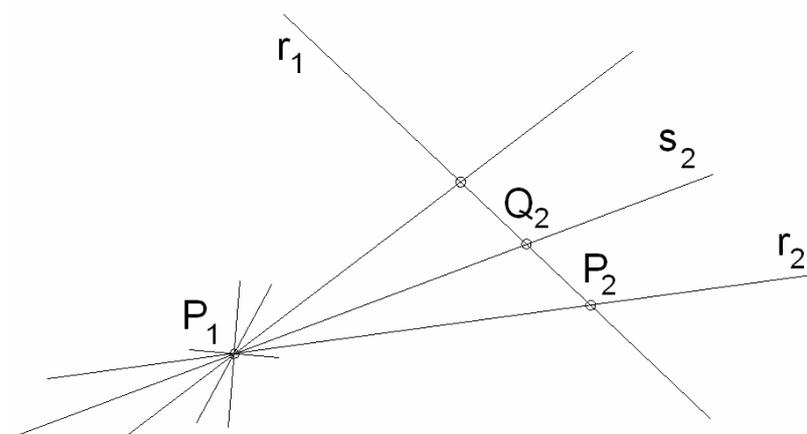


Figura 2.10: Puntos y rectas dobles en el caso IV. Homología con centro P_1 y eje r_1 .

Caso V:

λ_1 triple, con el rango de $(A-\lambda_1 I)=2$. Tendremos un sólo punto P_1 y una recta r_1 , de forma que el punto pertenece a la recta.

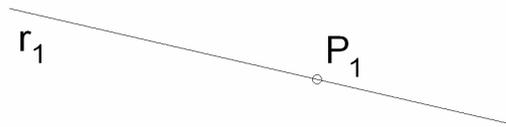


Figura 2.11: Punto y recta dobles en el caso V.

Caso VI:

λ_1 triple, con el rango de $(A-\lambda_1 I)=1$. Se trata ahora de una homología especial. Tendremos un punto P_1 y una recta r_1 , de forma que el punto P_1 pertenece a la recta r_1 y es el centro de homología. Por otra parte tendremos una recta s_1 con infinitos puntos dobles Q , que es el eje de homología, coincidente con r_1 .

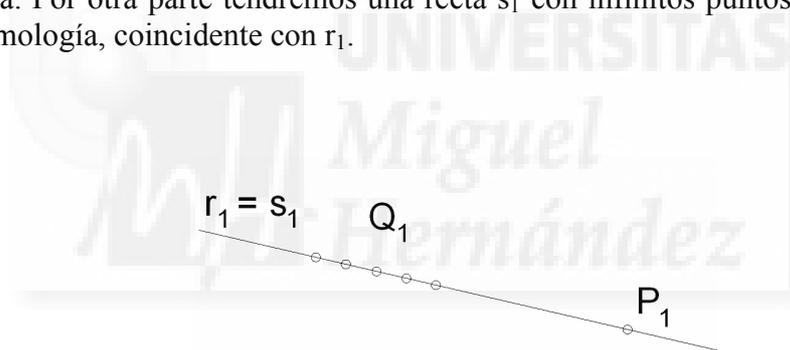


Figura 2.12: Puntos y recta dobles en el caso VI. Homología especial de centro sobre eje.

Caso VII:

λ_1 triple, con el rango de $(A-\lambda_1 I)=0$. Se trata ahora de la identidad, de forma que todos los puntos y las rectas del plano son dobles.

2.2.5. HOMOGRAFÍAS ESPECIALES.

Afinidades.- Conviene tener presente la definición de *afinidades analíticas*: Se llama *transformación afín o afinidad "analítica"* a toda colineación para la cual es invariante la

*recta del infinito, o sea, que transforma puntos propios en puntos propios y puntos impropios en puntos impropios.*⁵

Dada esta definición conviene destacar que las afinidades gráficas son siempre afinidades analíticas pero no al revés, pues pueden darse casos de no existir eje de afinidad.

La definición de afinidad analítica es tan general como que es una homografía entre planos que transforma rectas paralelas en rectas paralelas.

*Una afinidad entre planos queda determinada por tres pares de puntos homólogos propios, no alineados en ninguno de los dos planos.*⁶

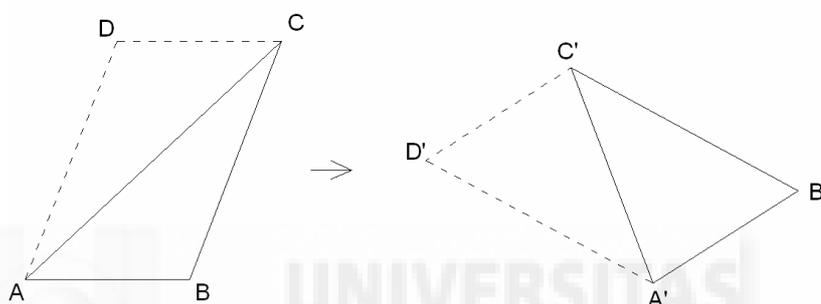


Figura 2.13: Definición de una afinidad con tres pares de puntos homólogos, a partir de ABC por paralelas podemos determinar un cuarto par de puntos D-D', con lo que queda definida la homografía.

Semejanzas.- De nuevo difiere el concepto analítico del gráfico, en geometría proyectiva se llama semejanza entre dos planos proyectivos a toda afinidad que conserva los ángulos. Dos triángulos homólogos tendrán sus ángulos iguales y, por tanto, serán semejantes en el sentido de la geometría elemental. Si una homografía transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares es una semejanza.⁷

2.2.6. CUÁDRICAS.

En el libro de Ángel Montesdeoca se realiza un exhaustivo estudio de las cuádricas desde el punto de vista analítico, sin estudiarse la conexión gráfica de las mismas a través de las homologías 3D con la esfera, que sí se analiza en esta tesis. En este libro se aporta unas figuras con escaso rigor geométrico, por lo que se aportan en la figura 2.14 otras, la mayoría del libro de Gheorghiu y Dragomir "Geometry of Structural Forms" donde se

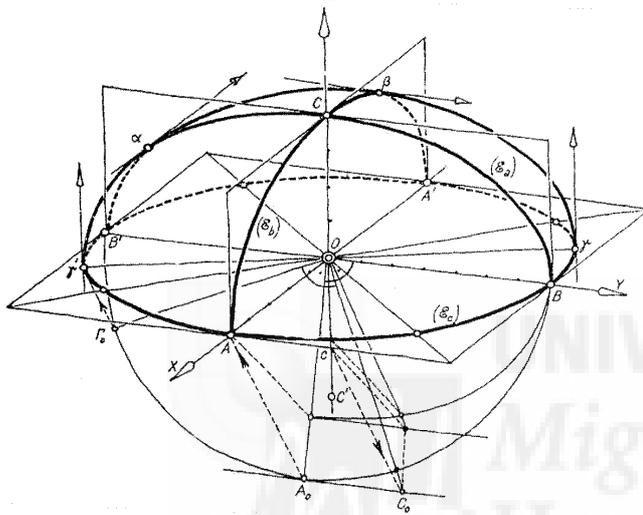
⁵ Se llama colineación a toda homografía de un espacio proyectivo en sí mismo. SUBIAS IZQUIERDO, José Luis, *Desarrollo de un modelo de tratamiento por ordenador de los problemas de la geometría proyectiva*. Zaragoza 1992, p.233

⁶ MONTESDEOCA, Ángel, *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*, La Laguna, <http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/apuntes.htm>, 2004, p.:66.

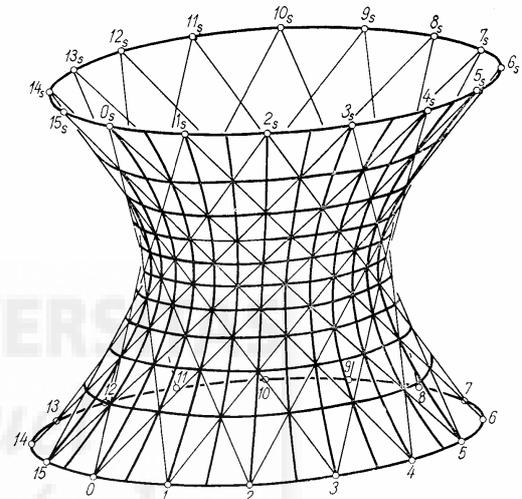
⁷ MONTESDEOCA, Ángel, *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*, La Laguna, <http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/apuntes.htm>, 2004, p.:67.

estudian con rigor desde el punto de vista gráfico, si bien tampoco usa en ningún caso las homologías espaciales, si afinidades 2D para obtener las proyecciones axonométricas.

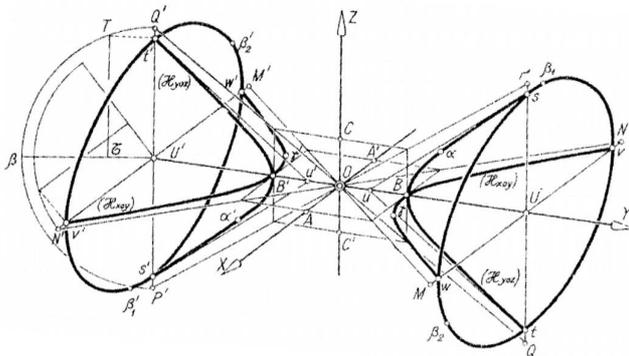
Desde el punto de vista matemático, se clasifican en cuádricas propiamente dichas (figuras 2.14a, b, c, d y e), y cuádricas degeneradas (figuras 2.14f, g, h, i y j). En cambio desde el punto de vista gráfico tendremos las de curvatura total (a, c y e), las regladas (b, d, f, g, h, i y j), las cónicas (i) y las cilíndricas (f, g y h). Y cuando las directrices elípticas tienen los ejes iguales, es decir, son circunferencias, tendremos que son cuádricas de revolución pudiéndose dar el caso en (a, b, c, i, e, y g).



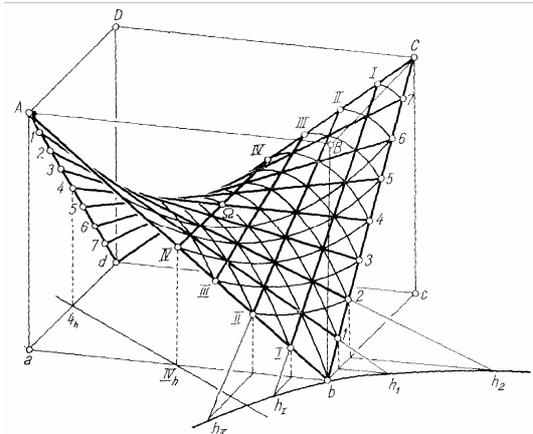
a) Superficie de elipsoide.



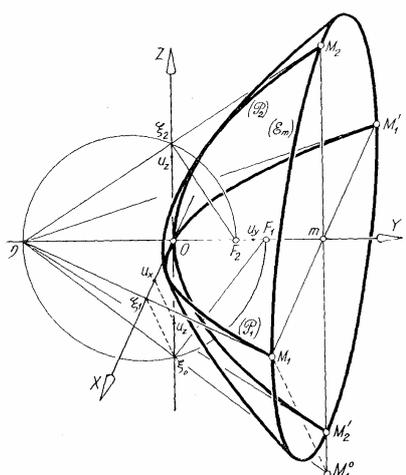
b) Hiperboloide de una hoja.



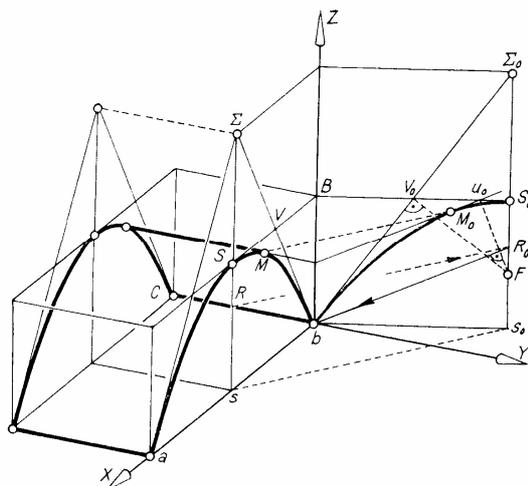
c) Hiperboloide de dos hojas.



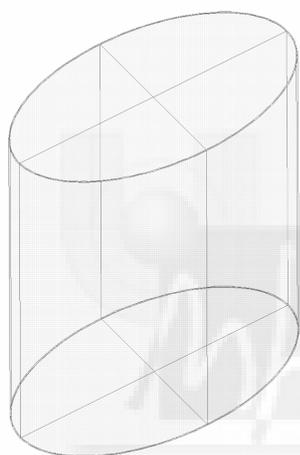
d) Paraboloides hiperbólico.



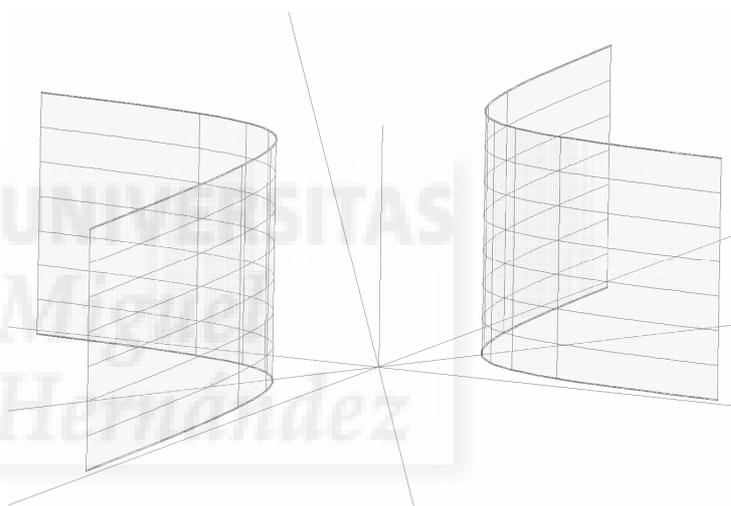
e) Paraboloide elíptico.



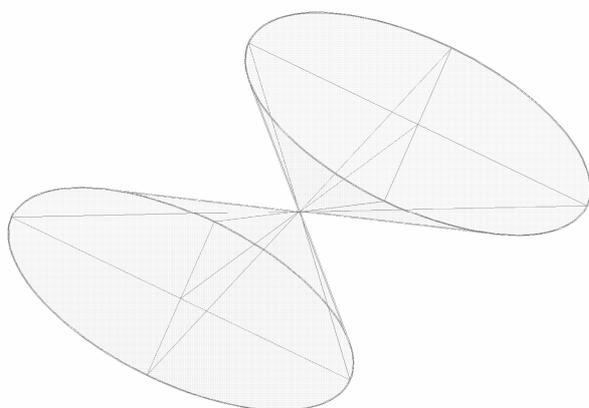
f) Superficie cilíndrica parabólica.



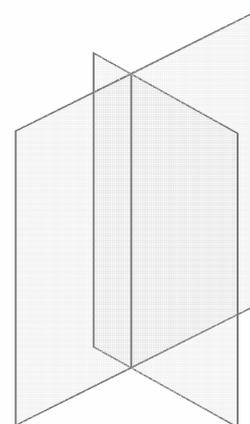
g) Cilindro elíptico.



h) Superficie cilíndrica hiperbólica.



i) Superficie cónica elíptica.



j) Planos secantes.

Figura 2.14: Superficies cuádricas.

2.3. LA INFOGRAFÍA

Es en el ámbito de la informática gráfica donde encontramos las aportaciones más recientes sobre el campo que aborda la presente tesis, referentes tanto a homografías en dos dimensiones como en tres.

Un caso similar al del programa *Homograf* en dos dimensiones lo encontramos en la tesis de José Luis Cabanes, en este caso la plataforma infográfica ha sido Microstation y una aplicación denominada *Pictran D/E* que permite *rectificar fotos aisladas... Forma parte del denominado Sistema de Fotogrametría Digital Pictran, producido por Techtchnik GmbH.*⁸ Esta rectificación consiste en transformar un fotograma digital, o escaneado, de un elemento plano que contiene líneas de fuga (como puede ser una fachada) en otro fotograma a escala, habiéndose corregido las fugas. El procedimiento matemático de dicha transformación es el mismo que se describe en el punto 3.1.3 de la presente tesis y que podemos encontrar descrito en el libro de Hartley, Richard and Zisserman, Andrew. *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2003. Pero respecto el algoritmo empleado para *Homograf* cuenta con una dificultad añadida que es el proceso de remuestreo en píxeles del fotograma, remuestreo que sin duda siempre introduce una merma de calidad de imagen y por tanto de precisión en las medidas que se tomen de la fotografía rectificada.

Esta rectificación de fotogramas basada en la *ecuación fundamental*⁹ requiere como datos, al igual que *Homograf*, cuatro pares de puntos homólogos no alineados, que se correspondan de la fotografía original con la puesta a escala ya rectificada (ver figura 2.15).

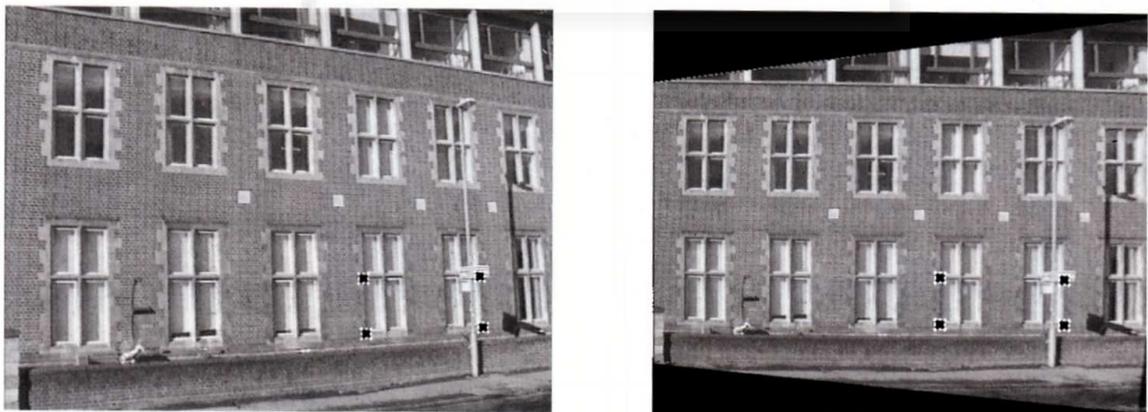


Figura 2.15.: Rectificación fotográfica de una fachada plana basandose en cuatro puntos.

⁸ CABANES GINÉS, José Luis, *Tesis doctoral: Rectificación fotogramétrica de objetos planos por métodos gráficos basados en principios proyectivos*, U.P.V. 2002, p.171.

⁹ Se refiere a la ecuación matricial planteada en el punto 3.1.3 de la presente tesis y en la de CABANES GINÉS, José Luis, *Tesis doctoral: Rectificación fotogramétrica de objetos planos por métodos gráficos basados en principios proyectivos*, U.P.V. 2002, p.32.

Citamos seguidamente un párrafo de las conclusiones de la tesis de José Luis Cabanes para centrar en qué consiste su tesis: *...hemos descrito un procedimiento novedoso basado en técnicas de fotogrametría digital, en particular la herramienta "cámara" que incorporan la mayoría de las aplicaciones informáticas de dibujo vectorial, el cual se fundamenta en el seccionamiento directo de la radiación proyectiva generada por este verdadero "proyector digital" sin limitaciones de tipo óptico, y que, por tanto, supone en cierto modo una actualización de los clásicos transformadores, el cual hemos llamado rectificación geométrica.*¹⁰ En definitiva su principal aportación es cómo hacer una foto a la foto, utilizando la herramienta cámara de Microstation de forma que en la nueva imagen se corrijan las fugas y se obtenga el fotograma rectificado. Para luego comparar la calidad de los resultados con la rectificación hecha con Pictran D/E.

Estos procesos de rectificación de fotogramas no son otra cosa que homografías en dos dimensiones y por tanto un importante precedente de la aportación de la presente tesis en su capítulo 2D, de forma que la principal aportación es resolver el problema en formato vectorial y no raster, así como el exhaustivo análisis de sus aplicaciones mucho más amplias que la mera aplicación fotogramétrica; ya publicados de forma mucho más amplia y detallada en el libro de Ramón Maestre López-Salazar, Francisco Irles Mas. Levantamiento de planos de fachadas a partir de una fotografía. Perspectivas. *Homograf.1* Aplicación Infográfica para Autocad 14. Publicaciones Universidad de Alicante, 2000.

En la tesis de José Luis Subias en relación a la presente tesis encontramos lo que llama "*matriz genérica de transformación proyectiva*"¹¹, que no es otra que la expuesta en el punto 4.1.5. En su tesis pasa a aplicarla en casos particulares a la obtención de proyecciones de 3D a 2D: diédricas, axonométricas (isométrica, dimétrica normalizada, trimétrica y oblicuas) y cónicas; así como a la resolución de homologías entre figuras de segunda categoría, es decir geometrías planas, ya sea en el espacio 3D o a través de su proyección a 2D. No entrando a aplicar dicha matriz en su aplicación más genérica, la resolución de homologías entre figuras de tercera categoría, es decir de 3D en 3D, como se hace en la presente tesis.

Se han encontrado un nutrido número de referencias desde el punto de vista infográfico en lo relativo al registro de imágenes médicas¹², que como se expone en los siguientes párrafos y como se verá esta bastante relacionado con las homografías 2D y 3D abordadas en la presente tesis.

Refiriéndonos a imágenes médicas, *el registro es la determinación de una transformación geométrica de los puntos en una vista de un objeto con los puntos correspondientes en otra vista del mismo objeto o en otro objeto. El término vista incluye*

¹⁰ CABANES GINÉS, José Luis, *Tesis doctoral: Rectificación fotogramétrica de objetos planos por métodos gráficos basados en principios proyectivos*, U.P.V. 2002, p.192.

¹¹ SUBIAS IZQUIERDO, José Luis, *Desarrollo de un modelo de tratamiento por ordenador de los problemas de la geometría proyectiva*. Zaragoza 1992, p.165

¹² Normalmente las imágenes medicas son de tipo *raster*, es decir matrices de puntos, formadas por *pixeles* las 2D y por *voxels* (pixeles cúbicos) las 3D. Pueden darse imágenes vectoriales, pero siempre como resultado de una vectorización de las raster.

*imágenes 3D y 2D, las imágenes 3D las obtenemos de modalidades tomográficas como: TAC, RMN, PET, SPECT. Las imágenes 2D se obtienen de proyecciones como en rayos-X ó de cortes individuales como en ultrasonido modo B.*¹³

En definitiva el registro de imágenes médicas lo que pretende es ajustar dos imágenes entre sí, con la finalidad de superponerlas o compararlas. Sobre los métodos de registro hay una propuesta de clasificación por Maintz en 1998 que utiliza entre otras las siguientes categorías:

- Número de dimensiones de las imágenes. En el caso de imágenes médicas usualmente 3 (registro 3D), a veces 2 registro (2D), y sus combinaciones: 3D-2D, 2D-3D, 2D-2D, 3D-3D

- Transformación geométrica. Se refiere a la forma matemática de la transformación que casa una vista en la otra.

Estas transformaciones geométricas suelen clasificarse en los siguientes tipos:

- Rígidas, aquellas en que la imagen no sufre ninguna deformación y sólo se somete a desplazamientos y giros, de forma que en 2D tendremos 3 grados de libertad¹⁴ (dos desplazamientos y un giro); y en 3D habrá 6 grados de libertad (3 desplazamientos y 3 giros según los ejes X,Y,Z)

- No rígidas, aquellas en que sí se deforma la imagen, se emplean para órganos deformables y también para el registro de órganos rígidos entre pacientes diferentes. Estas deformaciones se producen mediante algoritmos lineales o no lineales. Nos centraremos únicamente en los lineales, pues los no lineales escapan al ámbito de la presente tesis.

Seguidamente se expone la formulación empleada en el registro de imágenes médicas 3D empleando coordenadas homogéneas y notación matricial. De forma que a un punto P le corresponda otro P' obtenido al multiplicar por la matriz de la transformación T: $P' = T \cdot P$

La traslación será la transformación rígida más simple y está definida por el producto matricial:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹³ ARÁMBULA, Fernando. *Registro de imágenes médicas*. México 2008. Introducción al Análisis de Imágenes Médicas y Cirugía Asistida por Computadora Tema 2.5, p.1
<http://www.ccadet.unam.mx/~fernando.arambula/aim-tema-2.5.pdf>

Abreviaturas empleadas: TAC (Tomografía Axial Computada), RMN (Resonancia Magnética Nuclear), PET (Tomografía por Emisión de Positrones), SPECT (Tomografía Computada Simple de Emisión de Positrones)

¹⁴ Entendemos por grados de libertad el número de parámetros a fijar para definir un tipo de transformación.

Donde X, Y, Z es el punto a trasladar; X', Y', Z' el punto trasladado y t_x, t_y, t_z las componentes del vector de la traslación.

Los giros se pueden especificar de muchas formas, optándose aquí por las matrices ortogonales, de forma que para un giro de α grados según el eje X tendremos la matriz R_x ; para β grados según el eje Y la matriz R_y ; y para γ grados según el eje Z la matriz R_z . De forma que la matriz de transformación que nos dará la rotación tridimensional será:

$$T = R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

Donde:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\gamma & 0 & 0 \\ -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El escalado será la transformación no rígida más simple y estará definido por el producto matricial:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde X, Y, Z es el punto a transformar; X', Y', Z' el punto transformado y s_x, s_y, s_z las componentes del vector de escalado, es decir las escalas según los ejes X, Y, Z ; produciéndose un escalamiento isotrópico si $s_x = s_y = s_z$.

Las transformaciones afines conservan la rectitud de las líneas, la planeidad de las figuras planas, y el paralelismo entre líneas, pero permite que los ángulos entre líneas cambien. Esta transformación es apropiada para corregir inclinaciones producidas durante la adquisición de una imagen. En este caso la formulación será:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde X,Y,Z son las coordenadas del punto a transformar; X',Y',Z' las del punto transformado y a_{ij} la submatriz que define la afinidad. Con lo que se observa que las transformaciones de escala son un caso específico de la transformación afin. Lo usual no es aplicar una transformación afin únicamente, sino ligada a traslaciones, giros y escalados, lo que haría un total de 12 grados de libertad, con lo que la expresión quedaría:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones proyectivas conservan la rectitud de las líneas y la planeidad de las superficies pero pueden modificar el paralelismo entre líneas. La expresión matricial queda:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ p_1 & p_2 & p_3 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde p_1 , p_2 , p_3 son las componentes del vector que especifica la dirección del eje de proyección, y λ es un escalar que podemos fijar arbitrariamente, pues obtendremos matrices de transformación equivalentes, con lo que tenemos 15 grados de libertad.

De lo expuesto anteriormente concluimos que las transformaciones proyectivas son las más generales y engloban a las anteriores como casos particulares. Se han encontrado varios artículos que hacen referencia a su uso en el registro de imágenes médicas, pero en ninguno de ellos se ha encontrado en qué casos concretos se usa la proyectiva, siendo la más compleja citada la afin, empleada para corregir errores de calibrado de los mecanismos de captación de las imágenes. Por otra parte se han localizado dos librerías de programas en lenguaje C (www.ITK.org y www.vtk.org) donde están disponibles funciones para obtener transformaciones de los tipos expuestos, excepto proyectivas; de nuevo la más compleja empleada es la afin.

Por otra parte el programa Microstation, competencia de Autocad, también permite distorsionar una imagen raster mediante escalados y afinidades (definidas por tres pares de puntos), pero no mediante homologías.

Todo ello nos hace pensar en el carácter novedoso del uso de la transformación proyectiva en la presente tesis.



3. HOMOGRAFÍAS EN EL PLANO.

3.1. DESARROLLO TEÓRICO.

3.1.1. Según el trazado clásico.

La obtención de figuras homólogas mediante trazado 2D es una construcción geométrica muy conocida, pero se aporta aquí para centrar el tema que nos ocupa. La forma más clásica de definir la homología (figura 3.1) es con el centro de homología O , el eje de homología e y un par de puntos homólogos AA' . Si deseamos obtener la figura homóloga del triángulo ABC no tenemos más que trazar la recta AB hasta el eje e determinando el punto doble M que unido con A' nos da la recta $A'B'$ situándose B' en la intersección con el rayo proyectante OB . De igual forma obtenemos C' como intersección del rayo proyectante OC con la recta $B'C'$ que se obtiene uniendo el punto doble N con B' , siendo N la intersección de AC con el eje e . También podemos determinar las rectas límites paralelas al eje e , RL por el punto P intersección de AB con la paralela a $A'B'$ por O ; y RL' por Q' intersección $B'A'$ con la paralela a AB por O .

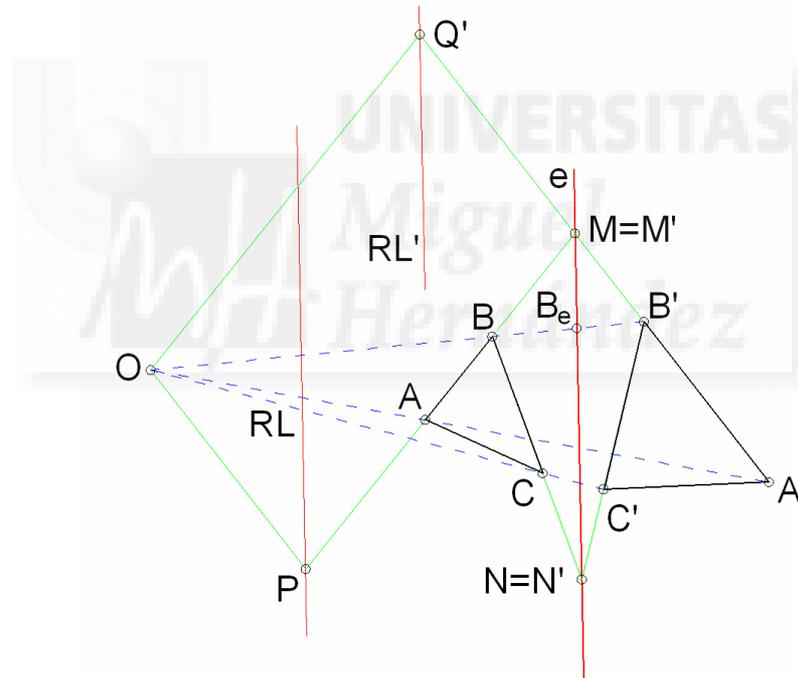


Figura 3.1.: Construcción clásica de una homología 2D.

Definida una homología, cualquier par de puntos homólogos BB' junto a O y B_e constituyen una razón doble de valor constante que llamaremos coeficiente de homología¹⁵:

$$(OB_e BB') = \frac{OB}{B_e B} * \frac{B_e B'}{OB'} = \frac{OB}{OB'} * \frac{B_e B'}{B_e B} = K$$

¹⁵ SOLER SANZ, FELIPE, *Perspectiva cónica*. Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1996.

Existen diversas combinaciones de datos (centro y eje de homología, rectas límites, pares de puntos) para definir una homología, que no aportamos aquí, pues se tratan en multitud de publicaciones sobre geometría descriptiva. Si destacaremos que *una homografía también queda determinada por cuatro pares de puntos homólogos: A, A' ; B, B' ; C, C' y D, D' no alineados tres a tres*¹⁶; ya que es a través de esta definición como finalmente trabajaremos con el programa *Homograf*. Son necesarios cuatro pares de puntos, con su X y su Y, y no tres ni cinco, debido a que son ocho los grados de libertad del problema, de forma que con estas ocho coordenadas se puede plantear el sistema de ocho ecuaciones necesario; sin que quede indeterminado, como ocurriría con menos de 4 puntos o con tres de ellos alineados (ecuaciones linealmente dependientes); ni sobre determinado en el caso de dar más de cuatro pares puntos (ver 3.1.3 y 3.2.1.3).

3.1.2. Homologías asociadas, homografías ordenadas y desordenadas.

Sabemos que el producto de dos o más transformaciones homográficas es una homografía, es decir si entre dos figuras planas A y B, hay una relación de homografía, y además entre la figura plana B y otra C, hay otra relación de homografía, entonces, podemos afirmar que entre las figuras A y C habrá también una correspondencia homográfica.¹⁷ De forma que entre las figuras A y C existe lo que llama Maestre una homografía desordenada, al no existir un centro de homología ni un eje.

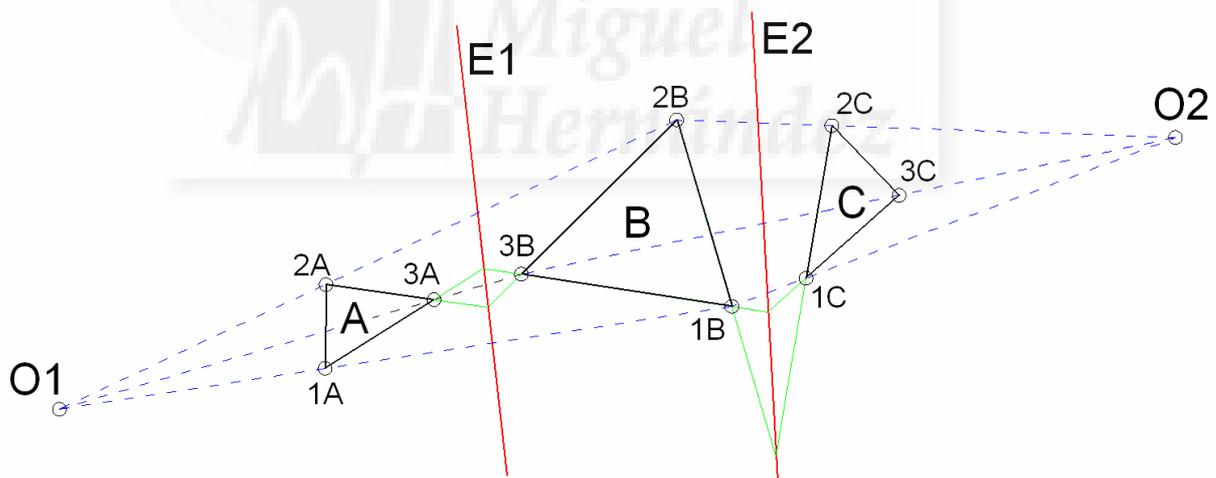


Figura 3.2.a: El producto de las homografías AB por BC nos da otra homografía desordenada AC.

Como podemos ver en el cuadro de la **fig. 3.4**, dos figuras planas homográficas en el plano pueden estar ordenadas según una homología o simplemente estar no ordenadas, recibiendo en cada caso los nombres que figuran en dicho cuadro.¹⁸

¹⁶ IZQUIERDO ASENSI, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980, p.64

¹⁷ MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón, *Tesis doctoral: Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*, U.P.V. 2003, p.286.

¹⁸ MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón, *Tesis doctoral: Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*, U.P.V. 2003, p.288.

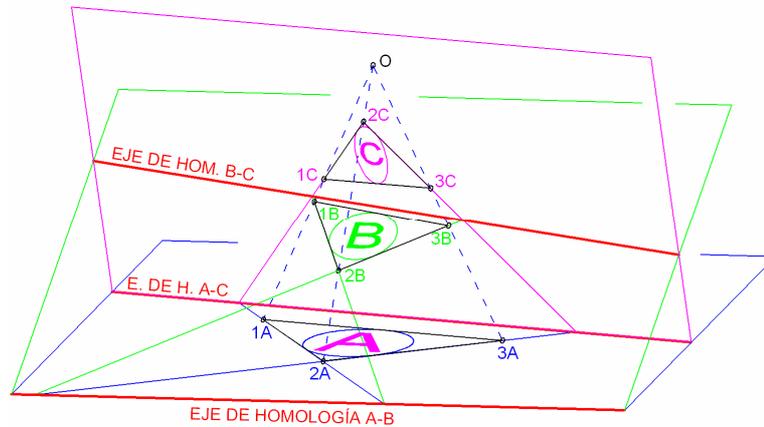


Figura 3.2.b: Excepcionalmente el producto de las homologías AB por BC nos da otra homología ordenada AC, esto sólo ocurre cuando todas ellas provienen de una misma radiación 3D que ha sido proyectada al plano del papel.

Podemos decir por tanto que *una homología es una homografía con eje y centro*¹⁹ donde las dos figuras se disponen de forma que sus pares de puntos homólogos quedan alineados con un punto que es el centro de homología y sus pares de rectas homólogas se cortan sobre una recta que será el eje de homología²⁰. Pudiendo ser el centro y el eje propios o impropios. Si ambos son propios tendremos una homología; si el centro es propio y el eje impropio tenemos la homotecia; si tenemos propio el eje e impropio el centro se tratará de una afinidad y si ambos son impropios una traslación. La simetría respecto de un punto es un caso particular de la homotecia en que el coeficiente de homotecia es -1; mientras que la simetría axial respecto de un eje es una afinidad ortogonal de coeficiente de afinidad -1.

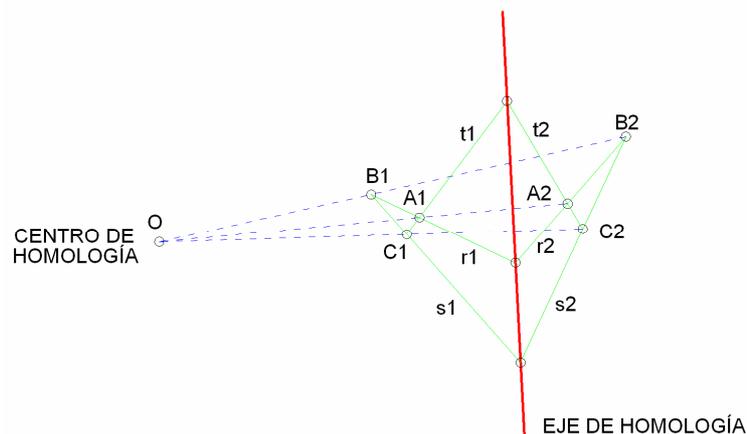


Figura 3.3: En una homología los pares de puntos homólogos están siempre alineados con el centro de homología O, A1, A2; O, B1, B2 y O, C1, C2. Y los pares de rectas r1, s1; s1, s2 y t1, t2 se cortan sobre el eje de homología.

¹⁹ CABANES GINÉS, José Luis, *Tesis doctoral: Rectificación fotogramétrica de objetos planos por métodos gráficos basados en principios proyectivos*, U.P.V. 2002, p.38.

²⁰ Tal y como plantea CABANES GINÉS, José Luis *Geometría Proyectiva y Representación Técnica*. Valencia. Ediciones VJ. 2006, p.65

FIGURAS PLANAS HOMOGRAFICAS

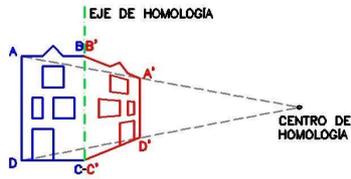
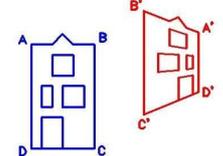
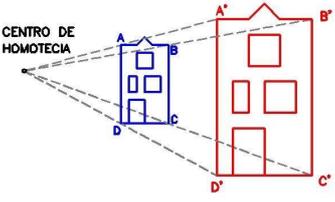
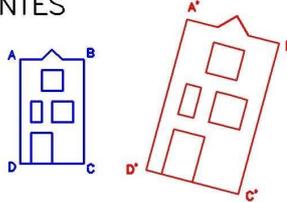
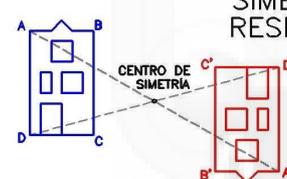
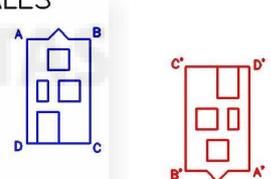
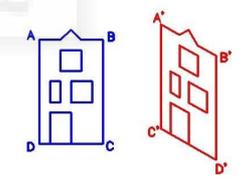
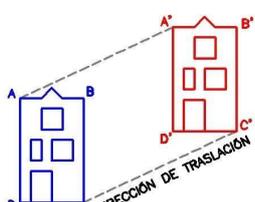
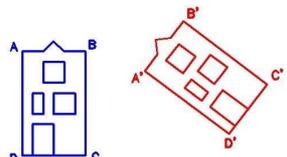
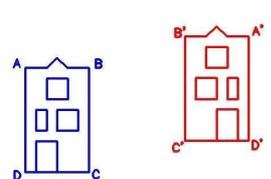
ORDENADAS:	NO ORDENADAS:
<p>HOMÓLOGAS</p>  <p>EJE DE HOMOLOGÍA</p> <p>CENTRO DE HOMOLOGÍA</p>	<p>HOMÓGRAFICAS</p> 
<p>HOMOTÉTICAS</p>  <p>CENTRO DE HOMOTECIA</p>	<p>SEMEJANTES</p> 
<p>SIMÉTRICAS RESP. A UN PUNTO</p>  <p>CENTRO DE SIMETRÍA</p> <p>CASO PARTICULAR DE HOMOTECIA</p>	<p>INVERSAS IGUALES</p> 
<p>HOMÓLOGAS AFINES</p>  <p>EJE DE AFINIDAD</p> <p>DIRECCIÓN DE AFINIDAD</p>	<p>SUSCEPTIBLES DE AFINIDAD</p> 
<p>TRASLADADA</p>  <p>DIRECCIÓN DE TRASLACIÓN</p>	<p>IDÉNTICAS O IGUALES</p> 
<p>SIMÉTRICAS RESP. A UNA RECTA</p>  <p>EJE DE SIMETRÍA</p> <p>CASO PARTICULAR DE HOMOGRAFÍA AFÍN</p>	<p>SIMÉTRICAS</p> 

Figura 3.4.: Homografías ordenadas y homografías desordenadas en el plano.

3.1.3. Según geometría proyectiva.

Se aborda en este apartado la transformación homográfica empleando Geometría Proyectiva, en concreto la ecuación que se emplea para correlar pares de puntos en pares estereoscópicos²¹. Partiendo de la ecuación matricial con la que se define la colineación, y partiendo de unos datos para definir la transformación proyectiva que consisten en cuatro pares de puntos homográficos, se obtiene la ecuación matricial de colineación: $A \tilde{e}_i = \lambda_i \tilde{x}_i$. Donde:

$A \tilde{}$ es la matriz de colineación;
 \tilde{e}_i son los puntos de partida en *coordenadas homogéneas*²²;
 \tilde{x}_i son los puntos de destino en coordenadas proyectivas y
 λ_i son coeficientes de escalado con i de 1 a 4.
 (Nota: La terminación en $\tilde{}$ indica en coordenadas proyectivas).



Figura 3.5: Tranformación proyectiva

Datos:

<u>Espacio de $R^2_{n^{\circ}1}$</u>		<u>Espacio de $R^2_{n^{\circ}2}$</u>	
$A1=(x_{A1},y_{A1})$	$C1=(x_{C1},y_{C1})$	$A2=(x_{A2},y_{A2})$	$C2=(x_{C2},y_{C2})$
$B1=(x_{B1},y_{B1})$	$D1=(x_{D1},y_{D1})$	$B2=(x_{B2},y_{B2})$	$D2=(x_{D2},y_{D2})$

La aplicación de esta transformación requería multiplicar las coordenadas homogéneas de los puntos dato por la matriz y obtenía unas coordenadas proyectivas resultado que se convertían en euclídeas dividiendo por la coordenada Z. Tomando valores en la matriz a partir de los datos planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} A \tilde{e}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ A \tilde{e}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 \\ A \tilde{e}_3 = \lambda_3 \tilde{x}_3 \\ A \tilde{e}_4 = \lambda_4 \tilde{x}_4 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \\ \dots & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{A2} \\ \lambda_1 y_{A2} \\ \lambda_1 \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow$$

²¹ Según se vió el el curso de doctorado de O. Reinoso, J.M. Sebastián. *Visión Tridimensional* del programa de doctorado de "Tecnologías Industriales" lorca.umh.es . Ed.: Universidad Miguel Hernández de Elche 2000-01

²² El concepto de coordenadas homogéneas de un plano, también llamadas proyectivas está definido en J. García García, M. López Pellicer, *Álgebra lineal y geometría*, Ed.: Marfil 1980. p.:492

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{A1}a_{11}+y_{A1}a_{12}+1a_{13}=\lambda_1x_{A2} \\ x_{A1}a_{21}+y_{A1}a_{22}+1a_{23}=\lambda_1y_{A2} \\ x_{A1}a_{31}+y_{A1}a_{32}+1=\lambda_1 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Donde estamos asumiendo que los escalares λ_i absorben el factor de escalado a_{33} de toda colineación. Operando con los cuatro pares de puntos, podemos obtener 12 ecuaciones, tres por cada par, que ordenadas convenientemente como un producto matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} x_{A1} & y_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{B1} & y_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{C1} & y_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{D1} & y_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{A1} & y_{A1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{B1} & y_{B1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{C1} & y_{C1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{D1} & y_{D1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{A1} & y_{A1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{B1} & y_{B1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{C1} & y_{C1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{D1} & y_{D1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1x_{A2} \\ \lambda_2x_{B2} \\ \lambda_3x_{C2} \\ \lambda_4x_{D2} \\ \lambda_1y_{A2} \\ \lambda_2y_{B2} \\ \lambda_3y_{C2} \\ \lambda_4y_{D2} \\ \lambda_1-1 \\ \lambda_2-1 \\ \lambda_3-1 \\ \lambda_4-1 \end{pmatrix}$$

De estas 12 ecuaciones con 8 parámetros de la matriz de colineación y 4 factores de escalado como incógnitas, podemos despejar λ_i de las últimas 4 ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x_{A1} a_{31}+ y_{A1} a_{32}=\lambda_1-1; & \lambda_1= x_{A1} a_{31}+ y_{A1} a_{32}+1 \\ x_{B1} a_{31}+ y_{B1} a_{32}=\lambda_2-1; & \lambda_2= x_{B1} a_{31}+ y_{B1} a_{32}+1 \\ x_{C1} a_{31}+ y_{C1} a_{32}=\lambda_3-1; & \lambda_3= x_{C1} a_{31}+ y_{C1} a_{32}+1 \\ x_{D1} a_{31}+ y_{D1} a_{32}=\lambda_4-1; & \lambda_4= x_{D1} a_{31}+ y_{D1} a_{32}+1 \end{array}$$

Y sustituir sus valores en función de a_{31} y a_{32} en las restantes 8 ecuaciones, con lo que tendremos el problema planteado al ser todas ellas linealmente independientes. Tras esto y ordenándolas quedaría:

$$\begin{pmatrix} x_{A1} & y_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -(x_{A1}x_{A2}) & -(y_{A1}x_{A2}) \\ x_{B1} & y_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -(x_{B1}x_{B2}) & -(y_{B1}x_{B2}) \\ x_{C1} & y_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -(x_{C1}x_{C2}) & -(y_{C1}x_{C2}) \\ x_{D1} & y_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -(x_{D1}x_{D2}) & -(y_{D1}x_{D2}) \\ 0 & 0 & 0 & x_{A1} & y_{A1} & 1 & -(x_{A1}y_{A2}) & -(y_{A1}y_{A2}) \\ 0 & 0 & 0 & x_{B1} & y_{B1} & 1 & -(x_{B1}y_{B2}) & -(y_{B1}y_{B2}) \\ 0 & 0 & 0 & x_{C1} & y_{C1} & 1 & -(x_{C1}y_{C2}) & -(y_{C1}y_{C2}) \\ 0 & 0 & 0 & x_{D1} & y_{D1} & 1 & -(x_{D1}y_{D2}) & -(y_{D1}y_{D2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A2} \\ x_{B2} \\ x_{C2} \\ x_{D2} \\ y_{A2} \\ y_{B2} \\ y_{C2} \\ y_{D2} \end{pmatrix}$$

La resolución de un sistema de ecuaciones se puede abordar de diversas formas, habiéndose elegido la *triangulación de Gauss*²³. Para poder triangular se plantea un problema: tenemos submatrices nulas que impiden aplicar un algoritmo escalonado secuencial, para evitarlo se suman las ecuaciones que se obtendrían con las filas 4 y 5 a 4, 5 y 6 a 5, 6 y 7 a 6, 7 y 8 a 7. Una vez triangulada se resuelve el sistema obteniendo los valores a_{ij} de la matriz de colineación.

Conocida la matriz de colineación resta plantear los pasos y las ecuaciones para transformar un punto cualquiera de un espacio euclídeo R_{n-1}^2 al otro de espacio R_{n-2}^2 , que serán:

- Pasar un punto P_1 de coordenadas euclídeas (x_{P_1}, y_{P_1}) a un punto P_1^{\sim} en coordenadas homogéneas $(x_{P_1}, y_{P_1}, 1)$.
- Multiplicarlo por la matriz de colineación obteniendo el punto P_2^{\sim} en coordenadas proyectivas: $A^{\sim} \cdot P_1^{\sim} = P_2^{\sim}$.
- Pasar el punto P_2^{\sim} de coordenadas proyectivas $(x_{P_2^{\sim}}, y_{P_2^{\sim}}, \lambda)$ a coordenadas euclídeas $(x_{P_2^{\sim}}/\lambda, y_{P_2^{\sim}}/\lambda)$.

3.2. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA HOMOGRAF

Se plantea la necesidad de programar una aplicación infográfica que resuelva las homografías en el plano, inicialmente con fines fotogramétricos, pero como se verá en el punto 3.2.2 con muchas más aplicaciones.

El problema se aborda sobre Autocad por ser una plataforma de CAD muy extendida, e inicialmente en Autolisp²⁴ debido a su conocimiento por parte del autor. Son los avances en el conocimiento del autor sobre la materia los que cronológicamente dan lugar a distintas versiones del programa.

3.2.1. Las distintas versiones.

Estas versiones siempre han nacido en Autolisp, la primera de ellas *Homo.lsp v.0* sólo se utilizó por el autor y por Ramón Maestre con un reducido número de colaboradores; mientras que la segunda *Homograf.1*, Aplicación Infográfica para Autocad 14, se tradujo a C para compilarla, protegiendo el código fuente, y siendo objeto de una publicación, acompañando al libro *Levantamiento de Planos de Fachadas a partir de una fotografía. Perspectivas*. Por ello tuvo bastante difusión especialmente al distribuirse a través del Colegio Oficial de Arquitectos. Esta segunda versión quedó obsoleta al aparecer Autocad 2000, con lo que no apareció la tercera versión hasta el 2003, con una versión compilada para las versiones de Autocad 14, 2000 y 2002; la cual se comercializó de nuevo con un CD+manual: *Homograf.2002*. Esta dinámica de compilar nuevas versiones para cada versión de Autocad era insostenible comercialmente y es por lo que se optó por publicar una versión en Autolisp *Homograf.lsp* a través de la Web de la Universidad de

²³ J.García García, M. López Pellicer, *Álgebra lineal y geometría*, Ed.: Marfil 1980, p.:367

²⁴ Autolisp es un lenguaje de programación (Lisp) tipo interprete empleado por Autocad.

Alicante <http://publicaciones.ua.es/publica/fichaef.aspx?Cod=LD0079087260> y de la Universidad Miguel Hernández:

<http://disi.umh.es/publicaciones.asp?area=im#publicaciones%20digitales2006> , atendiendo de esta forma a las múltiples demandas de actualizaciones de los usuarios de *Homograf* 2002, siendo esta versión la que funciona con todas las versiones de Autocad hasta hoy.

3.2.1.1. Las primeras versiones: *Homo.lsp* v.0 y *Homo1.lsp*

En el año 1996, al ser instado por Ramón Maestre para realizar un programa que resolviese homología en Autocad, la primera idea fue programar un algoritmo que siguiese los pasos de la construcción clásica a mano de las homología descrita en el apartado 3.1.1. Partiendo del eje de homología y dos pares de puntos homólogos se realiza *Homo.lsp* v.0, que calcula las intersecciones de la construcción clásica y dibuja los segmentos homólogos de los dados. El programa requiere estos datos ya que el centro de homología suele estar fuera de los límites del dibujo (formato papel), si bien estos dos pares de puntos deben darse siempre de forma que las rectas que definen intersequen sobre el eje de homología, pues de lo contrario no definen una homología.

El listado de los programas en sus distintas versiones se aporta en el anexo 1 y pasamos ahora a describir **la versión *Homo.lsp* v.0**, paso a paso en un lenguaje algorítmico indicando entre paréntesis los nombres de las funciones AutoLisp y entrecomilladas los nombres de las variables, aportándose un esquema en la figura 3.6. siguiendo la misma nomenclatura.

En el programa se definen en primer lugar una serie de funciones constitutivas y finalmente el cuerpo principal del programa, pero a fin de dar una mayor claridad a esta exposición se ha invertido el orden, para adecuarlo al de su funcionamiento.

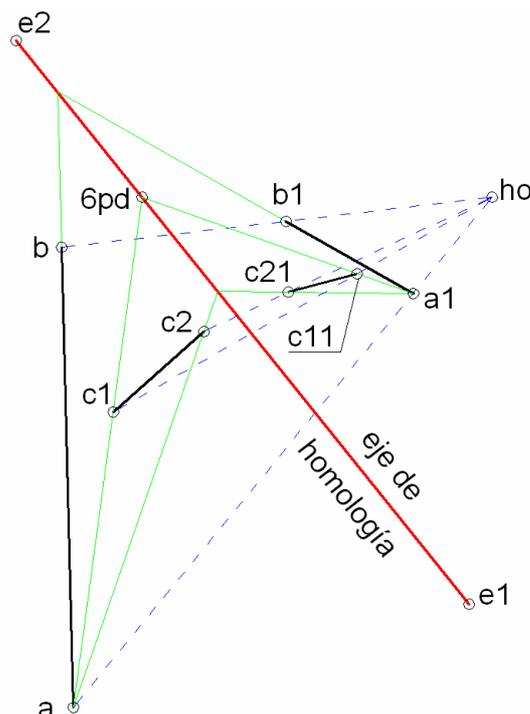


Figura 3.6: Segmento $c11c21$ homólogo del $c1c2$, a partir del eje de homología y dos pares de puntos homólogos $a, a1$ y $b, b1$.

Se define un nuevo **comando** de Autocad llamado **“homo”**:

Imprime "Diseñe el eje de homología..."

Asigna el conjunto de objetos designados a la variable “eje”

Pide "Marque el punto A..." y lo asigna a la variable “a”

Pide "Marque el punto A'..." y lo asigna a la variable “a1”

Pide "Marque el punto B..." y lo asigna a la variable “b”

Pide "Marque el punto B'..." y lo asigna a la variable “b1”

Determina el centro de homología “ho” como la intersección de dos rectas definidas por 4 puntos (int4p), dando los puntos “a”, “a1” y “b”, “b1” para definir ambas rectas.

Asigna a “eje” el objeto 0 del conjunto “eje”

Asigna al punto “e1” el primer punto de la recta (p1rec) definida como “eje”

Asigna al punto “e2” al segundo punto de la recta (p2rec) definida como “eje”

Imprime "Marque las líneas a obtener sus homólogos..."

Asigna el conjunto de objetos designados a la variable “entc”

Pone el contador “i” a 0

Mientras el nombre del objeto “i” no sea nulo:

Asigna a “ent” el nombre de objeto “i” del conjunto “entc”

Obtiene y dibuja la línea homóloga (homoli) del objeto “ent”

Incrementa el contador “i” en una unidad

Para lo cual se han definido previamente las siguientes funciones:

(homoli ent) Determina y dibuja la línea homóloga de la dada por “ent”

Asigna a “c1” el primer punto (p1rec) de la recta “ent”

Asigna a “c2” el segundo punto (p2rec) de la recta “ent”

Asigna a “c11” el punto homólogo (homopt) del “c1”

Asigna a “c21” el punto homólogo (homopt) del “c2”

Ejecuta el comando “línea” desde “c11” a “c21”

(homopt 6a) Obtiene el punto homólogo del definido en “6a”

Determina el punto doble “6pd” como la intersección de dos rectas definidas por 4 puntos (int4p), dando los puntos “a”, “6a” y “e1”, “e2” para definir ambas rectas.

Obtiene el punto homólogo del dado como la intersección de dos rectas definidas por 4 puntos (int4p), dando los puntos centro de homología “ho”, “6a” y “6pd”, “a1” para definir ambas rectas.

(int4p 5a 5b 5c 5d) Determina la intersección de dos rectas definidas por los puntos “5a” y “5b” con “5c” y “5d”

Obtiene la intersección de las dos rectas (inre), la definida (re2p) por “5a” y “5b” con la definida (re2p) por “5c” y “5d”.

(inre 1r1 1r2) Obtiene el punto intersección de dos rectas definidas por dos vectores “1r1” y “1r2”.

Obtiene las componentes de cada vector: $1r1 = (1a, 1b)$ y $1r2 = (1c, 1d)$

Calcula la coordenada X de la intersección:

$$1x = \frac{1d-1b}{1a-1c}$$

Calcula la coordenada Y de la intersección:

$$1y = \frac{(1a*1d) - (1b*1c)}{1a-1c}$$

Crea el punto resultado listando las coordenadas X e Y obtenidas: (1x, 1y)

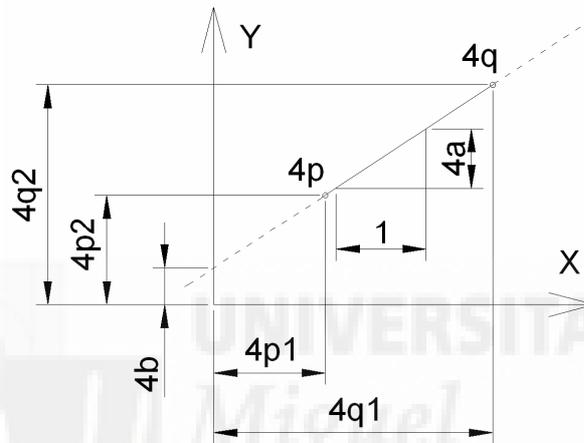


Figura 3.7: Recta que pasa por dos puntos 4p, 4q.

(**re2p** 4p 4q) Obtiene la recta que pasa por dos puntos “4p” y “4q”
Obtiene las coordenadas de cada punto: 4p = (4p1, 4p2) y 4q = (4q1, 4q2)
Calcula los parámetros de la recta:

$$4a = \frac{4q2 - 4p2}{4q1 - 4p1} \quad 4b = \frac{(4p2*4q1) - (4p1*4q2)}{4q1 - 4p1}$$

Lista los parámetros de la recta en un vector: (4a, 4b)

(**p1rec** 2recta) Obtiene el primer punto extremo de un objeto línea “2recta”
Asigna a “2data1” los datos de la recta “2recta”
Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado²⁵ 10 de los datos “2data1”

(**p2rec** 3recta) Obtiene el segundo punto extremo de un objeto línea “3recta”
Asigna a “3data1” los datos de la recta “3recta”
Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado 11 de los datos “3data1”

²⁵ La organización de datos de Autocad en memoria sigue una estructuración similar a la descrita en Autodesk. Manual de referencia de DXF, basada en códigos de grupo.

El programa requiere desactivar el modo de referencia a objetos y trabajar en el Sistema de Coordenadas Universal (S.C.U.) de Autocad y fallaba en el momento alguno de los denominadores de las expresiones utilizadas se anulaba, bien por alineaciones, horizontalidad, verticalidad, paralelismo o segmentos muy descompensados. Extremos no resueltos en programación, pero evitables en la operativa de su uso girando el dibujo o buscando construcciones auxiliares.

La versión Homo1.lsp incorporaba a Autocad los comandos:

- *Defiab*, que definía la homología a partir del eje y dos pares de puntos homólogos;
- *Defiho*, que la definía con el eje, un par de puntos homólogos y el centro de homología;
- *Homo* que obtenía las líneas homólogas de las designadas.

Su algoritmo se sigue basando en la construcción clásica, pero ahora trabajando con vectores unitarios y con infinidad de condicionales que eviten la nulidad en los denominadores, así como entradas invalidas. También se define una constante de error con la finalidad de poder comparar variables equivalentes, aunque no iguales, por errores acumulados de cálculos sucesivos.

Pasamos a describir éste algoritmo:

Se fija la constante error = $1e-15$ ya que Autolisp trabaja con simple precisión (16 dígitos significativos) y Autocad con doble (32 dígitos significativos). Con la finalidad de comparar resultados equivalentes aunque no iguales.

Se definen los siguientes comandos de Autocad:

“defiab” define la homología a partir del eje de homología y dos pares de puntos homólogos.

Se fija la variable “vaeje” a cero, es decir se le asigna el valor “nil” para poder usarla en el siguiente bucle.

Mientras “vaeje” sea distinto de “LINE”, es decir de una línea, se repite:

Se asigna a “eje” el primer objeto seleccionado tras la petición “Diseñe el eje de homología...”

Si el objeto “eje” no es nulo se asigna a “vaeje” el tipo de objeto que es “eje” tomado de la base de datos de Autocad como el par punteado “0.” correspondiente a ese objeto.

Si “vaeje” es distinto de “LINE” comunica que el objeto ha de ser una línea y que lo intente de nuevo.

Pide “a, a1,b,b1” como dos pares de puntos homólogos.

Calcula el vector unitario (vunit) de los rayos proyectivos que pasan por “a” y “b”, llamándoles “uaa1” y “ubb1” respectivamente.

Asigna a “e1” el primer extremo (p1rec) del objeto “eje”.

Asigna a “e2” el segundo extremo (p2rec) del objeto “eje”.

Calcula el vector unitario (vunit) del eje de homología y lo asigna a “ueje”.

Si el producto escalar en valor absoluto (dot) de los vectores unitarios “uaa1” y “ubb1” es mayor que 1-“error”, es decir, si son paralelos da un mensaje de error y si no, asigna al centro de homología “ho” la intersección (int4p) de las rectas definidas por “a, a1” y “b, b1”.

Calcula el vector unitario (vunit) del rayo proyectivo que pasa por “e1” y lo asigna a “uhoe1”.

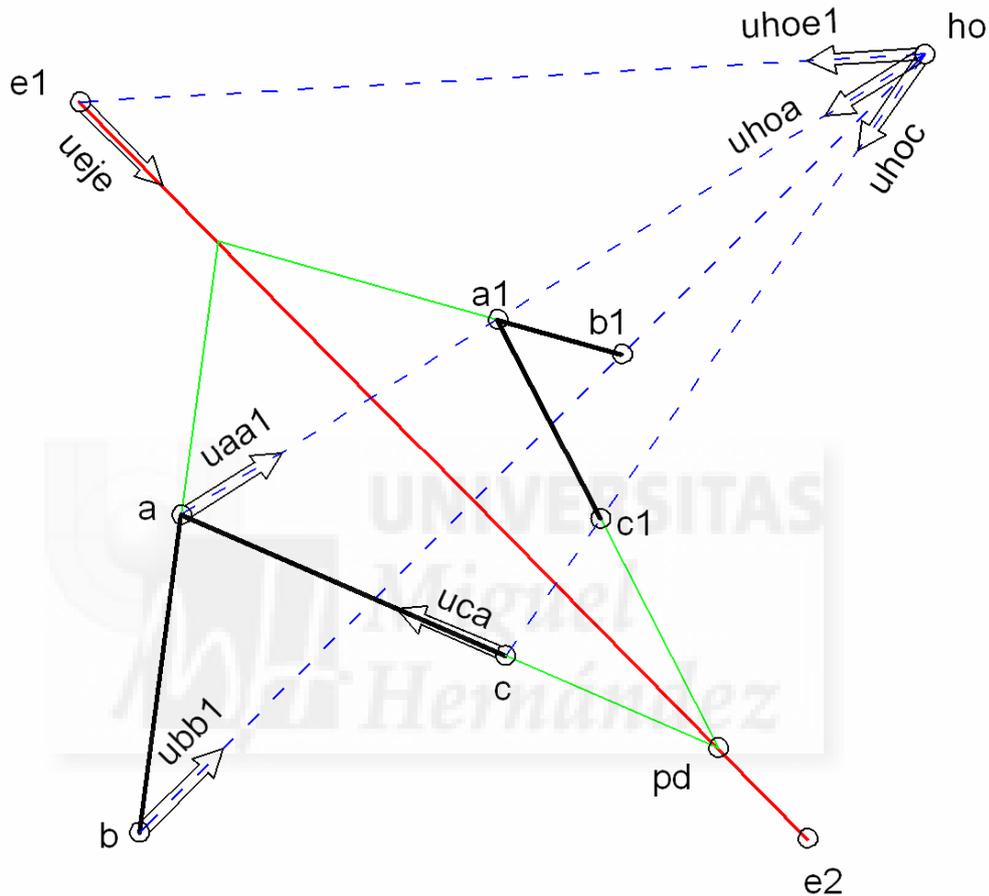


Figura 3.8: Ilustra el algoritmo de los comandos “defiab”, “defiho” y sus funciones constitutivas.

Calcula el vector unitario (vunit) del rayo proyectivo que pasa por “a” y lo asigna a “uhoa”.

“**defiho**” define la homología a partir del eje de homología un par de puntos y el centro de homología.

Se fija la variable “vaeje” a cero, es decir se le asigna el valor “nil” para poder usarla en el siguiente bucle.

Mientras “vaeje” sea distinto de “LINE”, es decir de una línea, se repite:

Se asigna a “eje” el primer objeto seleccionado tras la petición “Diseñe el eje de homología...”

Si el objeto “eje” no es nulo se asigna a “vaeje” el tipo de objeto que es “eje” tomado de la base de datos de Autocad como el par punteado “0.” correspondiente a ese objeto.

Si “vaeje” es distinto de “LINE” comunica que el objeto ha de ser una línea y que lo intente de nuevo.

Pide “a” y “a1” como un par de puntos homólogos.

Asigna a “e1” el primer extremo (p1rec) del objeto “eje”.
Asigna a “e2” el segundo extremo (p2rec) del objeto “eje”.
Calcula el vector unitario (vunit) del eje de homología y lo asigna a “ueje”.
Asigna a ”ho” el resultado de pedir marcar el centro de homología.
Calcula el vector unitario (vunit) del rayo proyectivo que pasa por “e1” y lo asigna a “uhoel”.
Calcula el vector unitario (vunit) del rayo proyectivo que pasa por “a” y lo asigna a “uhoa”.

“homo” Aplica la homología definida a las n líneas que se designen.
Solicita que se designen las líneas a obtener sus homólogas y las asigna a “entc”.
Pone el contador “i” a 0.
Mientras exista el nombre de la entidad “i”:
 Asigna a “ent” el nombre de objeto “i” del conjunto “entc”.
 Asigna a “datos” los correspondientes a “ent”.
 Asigna a “tipo” el dato asociado al par punteado 0 de “datos”.
 Si el “tipo” = ”LINE” entonces obtiene y dibuja la línea homóloga (homoli) del objeto “ent”.
 Incrementa el contador “i” en una unidad
Borra la variable “entc”

(homoli ent) Determina y dibuja la línea homóloga de la dada por “ent”
Asigna a “c1” el primer punto (p1rec) de la recta “ent”
Asigna a “c2” el segundo punto (p2rec) de la recta “ent”
Asigna a “c11” el punto homólogo (procesa) del “c1”
Asigna a “c21” el punto homólogo (procesa) del “c2”
Crea una lista con la estructura de datos de una “LINE” de extremos “c11” y “c12”.
Crea una nueva entidad en el dibujo actual con la lista creada.

(procesa lose) analiza si ya conoce el homólogo de “lose” asignándolo a “lose1” en caso positivo y calculándolo si no.
Si la distancia de “lose” a “a” es menor que “error” asigna a “lose1 = a1”.
Si la distancia de “lose” a “ho” es menor que “error” asigna a “lose1 = lose”.
Si la distancia de “lose” a “e1” es menor que “error” asigna a “lose1 = lose”.
Si el producto escalar en valor absoluto (dot) del vector “ueje” con el vector unitario (vunit) del segmento “e1, lose” es mayor que 1-“error” asigna “lose1=lose” y en caso contrario asigna a “lose1” el homólogo (homopt) de “lose”.

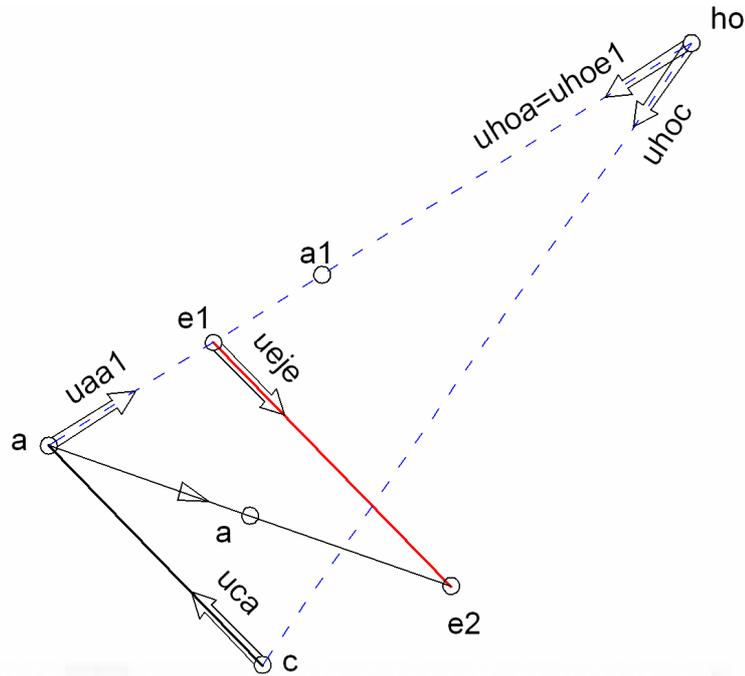


Figura 3.9: Ilustra las funciones (homopt) y (ae) en caso de ueje//uca y uhoa//uhoe1.

(homopt c) devuelve el homólogo de C.

Calcula el vector unitario (vunit) del rayo proyectivo que pasa por “c”, llamándolo “uhoc”.

Calcula el vector unitario (vunit) del segmento “c, a”, llamándolo “uca”.

Si el producto escalar en valor absoluto (dot) de los vectores unitarios “uca” y “ueje” es mayor que 1-“error”, es decir, si son paralelos entonces:

Si además el producto escalar en valor absoluto (dot) de los vectores unitarios “uhoa” y “uhoe1” es mayor que 1-“error”, es decir, si son paralelos entonces obtiene un nuevo par de puntos homólogos “a,a1” (ae) a partir de aproximarlos a “e2”; y en caso contrario a “e1”.

Si el producto escalar en valor absoluto (dot) de los vectores unitarios “uhoa” y “uhoc” es mayor que 1-“error”, es decir, si son paralelos entonces desplaza (despa) el punto “a”.

Asigna a “pd” el punto doble dado como la intersección de dos rectas definidas por 4 puntos (int4p), dando los puntos “a, c” y “e1, e2” para definir ambas rectas.

Obtiene el punto homólogo del dado como la intersección de dos rectas definidas por 4 puntos (int4p), dando los puntos centro de homología “ho”, “c” y “pd”, “a1” para definir ambas rectas.

(ae ptocje) obtiene un nuevo par de puntos homólogos “a, a1”, a partir del punto medio de “a” con “ptocje”

Asigna a “d” el punto medio (pmed) entre “a” y “ptocje”.

Asigna a “d1” el homólogo (homopt) de “d”

Asigna a “a = d” y “a1 = d1”

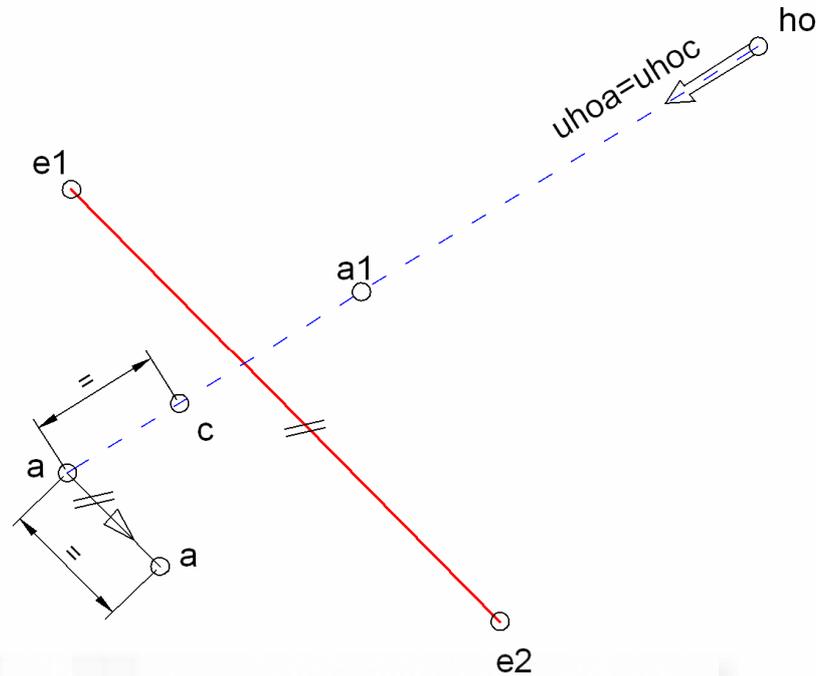


Figura 3.10: Ilustra las funciones (homopt) y (despa) en caso de uhoa/uhoc.

(despa c) obtiene un nuevo par de puntos homólogos “a, a1”, desplazando “a” en la dirección “e1, e2” una distancia “a, c”

Multiplica el vector “ueje” por la distancia “a, c” y lo suma al punto “a” asignándolo a “f”

Asigna a “f1” el homólogo (homopt) de “f”.

Asigna a “a = f” y “a1 = f1”

(dot v1 v2) Obtiene el valor absoluto del producto escalar de los vectores “v1 · v2”

Devuelve el valor absoluto del sumatorio de los productos de las componentes de “v1” y “v2”.

(vunit p1p2) Calcula el vector unitario a partir de dos puntos “p1,p2”

Asigna a “d1” la distancia de “p1” a “p2”.

Resta las coordenadas de los puntos “vv = p2 - p1” obteniendo el vector “vv”

Divide el vector “vv” por la distancia “d1”.

(int4p a b c d) Obtiene el punto intersección de dos rectas a partir de 4 puntos, auxiliándose de la función (inre).

Si no es vertical²⁶ ni la recta “a, b” ni la “c, d” asigna a “resu” la intersección (inre) de las rectas que pasan (re2p) por “a, b” y “c, d”.

Si los puntos “a, b” están alineados verticalmente entonces asigna a “resu” las siguientes coordenadas: $x = x_a$; $y = y_c + (x_a - x_c) * (y_d - y_c) / (x_d - x_c)$

Si los puntos “c, d” están alineados verticalmente entonces asigna a “resu” las siguientes coordenadas: $x = x_c$; $y = y_a + (x_c - x_a) * (y_b - y_a) / (x_b - x_a)$

²⁶ Se toma como vertical la recta definida por dos puntos cuando la diferencia de sus coordenadas x en valor absoluto es menor que la constante “error”.

(re2p p q) Obtiene la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dos puntos “p, q”.

Asigna a “p1” la coordenada X del punto “p”.

Asigna a “p2” la coordenada Y del punto “p”.

Asigna a “q1” la coordenada X del punto “q”.

Asigna a “q2” la coordenada Y del punto “q”.

Asigna “u1 = q1 – p1” y “u2 = q2 – p2”

Obtiene como resultado “resu” una lista “p1, u1, p2, u2” con los coeficientes de las ecuaciones $x=p1+u1*j$; $y=p2+u2*j$

(inre r1 r2) Obtiene el punto intersección de dos rectas definidas por sus ecuaciones paramétricas $x=p1+u1*j$; $y=p2+u2*j$, excepto si alguna es vertical.

Toma “p1, u1, p2, u2” de “r1” y “p12, u12, p22, u22” de “r2”

Calcula el parámetro “j” del punto de intersección mediante la ecuación:

$$j = \frac{(p22 - p2) * u12 + (p1 - p12) * u22}{u2 * u12 - u1 * u22}$$

Obtiene la coordenada “x = p1 + u1 * j” e “y = p2 + u2 * j”

Asigna a “resu” la lista de coordenadas “x, y”

(pmed ex1 ex2) Obtiene el punto medio de un segmento.

Asigna a “pm = ex1 + ex2”.

Divide por 2 sus componentes.

(p1rec recta) Obtiene el primer punto extremo de un objeto línea “recta”

Asigna a “data” los datos de la recta “recta”

Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado 10 de los datos “data”

(p2rec recta) Obtiene el segundo punto extremo de un objeto línea “recta”

Asigna a “data” los datos de la recta “recta”

Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado 11 de los datos “data”

La versión Homo1.lsp es un programa sin terminar, pues se abandona su desarrollo dada la variedad de casos que se han de contemplar y su complejidad. Pero en cualquier caso sigue sin resolverse los paralelismos y coincidencias que siguen anulando denominadores. Esta vía es abandonada al verse la posibilidad que ofrece el comando tablero de Autocad, comando sobre el que se crea la segunda versión.

3.2.1.2. La segunda versión: Homograf.1

La solución del problema de las homografías estaba operativa ya en el comando tablero de Autocad aunque de forma poco evidente, pues sólo se podía usar para calibrar un tablero digitalizador con cuatro pares de puntos realizando una *transformación*

*proyectiva*²⁷. Esta calibración sólo estaba disponible para el tablero, no estando previsto su uso sobre fotografías digitales. El comando tablero, al calibrar, obtiene la matriz de transformación descrita en 3.1.3. y es posible obtener sus valores desde Autolisp con el comando *tablet*²⁸. Es en 1999 cuando se crea *Homograf.1* y el autor aun no conoce la formulación descrita en 3.1.3 que se estudiará en el curso de doctorado de Visión Tridimensional; es por ello que idea un algoritmo para resolver las homografías utilizando la matriz obtenida de la calibración de un tablero digitalizador. Para ello se configura en Autocad un tablero digitalizador, aunque éste no exista físicamente, dándose los puntos de calibración pinchando con el ratón (en lugar del dispositivo señalador del tablero) sobre la tarjeta gráfica en pantalla (en lugar de sobre el tablero). Con esta técnica marcamos los ocho puntos de la calibración con el ratón sobre la pantalla y obtenemos la matriz de transformación. Basta entonces con pasar a coordenadas homogéneas los puntos a transformar y multiplicarlos por la matriz, para volver a coordenadas euclídeas dividiendo por la tercera coordenada. En el caso de introducirse dos pares de puntos superpuestos el comando tablero ejecuta una transformación afin pese a que se le pida proyectiva, dado que con tres pares de puntos es afin la transformación que se define.



Figura 3.11: Tablero digitalizador con dispositivo señalador.

La versión *Homograf.1* incorporaba a Autocad los comandos:

- *Def4p*, que definía la homología a partir de dos tetras de puntos ABCD y A'B'C'D';
- *Defpar* que requería los puntos por pares AA', BB', CC' y DD';
- *Defje* que pedía el eje y dos pares de puntos homólogos;
- *Defcen*, que la definía con el eje, un par de puntos homólogos y el centro de homología;
- *Transforma* que obtenía las líneas homólogas de las designadas.

²⁷ Autodesk. Manual de usuario. Comando Tablero. Con 4 puntos realiza una transformación proyectiva, pero si dos de ellos coinciden pasa automáticamente a hacerla afin.

²⁸ Autodesk. AutoLISP Reference Guide. Función Tablet.

Comandos incluidos en un fichero *Homograf.mnu*, el cual crea los botones y desplegables correspondientes.

Describimos a continuación **la versión Homograf.1**, paso a paso, en un lenguaje algorítmico indicando entre paréntesis los nombres de las funciones lisp y entrecomilladas los nombres de las variables.

De nuevo exponemos primero las funciones que constituyen el cuerpo principal del programa para después abordar las funciones constitutivas del mismo, cara a una mejor comprensión del por qué de las mismas.

Se pone a “0” la variable “error” (que almacenará mensajes de error), es decir se le asigna “nil” para evitar confusiones con errores de ejecuciones anteriores del programa.

Se definen los tres nuevos **comandos** de Autocad . Los tres comandos son:

“**Defpar**” que nos pedirá por orden “a1”, “a2”, “b1”, “b2”, “c1”, “c2”, “d1”, “d2”; como cuatro pares homólogos de puntos y luego ejecuta la función (sacamatriz) y finaliza con la (hom).

“**Def4p**” idéntica a la anterior salvo el orden de entrada que será ahora: “a1”, “b1”, “c1”, “d1”, “a2”, “b2”, “c2”, “d2”; y luego ejecuta la función (sacamatriz) y finaliza con la (hom).

“**Defcen**” define la homología a partir del eje de homología un par de puntos y el centro de homología.

Se fija la variable “vaeje” a cero, es decir se le asigna el valor “nil” para poder usarla en el siguiente bucle.

Mientras “vaeje” sea distinto de “LINE”, es decir de una línea, se repite:

Se asigna a “eje” el primer objeto seleccionado tras la petición “Diseñe el eje de homología...”

Si el objeto “eje” no es nulo se asigna a “vaeje” el tipo de objeto que es “eje” tomado de la base de datos de Autocad como el par punteado “0.” correspondiente a ese objeto.

Si “vaeje” es distinto de “LINE” comunica que el objeto ha de ser una línea y que lo intente de nuevo.

Pide “a1” y “a2” como un par de puntos homólogos.

Asigna a “b1” el primer extremo (p1re) del objeto “eje”.

Asigna a “c1” el segundo extremo (p2re) del objeto “eje”.

Asigna a “d1” el resultado de pedir marcar el centro de homología.

Copia los puntos “b2=b1”; “c2=c1” y “d2=d1” dado que son homólogos de sí mismos al pertenecer al eje o al centro de homología.

Ejecuta la función (sacamatriz) y finaliza con la (hom).

“**Defeje**” define la homología a partir del eje de homología y dos pares de puntos homólogos.

Se fija la variable “vaeje” a cero, es decir se le asigna el valor “nil” para poder usarla en el siguiente bucle.

Mientras “vaeje” sea distinto de “LINE”, es decir de una línea se repite:

Se asigna a “eje” el primer objeto seleccionado tras la petición “Digne el eje de homología...”

Si el objeto “eje” no es nulo se asigna a “vaeje” el tipo de objeto que es “eje” tomado de la base de datos de Autocad como el par punteado “0.” correspondiente a ese objeto.

Si “vaeje” es distinto de “LINE” comunica que el objeto ha de ser una línea y que lo intente de nuevo.

Pide “a1, a2, b1, b2” como dos pares de puntos homólogos.

Asigna a “c1” el primer extremo (p1re) del objeto “eje”.

Asigna a “d1” el segundo extremo (p2re) del objeto “eje”.

Puesto que “c1” y “d1” son puntos dobles asigna “c2 = c1” y “d2 = d1”.

Ejecuta la función (sacamatriz) y finaliza con la (hom).

“Transforma” Transforma las líneas designadas en sus homólogas.

Ejecuta la función (hom).

(sacamatriz) Define la matriz 3x3 de colineación descrita en el apartado 3.1.3

Ejecuta el comando tablero, calibrando con los puntos “a1, a2, b1, b2, c1, c2, d1, d2” y eligiendo la opción de transformación de tipo proyección.

Asigna a “calit” los datos de la calibración actual.

Si no hay datos en “calit” asigna a “error = No puede obtenerse calibración”.

Prepara los datos para la transformación tomando de los datos de “calit” necesarios y creando una “mt3x3” con los datos de la matriz de transformación ordenados como una lista de tres vectores fila.

(hom) Aplica la homología definida a las n líneas que se designen.

Solicita que se designen las líneas a obtener sus homólogas y las asigna a “entc”.

Pone el contador “i” a 0.

Mientras exista el nombre de la entidad “i”:

Asigna a “ent” el nombre de objeto “i” del conjunto “entc”.

Asigna a “datos” los correspondientes a “ent”.

Asigna a “tipo” el dato asociado al par punteado 0 de “datos”.

Si el “tipo” = ”LINE” entonces obtiene y dibuja la línea homóloga (homoli) del objeto “ent”.

Incrementa el contador “i” en una unidad

Borra la variable “entc”

(homoli ent) Obtiene la línea homóloga de una dada, dibujándola.

Asigna a “pto” el primer punto (p1rec) de la línea ”ent” en coordenadas homogéneas.

Asigna a “p1” el homólogo (trapto) de “pto”.

Asigna a “pto” el segundo punto (p2rec) de la línea ”ent” en coordenadas homogéneas.

Asigna a “p2” el homólogo (trapto) de “pto”.

Crea una lista con la estructura de datos de una “LINE” de extremos “p1” y “p2”.

Crea una nueva entidad en el dibujo actual con la lista creada.

(trpto) transforma el “pto” en su homólogo a través de un producto matricial en coordenadas homogéneas

Multiplícala “pto” por la matriz de transformación “mt3x3”, obteniendo el punto transformado en coordenadas homogéneas.

Pasa el punto de coordenadas homogéneas a euclídeas dividiendo sus componentes X e Y por la Z.

Asigna como nueva coordenada Z=0 para que el punto esté en 2D.

Asigna a “pto” las nuevas coordenadas.

(p1rec recta) Obtiene el primer punto extremo de un objeto línea “recta” en coordenadas homogéneas.

Asigna a “data” los datos de la recta “recta”

Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado 10 de los datos “data”

Asigna a “resu” la coordenada X, la Y, y una tercera coordenada con valor 1.

(p2rec recta) Obtiene el segundo punto extremo de un objeto línea “recta” en coordenadas homogéneas.

Id. que anterior, pero con par punteado 11.

(p1re recta) Obtiene el primer punto extremo de un objeto línea “recta”

Asigna a “data” los datos de la recta “recta”

Obtiene como resultado los datos asociados al par punteado 10 de los datos “data”

(p2re recta) Obtiene el segundo punto extremo de un objeto línea “recta”

Id. que anterior, pero con par punteado 11.

Se programa *Homograf.1* con este algoritmo, utilizando, como si de una macro se tratase, el comando “tablero” que permite calibrar una tableta digitalizadora. Es por ello que se requiere configurar la tableta aunque ésta no exista, ya que en caso contrario no está disponible el comando tablero. Este extremo dificulta la configuración del sistema para usar *Homograf.1*, pero es posible en la versión 14 de Autocad y los drivers de tablero digitalizador. Será la imposibilidad que aparece en las últimas versiones de Autocad de configurar un tablero, sin que exista, la que nos fuerce a calcular la matriz de transformación en lo que será la última versión del programa *Homograf* en dos dimensiones.

3.2.1.3. La tercera y cuarta versión: Homograf 2002 y Homograf.lsp.

Es una vez recibidos los cursos del programa de doctorado²⁹ cuando con la formulación expuesta en el punto 3.1.3. se realiza *Homograf.lsp* (anexo 1) que incorpora 3 comandos a Autocad incluidos en un fichero *Homograf.mnu*, el cual crea los botones y desplegables correspondientes: Defpar, Def4p y Transforma.

²⁹ O. Reinoso, J.M. Sebastián. *Visión Tridimensional* del programa de doctorado de “*Tecnologías Industriales*” www.lorca.umh.es. Ed.: Universidad Miguel Hernández de Elche 2000-01

Defpar nos pedirá los cuatro pares de puntos necesarios para definir la homología por parejas AA', BB', CC' y DD'; para después pedir las líneas a transformar.

Def4p pide los cuatro puntos seguidos ABCD y luego A'B'C'D', para terminar pidiendo líneas a transformar.

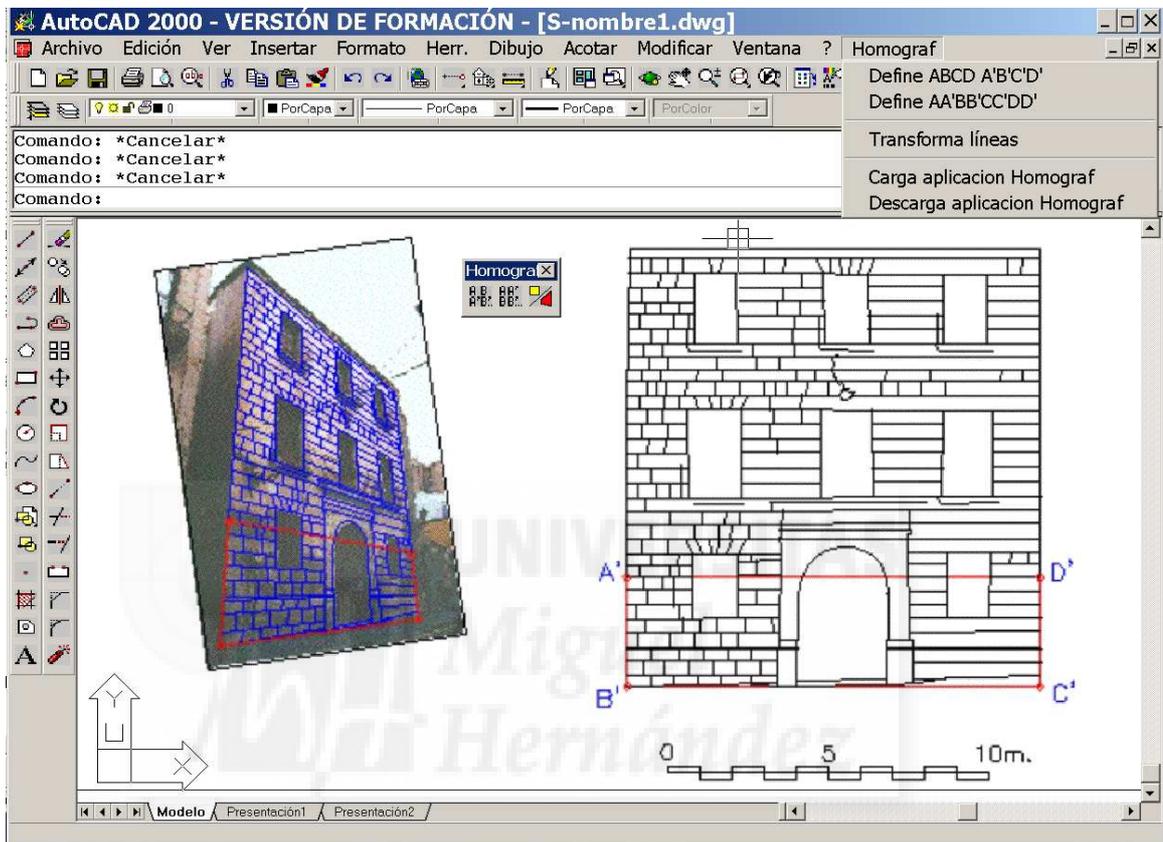


Figura 3.12: Volcado de pantalla con homograf instalado y aplicándose a fotogrametría de una fachada.

Transforma nos permite volver a aplicar la transformación definida previamente por Defpar o Def4p a nuevas líneas.

En los tres casos el programa analiza cada uno de los objetos seleccionados; en el caso de ser líneas pasa a obtener las coordenadas de sus vértices, pasándolas a coordenadas homogéneas y aplicando la transformación descrita en el apartado 3.1.3, para finalmente crear nuevas líneas con los vértices transformados.

Su algoritmo es el mismo que en la versión *Homograf.1* descrito en 3.2.1.2 con la salvedad que no incorpora los comandos “defcen” y “defeje”, debido a que no se usaban, y que cambia la función (sacamatriz) por otra (m8x8) que plantea y resuelve el sistema de ecuaciones 8x8 descrito en el apartado 3.1.3 por triangulación de Gauss y devuelve la matriz de transformación como tres vectores fila.

El programa es traducido a C³⁰ para su comercialización bajo el nombre de *Homograf* 2002 a través de la publicación de un CD con un breve folleto como manual de instalación y uso. Si bien luego se publicará el código fuente en Autolisp a través de las páginas Web de la Universidad de Alicante y de la Universidad Miguel Hernández.

Limitaciones

Hay dos limitaciones, una geométrica: en los pares de puntos no debe de haber más de 2 colineales. Otra propia de la programación consistente en que se ha de aplicar el programa desde el SCU (Sistema de Coordenadas Universales de Autocad).

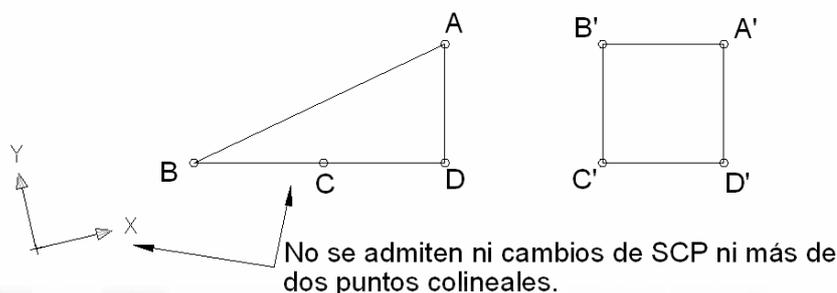


Figura 3.13: Limitaciones del programa Homograf.

3.2.2. Ejemplos y aplicaciones.

Se pasa a ilustrar con algunas de las aplicaciones desarrolladas con el programa implementado.

3.2.2.1. Fotogrametría de una sola fotografía oblicua al plano de fachada. Se inserta la fotografía de la cual se conocen dos medidas, una horizontal y la otra vertical. Se calcan las líneas que interesan y se define la transformación a partir del rectángulo definido por las dos medidas, aplicándola a todas las líneas (figura 3.14).

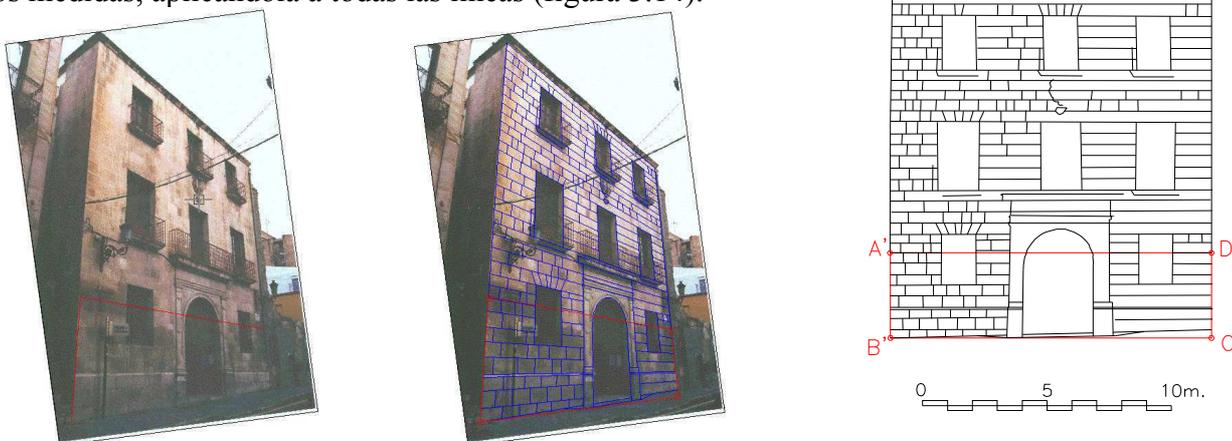


Figura 3.14: Ejemplo de fotogrametría

³⁰ Con C se refiere a el lenguaje de programación C, el cual permite compilar a código máquina el programa en lugar de interpretarse línea a línea el código fuente como hace el Autolisp. Con ello se logran dos objetivos: incrementar notablemente la velocidad de ejecución del programa y proteger el código fuente.

3.2.2.2. Montaje fotográfico de un plano de fachada según proyecto. Se toma la fotografía de la calle donde se va a construir, se elimina la zona de la fachada a derruir y se superpone en AutoCAD la imagen vectorial resultado de transformar el plano de fachada al cuadrilátero disponible en el solar (figura 3.15).



Figura 3.15. Ejemplo de montaje fotográfico

3.2.2.3. Obtención de dibujos 2D en perspectiva cónica a partir de las vistas diédricas. Se requiere aplicar la transformación a tantos planos como existan en el edificio (figura 3.16).

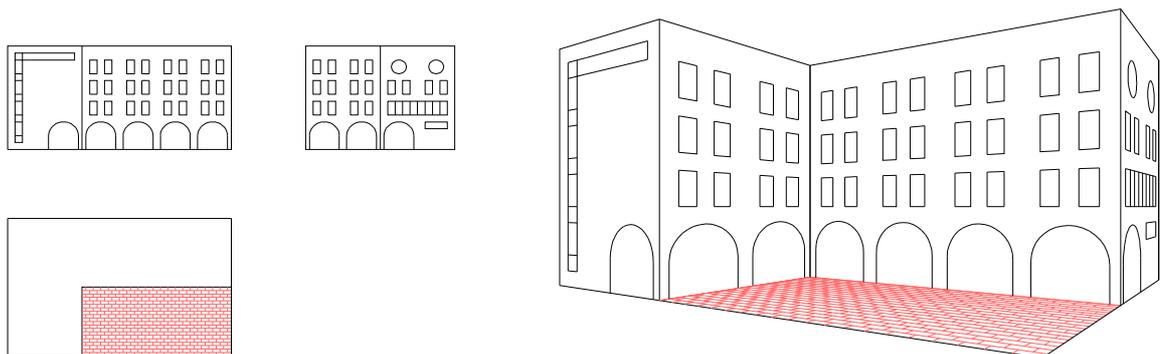


Figura 3.16: Ejemplo de generación de perspectiva cónica

3.2.2.4. Fotogrametría de una sola fotografía con corrección de fuga. Existen cámaras fotográficas capaces de desplazar el objetivo según un plano paralelo al de la imagen con el fin de corregir una de las fugas de líneas paralelas. Para estas fotografías el procedimiento es idéntico al planteado en el primer ejemplo, pero en este caso se podría resolver el problema sin usar el programa, ya que sólo se requiere aplicar una homología para corregir el único punto de fuga. No obstante el uso del programa es ventajoso pues

automatiza la ejecución de la homología y simplifica su definición (figura 3.17).

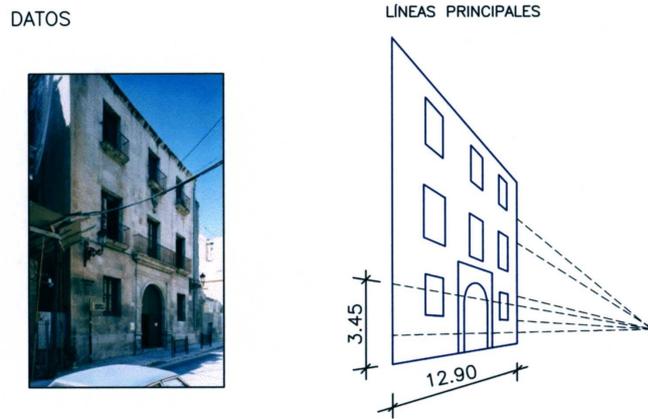


Figura 3.17: Ejemplo de fotografía con corrección de fuga vertical, mediante nivelación de la cámara y desplazamiento del objetivo en paralelo a la película de acetato.

3.2.2.5. Obtención de perspectivas cilíndricas ortogonales u oblicuas y cónicas. El programa posibilita a partir de una proyección ortogonal ó de una cónica la obtención de dibujos de perspectivas de tipo axonométricas isométricas dimétricas ó trimétricas, así como caballeras o militares (estas últimas, por ser oblicuas, no se pueden obtener ni en AutoCAD 2009) y también cónicas (figura 3.18).

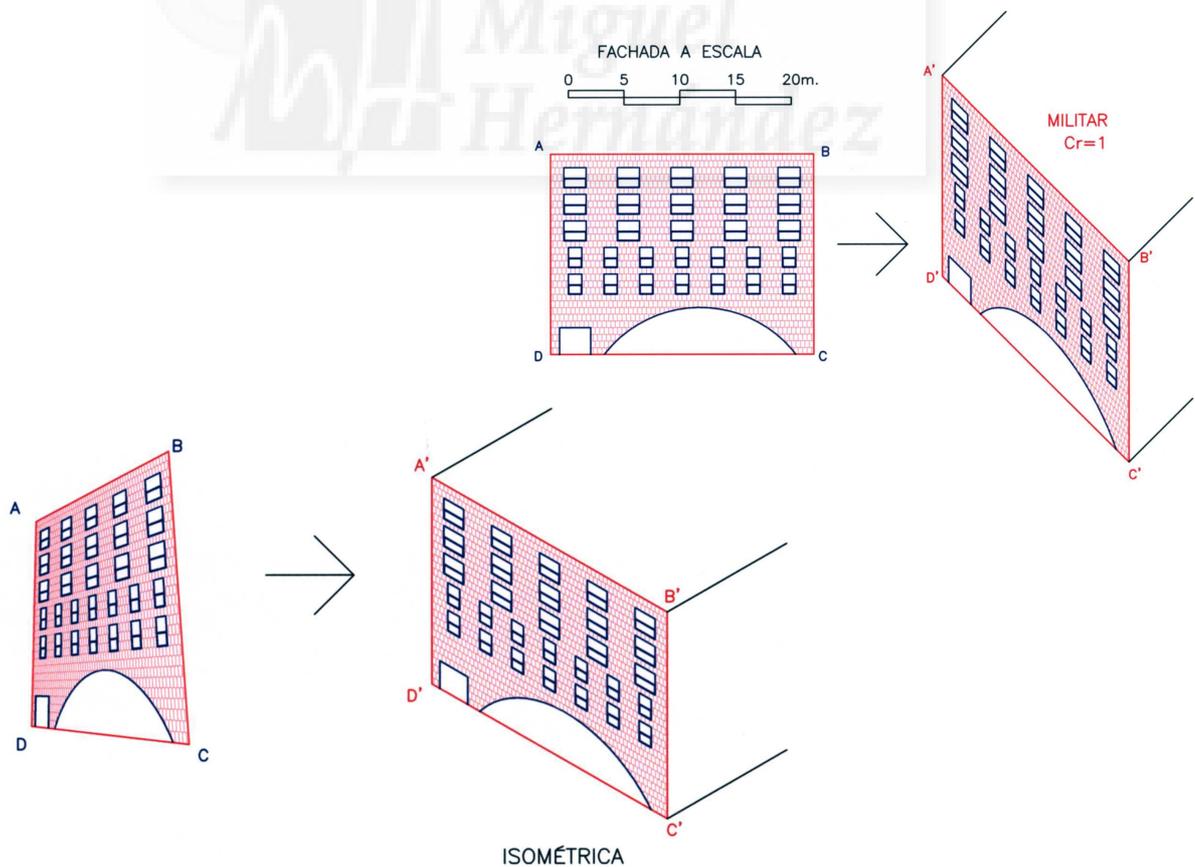


Figura 3.18: Obtención de perspectivas cilíndricas y cónicas.

3.2.2.6. Deformación de perspectivas con fines comerciales. En muchas ocasiones los arquitectos deforman las perspectivas con fin de realzar determinados aspectos (figura 3.19).

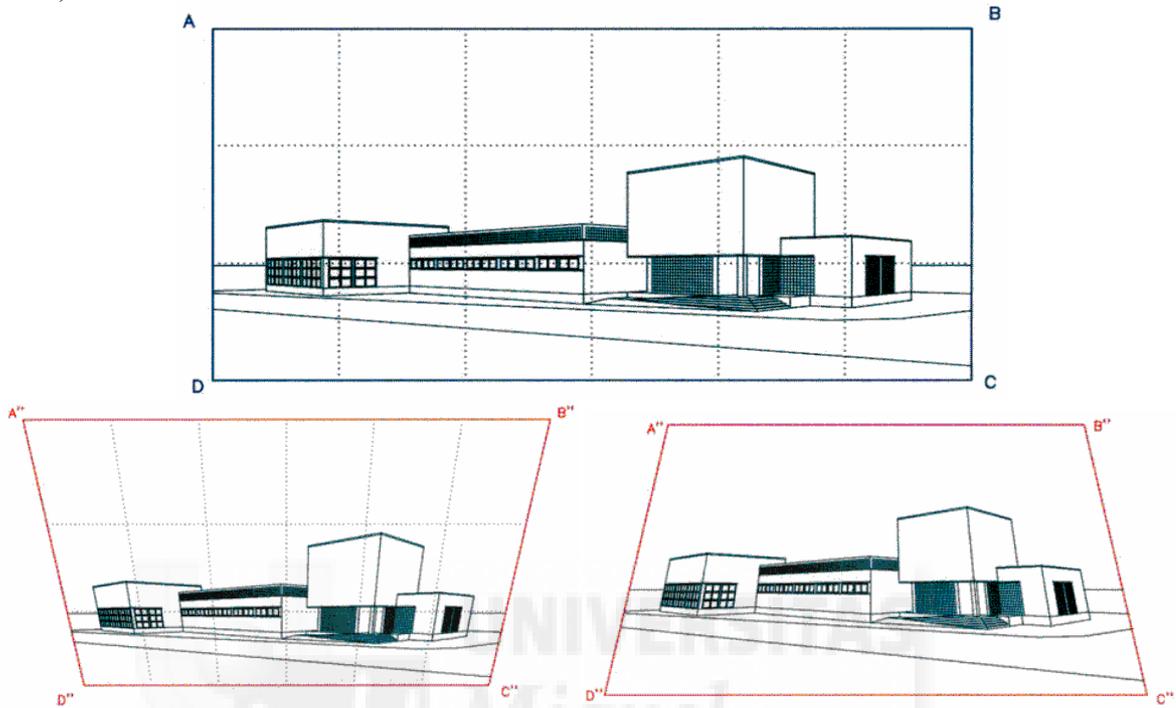


Figura 3.19: Ejemplo de deformación de perspectiva

3.2.2.7. Obtención de anaglifos. La obtención de este tipo de vista estereoscópica resulta extremadamente rápida y sencilla (figura 3.20).

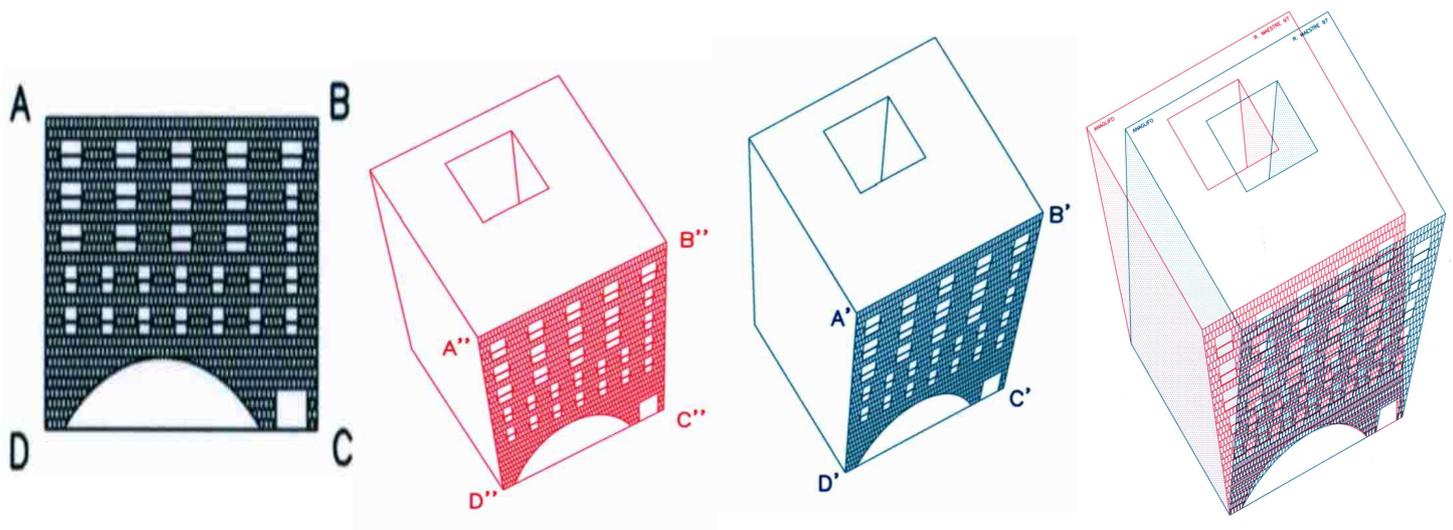


Figura 3.20: Ejemplo de obtención de anaglifos

3.2.2.8. Trazado de curvas cónicas.

Aunque el programa sólo traza segmentos rectilíneos, objetos línea de Autocad, podemos aproximar curvas cónicas mediante poligonales, de forma que si transformamos una circunferencia, o mejor dicho su aproximación mediante un polígono de n lados, obtenemos las curvas cónicas según la circunferencia se sitúe respecto de la recta límite.

Elipses cuando la recta límite es exterior a circunferencia, parábolas cuando es tangente e hipérbolas cuando es secante.

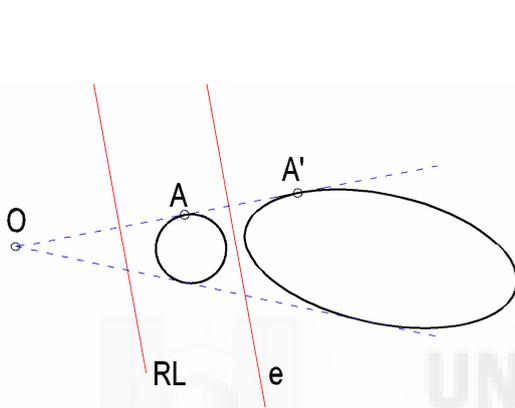


Figura 3.21: Obtención de una elipse. O es el centro de homología, RL la recta límite y e el eje de homología.

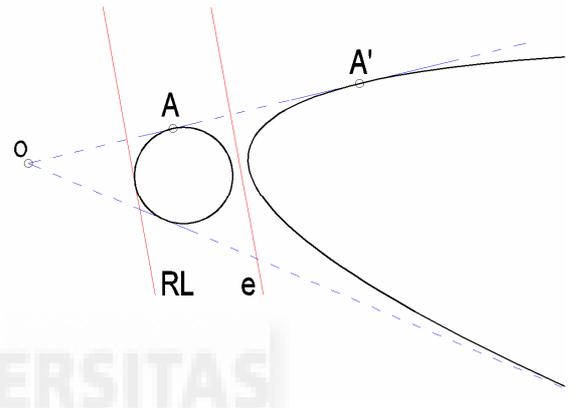


Figura 3.22: Trazado de una parábola. O es el centro de homología, RL la recta límite y e el eje de homología.

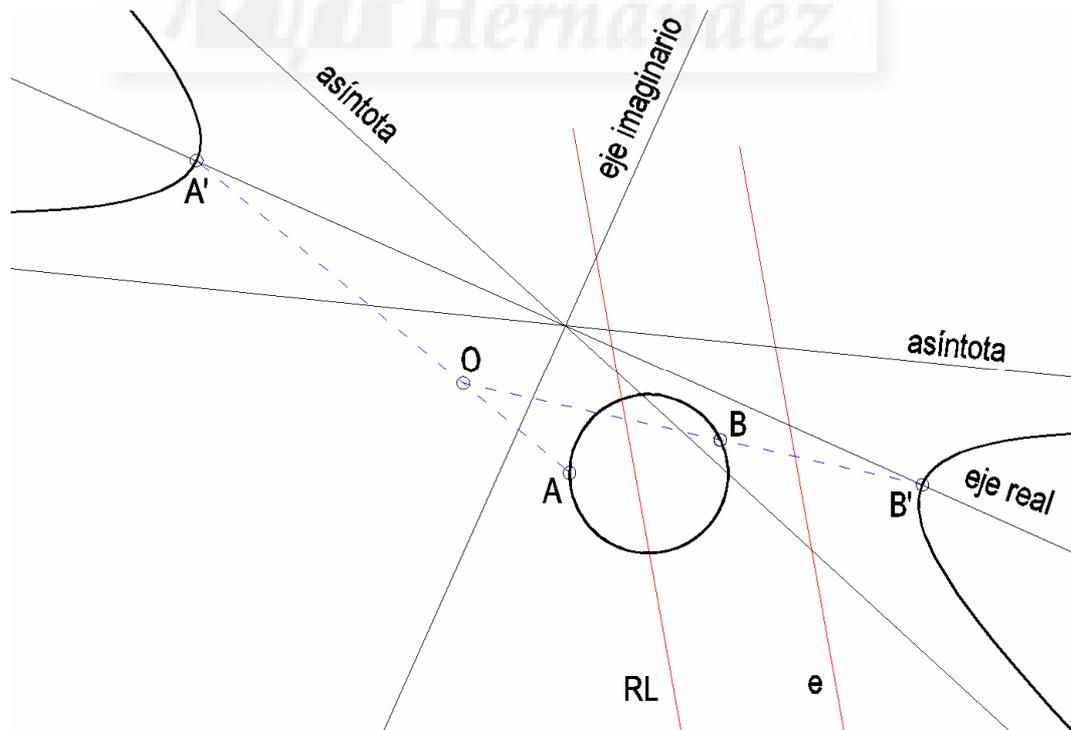


Figura 3.23: Trazado de una hipérbola. Sus asíntotas, ejes y vértices. O es el centro de homología, RL la recta límite y e el eje de homología.

En el trazado de la parábola y de la hipérbola hay puntos que se aproximan a infinito y que se han borrado para poder mostrar correctamente las curvas. En el caso de la hipérbola los segmentos de la circunferencia que son secantes con la recta límite dan puntos homólogos próximos a infinito por un lado y otro de la curva, con lo que los homólogos de estos segmentos nos dan una muy buena aproximación de las asíntotas de la curva, a partir de las cuales podemos determinar los ejes, mediante bisectrices, y los vértices.

3.2.2.9. Corrección de cartografía 2D.

Esta es una aplicación poco usada y contrastada pues sólo se ha usado una vez por parte del autor, eso sí con resultados satisfactorios. Se nos encargó en el proyecto Alcudia-Gráfica³¹ verificar una cartografía 1/500 realizada mediante vuelo fotogramétrico apoyado en vértices de una triangulación taquimétrica. Tras una verificación en campo los puntos de apoyo y otros puntos de control, se detectaron errores debidos a imprecisiones de algunos de los puntos de apoyo, había una zona donde se producían errores de aproximadamente medio metro. Como no era viable cartografiar de nuevo la zona debido al elevado coste, se optó por corregir la cartografía del vuelo desplazando los puntos de control a su lugar correcto, y deformando la cartografía con ellos según transformaciones proyectivas y afines con *Homograf* por medio de una teselación de cuadriláteros y triángulos. Se tuvo que realizar, por tanto, un ajuste de la zona, el cual se realizó por programación en Autolisp en entorno Autocad; ya que los programas fotogramétricos comercializados no prevén ajustes con nube de puntos tomados por estación total. Se ensayaron varias teselaciones, llegándose a la óptima de forma que los errores se conseguían reducir de forma notable, de 0,5 m. a unos 0,05 m. con un máximo de 0,12 m.

En primer lugar se escaneó el plano papel a escala 1/500 de la zona de estudio con una superficie media de 110.994 m². proporcionado por la fundación Alcudia, que provenía de la restitución del par fotogramétrico encargado a la empresa C.E.T.F.A. en Madrid. De este plano resulto un archivo comprimido de unos 900 Kb convertido posteriormente en unos 32 Mb, sin comprimir.

En segundo lugar fue calcando sobre pantalla por medio de las herramientas de dibujo del programa AUTOCAD empleando además zooms y desplazamientos. El digitalizado se realizaba mediante capas, en las cuales se incluía información del plano que digitalizábamos, organizándola según su temática. Mediante superposición se realizó el casado de los trozos calcados en las diversas estaciones de trabajo sobre la imagen escaneada. A continuación se procede a su ploteado para superponerlo con el original y analizar los errores de los procesos de scaneado y ploteado para proceder a su corrección.

Las deformaciones propias de un escáner no métrico son básicamente de dos tipos:

- Deformaciones propias de la lectora óptica y sus mecanismos de anclaje.
- Un mal calibrado o ajuste del arrastre del papel.

³¹ Alcudia-Gráfica es un convenio firmado entre la Universidad de Alicante y la Fundación Alcudia.

Las primeras son despreciables por su magnitud en el trabajo que nos ocupa, sin embargo las segundas pueden alcanzar unos 2 mm. según la dimensión mayor de un papel DIN A-0, es por ello que se corrigieron.

En el caso que nos ocupa, este error se traduce en un alabeo del rectángulo de la zona cartografiada, de forma que para corregirlo se aplica una transformación proyectiva “objetos línea”, por lo que previamente se han discretizado los poliarcos de digitalización a través de un ploteado a disco, siempre sin perder la precisión propia del scaneado.

Para realizar el control topográfico del fotogramétrico, se superpuso la nube de puntos de control tomados en campo con el plano digital.

Con los puntos de control validados se procedió a ensayar varias poligonales para aplicar la corrección de forma que los errores se reduzcan lo máximo posible.

Con los polígonos definidos se procedió a realizar las correcciones pertinentes para cada zona, mediante transformaciones proyectivas los polígonos cuadriláteros, y afines para los triangulares. Sin necesidad de introducir manualmente los datos a *Homograf* pues se reprogramó la entrada de datos a dos ficheros, uno con coordenadas dadas por la estación total y otro por los puntos designados sobre el plano digital, realizándose la designación de objetos mediante polígono-captura con los vértices ya definidos.

Realizada la corrección se procedió a unir las múltiples líneas en poligonales para poder dar un producto digital manejable.



Figura 3.24: Triangulación de apoyo y teselación para corrección cartografía E:1/500 en un DIN A-0 de la Alcudia.



4. HOMOGRAFÍAS EN EL ESPACIO 3D.

4.1. DESARROLLO TEÓRICO.

Se aborda en este capítulo los fundamentos de lo que realmente constituye una novedad en el conocimiento aportado por esta tesis. Se ha encontrado referencias literarias sobre la existencia de las homologías 3D (Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie*; Izquierdo Asensi, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*; Cubillo Fluiters, José, *Geometría proyectiva*; Lluís Villanueva Bartrina, *Arquitectura escenògrafica i geometria*; Fernández Rodríguez, Manuel, *Homología en 3D*) esta última con abundantes construcciones a través de las proyecciones diédricas. Destacando la del profesor Villanueva que ilustra la resolución tridimensional a falta de determinar los planos límite tal y como sí se obtienen en esta tesis. Resulta también novedosa la resolución desde el punto de vista de la geometría proyectiva abordado en 4.1.5, pues si bien hay publicaciones donde se define la ecuación matricial de la transformación (Arámbula, Fernando. *Registro de imágenes médicas*; Montesdeoca, Ángel, *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*), en ninguna de las estudiadas se entra en su desarrollo y resolución ni mucho menos en su implementación infográfica como se expondrá en el punto 4.2.

4.1.1. Según trazado clásico.

En un primer lugar se analizó la problemática de las *homologías espaciales*³² y se resolvió a través de Autocad mediante dibujo 3D. En la figura 4.1.a se parte del centro de homología O, el plano de homología PH y un par de puntos homólogos AA' y BB', siendo en este caso AA' un punto doble del PH. Por ejemplo, para obtener la figura homóloga del cubo ABCDE debemos hacer pasar rectas por los puntos a determinar y uno de los ya conocidos: prolongamos CB hasta PH y unimos con B' de forma que donde interseca al haz OC tenemos C'. Análogamente prolongando DC hasta PH (figura 4.1.c) y uniendo con C' donde interseque a OD tenemos D'. Lo mismo con BE para obtener E' y con todos los vértices del cubo obtendríamos su homólogo A'B'C'D'E'. Los puntos homólogos del infinito nos definen los planos "límite": PL' (homólogos de los puntos del espacio sin ') y PL (homólogos de los puntos del espacio con '), se han dibujado paralelos a PH por P' y Q (figuras 4.1.b y c), siendo P' el homólogo de los puntos del infinito de la recta DB, por tanto en la intersección de un haz OP' paralelo a DB y la prolongación de B'D'. El punto Q se obtiene en la intersección del haz OQ, paralelo a B'D', con la prolongación de DB, siendo el homólogo de los puntos del infinito de B'D'. Los planos límite resultan siempre equidistantes del centro de homología O y el plano de homología PH; y paralelos a él. Tendremos que pares de rectas homólogas se cortan en el plano de homología, pero también pares de planos homólogos se cortarán en rectas dobles contenidas en el plano de homología.

Definida una homología 3D, cualquier par de puntos homólogos BB' junto a O y X constituyen una razón doble de valor constante que llamaremos coeficiente de la homología:

$$(OXB'B') = \frac{OB}{XB} * \frac{XB'}{OB'} = \frac{OB}{OB'} * \frac{XB'}{XB} = K$$

³² ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie. Deuxième Partie. Géométrie dans l'espace*. Paris, Gauthier-Villars, Nouvelle Édition 1922, p.262

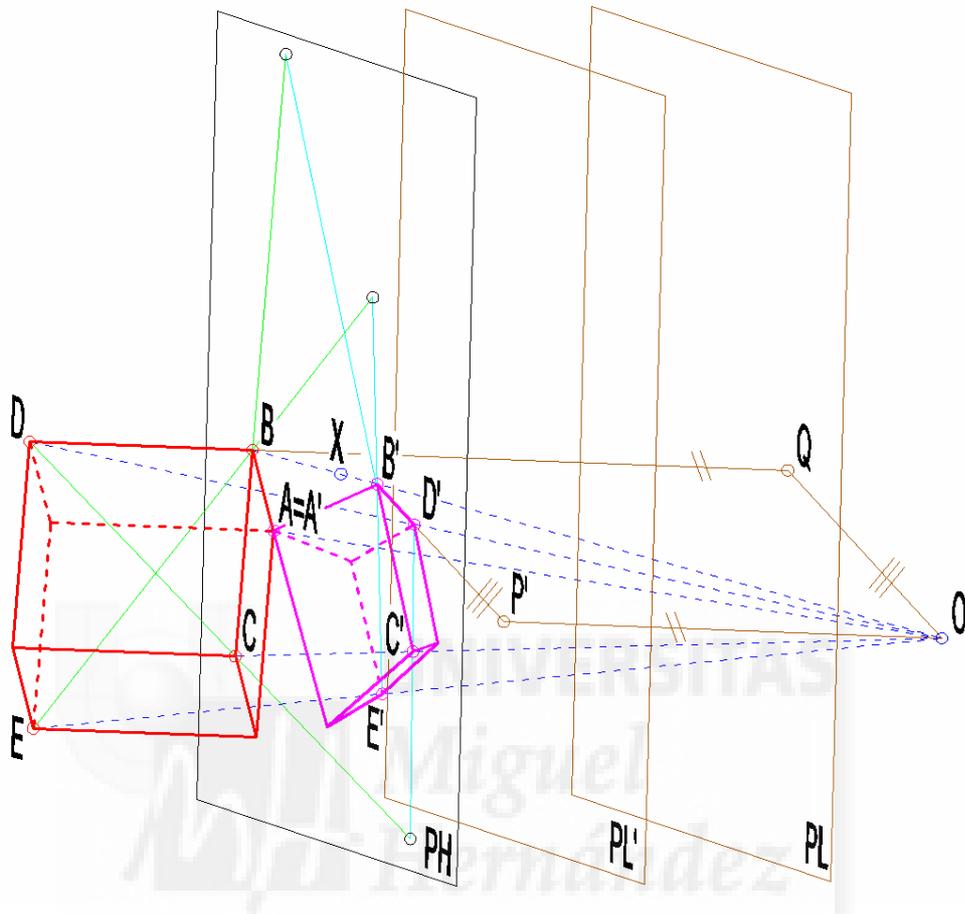


Figura 4.1.c: Vista axonométrica de la construcción geométrica tridimensional clásica de una homología 3D. Obtenido ya el hexaedro homólogo y los planos límite PL y PL'.

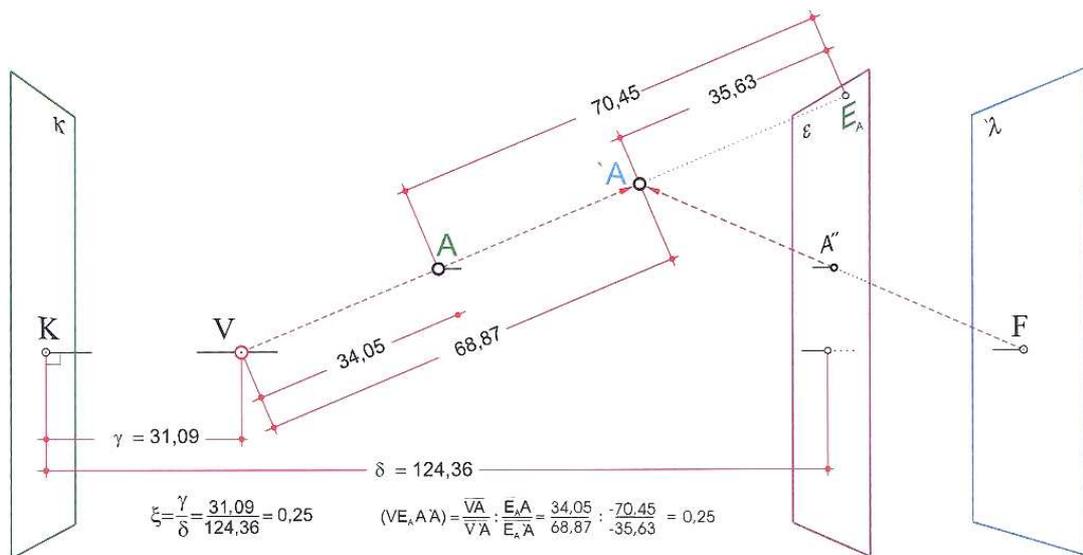


Figura 4.2. Obtención del coeficiente de homología, a partir de un par de puntos A-A', o a partir de la posición de los planos límite.

En la figura 4.2 se muestra cómo, aparte de con un par de puntos, podemos definir el coeficiente de homología por las distancias entre el plano límite κ y el vértice de homología V , dividida por la distancia entre el plano límite κ y el plano de homología ε . De la figura también se deduce que hay infinitos pares de puntos que definen una misma homología (pensemos en distintas inclinaciones respecto ε del segmento $VAA'E_A$ con separaciones proporcionales entre puntos); sin embargo para cada homología sólo hay una disposición del centro de homología V y del plano de homología respecto del plano límite. Esta es otra forma de definir una homología en el espacio, a partir del centro, el plano de homología y uno de los planos límite.

Estos sistemas a partir del trazado clásico adolecen de los problemas típicos de la geometría convencional, y a la hora de programarlo fallaría en casos de paralelismos debido a las intersecciones de las rectas en puntos impropios y en consecuencia resultaría extremadamente complejo de programar y depurar.

4.1.2. Estudio de la homografía 3D de una figura plana.

Definida la homología en tres dimensiones analizamos en este punto la homología espacial de una figura plana. Como ejemplo ilustrativo tomaremos un cuadrado con su circunferencia inscrita. A una figura plana corresponderá siempre otra figura plana homóloga de forma que sus planos asociados respectivos se cortarán en el eje de homología.

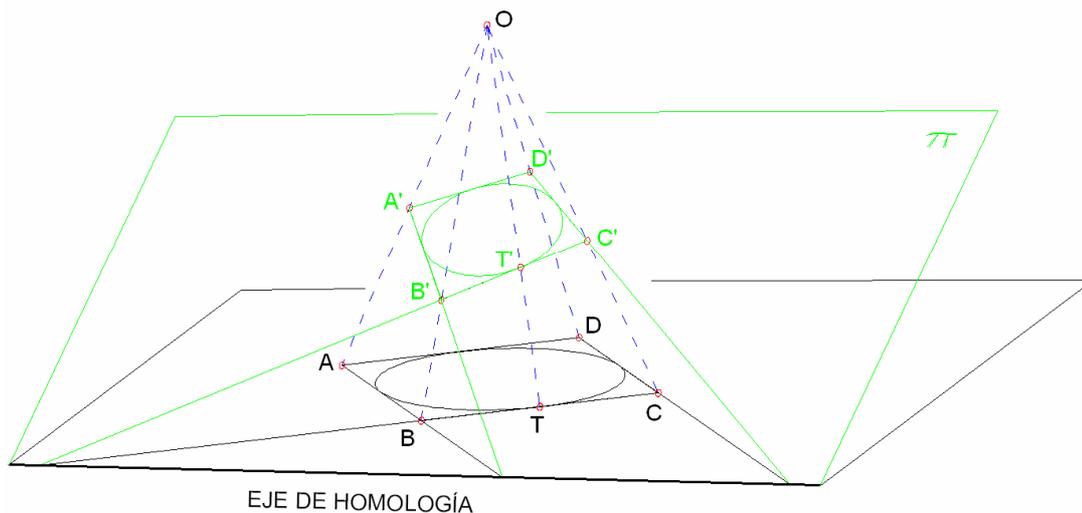


Figura 4.3: Perspectiva de figuras homólogas de un cuadrado y su circunferencia inscrita: cuadrilátero y elipse.

Así pues en el caso del ejemplo podemos tener que si el plano π de la figura 4.3 es oblicuo a todo el haz proyectivo, obtendremos como homólogo del cuadrado ABCD el cuadrilátero A'B'C'D' y la circunferencia inscrita se transforma en una elipse.

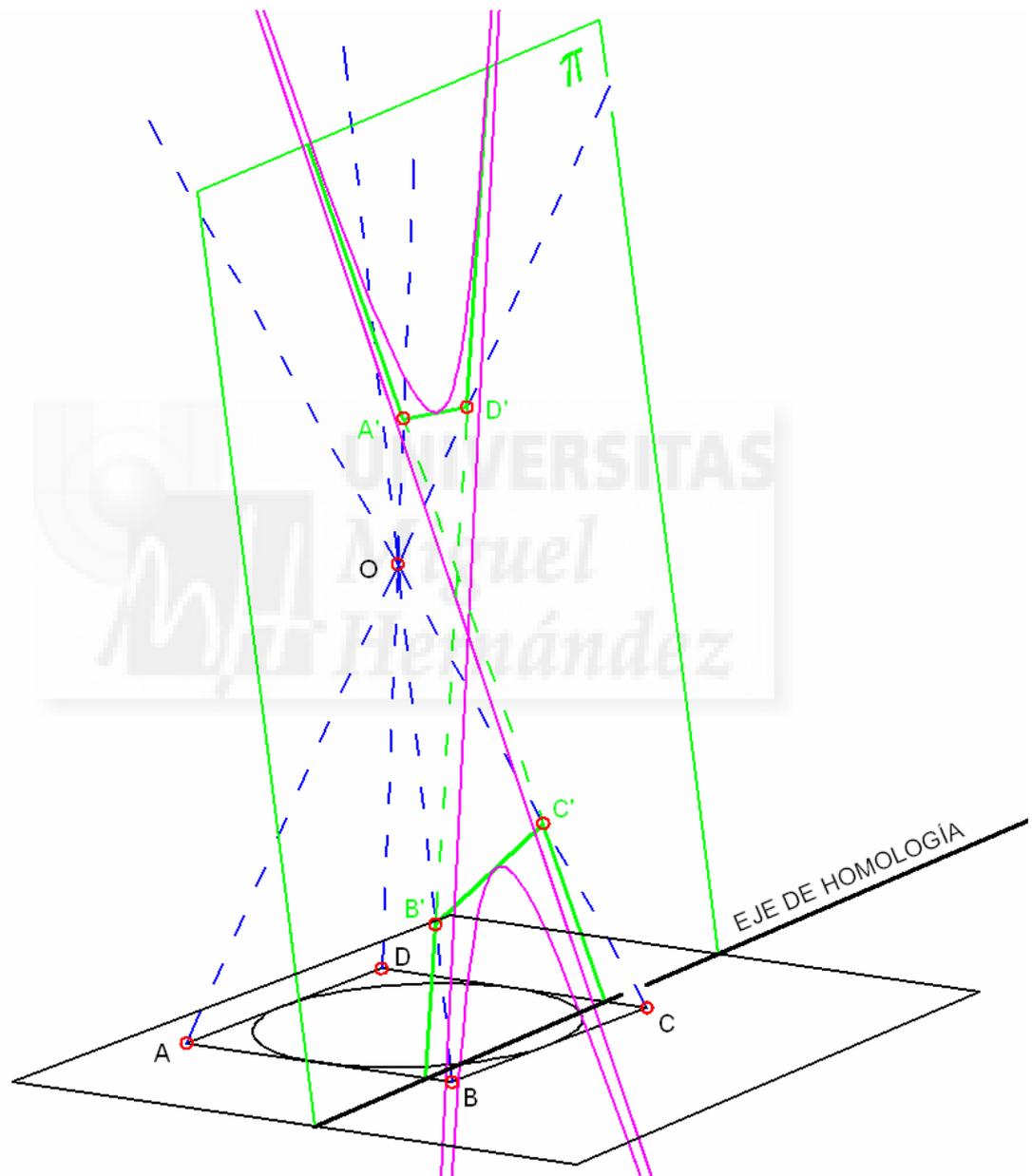


Figura 4.4: Figuras homólogas de un cuadrado y su circunferencia inscrita: hiper cuadrilátero e hipérbola.

En cambio en la figura 4.4, si el plano π se dispone paralelo a dos rayos proyectivos de la circunferencia, el cuadrilátero ABCD se transforma ahora en un hiper cuadrilátero A'B'C'D' y la circunferencia en una hipérbola.

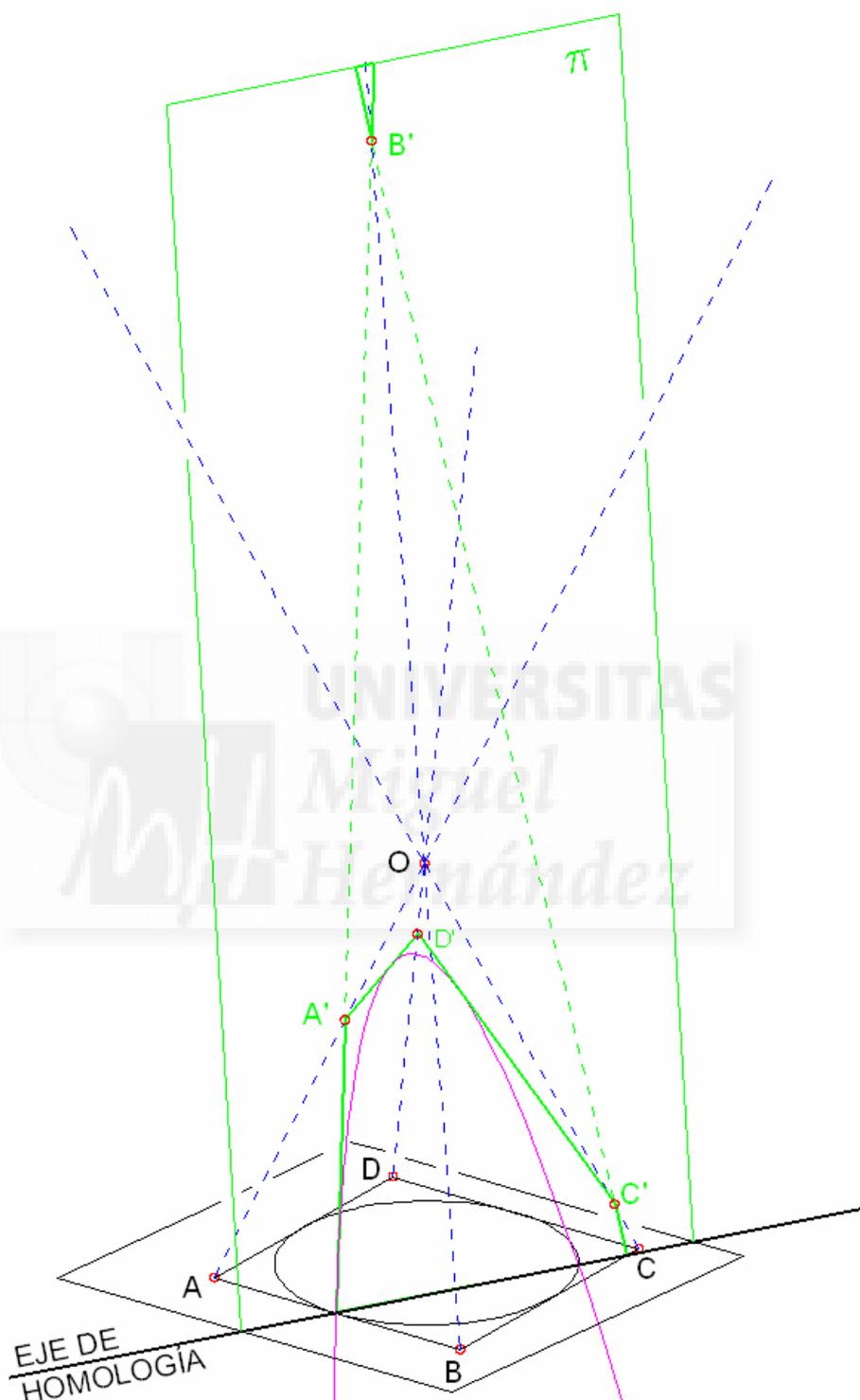


Figura 4.5 Figuras homólogas de un cuadrado y su circunferencia inscrita: hiper cuadrilátero y parábola.

En el caso de la figura 4.5 en que el plano π se dispone paralelo a un sólo rayo proyectivo de la circunferencia, el cuadrilátero ABCD se transforma en un hiper cuadrilátero A'B'C'D' y la circunferencia en una parábola.

4.1.3. Homologías asociadas, homografías ordenadas y desordenadas.

Basándonos en que *el producto de dos proyectividades es una proyectividad*³³ tendremos que cuando establecemos homologías 3D asociadas una tras otra, siempre existe una homografía entre las figuras obtenidas, es decir, si una figura 2 es homóloga de la figura 1 y una figura 3 es homóloga de la 2, siempre podremos afirmar que la figura 3 y la 1 son homográficas. Con esto tendremos que esta última relación de homografía en general no es una homología, pues no presenta los pares de puntos homólogos alineados sobre un centro de homología, ni sus pares de rectas homólogas se cortan en un único plano de homología. Excepcionalmente el producto de dos homologías nos da otra homología ordenada, esto sólo ocurre cuando todas ellas se generan como secciones de una misma radiación en cuatro dimensiones que ha sido proyectada al espacio tridimensional.

En general podemos afirmar, que las homografías 3D se pueden clasificar en ordenadas y desordenadas haciendo una extensión del concepto de *figuras homográficas ordenadas y no ordenadas en el plano*.³⁴

Las homografías ordenadas serán las que disponen los pares de puntos alineados sobre las rectas de un haz proyectivo que pase por el centro de homología; y que sus pares de rectas homólogas se corten en un plano de homología. Sería el caso de la figura 4.6.

Las homografías desordenadas son aquellas en que la disposición espacial relativa de las dos figuras es arbitraria, de forma que no existe un centro de homología ni un plano de homología, pero sí una relación proyectiva entre ellas. En la figura 4.7 se muestran las mismas geometrías de la figura 4.6, no presentando ni centro ni plano de homología, pero las figuras son las mismas que en la otra figura, por tanto homográficas.

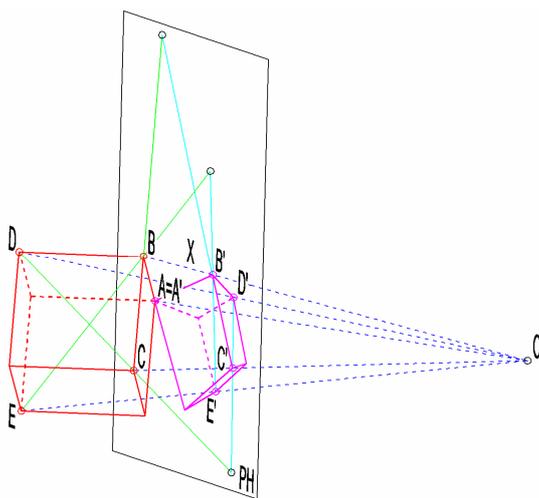


Figura 4.6: Homografía ordenada. Figuras tridimensionales homólogas

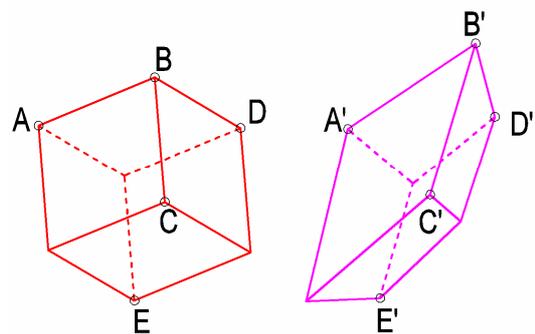


Figura 4.7: Homografía desordenada. Figuras tridimensionales homográficas.

³³ IZQUIERDO ASENSI, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980, p.63

³⁴ MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón, *Tesis doctoral: Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*, U.P.V. 2003, p.286.

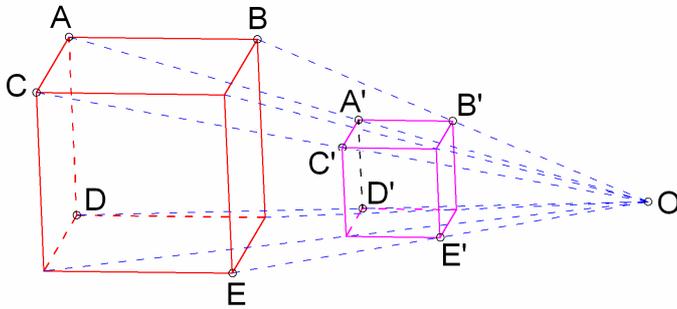


Figura 4.8: Homografía ordenada. Figuras tridimensionales homotéticas.

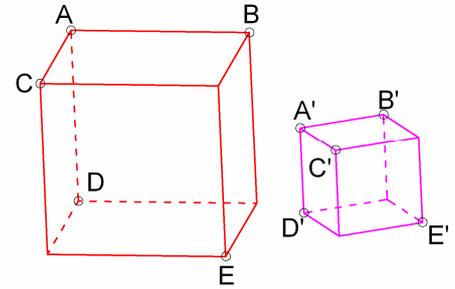


Figura 4.9: Homografía desordenada. Figuras tridimensionales semejantes.

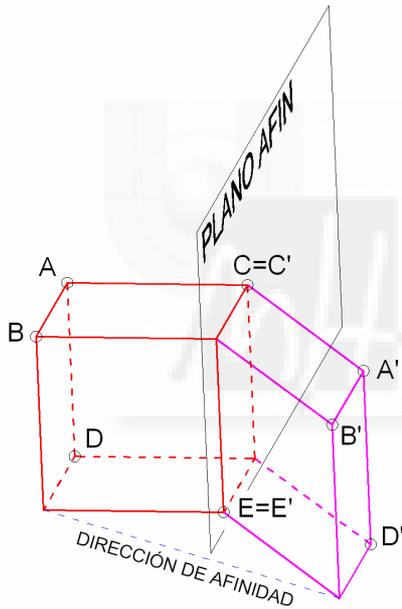


Figura 4.10: Homografía ordenada: Figuras tridimensionales ordenadas en una afinidad 3D.

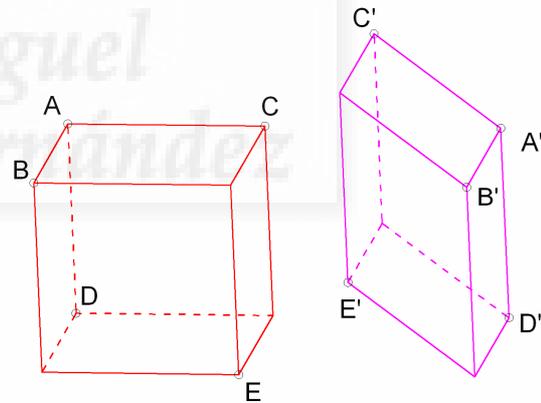


Figura 4.11: Homografía desordenada. Figura 3D afines analíticas, aunque no afines gráficamente (ver 2.2.5).

Un caso especial es cuando el plano de homología es impropio, en este caso llamamos a las figuras homográficas: homotéticas si son ordenadas y semejantes si son desordenadas.

Si el centro de homología es impropio y el plano de homología propio estamos en el caso de afinidad, figuras 3D afines homológicas (afinidad gráfica) cuando es ordenada y simplemente afines (afinidad analítica) cuando no (ver punto 2.2.5).

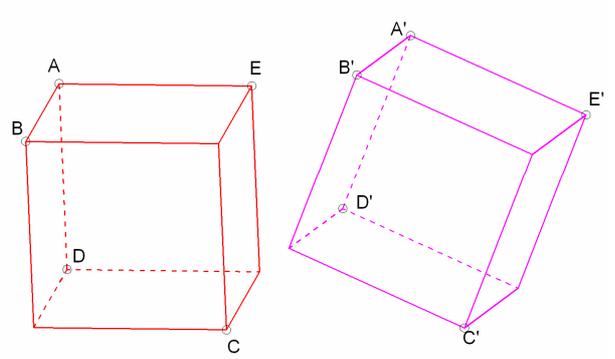
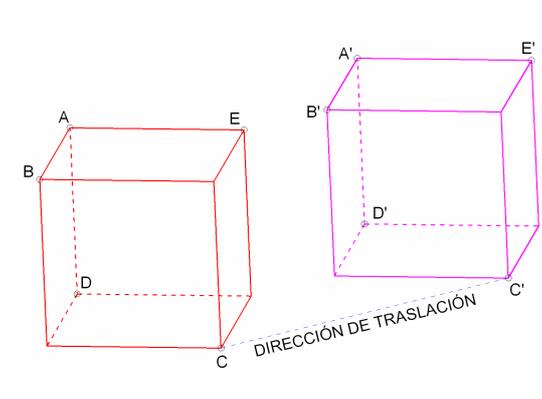


Figura 4.12: Homografía ordenada: figuras tridimensionales relacionadas mediante una traslación.

Figura 4.13: Homografía desordenada: figuras 3D idénticas.

Si en cambio son impropios tanto el plano de homología como el centro de homología tendremos una traslación si es ordenada o una identidad si no lo es.

Como caso particular de la homotecia, cuando el coeficiente de homotecia es -1 , tendremos la simetría respecto de un punto, donde el centro de homotecia se sitúa sobre el único punto doble, siendo los demás simétricos respecto él.

La simetría respecto de un plano es una afinidad ortogonal de coeficiente -1 , de forma que podemos definir el plano de simetría mediante tres puntos dobles.

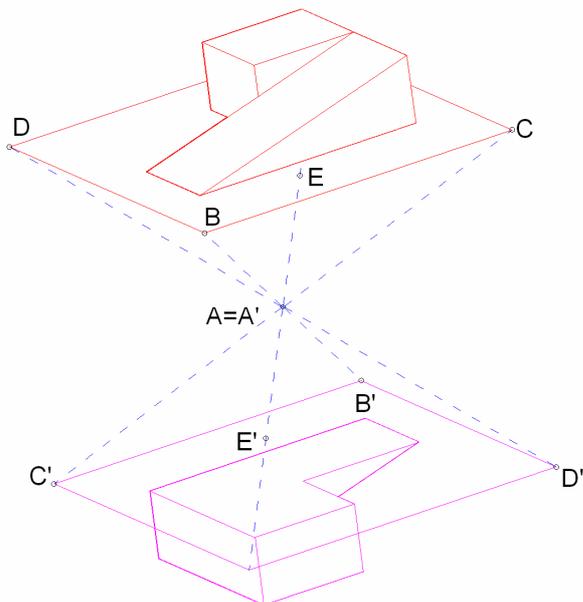


Figura 4.14: Simetría respecto de un punto.

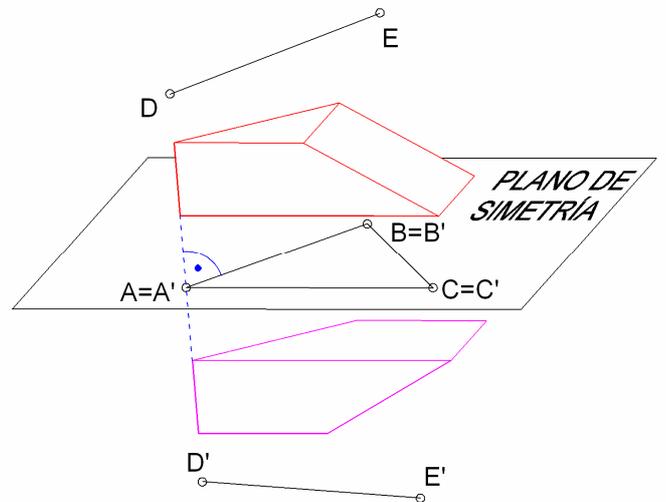


Figura 4.15: Simetría respecto de un plano.

4.1.4. Homologías pseudo-regulares.

Cuando a las figuras geométricas regulares les aplicamos una homografía, en general, obtenemos figuras irregulares; únicamente en el caso de homotecias o semejanzas, y traslaciones o identidades seguimos obteniendo figuras regulares.

Como veremos a continuación hay unas homologías que debemos diferenciar de las demás y que proponemos llamar “pseudo-regulares”, dado que van a mantener una serie de características: simetría radial, caras iguales (no todas) y aristas iguales por grupos.

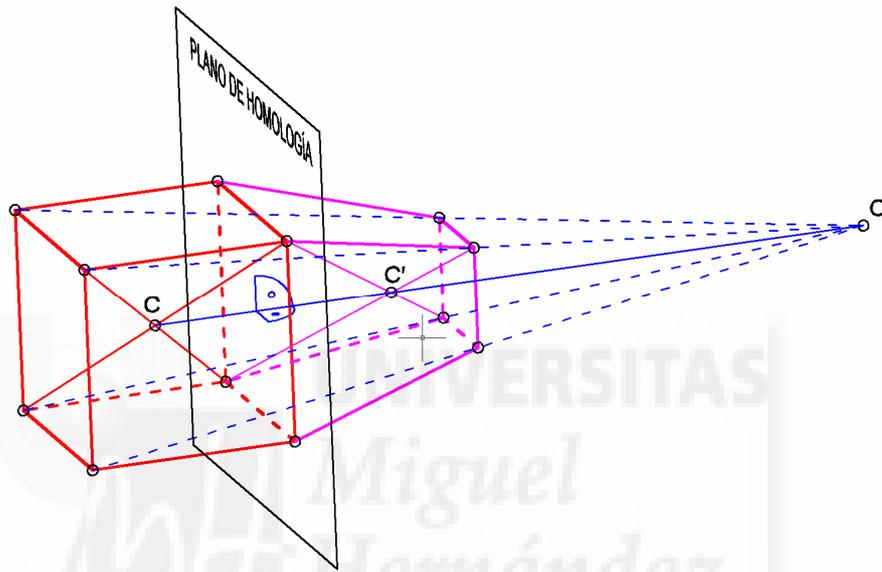


Figura 4.16: Perspectiva de una homología pseudo-regular de un cubo con una cara sobre el plano de homología, la figura homóloga obtenida será un tronco de pirámide regular de bases cuadradas paralelas.

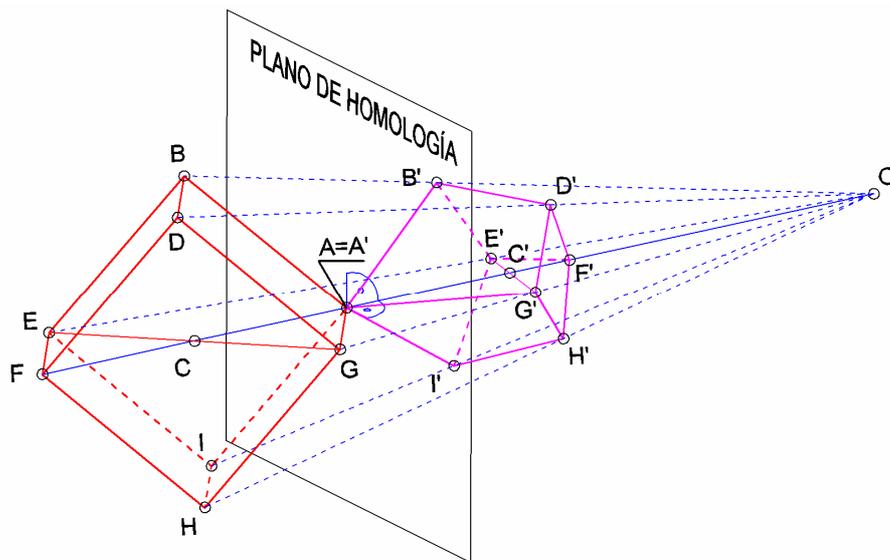


Figura 4.17: Perspectiva de una homología pseudo-regular de un cubo con una diagonal perpendicular al plano de homología, la figura homóloga no es regular, pero tiene sus caras iguales tres a tres ($A'B'D'G'=A'B'E'I'=A'G'H'I'$; $B'D'F'E'=D'F'H'G'=E'F'H'I'$) y mantiene una simetría radial de orden 3 respecto del rayo proyectante principal.

Llamaremos homologías pseudo-regulares a aquellas que aplicamos sobre figuras geométricas regulares y que el rayo principal³⁵ coincide con un eje de simetría radial de la figura regular. Como consecuencia la figura homóloga tendrá al rayo principal también como eje de simetría radial, provocando que existan caras iguales entre sí, pero no todas. Sólo serán iguales entre sí aquellas que, siendo iguales en la figura origen, se dispongan equidistantes respecto el plano de homología.

Si desordenamos las figuras de una homología pseudo-regular tendremos una homografía pseudo-regular, aunque en este caso ya no podamos hablar de un rayo principal, sí tendremos eje de simetría radial.

4.1.5. Según geometría proyectiva.

El autor opta por buscar un algoritmo que resuelva el problema tanto de las homografías ordenadas como de las desordenadas. Basándose en que *cuando en dos figuras de tercera categoría se verifica que a cinco puntos de la primera corresponden otros cinco puntos de la segunda, existe entre ambas una homografía completamente determinada*³⁶ tendremos que la transformación proyectiva por 5 puntos consigue resultados idénticos al otro sistema clásico descrito en 4.1.1.

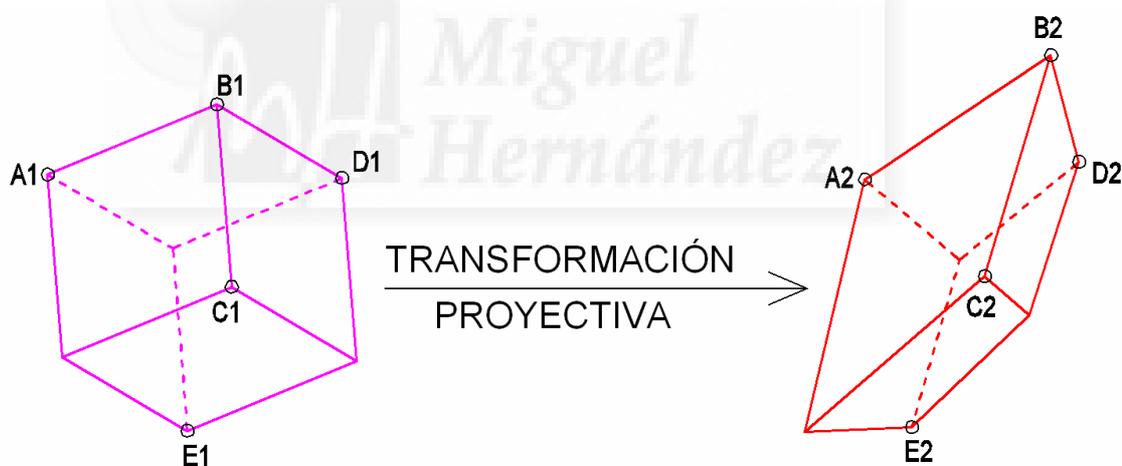


Figura 4.18: Transformación proyectiva en R^3 .

Con esto se desarrolla un programa en AutoLISP donde se dan diversas opciones de entrada para definir la transformación proyectiva, resumiéndose todas a cinco pares de puntos. Son cinco pares de puntos los que con tres coordenadas cada uno nos va a determinar el sistema de 15 ecuaciones que plantearémos a continuación. Es por ello que no queda definida la homografía con menos de cinco pares de puntos, pues quedaría el sistema de ecuaciones indeterminado, ni con más de cinco que quedaría sobre restringido.

³⁵ Llamamos rayo principal a la recta perpendicular al plano de homología desde el centro de homología.

³⁶ CUBILLO FLUITERS, José, *Geometría proyectiva*, Madrid, Instituto geográfico y catastral, 1943, p.274. Se entiende por figuras de tercera categoría figuras tridimensionales.

La aplicación de esta transformación requería multiplicar las *coordenadas homogéneas*³⁷ de los puntos dato por la matriz de transformación y obtener unas coordenadas proyectivas resultado que se convertían en euclídeas dividiendo por la cuarta coordenada.

Se requiere así determinar la matriz de la transformación a partir de las cinco parejas de datos directamente.

La solución la encontramos empleando Geometría Proyectiva, pero aplicada a R^3 en lugar de R^2 como se hizo con *Homograf* en el capítulo anterior. Partiendo de la ecuación matricial con la que se define una transformación proyectiva, y partiendo de unos datos para definirla que consisten en cinco pares de puntos homográficos, se obtiene la *ecuación matricial*³⁸ de transformación: $A \tilde{e}_i = \lambda_i \tilde{x}_i$. Donde:

A es la matriz de transformación 4×4 ;
 \tilde{e}_i son los puntos de partida en coordenadas homogéneas;
 \tilde{x}_i son los puntos de destino en coordenadas proyectivas y
 λ_i son coeficientes de escalado con i de 1 a 5.
 (Nota: La terminación en $\tilde{}$ indica en coordenadas proyectivas).

Datos:

<u>Espacio de $R^3_{n^{\circ}1}$</u>		<u>Espacio de $R^3_{n^{\circ}2}$</u>	
$A1=(x_{A1}, y_{A1}, z_{A1})$	$C1=(x_{C1}, y_{C1}, z_{C1})$	$A2=(x_{A2}, y_{A2}, z_{A2})$	$C2=(x_{C2}, y_{C2}, z_{C2})$
$B1=(x_{B1}, y_{B1}, z_{B1})$	$D1=(x_{D1}, y_{D1}, z_{D1})$	$B2=(x_{B2}, y_{B2}, z_{B2})$	$D2=(x_{D2}, y_{D2}, z_{D2})$
	$E1=(x_{E1}, y_{E1}, z_{E1})$		$E2=(x_{E2}, y_{E2}, z_{E2})$

Tomando valores en la matriz a partir de los datos planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}
 A \tilde{e}_1 &= \lambda_1 \tilde{x}_1 \\
 A \tilde{e}_2 &= \lambda_2 \tilde{x}_2 \\
 A \tilde{e}_3 &= \lambda_3 \tilde{x}_3 \\
 A \tilde{e}_4 &= \lambda_4 \tilde{x}_4 \\
 A \tilde{e}_5 &= \lambda_5 \tilde{x}_5
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ z_{A1} \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{A2} \\ \lambda_1 y_{A2} \\ \lambda_1 z_{A2} \\ \lambda_1 \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned}
 x_{A1} a_{11} + y_{A1} a_{12} + z_{A1} a_{13} + 1 a_{14} &= \lambda_1 x_{A2} \\
 x_{A1} a_{21} + y_{A1} a_{22} + z_{A1} a_{23} + 1 a_{24} &= \lambda_1 y_{A2} \\
 x_{A1} a_{31} + y_{A1} a_{32} + z_{A1} a_{33} + 1 a_{34} &= \lambda_1 z_{A2} \\
 x_{A1} a_{41} + y_{A1} a_{42} + z_{A1} a_{43} + 1 &= \lambda_1 \\
 \dots & \dots \dots
 \end{aligned} \right\}$$

³⁷ Las coordenadas homogéneas, también llamadas proyectivas son definidas por J.García García, M. López Pellicer, *Álgebra lineal y geometría*, Ed.: Marfil 1980, p.: 519
³⁸ MONTESDEOCA, Angel, *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*, La Laguna, <http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/apuntes.htm>, 2004, p.20

Donde estamos asumiendo que los escalares λ_i absorben el factor de escalado a_{44} de toda transformación. Operando con los cinco pares de puntos, podemos obtener 20 ecuaciones, cuatro por cada par, que ordenadas convenientemente como un producto matricial quedarían:

$$\begin{pmatrix} X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \\ a_{41} \\ a_{42} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_{A2} \\ \lambda_2 X_{B2} \\ \lambda_3 X_{C2} \\ \lambda_4 X_{D2} \\ \lambda_5 X_{E2} \\ \lambda_1 Y_{A2} \\ \lambda_2 Y_{B2} \\ \lambda_3 Y_{C2} \\ \lambda_4 Y_{D2} \\ \lambda_5 Y_{E2} \\ \lambda_1 Z_{A2} \\ \lambda_2 Z_{B2} \\ \lambda_3 Z_{C2} \\ \lambda_4 Z_{D2} \\ \lambda_5 Z_{E2} \\ \lambda_1 - 1 \\ \lambda_2 - 1 \\ \lambda_3 - 1 \\ \lambda_4 - 1 \\ \lambda_5 - 1 \end{pmatrix}$$

De estas 20 ecuaciones con 15 parámetros de la matriz de transformación y 5 factores de escalado como incógnitas, podemos despejar λ_i de las últimas 5 ecuaciones y sustituir sus valores en función de a_{41} , a_{42} y a_{43} en las restantes 15 ecuaciones, con lo que tendremos el problema planteado al ser todas ellas linealmente independientes³⁹. Tras esto, y ordenándolas quedaría:

$$\begin{pmatrix} X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{A1} & Y_{A1} & Z_{A1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{B1} & Y_{B1} & Z_{B1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{C1} & Y_{C1} & Z_{C1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{D1} & Y_{D1} & Z_{D1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{E1} & Y_{E1} & Z_{E1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \\ a_{41} \\ a_{42} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{A2} \\ X_{B2} \\ X_{C2} \\ X_{D2} \\ X_{E2} \\ Y_{A2} \\ Y_{B2} \\ Y_{C2} \\ Y_{D2} \\ Y_{E2} \\ Z_{A2} \\ Z_{B2} \\ Z_{C2} \\ Z_{D2} \\ Z_{E2} \end{pmatrix}$$

³⁹ Para que las 15 ecuaciones sean linealmente independientes se hacen necesarias una serie de condiciones a los cinco pares de puntos, que se analizan con más detalle en el punto 4.2.1. Limitaciones.

La resolución de un sistema de ecuaciones se puede abordar de diversas formas, habiéndose elegido la *triangulación de Gauss*⁴⁰. Para poder triangular se plantea un problema: tenemos submatrices nulas que impiden aplicar un algoritmo escalonado secuencial.

Para evitarlo se suman las ecuaciones que se obtendrían con las filas 5 y 6 a 5, 6 y 7 a 6, 7 y 8 a 7, 8 y 9 a 8, 9 y 10 a 9, 10 y 11 a 10, 11 y 12 a 11, 12 y 13 a 12, 13 y 14 a 13, 14 y 15 a 14. Una vez triangulada se resuelve el sistema obteniendo los valores a_{ij} de la matriz de transformación.

Conocida la matriz de transformación, resta plantear los pasos y las ecuaciones para transformar un punto cualquiera de un espacio euclídeo $R^3_{n^{\circ}/1}$ a el otro de espacio $R^3_{n^{\circ}/2}$, que serán:

- Pasar un punto P_1 de coordenadas euclídeas $(x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$ a un punto P_1^{\sim} en coordenadas homogéneas $(x_{P_1^{\sim}}, y_{P_1^{\sim}}, z_{P_1^{\sim}}, 1)$.
- Multiplicarlo por la matriz de colineación obteniendo el punto P_2^{\sim} en coordenadas proyectivas: $A^{\sim} \cdot P_1^{\sim} = P_2^{\sim}$.
- Pasar el punto P_2^{\sim} de coordenadas proyectivas $(x_{P_2^{\sim}}, y_{P_2^{\sim}}, z_{P_2^{\sim}}, \lambda)$ a coordenadas euclídeas $(x_{P_2^{\sim}}/\lambda, y_{P_2^{\sim}}/\lambda, z_{P_2^{\sim}}/\lambda)$.

4.2. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA *HOMOGRAF3D.LSP*

Con la formulación expuesta se realiza *Homograf3d.lsp* (anexo 1) en el que se definen tres nuevos comandos de Autocad (“Defpar”, “Def5p” y “Transforma”):

Uno que nos pedirá los cinco pares de puntos necesarios para definir la homología por parejas AA' , BB' , CC' , DD' y EE' ; denominado “Defpar”; y que finaliza pidiendo las líneas o 3Dcaras a transformar.

Otro que pide los cinco puntos seguidos $ABCDE$ y luego $A'B'C'D'E'$; denominado “Def5p” y que termina pidiendo líneas o 3Dcaras a transformar.

Por último “Transforma” nos permite volver a aplicar la transformación definida previamente por Defpar o Def5p a nuevas líneas o 3Dcaras, pudiéndose ejecutar tantas veces como se desee hasta que se defina una nueva homografía o se cierre el dibujo.

En los tres casos el programa analiza cada uno de los objetos seleccionados; en el caso de ser líneas o 3Dcaras pasa a obtener las coordenadas de sus vértices, pasándolas a coordenadas homogéneas y aplicando la transformación descrita en el apartado anterior, para finalmente crear nuevas líneas o 3Dcaras con los vértices transformados.

⁴⁰ J.García García, M. López Pellicer, *Álgebra lineal y geometría*, Ed.: Marfil 1980, p.:367

4.2.1. Limitaciones.

Se constatan ciertas limitaciones:

Una general geométrica: de los 5 pares de puntos no debe haber más de 3 coplanares, ni más de 2 colineales, puesto que *han de ser independientes entre sí*⁴¹; esta independencia de los pares de puntos es condición necesaria para que el sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas sean “linealmente independientes”, tal y como se ha planteado en el punto 4.1.5, ver nota al pie 39. Si damos 4, o incluso 5, pares de puntos coplanares, tendremos ecuaciones linealmente dependientes con lo que existen infinitas soluciones, pudiendo darnos el programa una de ellas de forma aleatoria.

También surgen otras limitaciones sólo al usar el programa, debidas al algoritmo de diagonalización o al propio Autolisp, que son las siguientes:

* Hay que aplicar el programa desde el SCU (Sistema de Coordenadas Universales de Autocad⁴²).

* Para definir los 5 puntos ningún plano del triedro del SCU debe ser paralelo a un plano definido por 3 de los puntos, pues esto podría introducir ceros conflictivos en el algoritmo de triangulación.

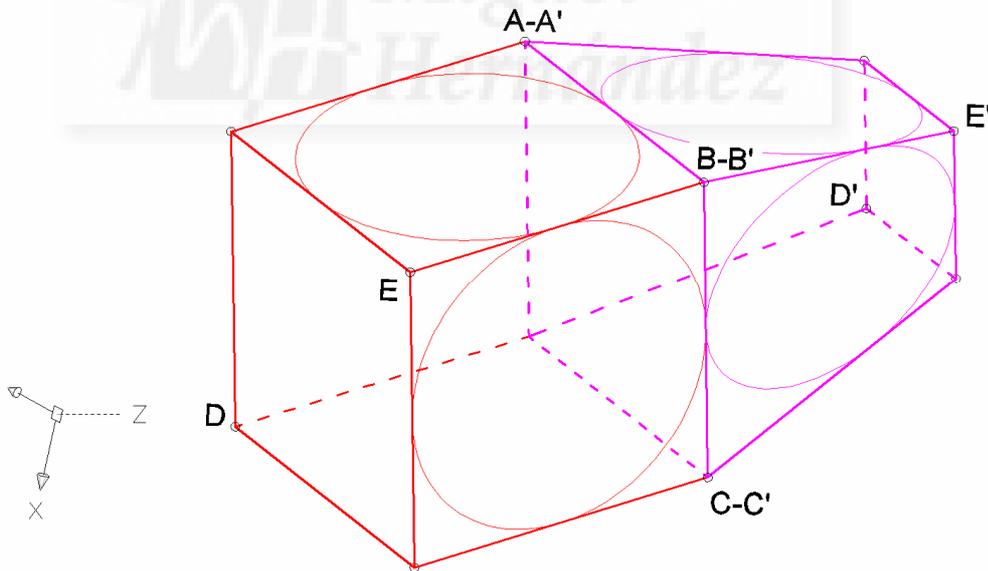


Figura 4.19.a: Para definir la homología 3D resulta cómodo apoyarnos en un cubo y su pirámide homóloga, una opción correcta sería dar los puntos ABCDE-A'B'C'D'E', evitando dar más de tres puntos coplanares. Tomado el triedro ABCE, el único vértice que respeta esta condición es el D. Tampoco ningún plano del SCU debe ser paralelo a la cara ABC.

⁴¹ CUBILLO FLUITERS, José, *Geometría proyectiva*, Madrid, Instituto geográfico y catastral, 1943, p.276.

⁴² S.C.U. Es el Sistema de Coordenadas Universales, es decir, el sistema de referencia XYZ que trae por defecto Autocad.

Todas estas limitaciones se pueden saltar en ocasiones excepcionales y con carácter aleatorio, pues su origen son divisiones por 0 ó indeterminaciones 0/0 en la formulación matemática empleada de forma que debido a imprecisiones de Autocad y Autolisp dan valores distintos a cero, infinitesimales del tipo $1,11 \text{ E-}99$, que permiten continuar los cálculos con resultados muchas veces correctos.

Enunciadas las limitaciones podríamos caer en la tentación (por similitud con *Homograf 2D*) de convertir con una homografía un hexaedro irregular en uno cúbico, lo cual en general no es posible, pues se ha de cumplir una condición de convergencia a un punto de fuga entre las aristas que finalmente deben ser paralelas en el cubo. Es decir, si en un hexaedro las aristas son convergentes a tres puntos, podemos con una homografía transformarlo en un cubo (sus aristas convergen en tres puntos impropios); pero si no son convergentes, en su homólogo tampoco lo serán, incluso siendo impropios.

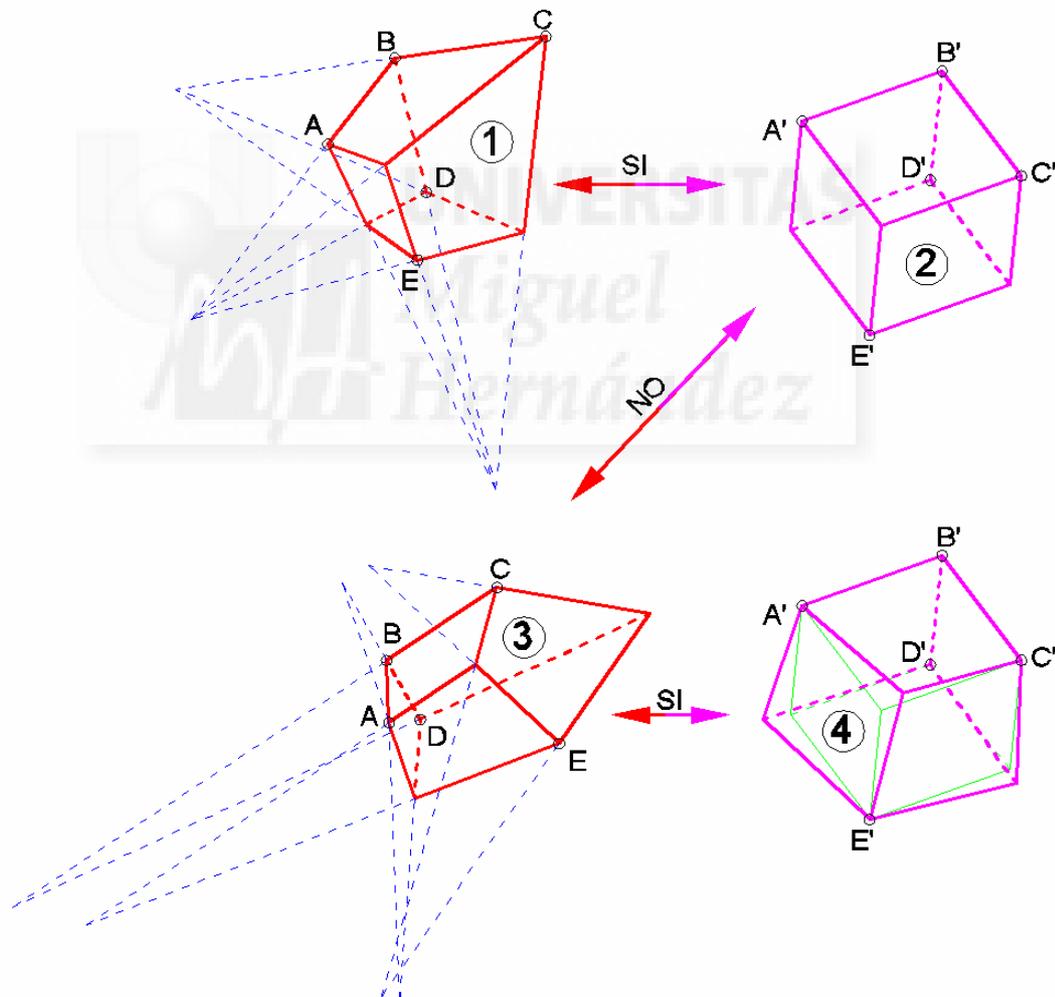
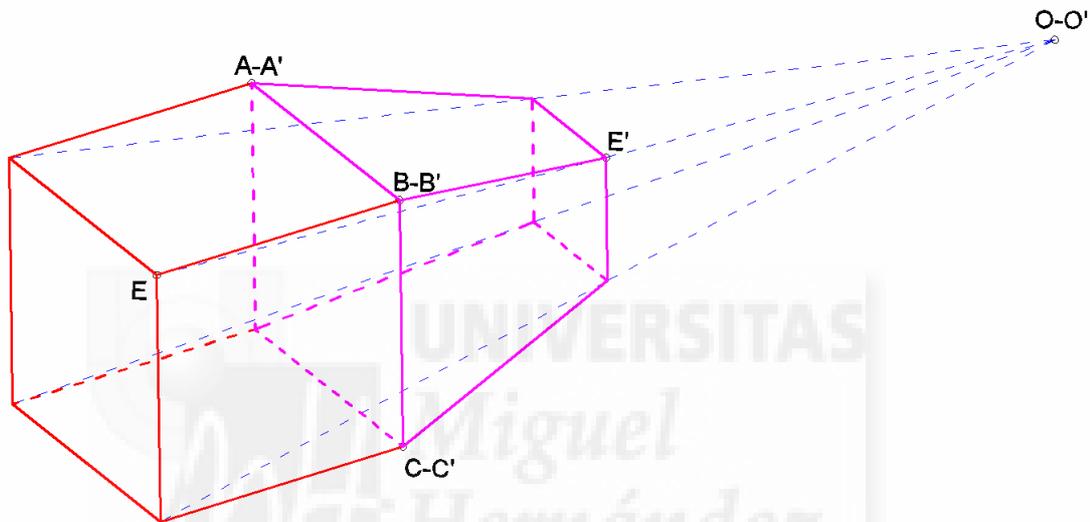


Figura 4.19.b: Un hexaedro irregular (1) se puede transformar mediante una homografía en un cubo (2) si y sólo si sus aristas son convergentes a tres puntos, de forma que el hexaedro (3) no se puede transformar en un cubo. Si se define la homografía entre (3) y (4) por medio de los puntos ABCDE del hexaedro (3) y $A'B'C'D'E'$ del cubo en verde, el resultado como se puede ver respeta los cinco puntos, pero no es el cubo, puesto que los otros tres vértices quedan no coincidentes.

4.2.2. Ejemplos y aplicaciones.

Antes de entrar en casos concretos citaremos las formas más simples de definir los cinco pares de puntos, si bien como ya se ha dicho hay infinidad de pares de puntos. Normalmente nos hemos apoyado en un hexaedro tomando cinco de sus vértices (no coplanares) (ver figura 4.19.a), siendo esta forma adecuada tanto para homologías como para homografías desordenadas. Sin embargo en el caso de las homologías donde conocemos el centro de homología y el plano doble es más simple dar cuatro puntos dobles: tres del plano doble y el centro de homología; y un par de puntos homólogos.



4.19.c: Para definir la homología 3D conocido su centro de homología lo más simple es definirla con cuatro puntos dobles ABCO y un par de homólogos EE'.

Como en la mayoría de los tratados de geometría descriptiva y proyectiva, pasa a estudiarse ahora cómo afectan estas transformaciones proyectivas a la superficie esférica, generando otras cuádricas, la transformación de las cuádricas regladas y terminar con una serie de ejemplos ilustrativos de otras aplicaciones.

4.2.2.1. Superficies homólogas de una superficie esférica. Cuádricas.

Se estudia en primer lugar los resultados obtenidos sobre una superficie esférica con una homología ordenada, definida mediante 5 pares de puntos homólogos, por ejemplo como los de figura 4.20.a, donde por facilitar la comprensión se han dibujado sobre un prisma y su figura homóloga tronco piramidal. Los puntos BCD son dobles, por lo que definen el plano de homología, el E y A se definen sobre un vértice de los opuestos a la cara doble, evitando dar más de tres coplanares. Se determinan también los planos límite (figura 4.20.b) con el fin de condicionar la posición de la superficie esférica. Sabiendo que el punto O es el centro de homología, se obtienen prolongando la diagonal AC hasta el haz proyectivo OQ, paralelo a A'C', de forma que Q es el homólogo de los puntos del infinito de la diagonal A'C', pasamos por Q el Plano Límite paralelo al de homología. De similar

forma obtenemos el Plano Límite' que pasará por P', intersección del haz proyectivo OP', paralelo a la diagonal AC, con la prolongación de la diagonal A'C'.

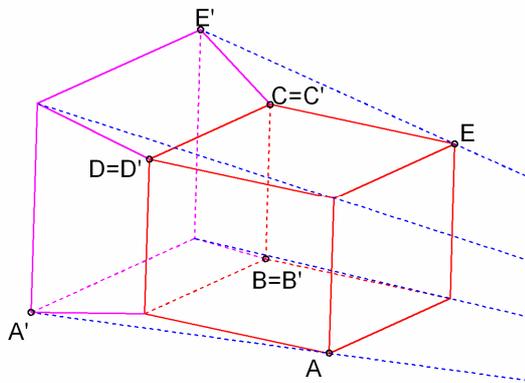


Figura 4.20.a: Definición de la homología aplicada.

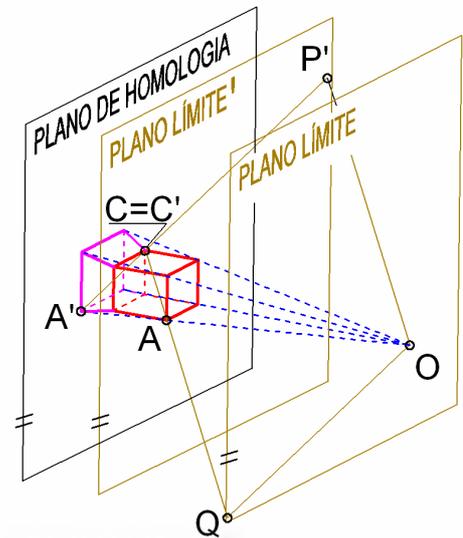


Figura 4.20.b: Planos límite de la homología.

Como se ha dicho, el programa *Homograf3D* sólo trabaja con segmentos rectos y 3dcaras por lo que la superficie esférica se representará por sus meridianos (simplificados a polígonos de n lados, p.e. $n = 20, 50$ ó 100) obteniéndose sus líneas homológicas en la superficie asociada.

Superficie de elipsoides.

Como era previsible, cuando la superficie esférica se sitúa separada del Plano Límite del espacio sin primas se obtienen como superficies homólogas superficies de elipsoides, que en general no serán de revolución excepto en el caso en que la superficie esférica se sitúe con su centro alineado sobre la perpendicular desde O al plano de homología, a la que se llama rayo principal, de forma que este mismo rayo actuará de eje de revolución, sería lo que hemos llamado una homología pseudo-regular. En los restantes casos son superficies de elipsoides de tres ejes principales de distinta longitud, llamados escalenos, con ejes tanto más dispares cuanto más alejemos la superficie esférica de la perpendicular citada. Ver figura 4.21.

Superficies de hiperboloides de dos hojas.

Cuando la superficie esférica es secante al Plano Límite del espacio sin primas las superficies que se obtienen son de hiperboloides de dos hojas, siendo únicamente de revolución en el caso en que la superficie esférica se sitúe con su centro alineado sobre el

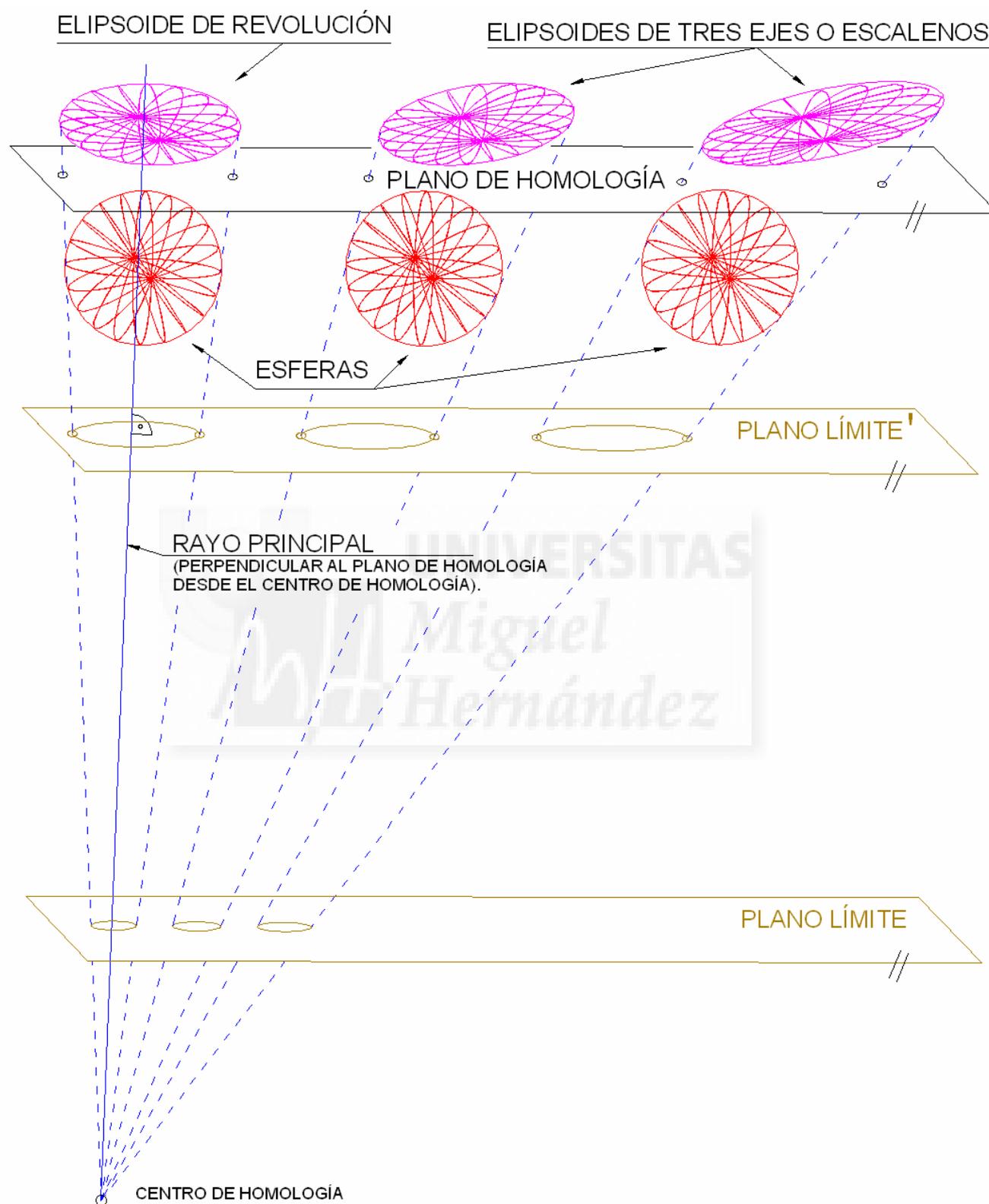


Figura 4.21: Vista de elipsoides como figuras homológicas de la superficie esférica.

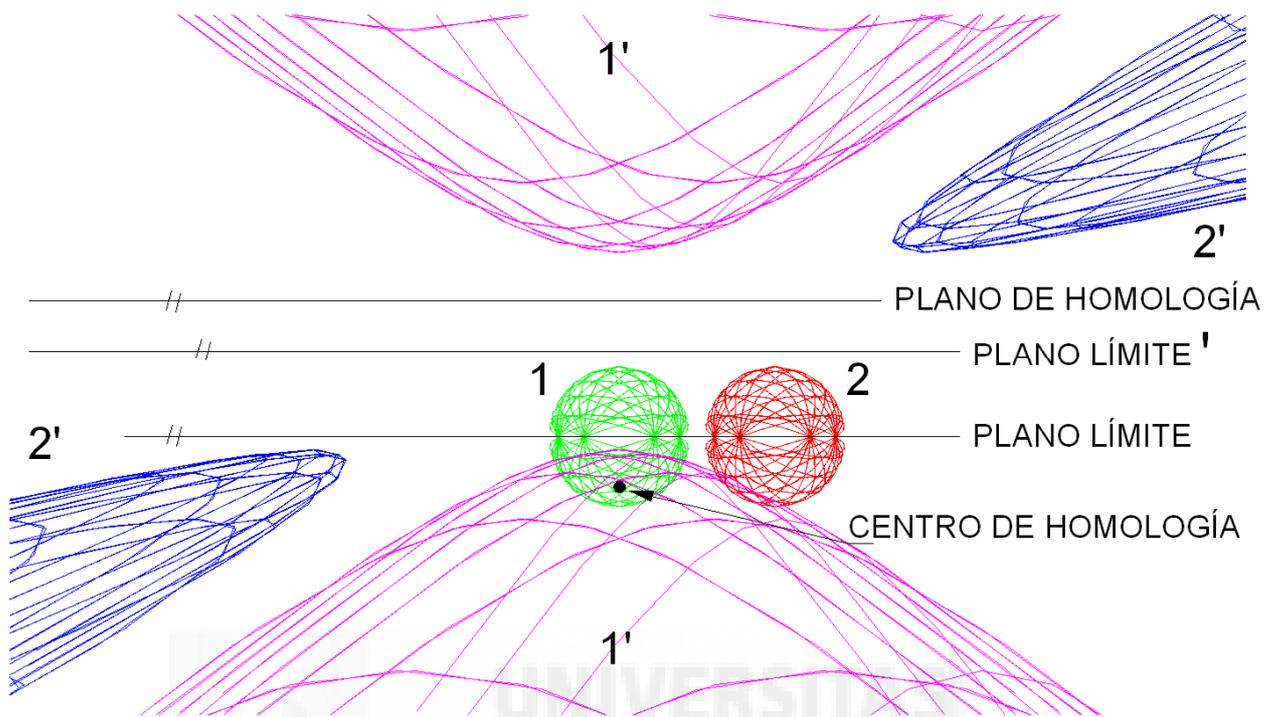


Figura 4.22: Vista de hiperboloides homólogos de superficies esféricas. El 1' es de revolución y el 2' no.

rayo principal, de forma que éste actuará de eje de revolución. En los restantes casos son superficies de hiperboloides elípticos, siendo los ejes de las elipses más distintos en tanto que la superficie esférica se aleja de dicho rayo principal. En la figura 4.22 se han representado dos superficies esféricas con sus superficies homólogas. La superficie esférica 1 genera una superficie de hiperboloide de revolución 1' y la 2 la 2' que no es de revolución. En este caso se ha optado por mallar la superficie esférica según meridianos de dos diámetros perpendiculares; por disponer las superficies esféricas con el centro en el plano límite y por mostrar la figura con los planos límite como “un filo” o “de canto” para simplificar la proyección de la figura obtenida.

Superficies de paraboloides.

Si la superficie esférica es tangente al Plano Límite del espacio sin primas la superficie obtenida es la de un paraboloide elíptico, que solamente es de revolución en el caso de que se sitúe con su centro alineado sobre el rayo principal. En los restantes casos lo son de paraboloides elípticos de ejes tanto más desiguales conforme se aleja la superficie esférica de dicho rayo principal. En la figura 4.23 se ha representado dos esferas con sus paraboloides homólogos, siendo el 1' de revolución y el 2' de no revolución.

Para conseguir que las líneas nazcan del vértice A' del paraboloide 2', ha sido necesario orientar los meridianos de la superficie esférica 2 de forma que uno de sus polos coincida con el homólogo de A', para ello se ha determinado el eje del paraboloide a partir de la sección producida por el plano (figura 4.24) que pasa por el centro de homología O,

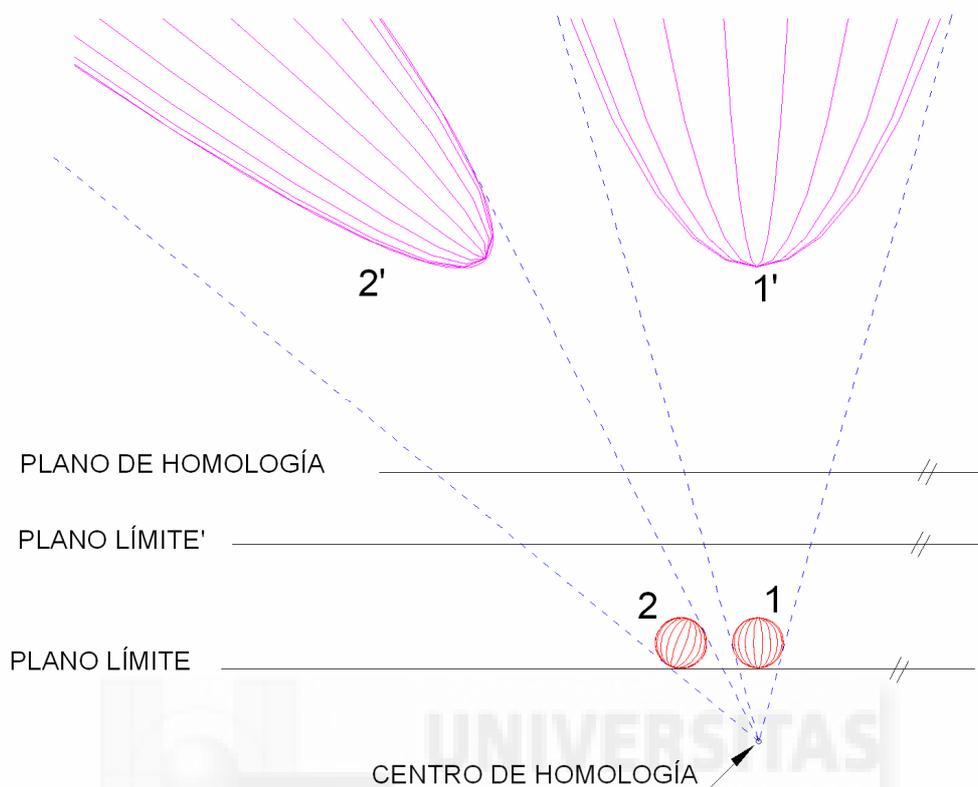


Figura 4.23: Vista de paraboloides homólogos de las superficies esféricas. El 1' es de revolución y el 2' no.

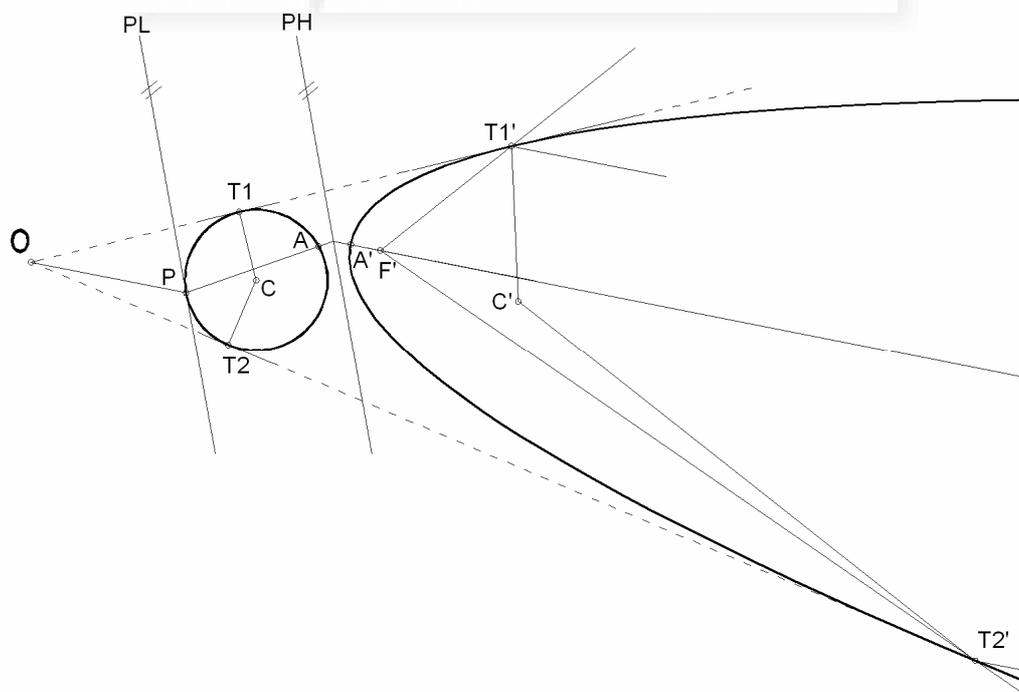


Figura 4.24: Determinación del eje de la parábola sección plana del paraboloides producida por el que pasa por el centro de homología O, el centro de la superficie esférica C y el punto P de tangencia entre el plano límite PL y la superficie esférica 2.

el centro de la superficie esférica C y el punto P de tangencia entre el plano límite PL y la superficie esférica 2 . El segmento OP nos define la dirección del eje del paraboloides y el foco F' dará un punto de paso. Para determinar F' se basa en las tangentes OT_1 y OT_2 , que también lo son de la parábola $OT_1' OT_2'$ y se determinan T_1' y T_2' mediante los segmentos homólogos de CT_1 y CT_2 mediante *Homograf*. Por T_1' y T_2' pasamos un radio vector del punto que es paralelo al eje y por tanto a OP . Los otros radios vectores serán los simétricos respecto de las tangentes OT_1' y OT_2' de forma que donde se cortan está el foco F' , son los simétricos ya que las tangentes a una cónica son las bisectrices de los radios vectores en el punto de tangencia. Conocido el eje paralelo a OP por F' obtenemos su recta homóloga determinando el punto A donde se ha situado un polo de la superficie esférica, de forma que su homólogo estará en el vértice A' del paraboloides.

En los casos donde hay puntos sobre el plano límite, en los hiperboloides o paraboloides obtenidos se dan puntos en los valores límite de variable real⁴³ de Autolisp, es decir, exponenciales elevados de dos dígitos. Estos puntos son aproximaciones a más infinito y menos infinito con lo que aparecen líneas entrecruzándose de uno a otro. Autocad no tiene problema de manejar un dibujo de tan grandes dimensiones pues trabaja con variables de doble precisión, es decir, exponenciales hasta de cuatro dígitos. Hay problemas de visualización del dibujo tal cual se obtiene, por lo que se han borrado todas las líneas de dimensiones desmesuradas con el fin de poder visualizar correctamente la zona próxima a los vértices de las cuádricas.

Deformación de un poliedro geodésico pseudoregular.

Aplicamos ahora las mismas transformaciones a un poliedro geodésico pseudoregular, es decir, a una abstracción poliédrica de los infinitos puntos de una superficie esférica, formada por pentágonos regulares y hexágonos tanto regulares como irregulares. Obtendremos superficies poliédricas inscritas en elipsoides, hiperboloides y paraboloides.

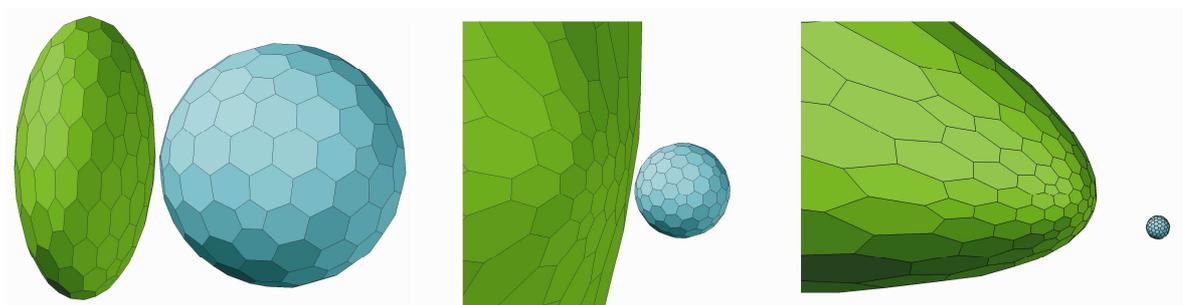


Figura 4.25.a: Transformación de un poliedro pseudoregular inscrito en una superficie esférica en otro, inscrito en una superficie de elipsoide, de hiperboloide (se muestra sólo una hoja para simplificar el dibujo) y de paraboloides, en este caso de la figura las tres cuádricas transformadas son de revolución.

⁴³ La variable real en Autolisp se define para el rango comprendido entre $-9.9999 \text{ E } 99$ y $9.9999 \text{ E } 99$.

Podemos diseñar una cúpula poliédrica a partir de una superficie poliédrica geodésica. Con *Homograf3D* podemos deformarla obteniendo una cúpula rebajada o realzada según nos interese (figura 4.26), en este caso ya serán todos los polígonos irregulares, excepto el pentágono más alto que seguirá siendo regular por quedar paralelo al plano de homología.



Figura 4.25.b: Cúpula geodésica transformada a paraboloides.

Incluso podemos deformarla según una pirámide oblicua como en la figura 4.27 obteniendo en general una superficie poliédrica que se adapta a una superficie cuádrica de las que se han descrito anteriormente, en este caso ya serán todos los polígonos irregulares, excepto el pentágono más alto que seguirá siendo regular, por ser paralelo al plano de homología.

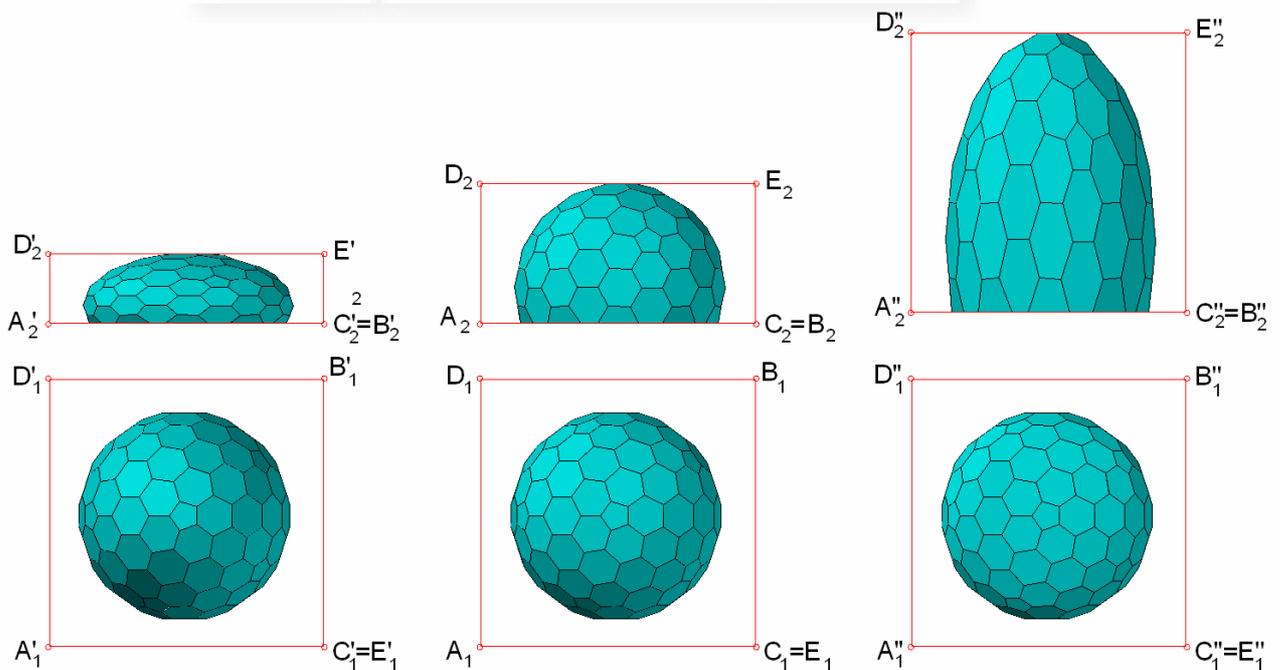


Figura 4.26.a: Cúpula poliédrica rebajada, esférica y realzada. Proyecciones diédricas con indicación de los puntos ABCDE, usados para definir las transformaciones aplicadas con *Homograf3D*.

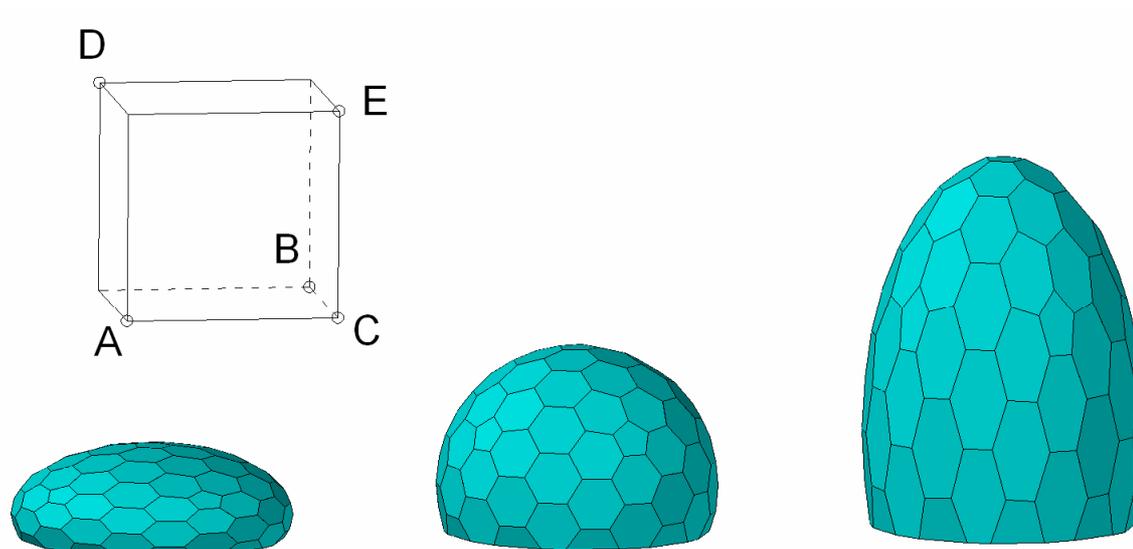


Figura 4.26.b: Axonometría de cúpula poliédrica rebajada, esférica y realzada, compuestas por exágonos y pentágonos, con indicación de los cinco puntos tomados con *Homograf3D* sobre los prismas circunscritos.

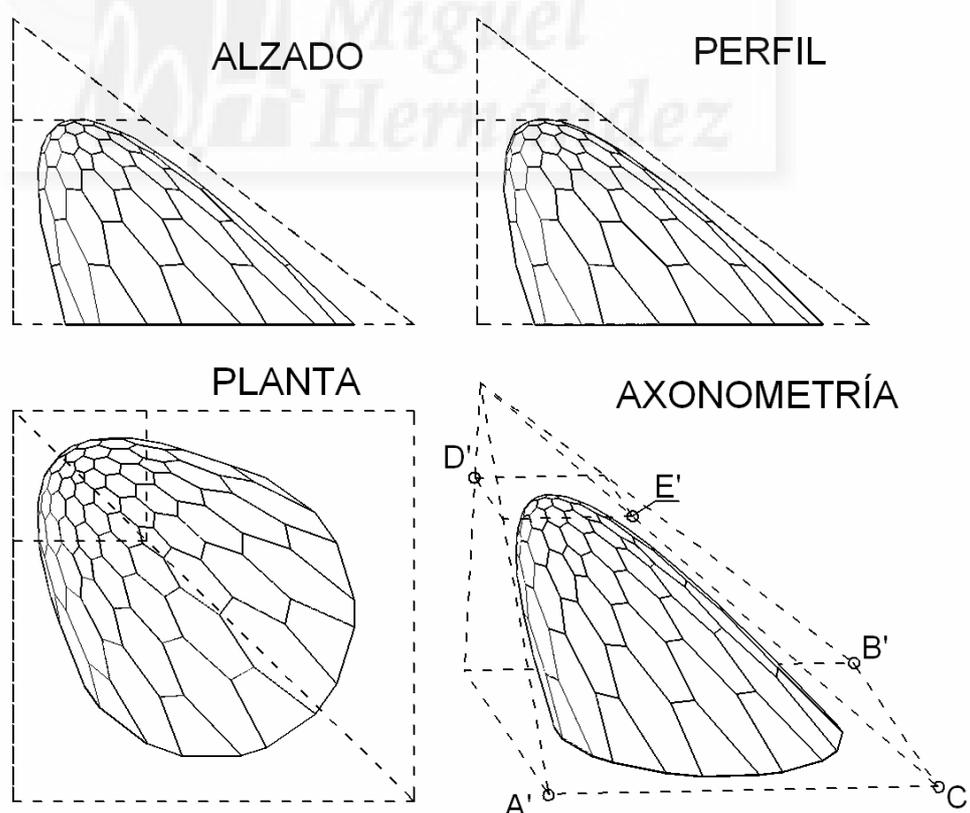


Figura 4.27: Cúpula poliédrica inscrita en una piramide irregular, compuesta por exágonos y pentágonos. $A'B'C'D'E'$ son los puntos empleados para definir la homografía.

Deformación de una cúpula poliédrica de trapezoides simétricos.

Partimos en este caso de una cúpula poliédrica circunscrita a una esfera, formada por trapezoides simétricos, con base 12 y una inclinación del primer trapecio de 15°. Si rebajamos con *Homograf 3D* a la mitad de su altura y la realizamos a doble altura obtendríamos cúpulas como las que se muestran en la figura 4.28.

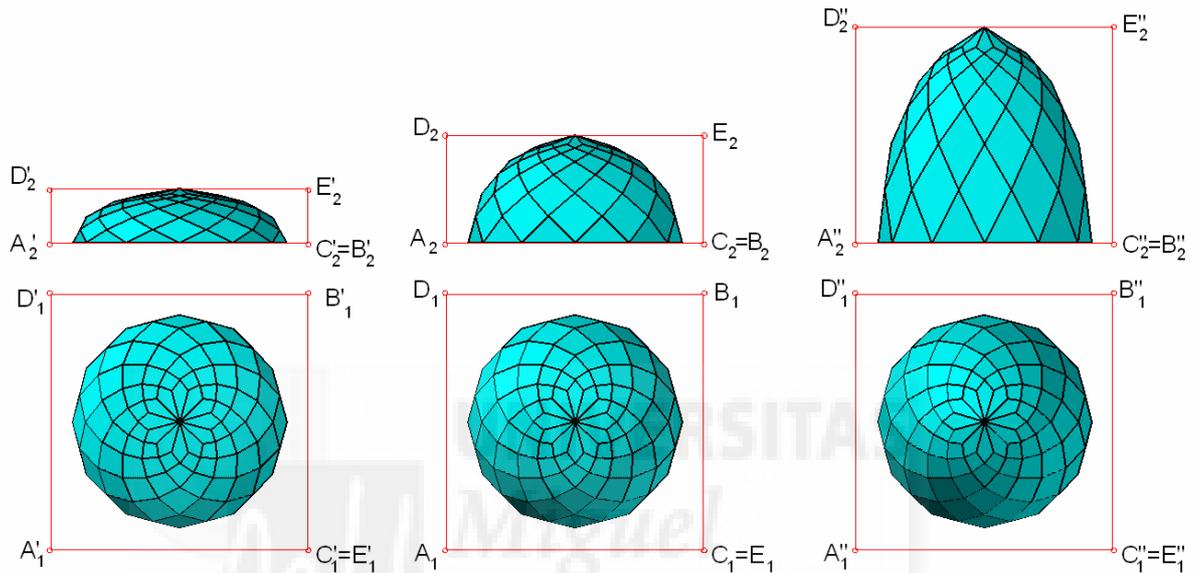


Figura 4.28.a: Cúpula poliédrica rebajada, esférica y realzada, compuestas por trapezoides simétricos. Vistas diédricas con indicación de los puntos ABCDE utilizados para definir en *Homograf3d* la homografía.

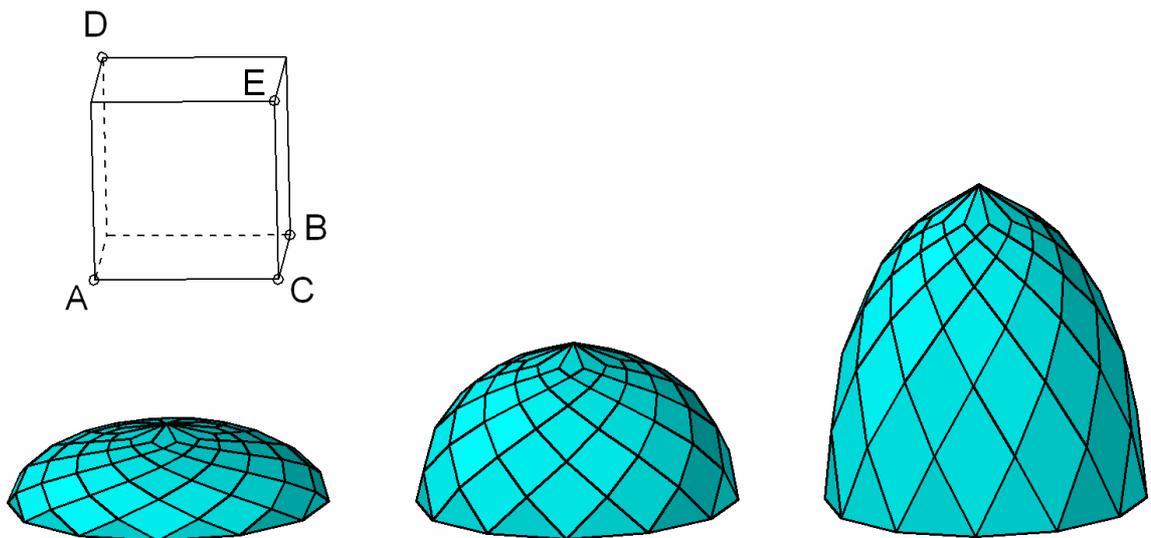


Figura 4.28.b: Cúpula poliédrica rebajada, esférica y realzada, compuestas por trapezoides simétricos. Vistas axonómicas, con indicación de los cinco puntos tomados con *Homograf3D* sobre los prismas circunscritos.

O bien podemos deformarla según una pirámide oblicua, obteniendo como en el caso de la figura 4.29 una superficie circunscrita a un elipsoide de tres ejes, en general a una superficie cuádrica envolvente de las ya descritas.

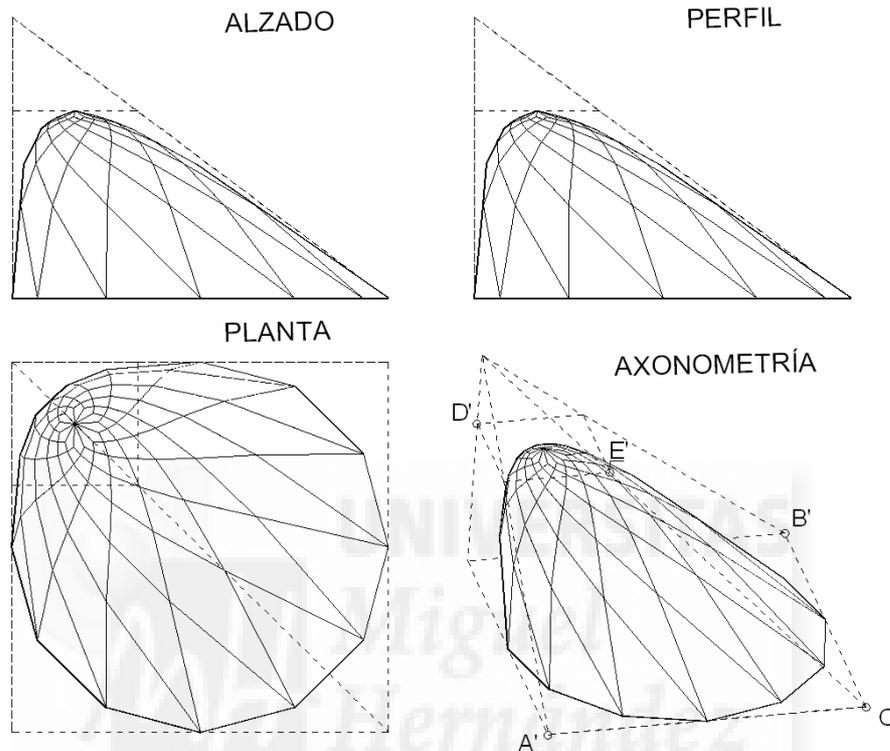


Figura 4.29: Cúpula poliédrica oblicua, compuesta por trapezoides. A'B'C'D'E' son los puntos empleados para definir la homografía.

4.2.2.2. Generación proyectiva de las cuádricas regladas.

En este apartado nos encontramos con bibliografía que se contradice. El hiperboloide de una hoja se puede obtener según Manuel Fernández Rodríguez como la superficie homóloga de una esfera de radio infinito y aporta una extraña construcción dibujada en sistema cónico en su libro *Homología en 3D*. Esta construcción no se ha podido dibujar por parte del autor de esta tesis con *Homograf 3D* sobre Autocad en 3D por los motivos que aporta Ángel Taibo Fernández en su libro de *Geometría descriptiva y sus aplicaciones Tomo II*, donde afirma: “... en toda relación homológica entre dos formas, éstas se corresponden elemento a elemento, es decir, punto a punto, recta a recta y plano a plano, vemos la imposibilidad de conseguir una superficie reglada por transformación homológica de otra que no lo sea...”. Cabría, llegado este punto, la discusión de si una esfera de radio infinito se puede considerar una superficie reglada, es decir, un plano, pero considerando como válida la hipótesis anterior de que “en toda relación homológica entre dos formas, estas se corresponden elemento a elemento, es decir, ... plano a plano,..”, no vemos como se puede establecer dicha relación entre un plano y un hiperboloide de una hoja.

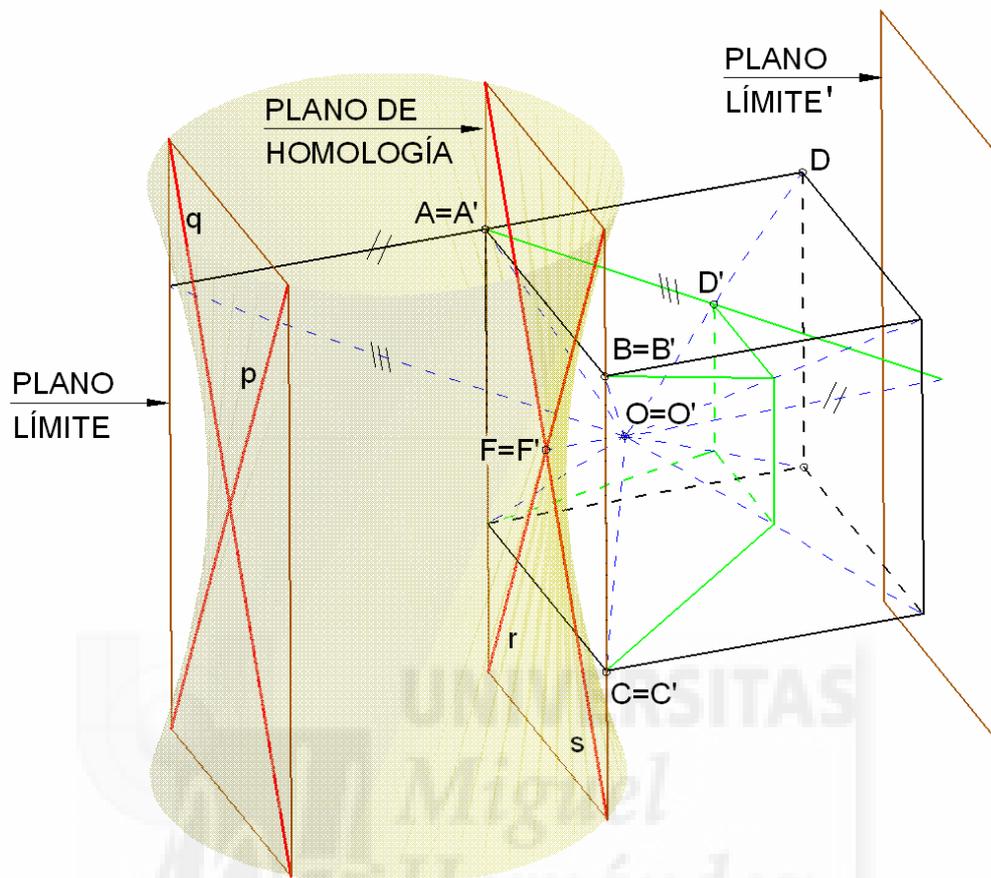


Figura 4.30.a: Definición de la homología a aplicar al hiperboloide de una hoja para obtener un paraboloide hiperbólico. Se han usado con *Homograf 3D* los pares de puntos AA'BB'CC'DD'OO'. En este caso se ha optado por superponer el cubo con el tronco de pirámide con el fin de sacar fuera los planos límite y evitar la superposición con el hiperboloide

El paraboloide hiperbólico se puede obtener como homólogo del hiperboloide de una hoja (ver figuras 4.30), basta con situar dos de sus generatrices “q” y “p” sobre el plano límite; y por supuesto al revés, podemos obtener el hiperboloide de una hoja a partir de un paraboloide hiperbólico.

En el caso de la figura adjunta se han situado además las dos generatrices diametralmente opuestas “r” y “s” sobre el plano de homología de forma que su punto de intersección F nos dará como homólogo F' el punto de ensilladura del paraboloide.

Para definir la homología se ha utilizado una construcción auxiliar de un cubo ABCD fijando el centro de homología en “O”, y su tronco de pirámide homóloga A'B'C'D', usándose como quinto par de puntos OO' centro de la homología y determinado a mano con Autocad la obtención de los dos planos límite.

En la figura 4.30.b resultante se ha borrado parte del paraboloide hiperbólico obtenido, dado que es de tamaño infinito, para poder dar nitidez a la figura.

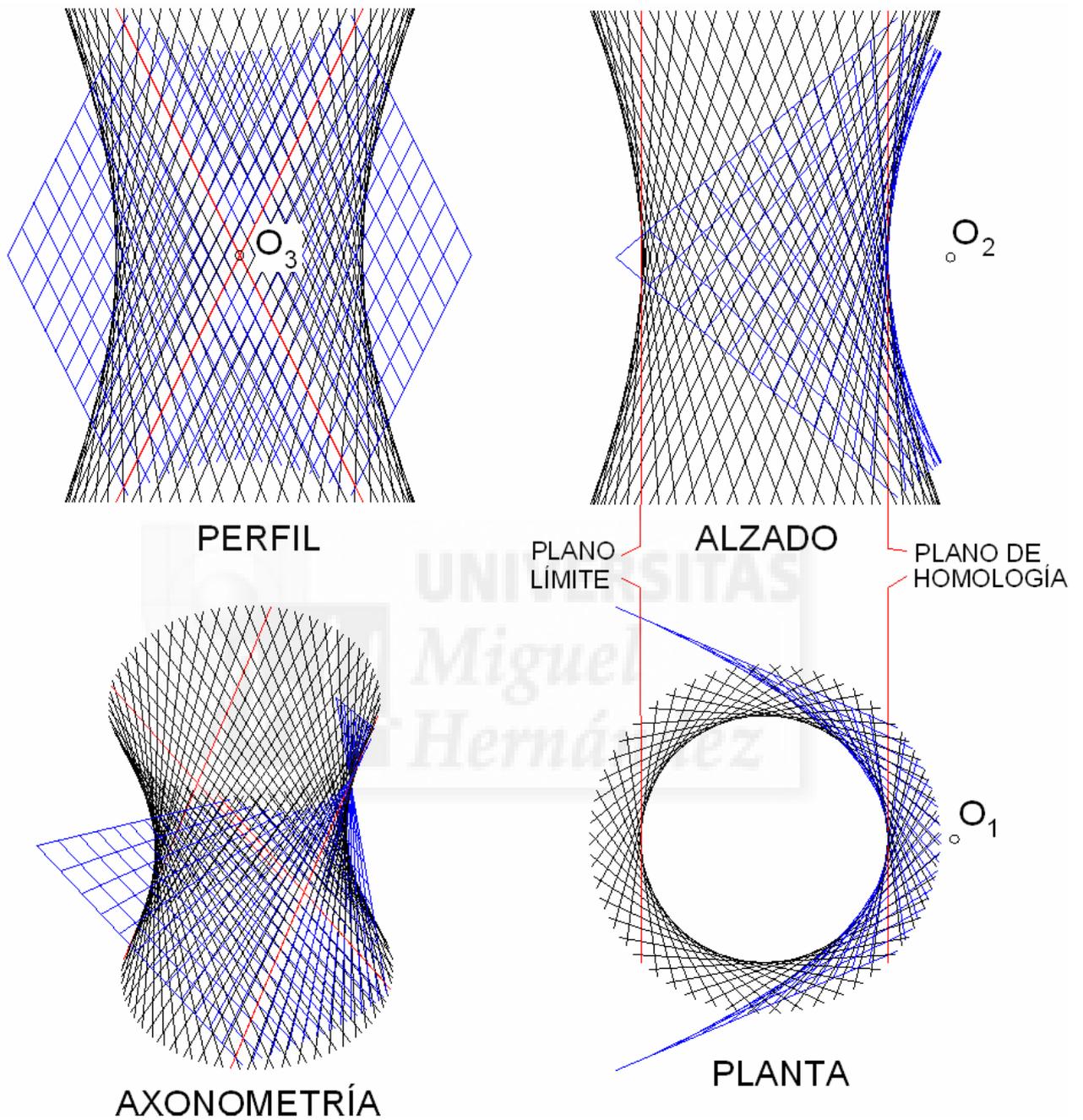


Figura 4.30.b: Paraboloido reglado homólogo de un hiperboloido de una hoja. O es el centro de la homología y las generatrices rojas son las situadas en el plano límite y en el plano de homología.

Lógicamente si intentásemos obtener la homología inversa, a partir del paraboloido hiperbólico de la figura 4.30.b sacar el hiperboloido de una hoja, sólo obtendríamos parte de él, pues faltaría la zona próxima al plano límite.

4.2.2.3. Arquitectura ilusoria y escenografías teatrales.

Palacio Spada de Roma.

También encontramos aplicación a las homografías 3D en la llamada arquitectura ilusionista, de la que como ejemplo clásico podemos citar el *pasaje del Palacio Spada de Roma, construido hacia 1638 por el arquitecto Borromini, que se diseñó para dar la sensación de mayor profundidad a un espacio que no la tenía.*⁴⁴

Esta utilidad de dar apariencia de mayor profundidad le da gran aplicación en las escenografías teatrales donde sólo se dispone de la profundidad del escenario y se recrean espacios mayores, técnica ampliamente descrita en el artículo del profesor Lluís Villanueva Bartrina: “*Arquitectura escenògrafica i geometria.*”

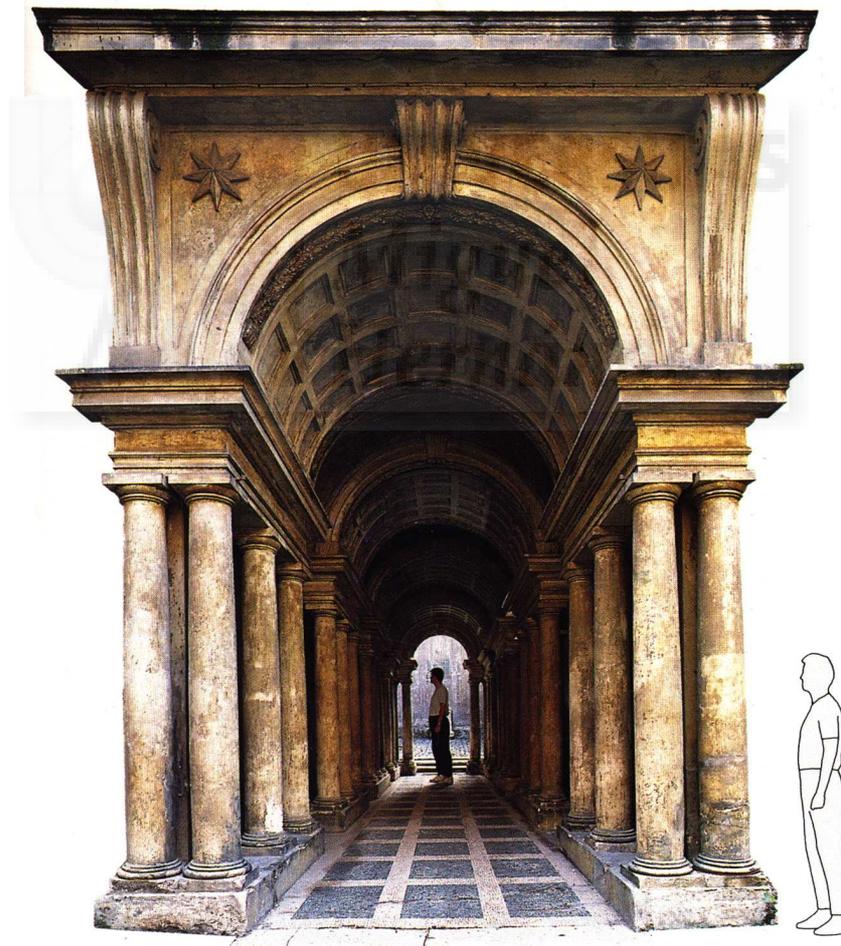


Figura 4.30: Vista frontal del pasaje del palacio Spada de Roma.

⁴⁴ MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón, *Tesis doctoral: Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*, U.P.V. 2003, p. 91.

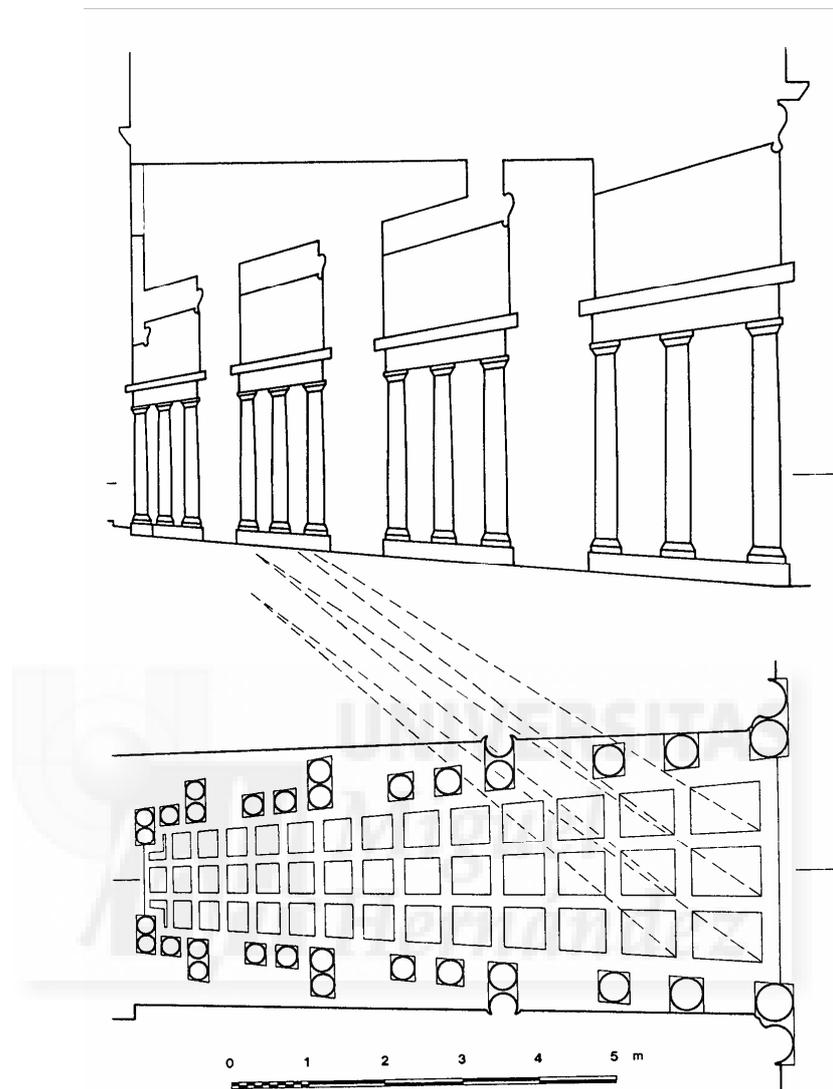


Figura 4.31.: Planos pasaje palacio Spada. Donde el profesor Villanueva hace notar que las diagonales del pavimento no fugan a un único punto, como debería ocurrir si estuviese realizado por homología, al igual que las secciones de las columnas que son circulares y deberían ser elípticas como se aprecia en la figura 4.33.

En la figura 4.30 se aporta una fotografía frontal con dos figuras humanas, en el plano anterior y posterior de la galería, a fin de poder apreciar el tamaño real de la misma, pues el efecto perspectivo está tan conseguido que engaña al observador si no fuese por las siluetas humanas. En la figura 4.31 podemos ver la planta y el alzado de la construcción. También se han obtenido a partir de un modelo virtual simplificado y de medidas aproximadas, constituido por 3Dcaras de Autocad proyecciones de un modelo sin deformar y del deformado con *Homograf3D*. La construcción del modelo sin deformar se ha basado en revoluciones y 3Dcaras repetidas mediante el comando matriz de Autocad. Destacar la simplicidad del modelado debido al carácter repetitivo de la construcción. Se ha obtenido planta, alzado, perfil y una axonometría posterior en la figura 4.32.

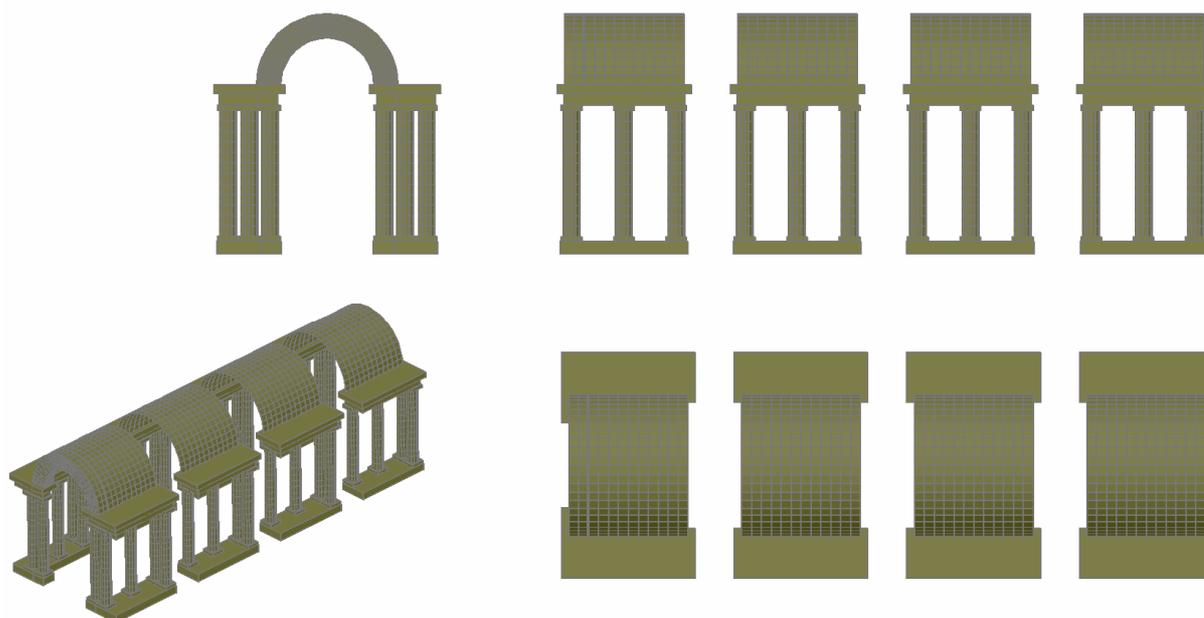


Figura 4.32. Planta, alzado, perfil y perspectiva axonométrica vista desde detrás del modelo sin deformar.



Figura 4.33: Planta con semisección, alzado, perfil y perspectiva axonométrica vista desde detrás del modelo deformado. Se aporta un detalle de la planta seccionada para mostrar los pilares de sección elíptica (si bien al tratarse de un modelo de 3Dcaras de Autocad estas elipses están aproximadas por polígonos de 12 lados).



Figura 4.34.a: Perspectiva cónica frontal del modelo sin deformar y del modelo deformado, tomando como punto de vista el centro de la homología, las vistas son idénticas al coincidir las pirámides visuales.



Figura 4.34.b: Perspectiva cónica frontal del modelo sin deformar y del modelo deformado, tomando como punto de vista el situado a triple distancia que en 4.34.a y sobre la misma visual principal, las vistas son similares pero se aprecia más profundidad en el deformado.

Posteriormente se ha aplicado *Homograf3D* para deformarlo, obteniéndose el modelo de la figura 4.33 de longitud un tercio que el anterior, donde de nuevo se ha representado planta, alzado, perfil y una perspectiva axonométrica posterior, eligiéndose posterior expresamente para destacar la deformación en la perspectiva y que no hiciese el efecto de perspectiva cónica.

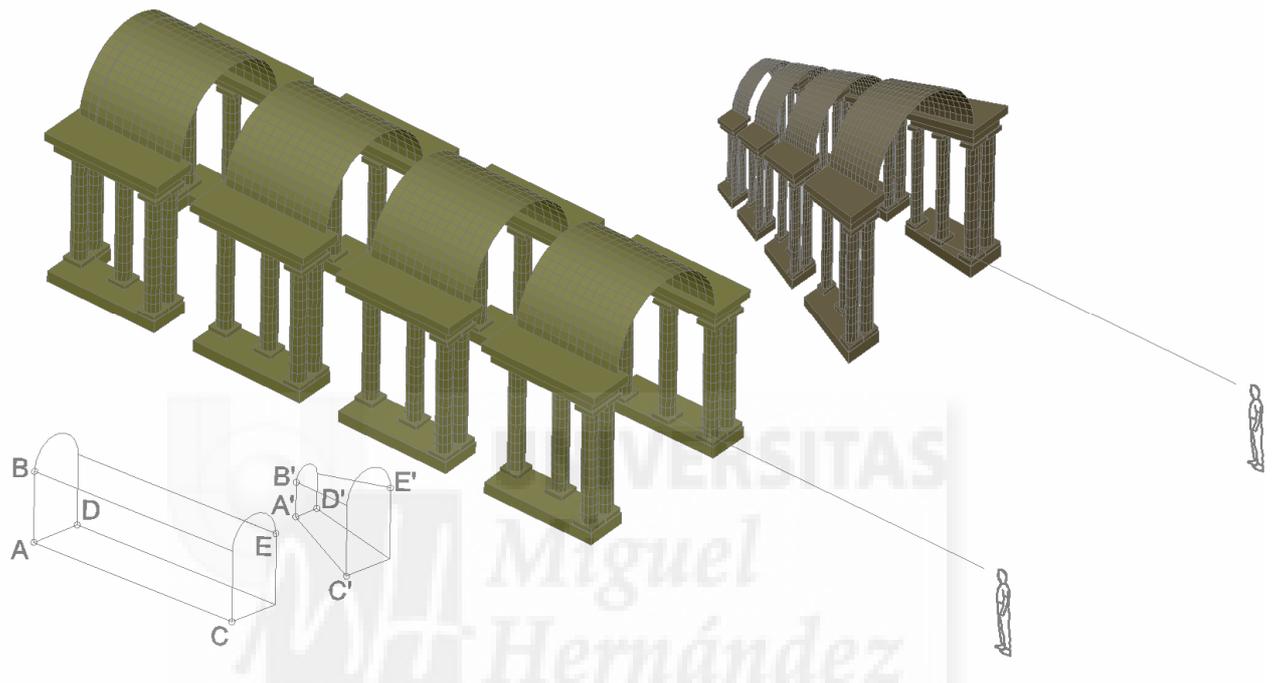


Figura 4.35.a: Puntos de vista de las perspectivas cónicas frontales de ambos modelos. Los pares de puntos AA'BB'CC'DD'EE' se han tomado como se indica en el esquema.

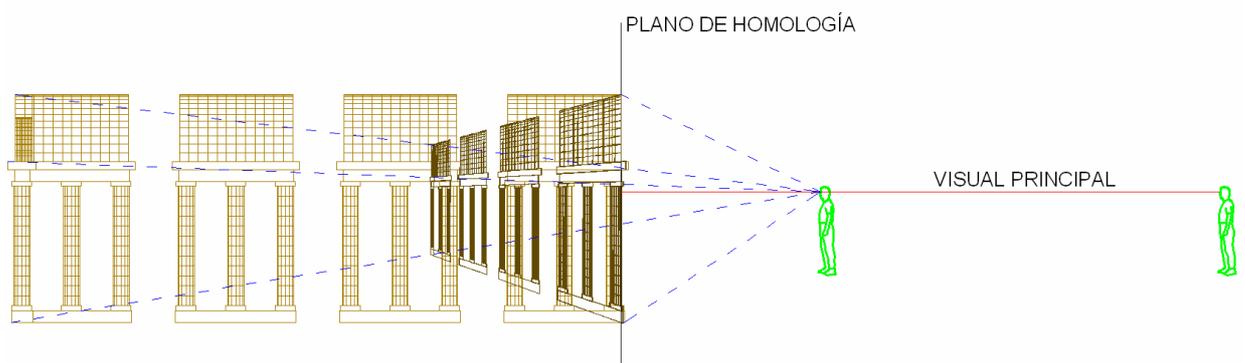


Figura 4.35.b: Para la obtención de la figura 4.34.a se han situado los observadores sobre el centro de homología y para la 4.34.b a triple distancia del plano del primer arco (plano doble) y sobre la visual principal

Finalmente en la figura 4.34.a y b se muestra una perspectiva cónica frontal en la que se pretendía exagerar la dimensión de la galería, efecto conseguido, como se puede apreciar al comparar el modelo sin deformar con el deformado que en realidad es un tercio

de largo. Para la obtención de estas perspectivas frontales se ha dispuesto el observador tal y como se muestra en la figura 4.35, de forma que su visual coincida con la dirección del rayo proyectante principal de la homografía aplicada para deformar el modelo. Si el observador se sitúa exactamente en el centro de la homología el efecto perspectivo se logra al 100% como se muestra en 4.34.a, si en cambio se sitúa más cerca o más lejos el efecto varía en la medida que se mezclan en efecto perspectiva real y el ficticio, resultando el efecto de realzar la profundidad más exagerado a medida que el observador se aleja, tal y como se puede apreciar en la figura 4.34.b. en la que se ha situado al observador a triple distancia del plano doble (plano del primer arco) de la que está el centro de la homología.

Cámara Ames.

Otro ejemplo ilusorio lo encontramos en el efecto producido por la cámara del oftalmólogo Adelbert Ames, Jr (1946). Consiste en dar falsas sensaciones de tamaño de elementos situados en el interior de un habitáculo aparentemente ortoédrico.

Para la construcción del ejemplo de las figuras 4.36 y 4.37 partimos de un ortoedro ABCDEFGH, situando al observador junto a una de sus paredes (la ABCD) con su visual OV orientada paralela a la arista AE, de forma que mire a la pared EFHG sobre la que hemos dibujado dos puertas dispuestas simétricas.

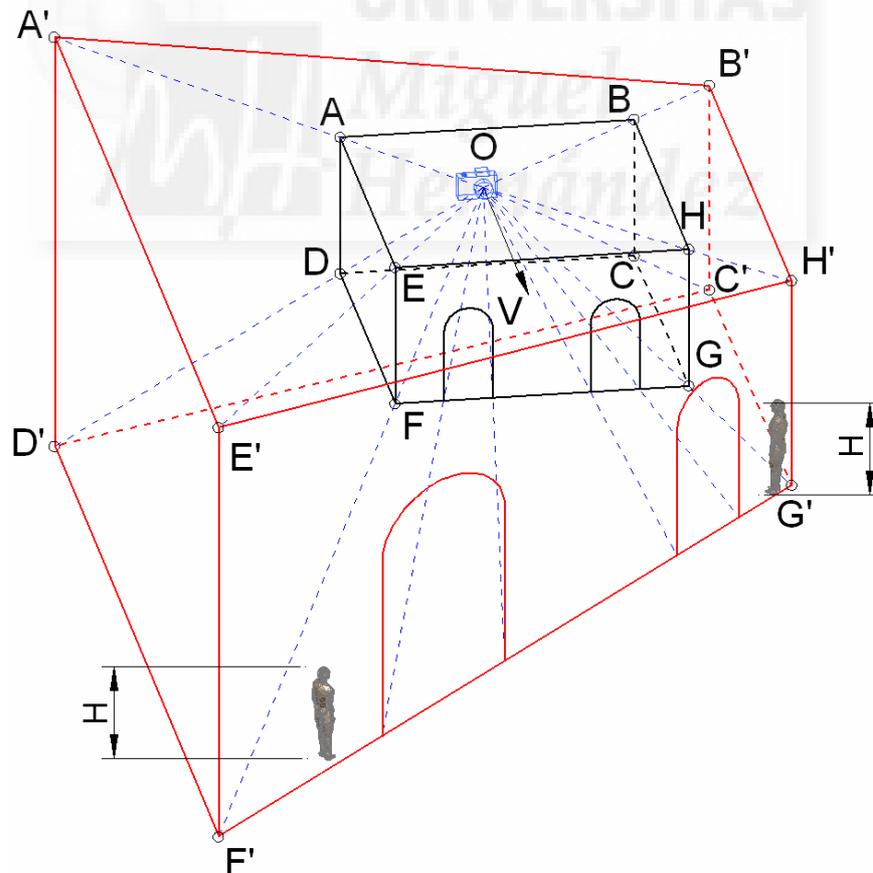


Figura 4.36.a: Perspectiva axonométrica del proceso constructivo de la cámara de Ames.

El punto O del observador será nuestro centro de homología para transformar el ortoedro en el hexaedro $A'B'C'D'E'F'G'H'$, de forma que el segmento $E'F'$ mida el doble que $G'H'$. De forma que la pirámide visual del ortoedro y la del hexaedro coincidan tal y como propone el profesor Villanueva en su artículo “*Arquitectura escenográfica i geometria.*”

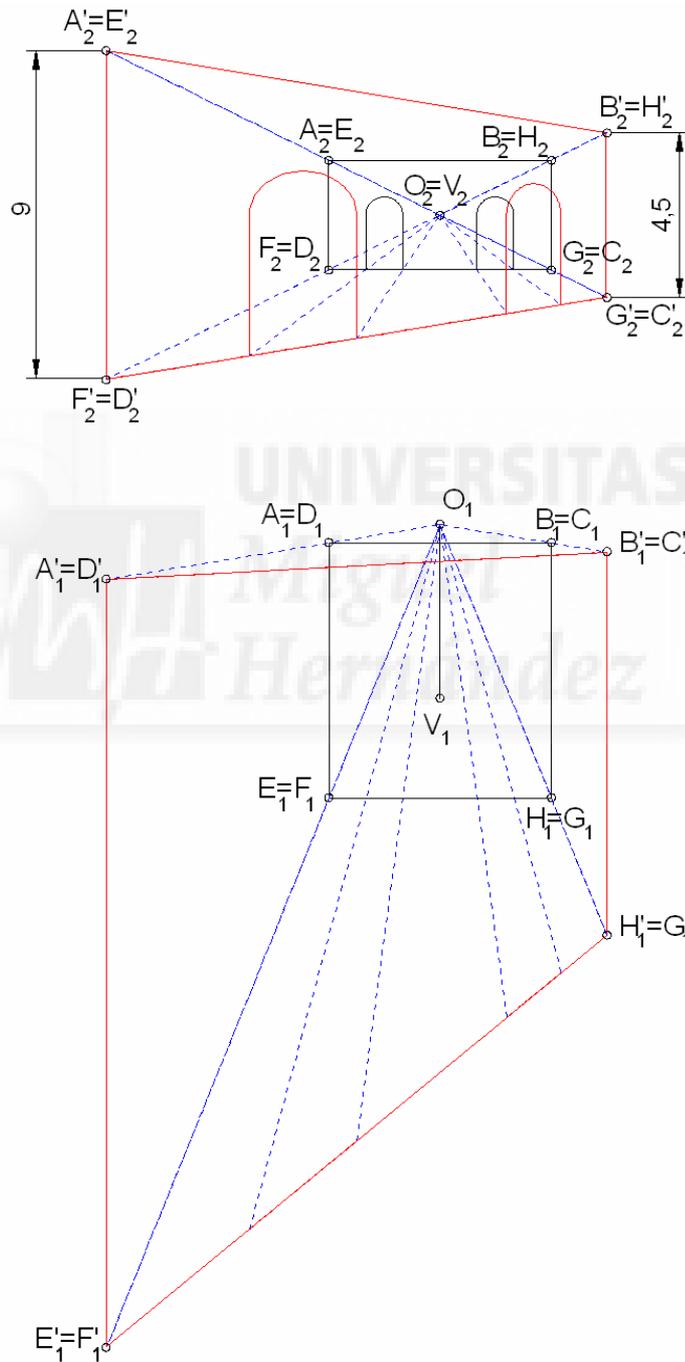


Figura 4.36.b: Vistas diédricas del proceso constructivo de la cámara de Ames.

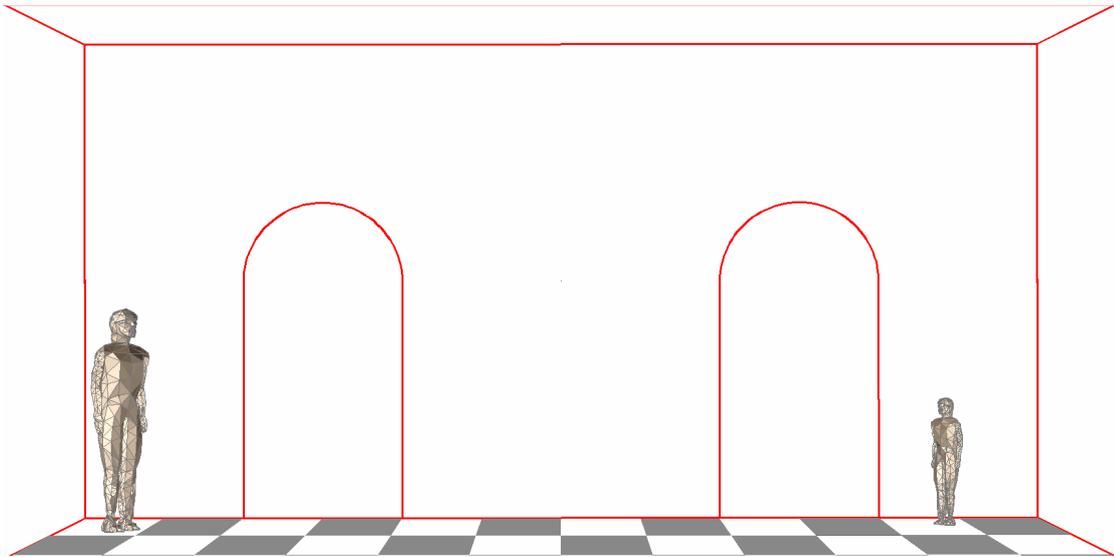


Figura 4.37: Efecto visual de la cámara Ames.

Hay infinitas construcciones, por lo que se ha fijado la de la cara $E'F'G'H'$, de forma que manteniendo su verticalidad $F'E'$ mida 9 m. y $H'G'$ mida 4,5m. por ejemplo. Puesto que la homología no queda determinada con cuatro puntos coplanares y el centro de homología, fijamos que las caras laterales $A'E'F'D'$ y $B'H'G'C'$ sean homotéticas, partiendo de los lados ya conocidos $E'F'$ y $G'H'$ de forma que estas caras siguen siendo rectangulares. Con esto está ya definidos todos los vértices del hexaedro. Podemos ver otras construcciones de las infinitas que existen si no exigimos que sean homotéticas en la figura 4.38

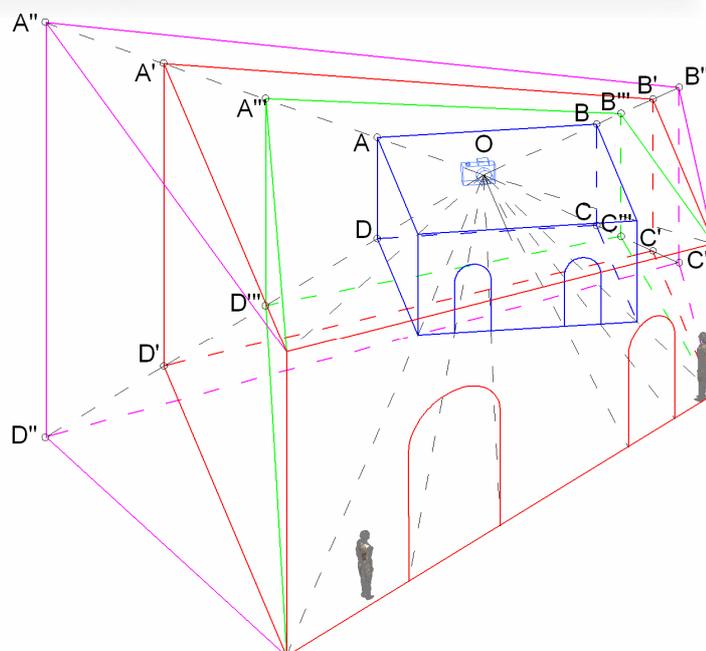


Figura 4.38.a: Vista axonométrica de la obtención de varias soluciones según se tomen las caras laterales homotéticas ($A'B'C'D'$) o no ($A''B''C''D''$ y $A'''B'''C'''D'''$).

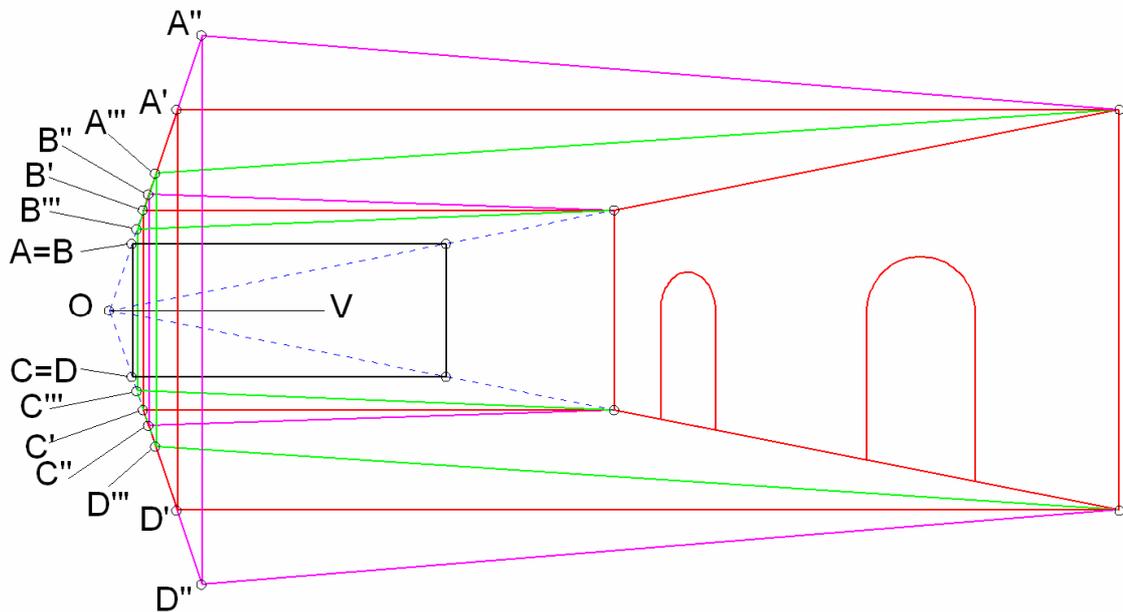


Figura 4.38.b: Vista de perfil de la obtención de varias soluciones según se tomen las caras laterales homotéticas ($A'B'C'D'$) o no ($A''B''C''D''$ y $A'''B'''C'''D'''$). Obsérvese que en el caso de la homotecia (en rojo) las paredes laterales siguen siendo rectangulares.

Una vez construido el ortoedro y el hexaedro con Autocad tenemos sobradamente definidas las homologías 3D. Para usar *Homograf 3D* se toman tres puntos dobles $FF'GG'HH'$ del plano de homología, el centro de homología O , también como punto doble, y el par de puntos AA' quedando definida la transformación. Homología que aplicamos para transformar el dibujo de las puertas y del suelo (el arco se ha aproximado con una poligonal de 100 lados). Finalmente situamos en cada esquina F' y G' una silueta humana.

El resultado que se obtiene como visualización desde la posición del observador lo podemos ver en la figura 4.37, donde se aprecia el efecto ilusorio por el que la silueta humana de la derecha parece la mitad de alta que la de la izquierda, cuando realmente es igual, pero está situada más lejos, igual que la puerta adyacente que es de mayor tamaño para aparentar ser igual a la otra pese a estar más lejos.

4.2.2.4. Bajorrelieves.

Encontramos otra aplicación a las homografías 3D en la generación de geometrías para bajos relieves, tan presentes en obras artísticas en multitud de muros. O incluso en obras ilusorias como la del ábside ficticio de Santa María presso San Satiro en Milán construido por Donato Bramante (1444-1514). Del cual de una manera muy simplificada se ha obtenido un modelo en Autocad. Para ello nos hemos basado en un modelo ya simplificado por Lluís Villanueva y Bartrina en su artículo de *Arquitectura escenogràfica y geometria* del que se muestra en planta, alzado, perfil e isométrico en la figura 4.40.

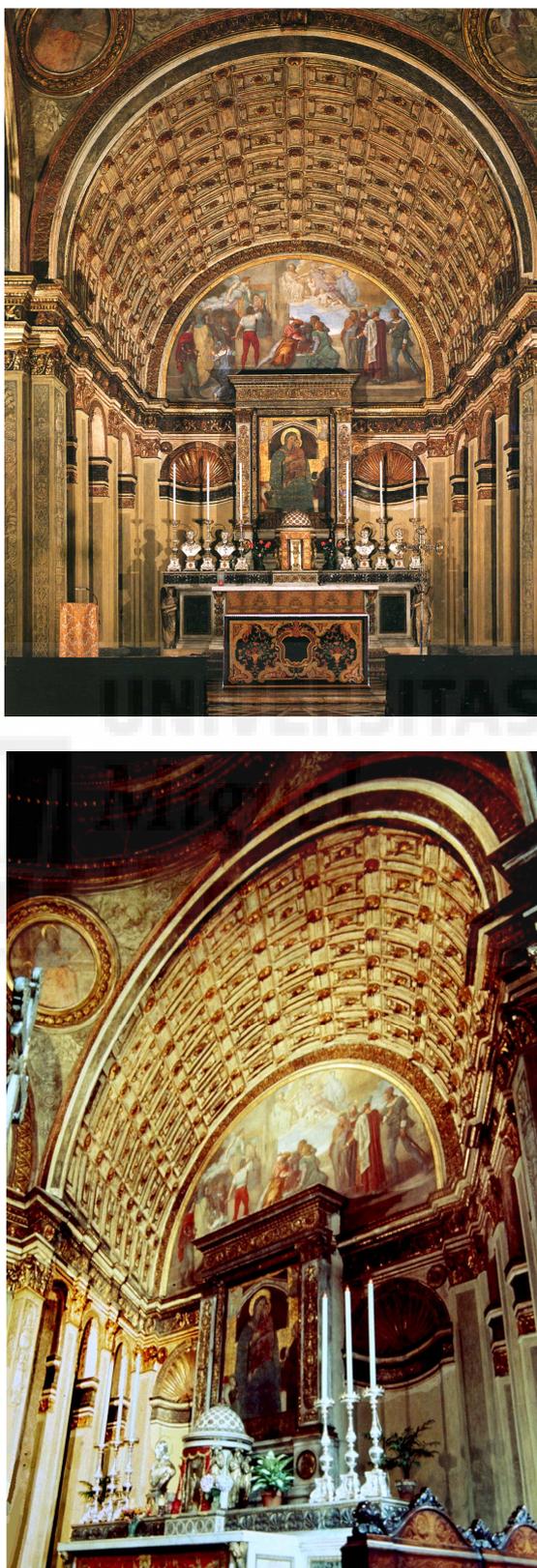


Figura 4.39: Bajo relieve del ábside ficticio de Santa María presso San Satiro en Milán. Arriba vista frontal, donde se logra el efecto buscado de profundidad; y bajo vista en escorzo que revela que se trata de un bajo relieve.

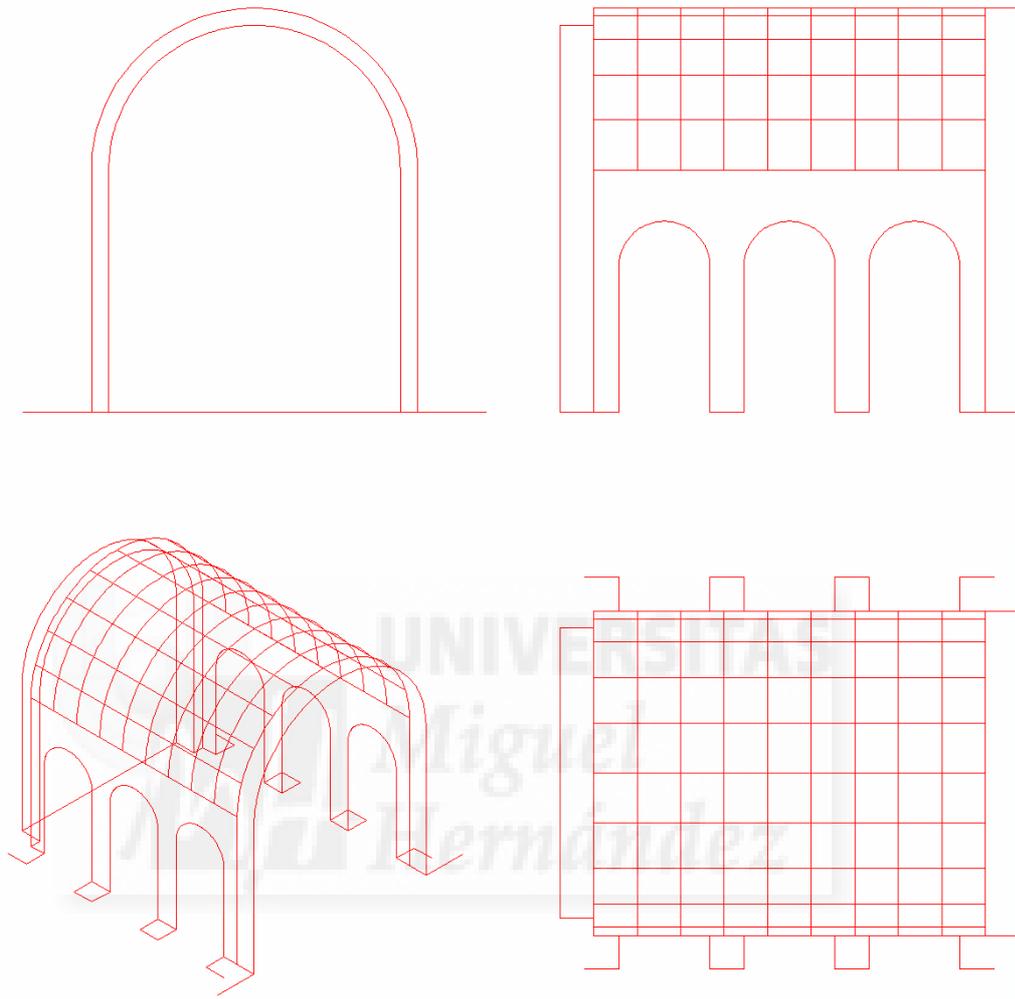


Figura 4.40: Planta, alzado, perfil y perspectiva isométrica del modelo simplificado del ábside ficticio de Santa María presso San Satiro.

En este caso se ha optado por un modelo alámbrico y no mallado con 3Dcaras como el del pasaje del palacio Spada de Roma, para afinar mejor los arcos sin enmarañar de líneas. Así pues los arcos se han discretizado en polígonos de 100 lados, de forma que tras la fuerte deformación al aplicar la homología siguen aparentando ser arcos. Para definir la homología a aplicar (ver figura 4.41.a) hemos tomado, de acuerdo con lo realizado por Villanueva, el punto de vista V (centro de la homología), el plano ACD como plano doble (plano de homología) y un par de puntos BB' que definen la profundidad del ábside y la profundidad para el bajo relieve. El punto K es el punto de fuga de las líneas longitudinales al ábside (punto del plano límite por tanto, ver figura 4.41.b), si bien este punto no lo usaremos con *Homograf 3D*, ya que los cinco pares de puntos necesarios serán VACD como puntos dobles y BB'.

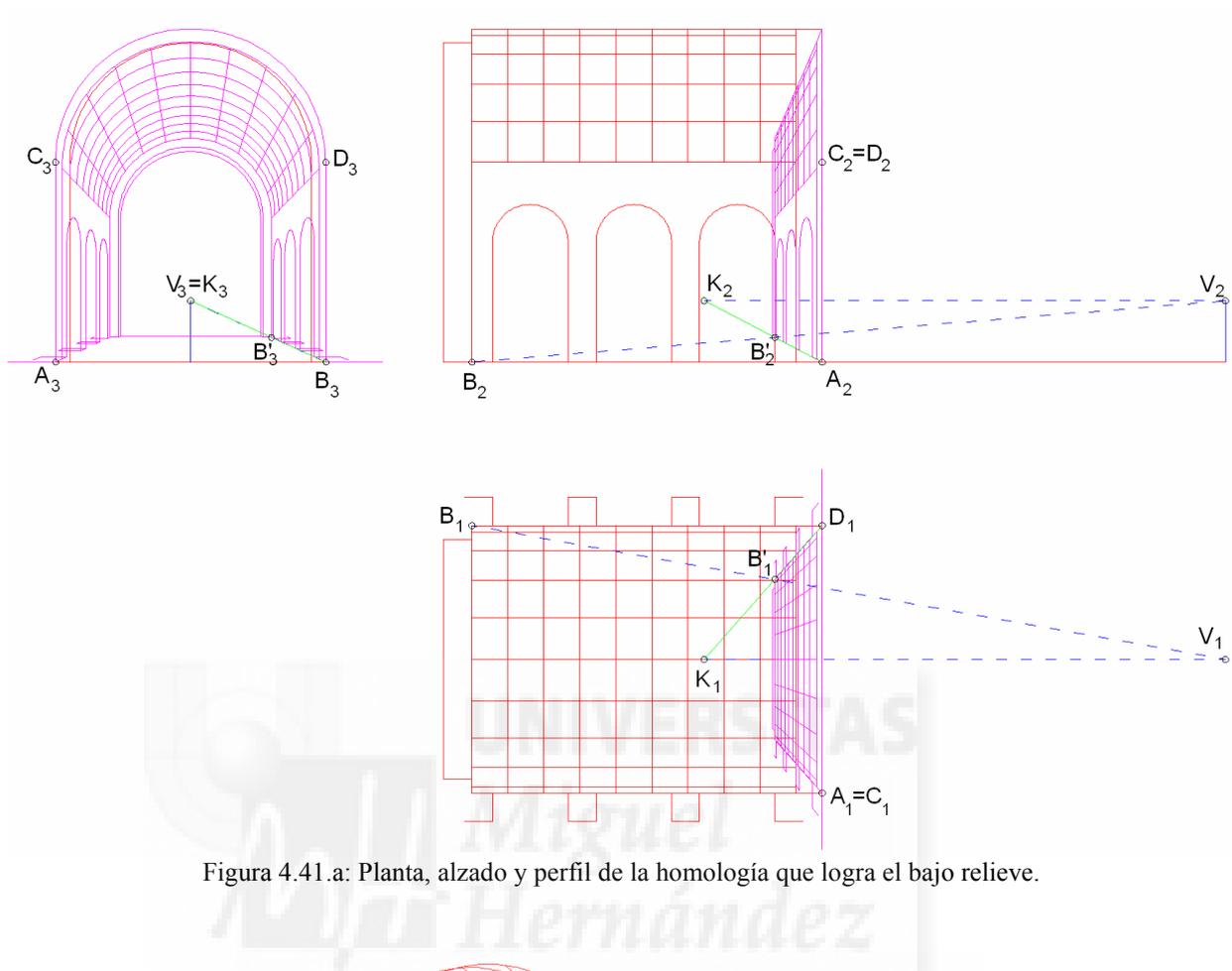


Figura 4.41.a: Planta, alzado y perfil de la homología que logra el bajo relieve.

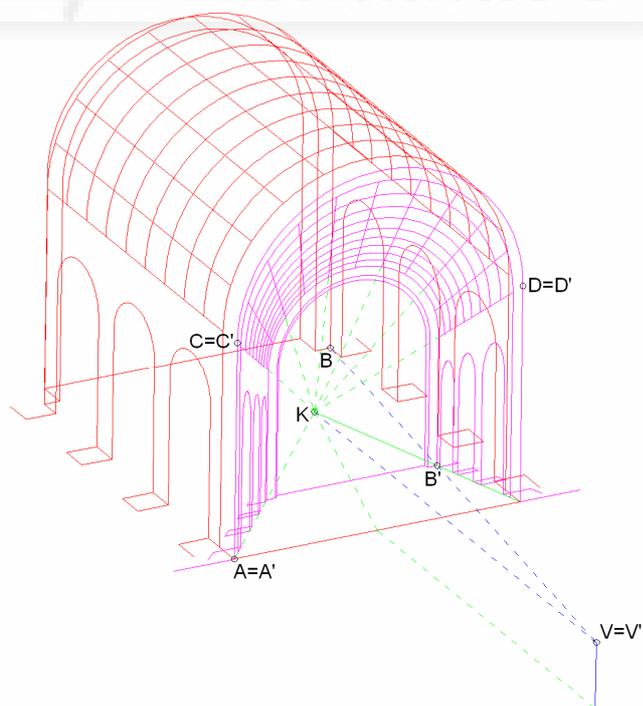


Figura 4.41.b: Perspectiva axonométrica de la homología que logra el bajo relieve.

El programa *Homograf 3D* permite llevar hasta el límite la deformación, de manera que si el punto B' lo damos en la intersección de la visual VB con el plano doble ACD , obtenemos la proyección cónica sobre el plano doble (ver figura 4.42).

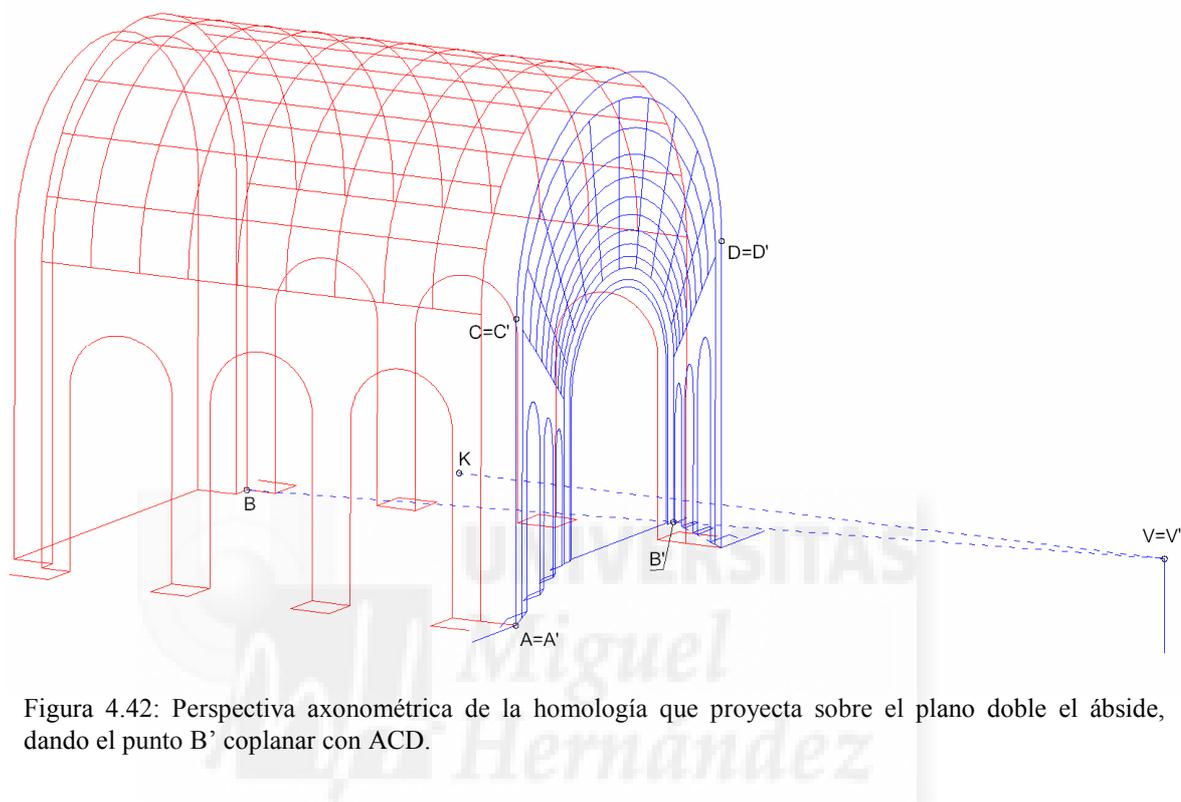


Figura 4.42: Perspectiva axonométrica de la homología que proyecta sobre el plano doble el ábside, dando el punto B' coplanar con ACD .

Con este efecto tenemos una aplicación más de *Homograf 3D*, que es la obtención de perspectivas cónicas en Autocad, con un método que obtiene un dibujo 2D editable, y no una visualización del modelo 3D en cónico como hace Autocad con el comando cámara, en ningún modo editable si no se modifica el modelo 3D. Las perspectivas obtenidas de esta forma con *Homograf 3D* se podrían modificar como se ha descrito en el punto 3.2.2.6.

4.2.2.5 Arquitectura oblicua y estereotomía.

El gran pionero de la arquitectura oblicua fue Juan Caramuel (1606-1682), que en su tratado “Arquitectura civil recta y oblicua” aporta múltiples detalles constructivos sobre elementos arquitectónicos ajustándolos a disposiciones ortogonales u oblicuas. Encontramos en la generación de modelos constructivos oblicuos otra aplicación interesante para tanto para *Homograf*, como para *Homograf3D*, que se habrán de resolver con el caso particular de la afinidad, de cuya aplicación podemos obtener geometrías oblicuas a partir de las ortogonales y viceversa. Por ejemplo resulta interesante en el diseño de arcos rampantes y balaustres o columnas oblicuas en escaleras o rampas; donde además, si se ejecutan en piedra, podemos obtener el despiece de cada piedra del arco rampante y en general diremos que la aplicación resulta interesante para la estereotomía.

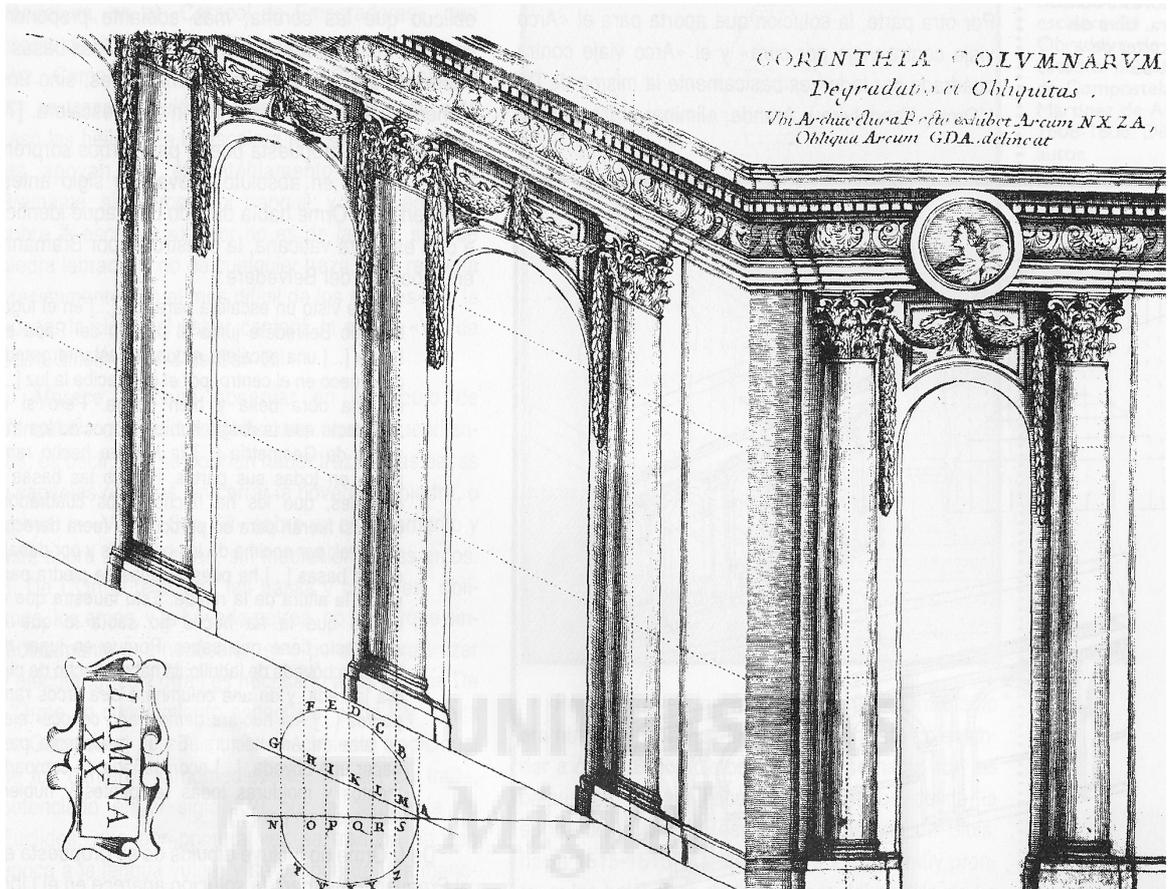


Figura 4.43: Orden oblicuo. Juan Caramuel y Lobkovitz, *Arquitectura civil recta y oblicua*, tomo III, parte IV, lámina XX.

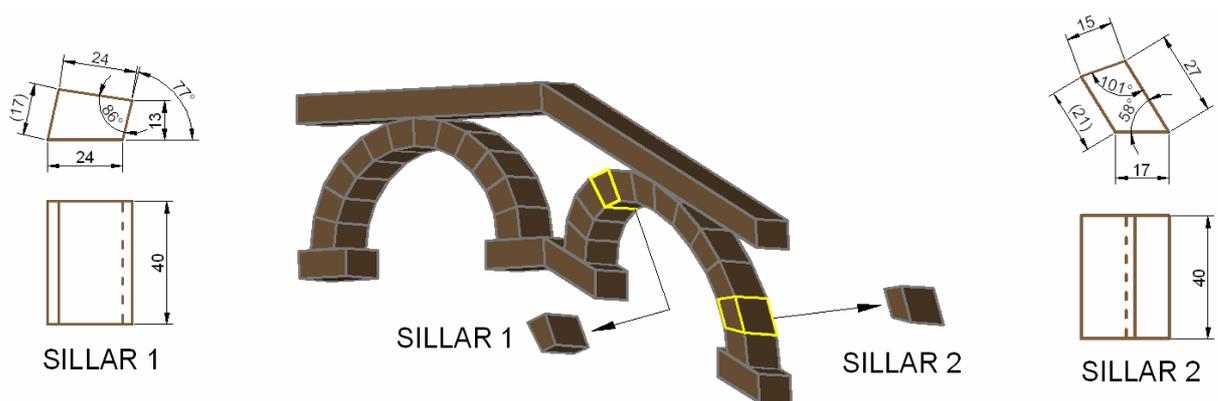


Figura 4.44: Arco rampante a partir de arco de medio punto. Detalle del despiece de dos de los sillares.

Se muestra en las figuras 4.45, 4.46 y 4.47 un ejemplo de uso encadenado de *Homograf* y *Homograf 3D*, consistente en la elaboración de un modelo digital 3D de un balaustre de una barandilla a partir de una fotografía. Eso si, hemos supuesto para conocer la profundidad, que la planta del balaustre es cuadrada, pues de no suponerlo se requeriría un par estereoscópico.

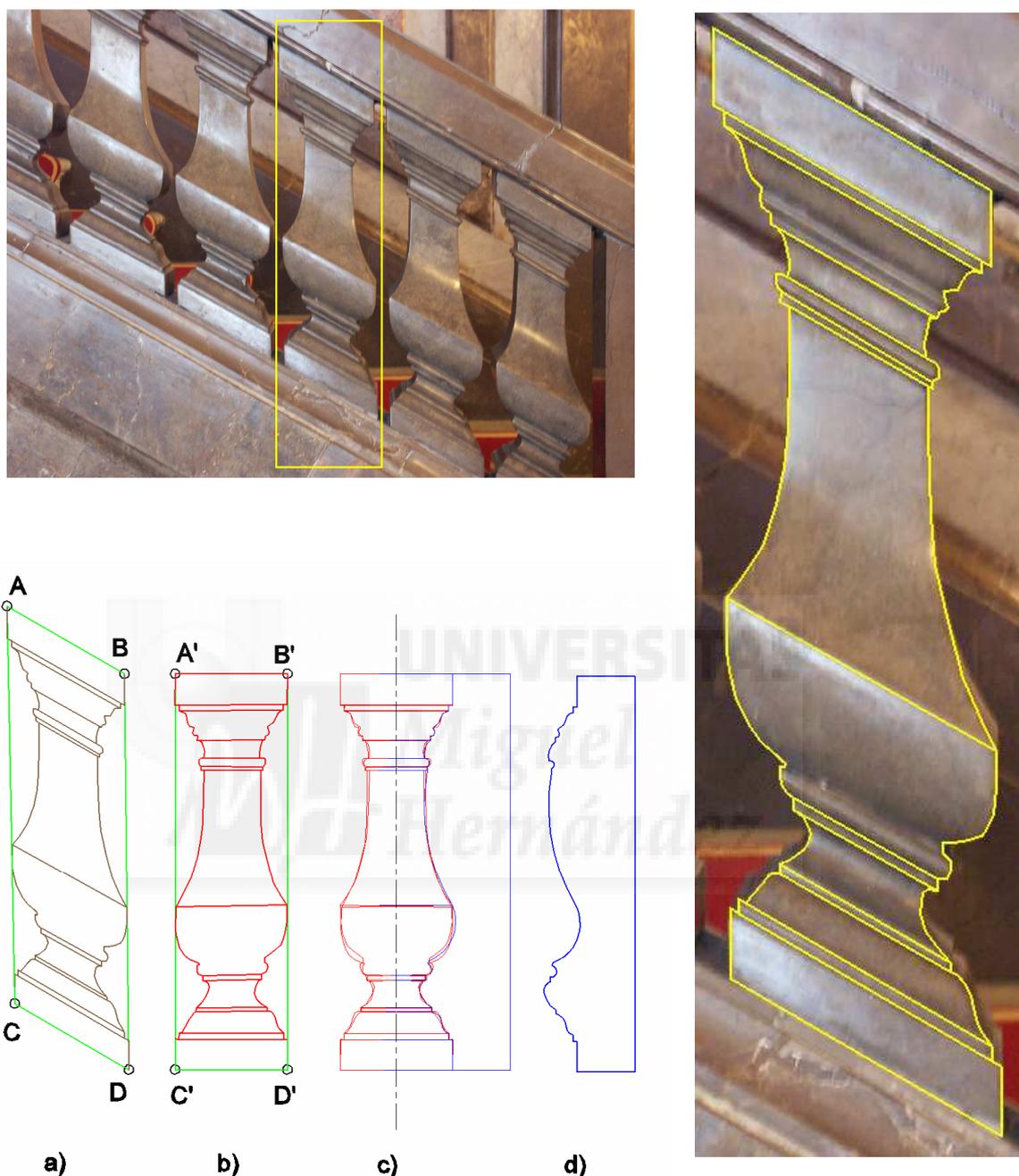


Figura 4.45: Izquierda arriba: balaustres de la baranda de escalera del edificio de Capitanía Militar de Barcelona, resaltamos uno de ellos por mostrarse casi en alzado. Derecha, digitalización de contornos de una forma aproximada con Autocad mediante objetos línea. Bajo izquierda: aplicación de *Homograf* para pasar del digitalizado a), al ortogonal b), utilizando las tetras de puntos homólogos ABCD y A'B'C'D'. Para lograr una figura simétrica, en la figura c) se ha duplicado b) por simetría, tomando como eje el definido por los puntos medios de A'B' y C'D'; y se ha trazado en azul objetos línea y arcos circulares que se ajusten entre las líneas rojas; para finalmente obtener el perfil de corte de la piedra que se usará para generar el sólido virtual en 3D, cuya construcción se muestra en la figura 4.46.

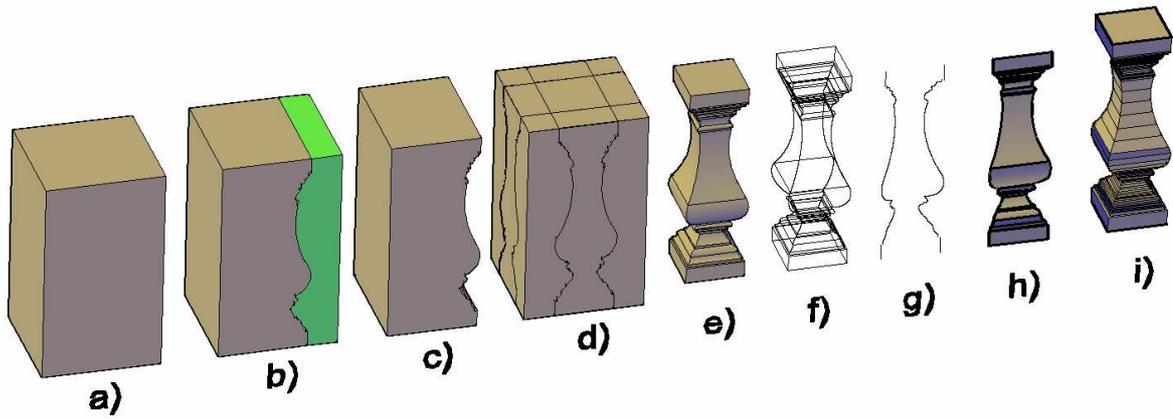


Figura 4.46: Modelado sólido y conversión a modelo mallado del balaustre ortogonal. El proceso en Autocad ha sido el siguiente: primero se genera un prisma como objeto sólido a); al que se superpone en b) otro de corte (el verde: por extrusión del perfil obtenido en figura 4.45.d); se obtiene la diferencia en c); mediante matriz polar generamos cuatro sólidos en d); cuya intersección se ha obtenido en e), modelo ortogonal sólido del balaustre. Como necesitamos 3Dcaras para *Homograf3D*, lo descomponemos en superficies y mediante una nueva descomposición de todas ellas obtenemos arcos de elipse y líneas en f); borramos las líneas intermedias para quedarnos con las esquinas (por simplificar dos de ellas sólo) en g); trazamos mallas regladas entre ellas en h); obtenemos por matriz polar el modelo mallado y i)

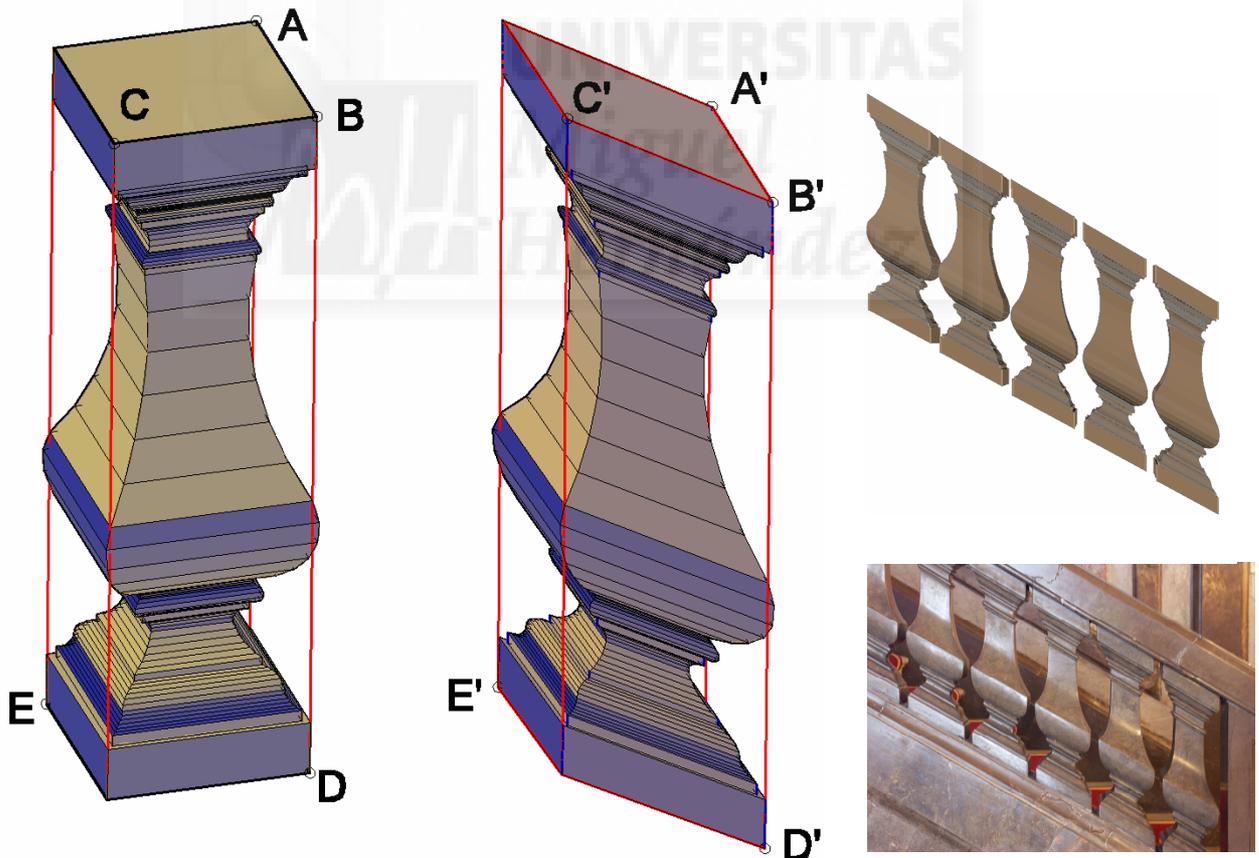


Figura 4.47: Izquierda, aplicación de *Homograf 3D* para obtener el balaustre oblicuo a partir del recto, tomando los cinco pares de puntos AA' BB' CC' DD' y EE'. Derecha arriba: aproximación a la vista cónica de la fotografía original. Derecha abajo fotografía original.

4.2.2.6. Transformación de modelos de elementos finitos.

Otra utilidad de *Homograf 3D* por desarrollar sería aplicarlo a modelos de cálculo por elementos finitos. Donde para cálculos tensionales se requiere discretizar un volumen de una pieza en tetraedros y donde a menudo hay cambios en el diseño que se pueden ajustar a homografías respecto a fases previas del diseño. Podría aplicarse *Homograf 3D* a la malla de tetraedros ajustada a un primer modelo, para obtener mallados de los modelos sucesivos, evitando de esta forma volver a aplicar algoritmos de mallado. Que en los casos de piezas con cierta complejidad resultan en ocasiones tediosos por requerir submodelos para afinar en ciertas geometrías de la pieza.

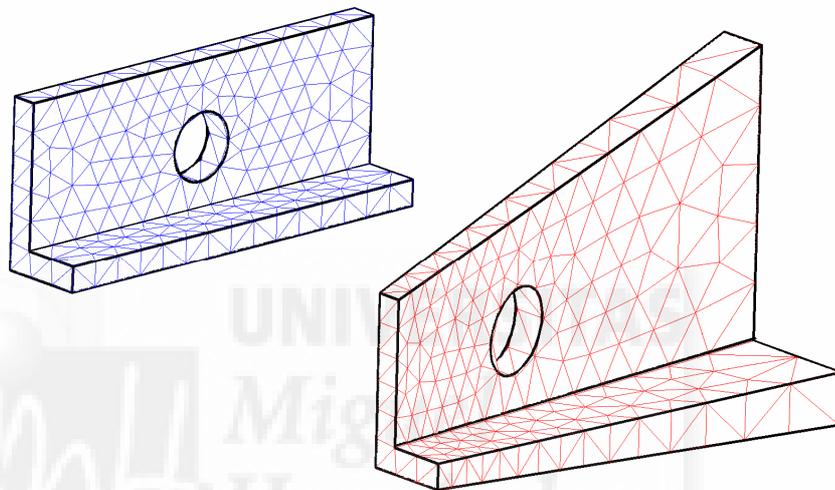


Figura 4.43: Homograf 3D aplicado a modelos de elementos finitos.

Termina aquí la exposición de ejemplos de uso de *Homograf 3D*, que no ha pretendido ser exhaustiva, ya que el objeto de esta tesis era programar las homografías en un entorno como Autocad y no mostrar todas sus posibles aplicaciones.



5. CONCLUSIONES.

5.1. CONCLUSIONES.

Del desarrollo de la presente tesis podemos sacar las siguientes conclusiones diferenciando entre las homografías 2D y las 3D:

El desarrollo de las homografías 2D había sido ya empleado en técnicas fotogramétricas, tanto en la correlación de pares estereoscópicos, como en la rectificación de fotogramas aislados de elementos planos, e incluso en programas de edición fotográfica. Sin embargo lo que sí tiene carácter novedoso en esta tesis es su implementación a través del programa *Homograf* en un entorno de dibujo vectorial por ordenador, como es Autocad. La rectificación de vectores tomados de fotografías evita el remuestreo necesario en la rectificación fotográfica y reduce notablemente el número de puntos a rectificar.

Con la programación de *Homograf* para dos dimensiones se ha evolucionado en el conocimiento, partiendo del cálculo por intersección de líneas, pasando por cálculos con vectores unitarios, como “macro” del comando “tablero”, para llegar a la solución óptima de la mano de la Geometría Proyectiva con un cálculo matricial, el cual parece resultar ser el más robusto, es decir, admite toda la casuística con el mismo algoritmo, y es el más simple de programar.

La programación de *Homograf* 2D en “C” y su comercialización ha dado pie a la difusión de su uso en el campo arquitectónico, con lo que se han multiplicado sus aplicaciones incluso en ámbitos insospechados lejos de la arquitectura como es la biología donde se ha empleado en contornos de hojas, o en la topografía para la rectificación de cartografía. De forma que ésto ha posibilitado ampliar la experiencia en su uso al autor, gracias al soporte técnico que se ha dado a los usuarios.

Las homografías 3D estaban definidas a nivel teórico por la Geometría Proyectiva tanto en los tratados de dibujo técnico como en los de matemáticas, donde se definen las homografías en R^n , pero apenas se han encontrado estudios detallados con ilustraciones 3D. La presente tesis se ha ilustrado con modelos tridimensionales dibujados con Autocad, mostrándose el proceso gráfico de la construcción de una homología 3D, inclusive el procedimiento para determinar los planos límite. Se ha propuesto e ilustrado la clasificación de las homologías 3D en “ordenadas” y “desordenadas”, siguiendo con lo propuesto por Ramón Maestre en 2D en su tesis. Se ha creado un nuevo concepto de homologías “pseudo-regulares”, aquellas en que el rayo visual principal es ortogonal al plano de homología, de forma que se mantienen algunas “regularidades” en la figura homóloga de una regular.

Se ha desarrollado el cálculo matricial para las homografías 3D, planteándose un sistema de 15 ecuaciones a partir de las coordenadas homogéneas de 5 pares de puntos homólogos, de cuya solución se obtiene la matriz de transformación proyectiva. Ésta resuelve mediante el producto matricial en coordenadas homogéneas las homografías 3D. La resolución de este sistema de 15 ecuaciones tiene carácter novedoso, pues no se ha encontrado bibliografía en la que se halle resuelto, con carácter general, para cualquier sistema de referencia, como sí se ha hecho en la presente tesis.

Con este cálculo matricial se ha implementado con Autolisp, sobre Autocad, un programa *Homograf 3D*, que permite resolver homografías 3D a partir de 5 pares de puntos homólogos. Se han expuesto numerosos ejemplos: sobre cómo se transforma una superficie esférica en cuádricas, superficies poliédricas geodésicas aplicadas a cúpulas deformadas; la transformación entre cuádricas regladas; las aplicaciones en arquitectura ilusoria; escenografías; bajorrelieves; la arquitectura denominada “oblicua” o la aplicación a modelos de elementos finitos.

Creemos alcanzados los objetivos que se apuntaron en el punto 1, tanto en lo referente a la solución matemática del problema, como en la implementación de los programas *Homograf* y *Homograf 3D*, y suficientes los ejemplos aportados, que en ningún caso pretenden ser exhaustivos, ya que son simplemente ejemplos de lo que realmente constituye esta tesis que es la implementación de los programas y el desarrollo teórico necesario para los mismos.

5.2. FUTURAS INVESTIGACIONES.

No podemos concluir sin apuntar posibles líneas de investigación que darían continuidad a esta tesis, entre las que destacamos las siguientes:

1/ *Homograf 4D*, la resolución de homologías en cuatro dimensiones es viable, pues está definida matemáticamente, y sería gráficamente posible, bien mediante proyecciones ortogonales de R^4 sobre R^3 , bien mediante gradientes de color aplicados a modelos 3D, o mediante animaciones de modelos 3D donde la cuarta dimensión es el tiempo.

2/ El cálculo y dibujo de puntos notables, ejes y curvas características de las superficies cuádricas, y en general de otras superficies no estudiadas en la presente tesis.

3/ La extensión del programa *Homograf* y *Homograf 3D* a objetos del programa Autocad más complejos que la “línea” y la “3Dcara”, arcos circulares o elípticos, polilíneas, etc. en 2D y a superficies malladas o a sólidos en 3D.

4/ El empleo de *Homograf 3D* en la corrección de cartografía 3D, mediante la deformación de elementos tetraédricos que apoyasen sus vértices en los puntos de control.

5/ La realización de un análisis más exhaustivo de figuras geométricas generadas por homografías a partir de otras.



6. FUENTES DE LA INFORMACIÓN.

6.1. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS GENERALES.

6.1.1. Libros y manuales.

Autodesk. Manual de usuario. Versión 14 y siguientes.

Autodesk. AutoLISP Reference Guide. Versión 14 y siguientes.

Autodesk. Manual de referencia de DXF. Versión 14 y siguientes.

AVILA, LISA S.; BARRÉ, SÉBASTIEN y otros. *VTK User's Guide. Install, use and extend the visualization toolkit*. 2004

CABANES GINÉS, José Luis *Geometría Proyectiva y Representación Técnica*. Valencia. Ediciones VJ. 2006.

Calcomp. Drawing Board II Users Guide PC Edition. 1991.

COLE, ALISON. *Perspectiva. Guía visual de la teoría y la técnica. Desde el Renacimiento hasta el arte pop*. Ed.: Blume. 1993

CUBILLO FLUITERS, José, *Geometría proyectiva*, Madrid, Instituto geográfico y catastral, 1943.

FAUGERAS, OLIVIER. *Three-Dimensional Computer Vision (Artificial Intelligence)*. Mit Press, 1993.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, Manuel, *Homología en 3D. Colección Universidad en español*. Editorial CEP. 2007.

GARCÍA GARCÍA, J.; LÓPEZ PELLICER, M. *Álgebra lineal y geometría*, Ed.: Marfil 1980.

GHEORGHIU, ADRIAN y DRAGOMIR, VIRGIL, *Geometry of Structural Forms*, Ed.: Applied Science Publishers LTD. London 1978.

HARTLEY, Richard and ZISSERMAN, Andrew. *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2003.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980.

MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón; IRLÉS MAS, Francisco Y DE LA FUENTE VIDAL, Joaquín. *Homograf 2002. Aplicación infográfica para arquitectura sobre Autocad 2000 y 2002*. Publicaciones Universidad de Alicante, 2003.

MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón; IRLÉS MAS, Francisco. *Levantamiento de planos de fachadas a partir de una fotografía. Perspectivas. Homograf.1 Aplicación Infográfica para Autocad 14*. Publicaciones Universidad de Alicante, 2000

NAGORE, Fernando, *Geometría métrica y descriptiva para arquitectos*. Ediciones T6. 2007.

SCHROEDER, WILL; MARTIN, KEN; LORENSEN, BILL, *The visualization toolkit. An object-oriented approach to 3D graphics*.2004.

ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie. Deuxième Partie. Géométrie dans l'espace*. Paris, Gauthier-Villars, Nouvelle Édition 1922.

SOLER SANZ, Felipe, *Perspectiva Cónica*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia. 1996.

TAIBO FERNÁNDEZ, Ángel, *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*. Tomo II. 1983.

6.1.2. Revistas

CALVO LÓPEZ, José. *Revista de Expresión Gráfica en la Edificación*. APEGA.2001. Nº2 pag.: 38-51, "*Arquitectura oblicua y trazas de montea*".

CALVO LÓPEZ, José. *Revista de Expresión Gráfica en la Edificación*. APEGA.2006. Nº4 pag.: 85-92, "*Garpard Monge, la estética de la Ilustración y la enseñanza de la Geometría Descriptiva*".

IRLES MÁS, Francisco; JIMÉNEZ GÓMEZ, Luis Miguel , OLIVA MEYER, Miguel Angel , VELASCO SÁNCHEZ, Emilio. *Revista iberoamericana de ingeniería mecánica*, ISSN 1137-2729, Vol. 9, Nº 2, 2005, pags. 3-12. *Homograf, un programa para la resolución de homografías 2D en Autocad v.2002*.

REALPE, Miguel A.; VINTIMILLA, Boris; GASPAS, José; SANTOS-VICTOR, José. *Revista Tecnológica ESPOL*, Vol. 19, N. 1, 99-106, (Octubre, 2006), ISSN : 0257-1749 *Localización y Mapeo Simultáneo con Imágenes 3D a Color*.

VILLANUEVA BARTRINA, Lluís. *Revista D'Art* [0211-0768], any: 1994, Vol.:1, núm.:20, Pàg.: 115-154, *Arquitectura escenògrafica i geometria*.

6.1.3. Comunicaciones en Congresos y Seminarios.

ALÍA ALÍA, Martín; GONZÁLEZ CABEZAS, Antonio; IRLÉS MAS, Francisco; APARICIO ARIAS, Enrique; GRAS MORENO, Eduardo; *La muralla de Ilice, enclave y*

tipología de la construcción. Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, A Coruña 1998.

BONSIGNORE CARO, Federico J. *Aplicación de las técnicas de la Teoría de la Información en el registro de Imágenes Médicas*. Facultades de Medicina e Ingeniería, Univ. de la República Oriental del Uruguay. XIII Seminario de Ingeniería Biomédica, 2004.

GRAS MORENO, Eduardo; APARICIO ARIAS, Enrique; IRLES MAS, Francisco; GONZÁLEZ CABEZAS, Antonio; FERREIRO PRIETO, Juan Ignacio; ALÍA, ALÍA, Martín. *Reconstrucción virtual del yacimiento arqueológico de la Alcudia*. Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. Vol. 3, 1999, ISBN 84-699-0475-2 , pags. 1501-1512

IRLES MAS, Francisco; MAESTRE LOPEZ-SALAZAR, Ramón. *Homograf. Una aplicación para el levantamiento fotogramétrico de paramentos planos mediante AutoCAD, obtención de alzados, axonométricas y cónicas*. XII Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica Valladolid 2000

IRLES, Francisco; SENABRE, Carolina; SÁNCHEZ, Miguel; VELASCO, Emilio. *Análisis Comparativo de Mediciones en Ensayos de Impacto sobre Báculo de Alumbrado*. Congreso IBEM6 Coimbra 2003.

MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón. *Homograf.1. Aplicación infográfica para levantamiento de planos de fachadas a partir de una fotografía y trazado simplificado de perspectivas*. V Congreso APEGA. 1999.

MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón e IRLES MAS, Francisco. *Método práctico simplificado para levantamiento de "planos" de fachadas a escala a partir de cualquier fotografía y dos medidas reales Procedimiento manual y asistido por programa de dibujo con ordenador*. VI Congreso de Expresión Gráfica Arquitectónica, Pamplona, 1996.

MAESTRE LÓPEZ-SALAZAR, Ramón e IRLES MAS, Francisco. *Método práctico simplificado para levantamiento de axonométricas de fachadas a escala a partir de cualquier fotografía y dos medidas reales. Procedimiento manual y asistido por programa de dibujo con ordenador*. IV Congreso de Expresión Gráfica aplicada la Edificación. Barcelona, 1997.

TOGORES, REINALDO y OTERO, CÉSAR. *Mallas espaciales de panel. Métodos geométricos de diseño*. XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. 2002. <http://personales.unican.es/togores/portfolio/papers/XIV%20INGEGRAF%202002.pdf>

VILLANUEVA, Lluís. *Perspectiva, luz y sombra en la generación de arquitecturas ilusorias. A: Patrimonio Arquitectónico. Estudios previos*. Departamento EGA Universidad de Valencia y Forum Unesco, 2002, p. 179-193.

6.1.4. Otras tesis.

CABANES GINÉS, José Luis. Dirigida por: Pablo Navarro Esteve. U.P.V. 2002. *Rectificación Fotogramétrica de Objetos Planos por Métodos Gráficos Basados en Principios Proyectivos*.

MAESTRE LÓPEZ- SALAZAR, Ramón. Dirigida por: D. Felipe Soler Sanz. U.P.V. 2003. *Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*.

SUBIAS IZQUIERDO, José Luis. Dirigida por: José María Altemir Grasa. Universidad de Zaragoza, 1992. *Desarrollo de un modelo de tratamiento por ordenador de los problemas de la geometría proyectiva*.

6.1.5. Internet

Se ha realizado búsquedas con: CAB, ISSN, ISI Web of Knowledge, ZENTRALBLATT MATH - Database, TESEO, CORDIS, Google, que junto con las referencias de los cursos de doctorado han dado como resultado entre otras referencias las siguientes:

ARÁMBULA, Fernando. *Registro de imágenes médicas*. México 2008. Introducción al Análisis de Imágenes Médicas y Cirugía Asistida por Computadora Tema 2.5, p.1 <http://www.ccadet.unam.mx/~fernando.arambula/aim-tema-2.5.pdf>

BIRCHFIELD, STAN. *An Introduction to Projective Geometry (for computer vision)*. lorca.umh.es

GONZÁLEZ-GARZÓN, Javier Pascau. *Técnicas avanzadas de procesado de imágenes médicas*. Laboratorio de Imagen Médica Hospital General Universitario Gregorio Marañón http://www.dfmf.uned.es/actividades/no_reglada/imagen_medica/tec_avanzadas_imd2002.pdf. 2002.

IBÁÑEZ, Luis; SCHROEDER, Will; NG, Lydia; CATES, Josh and the Insight Software Consortium. *The ITK Software Guide Second Edition Updated for ITK version 2.4*. www.itk.org . Noviembre 2005.

MAINTZ, J. B. Antoine and VIERGEVER, Max A. *A survey of Medical Image Registration*. Medical Image Analysis, Vol. 2, No. 1. (March 1998), pp. 1-36. Oxford University Press. <http://people.cs.uu.nl/twan/personal/media97.pdf>

MAINTZ, J. B. Antoine and VIERGEVER, Max A. *An Overview of Medical Image Registration*. In Symposium of the Belgian hospital physicists association (SBPH-BVZF). ISSN: 0924-3275. 1998. <http://www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-1998/1998-22.pdf>

MOHR, ROGER and TRIGGS, BILL. *Projective Geometry for Image Analysis*. A Tutorial given at ISPRS, Vienna, July 1996. lorca.umh.es

MONTESDEOCA, Ángel, *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*, La Laguna, <http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/apuntes.htm>, 2004,

REINOSO, O.; SEBASTIÁN, J.M. *Visión Tridimensional* del programa de doctorado de “*Tecnologías Industriales*” lorca.umh.es . Ed.: Universidad Miguel Hernández de Elche 2000-01.

6.2 Programas informáticos

Para la redacción y composición de este trabajo se han utilizado los siguientes programas informáticos: de tratamiento de textos y composición final de las imágenes Word, de dibujo infográfico, modelado tridimensional virtual y render, Autocad de Autodesk en sus versiones de R14 a 2008, y de tratamiento de imágenes de trama, (tratamiento fotográfico), Corel Photopaint.

También se ha consultado manuales y documentación de Microstation de Bentley, y procedente de internet: del programa Blender y de las bibliotecas de programación en C ITK y VTK.

6.3 Procedencia de las ilustraciones.

Todos los dibujos que se incluyen en las figuras, fotografías, fotoperspectivas infográficas, superposiciones de dibujo infográfico vectorial sobre fotografía y escaneados de este trabajo, han sido realizadas por el autor, con excepción de las siguientes:

Figura 2.1: Tomada de la figura 4.5 de Izquierdo Asensi, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980. p.: 66.

Figura 2.2: Tomada de la figura 4.7 y 5.4 de Izquierdo Asensi, Fernando, *Geometría Descriptiva, superior y aplicada*, Madrid, Dossat, 2ª ed. 1980. p.: 68 y 81.

Figura 2.3: Tomada de la figura la figura 20 de Villanueva Bartrina, Lluís, *Arquitectura escenògrafica i geometria*, Revista D'Art [0211-0768], any: 1994, Vol.:1, núm.:20, Pàg.: 132

Figura 2.4: Tomada de Fernández Rodríguez, Manuel, *Homología en 3D*. Colección Universidad en español. Editorial CEP. Figuras 1.4 y 1.5, p.:1.3

Figura 2.5: Tomada de Fernández Rodríguez, Manuel, *Homología en 3D*. Colección Universidad en español. Editorial CEP. 2007. Figura 4.22, p.:4.11

Figura 2.14: Tomada de Gheorghiu, Adrian y Dragomir, Virgil, *Geometry of Structural Forms*, Ed.: Applied Science Publishers LTD. London 1978. La a) corresponde con la

figura 186, página 173; la b) con la figura 110, página 106; la c) con la figura 189, página 176; la d) con la figura 149, página 149; la e) con la figura 190, página 176; la f) con la figura 62, página 64; y la g), h), i) y j) son del autor de la presente tesis.

Figura 2.15: Tomada de la figura 2.4. de Hartley, Richard and Zisserman, Andrew. *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2003, p.:35.

Figura 3.4: Tomada de Maestre López-Salazar, Ramón, Tesis doctoral: *Perspectiva cónica y fotografía. Análisis aplicado al levantamiento de planos de Arquitectura*, U.P.V. 2003, fig. 4.11 p.289.

Figura 3.11: Tomada de *Drawing Board II Users Guide PC Edition*. Calcomp. 1991.

Figura 3.12: Tomada de Maestre López-Salazar, Ramón; Irlés Mas, Francisco y de la Fuente Vidal, Joaquín. *Homograf* 2002. Aplicación infográfica para arquitectura sobre Autocad 2000 y 2002. Publicaciones Universidad de Alicante, 2003, p.:6.

Figuras 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20: Tomada de Ramón Maestre López-Salazar, Francisco Irlés Mas. *Levantamiento de planos de fachadas a partir de una fotografía. Perspectivas. Homograf.1 Aplicación Infográfica para Autocad 14*. Publicaciones Universidad de Alicante, 2000; la 3.14 es una composición de las fig. 2.11, p. 51, fig. 2.21, p. 61 y fig. 2.23, p. 62; la 3.15 es la fig. 3.17, 3.18 y 3.19, p. 88 y 89; la 3.16 es la fig. 3.16, p. 85; la 3.17 es la fig. 2.9, p. 47; la 3.18 es la fig. 3.20 y 3.21, p. 91; la 3.19 es la fig. 3.25 y 3.26, p. 94 y 95; y la 3.20 es la fig. 3.24, p.93.

Figura 4.2.: Tomada de Fernández Rodríguez, Manuel, *Homología en 3D*. Colección Universidad en español. Editorial CEP. Figura 1.1, p.:1.1

Figura 4.25.b: Tomada de la figura 2 de Reinaldo Togores, César Otero. *Mallas espaciales de panel. Métodos geométricos de diseño*. XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. 2002.

Figura 4.30: Tomada de Alison Cole, *Perspectiva. Guía visual de la teoría y la técnica. Desde el Renacimiento hasta el arte pop*. Ed.: Blume. 1993, p. 41.

Figura 4.31: Tomada de Villanueva Bartrina, Lluís. *Arquitectura escenògrafica i geometria*. Revista D'Art [0211-0768], any: 1994, Vol.:1, núm.:20, Fig.:35. Pàg.: 146.

Figura 4.39: La de arriba tomada del catálogo de la exposición del Palazzo Grassi de Venecia "Rinascimento. Da Brunelleschi a Micehlangelo" a cura di H. Millon e V. Magnano Lampugnani, Milano : Bompiani, cop. 1999. La de bajo realizada por Villanueva Bartrina, Lluís.

Figura 4.43 Tomada de Calvo López, José. *Revista de Expresión Gráfica en la Edificación*. APEGA.2001. N°2 , figura 7, pag.: 41, "Arquitectura oblicua y trazas de montea".

Figura 4.45 Arriba y 4.47 bajo derecha, foto realizada por Villanueva Bartrina, Lluís.