

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ  
Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada

**DEA:**  
**Medidas de Eficiencia Generalizadas**  
**y**  
**Detección de Observaciones Influyentes**<sup>1</sup>

JOSÉ LUIS RUIZ GÓMEZ



Memoria para optar al grado de Doctor por  
la Universidad Miguel Hernández, realizada  
bajo la dirección del Dr. D. Jesús Tadeo Pastor  
Ciurana.

---

<sup>1</sup>Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la Generalitat Valenciana a través del proyecto GV-C-CN-10-068-96.



**JESÚS TADEO PASTOR CIURANA, CATEDRÁTICO DEL  
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA Y MATEMÁTICA  
APLICADA DE LA UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ**

**CERTIFICA:**

Que la presente memoria titulada:

**DEA: Medidas de Eficiencia Generalizadas y  
Detección de Observaciones Influyentes**

ha sido realizada bajo mi dirección por José Luis Ruiz Gómez, en el Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la Universidad Miguel Hernández, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor por la Universidad Miguel Hernández.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Elche a 16 de Junio de dos mil.

Fdo.: Jesús T. Pastor Ciurana



## AGRADECIMIENTOS

Basta hojear esta tesis para percatarse inmediatamente de que éste ha sido un trabajo realizado en intensa colaboración. Tanto es así que, en este momento, es imposible encontrar un calificativo para la participación de Inmaculada Sirvent: no creo que sea exactamente un agradecimiento lo que proceda con su labor. Eso sí, gracias por tu generosidad. También quiero expresar mi agradecimiento a Jesús Pastor, el director de la tesis. He tenido la suerte, además, de contar con la ayuda de otras personas cuya aportación, si bien no resulta tan evidente a primera vista, puede considerarse como imprescindible de cara a lo que ha sido el resultado final del trabajo. Deseo agradecer muy especialmente a Fernando Borrás que me dedicase el tiempo del que no disponía para programar los nuevos modelos propuestos en la tesis. Es difícil imaginar que éstos hubiesen podido ver la luz sin al menos haber sido aplicados sobre un banco de datos reales. A Lola Esteban quiero agradecer el tesón e interés que han hecho posible que la tesis se haya presentado en el formato deseado. Tampoco puedo olvidar en el capítulo de agradecimientos a compañeros como Lola Cánovas o Miguel Ángel Varó, quienes me ofrecieron su dedicación y amabilidad cuando recurrí a ellos con cualquier cuestión puntual. Ni a Elisenda Molina, de quien tengo la fortuna de disfrutar, entre otras muchas cosas, de su grata cercanía. Finalmente, deseo dedicar una mención muy especial a mis padres, quienes esperan con ilusión, tras haberlo hecho quizás con algo de incertidumbre, la llegada de este momento.



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>v</b>
<b>1. DEA: Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Breve introducción histórica . . . . .	3
1.2. DEA: Nociones básicas . . . . .	11
1.3. Modelos básicos . . . . .	15
1.3.1. El modelo CCR . . . . .	16
1.3.2. Los modelos CCR y BCC: planteamiento axiomático . . . . .	18
1.3.3. El modelo aditivo . . . . .	22
1.4. Extensiones y mejoras . . . . .	24
<b>I Medidas de Eficiencia Generalizadas en DEA</b>	<b>29</b>
<b>2. La Evaluación de la Eficiencia con modelos DEA</b>	<b>31</b>
2.1. Medidas de Eficiencia y Modelos DEA . . . . .	36
2.2. Medidas de Eficiencia Generalizadas (GEMs) . . . . .	39
<b>3. Una Nueva Medida de Eficiencia Técnica.....</b>	<b>45</b>
3.1. La medida de Russell no orientada de eficiencia técnica . . . . .	47
3.2. El “ratio” entre las medidas de Russell . . . . .	50
3.3. Linealización del modelo . . . . .	54

3.4.	Propiedades de $R_e^*$ . . . . .	56
3.4.1.	Medidas invariantes frente a traslaciones . . . . .	69
3.5.	Ejemplo empírico . . . . .	72
3.6.	La medida RAM . . . . .	77
3.6.1.	La medida “BCC-projected RAM” . . . . .	79
3.7.	Ratios de eficiencia de beneficios . . . . .	83
3.8.	Medidas de eficiencia generalizadas en FDH . . . . .	86
3.8.1.	La distancia mínima a la frontera . . . . .	90
<b>Conclusiones</b>		<b>97</b>
 <b>II Detección de Observaciones Influyentes en DEA</b>		<b>101</b>
 <b>4. El Análisis de Influencia en Fronteras de Producción</b>		<b>103</b>
4.1.	El análisis de influencia: Consideraciones generales . . . . .	105
4.2.	Observaciones influyentes . . . . .	105
4.3.	Análisis de influencia en modelos determinísticos... . . . .	107
4.3.1.	Métodos para la detección de observaciones influyentes..... . . . .	109
4.3.1.1.	Caso paramétrico . . . . .	109
4.3.1.2.	Caso no paramétrico: modelos DEA . . . . .	110
 <b>5. Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA Radiales</b>		<b>119</b>
5.1.	Introducción . . . . .	121
5.2.	Una medida radial del “desplazamiento” entre fronteras . . . . .	123
5.3.	Un modelo para valorar la influencia de la $DMU_j$ ..... . . . .	126
5.3.1.	Algunos resultados sobre la medida de influencia $\psi_{0j}^*$ . . . . .	126
5.4.	Una descomposición de la ineficiencia total . . . . .	130



5.5.	Análisis de influencia basados en $\psi_{0j}^*$ . . . . .	134
5.5.1.	Ejemplo empírico (Programa “Follow Through”) . . . . .	136
5.6.	Extensiones a otros problemas relacionados . . . . .	141
5.6.1.	Subconjuntos de más de una unidad . . . . .	142
5.6.2.	Fusión de dos o más unidades . . . . .	143
<b>6.</b>	<b>Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA no...</b>	<b>145</b>
6.1.	Introducción . . . . .	147
6.2.	La medida de Russell de eficiencia técnica de orientación input . . . . .	148
6.3.	Una medida del “desplazamiento” entre fronteras... . . . . .	149
6.4.	Un modelo para valorar la influencia de la $DMU_j$ ..... . . . .	156
6.4.1.	Algunos resultados sobre la medida de influencia $\varphi_{0j}^*$ . . . . .	158
6.5.	Una descomposición de la ineficiencia total . . . . .	160
6.6.	Análisis de influencia basados en $\varphi_{0j}^*$ . . . . .	164
6.6.1.	Ejemplo empírico (Programa “Follow Through”) . . . . .	165
6.7.	Caso particular: Eficiencia radial . . . . .	166
6.8.	Extensiones a otros problemas relacionados . . . . .	169
	<b>Conclusiones</b>	<b>171</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>173</b>





## Prólogo



En su nacimiento, el DEA surgió como respuesta a ciertos problemas cuyo objetivo era la evaluación de programas educacionales que se aplicaban en escuelas públicas de los Estados Unidos. Inspirados por los primeros resultados en investigación y medición de la eficiencia debidos a Debreu y Koopmans y, fundamentalmente, por el trabajo desarrollado por Farrell en este área, Charnes, Cooper y Rhodes definieron el que puede considerarse como primer modelo DEA. Las medidas de eficiencia que proporcionaba dicho modelo constituían a su vez una generalización del clásico “ratio” output/input que se utilizaba como medida de eficiencia en campos como la Economía o la Ingeniería. Quizás por estas razones, el uso de los modelos DEA para la evaluación de la eficiencia puede considerarse como uno de los aspectos más relevantes de esta nueva metodología. Pero, por supuesto, éste no es el único. El DEA ha supuesto un enfoque alternativo para algunos problemas clásicos, entre los que podemos destacar la utilización de estos modelos en la estimación de fronteras de producción. En el capítulo 1 de este trabajo, *Preliminares*, ofrecemos una breve introducción histórica del DEA, un resumen de los principales modelos y una panorámica actualizada de algunas áreas destacadas sobre las que el DEA se ha ido extendiendo.

El tema básico de esta memoria es la evaluación de eficiencia. Concretamente, hemos abordado dicho problema desde dos puntos de vista diferentes pero estrechamente relacionados: la definición de nuevas medidas de eficiencia y el desarrollo de técnicas para la detección de las observaciones influyentes presentes en un análisis de eficiencia. La memoria se ha dividido en dos partes en las que tratamos por separado cada uno de estos aspectos del problema de la evaluación de eficiencia.

En la primera parte, titulada **Medidas de Eficiencia Generalizadas en DEA**, nuestro objetivo es la definición de nuevas medidas de eficiencia que, atendiendo a determinados criterios, mejoren a las que vienen siendo utilizadas habitualmente. En particular, las medidas de eficiencia generalizadas (GEMs) presentan

como ventajas sobre las medidas radiales clásicas la posibilidad de identificar unidades eficientes en el sentido de Pareto-Koopmans y el hecho de que proporcionan un escalar que recoge todas las fuentes de ineficiencia, tanto radial como no radial. Además, éstas deberán satisfacer ciertas propiedades deseables.

En esta memoria nos hemos centrado en medidas de eficiencia técnica no orientadas obtenidas en el entorno de una tecnología de referencia de tipo DEA clásica. En el capítulo 2, titulado *La Evaluación de la Eficiencia con Modelos DEA*, incluimos una recopilación de medidas de esta naturaleza que pueden encontrarse en la literatura, en particular algunas que pueden considerarse como medidas de eficiencia generalizadas.

En el capítulo 3, definimos *Una Nueva Medida de Eficiencia Técnica no Orientada de Tipo Russell*. Dicho adjetivo hace referencia al hecho de que nuestra medida resulta de una combinación específica de las medidas de Russell orientadas y representa, por tanto, una alternativa a la medida de Russell no orientada (“graph”) de eficiencia técnica. En primer lugar, nos ocupamos de los aspectos computacionales relacionados con el cálculo de la medida propuesta, así como de las consideraciones de tipo interpretativo. Posteriormente, llevamos a cabo un estudio detallado sobre las propiedades que satisface esta nueva medida; esto, a su vez, nos permitirá comparar su comportamiento con el de otras medidas de eficiencia generalizadas, especialmente con la medida de Russell clásica. En la parte final del capítulo, consideramos brevemente las dos siguientes modificaciones del planteamiento inicial: el estudio del comportamiento de nuestra medida en otra tecnología diferente como es el FDH y la extensión del uso de los “ratios” para la definición de medidas alternativas que incorporen información relativa a precios y costos y que, de este modo, no podrán considerarse como medidas de eficiencia técnica. Concluimos el capítulo sugiriendo algunas líneas futuras de investigación sobre las que, en nuestra opinión, podrían obtenerse mejoras sustanciales en el área de la medición de la eficiencia.

La segunda parte de la memoria, titulada **Detección de Observaciones Influyentes en DEA**, se ha dedicado al análisis de influencia en el contexto de la evaluación de eficiencia. El objetivo básico es ahora la definición de nuevas medidas de la influencia que ejercen las unidades eficientes sobre la eficiencia de las restantes unidades. En nuestro planteamiento, dichas medidas se obtienen como solución de determinados problemas de programación que resultan ser una versión modificada de los modelos DEA utilizados para la evaluación de eficiencia. Con esto, pretendemos que las medidas de influencia se ajusten fielmente al proceso seguido al evaluar la eficiencia. Además, las medidas obtenidas a partir de esta idea tienen una clara interpretación. En cierto sentido, el espíritu de este planteamiento es diferente al de la mayoría de técnicas vigentes que responden a la idea de comparar los resultados del análisis original con los obtenidos cuando se elimina una unidad de la muestra, lo que en un análisis de eficiencia se traduciría en comparar los scores de eficiencia correspondientes.

Las medidas de la influencia de una unidad potencialmente influyente en la eficiencia de cualquier otra unidad son la pieza clave en el desarrollo de las técnicas que persiguen la detección de las observaciones influyentes. En DEA, los riesgos que supone la presencia de observaciones influyentes en la muestra cobran una especial relevancia debido al carácter determinístico de la frontera respecto de la que se calculan las medidas de eficiencia. Éste es un hecho extensamente reconocido, si bien sólo existen unas pocas técnicas de detección de observaciones influyentes en modelos de fronteras de producción. En el capítulo 4, *El Análisis de Influencia en Fronteras de Producción*, ofrecemos una revisión de la literatura sobre este tema.

En el capítulo 5, *Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA Radiales*, abordamos el análisis de influencia relativo a la evaluación de la eficiencia realizada con modelos DEA de tipo radial. En primer lugar, definimos una medida de la influencia de una unidad eficiente en la eficiencia de cualquier otra unidad de la

muestra. Para esta unidad eficiente, dicha medida se calculará para cada una de las restantes unidades, obteniéndose así una muestra de valores que nos informan sobre la influencia de la mencionada unidad. El análisis de influencia se completará con la obtención de tantas muestras como unidades consideradas potencialmente influyentes. Las técnicas de detección que proponemos se basan en el uso de métodos descriptivos, tanto numéricos como gráficos, que tienen como objetivo la síntesis de la información proporcionada por las muestras. Finalmente, con su aplicación se persigue la obtención de una clasificación de las observaciones que han sido detectadas como influyentes en la que se especifique el orden en el que dichas unidades deben ser inspeccionadas con objeto de determinar si están contaminadas o no por errores en sus datos. La disponibilidad de este tipo de técnicas puede resultar de gran utilidad en la práctica puesto que la inspección de datos es a menudo muy costosa, especialmente cuando se trata con muestras grandes.

Siguiendo un esquema similar, en el capítulo 6, *Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA no Radiales*, proponemos algunas técnicas de detección de observaciones influyentes para el caso en que la eficiencia se evalúe con modelos DEA de tipo no radial. El tratamiento de este problema en este nuevo contexto resulta más complicado como consecuencia del uso de distancias del tipo  $L_1$  para la evaluación de eficiencia. A diferencia de lo que ocurre con los modelos radiales, en la evaluación de eficiencia con un modelo no radial una unidad puede seguir distintos caminos hasta alcanzar su proyección sobre la frontera eficiente, y esta situación puede agudizarse si dicha unidad tiene asociada más de una proyección sobre la frontera, lo que puede suceder si se presentan óptimos alternativos al resolver el modelo DEA utilizado. En cualquier caso, la técnica de detección que proponemos permite soslayar tales inconvenientes mediante la utilización de una medida de influencia que se obtiene como el valor óptimo de un problema de programación lineal de características similares a las del modelo DEA utilizado en la evaluación de eficiencia. Tanto el capítulo 5 como el 6 concluyen con un apartado de posibles extensiones



de las técnicas desarrolladas a problemas relacionados con el análisis de influencia. También sugerimos algunas futuras líneas de actuación en esta área.



# Capítulo 1



## DEA: Preliminares



## 1.1. Breve introducción histórica

La historia del “Data Envelopment Analysis” (DEA) comenzó con la tesis de Edwardo Rhodes en la Carnegie Mellon University. Bajo la supervisión de W. W. Cooper, Edwardo Rhodes trabajaba en la evaluación de programas educacionales para estudiantes desaventajados (principalmente blancos o hispanos) que se aplicaban en escuelas públicas de los Estados Unidos subvencionadas por el Gobierno Federal. Finalmente se centraron en el programa conocido como “Follow Through”. Este proyecto del Departamento de Educación de los Estados Unidos pretendía aplicar los principios estadísticos del diseño de experimentos para realizar un estudio a nivel nacional sobre el comportamiento de un conjunto de escuelas. Uno de los principales objetivos del análisis era la comparación de los distritos escolares que participaban en el programa con los que no lo hacían. Rhodes logró tener acceso a la base de datos que “Abt Associates”, una firma de consultoría de Boston bajo contrato con el Departamento de Educación, estaba utilizando para elaborar dicho estudio. El conjunto de datos era lo suficientemente grande como para que problemas que se presentan con cierta frecuencia, tales como los grados de libertad, no representaran un serio inconveniente en el análisis, a pesar del elevado número de variables inputs y outputs involucradas. Sin embargo, la aplicación de las técnicas clásicas de carácter estadístico o econométrico condujeron a resultados poco satisfactorios.

Los primeros esfuerzos en la investigación y la medición de la eficiencia se debieron a Koopmans [66] y a Debreu [40], quienes se centraron en lo que después se conoció como “eficiencia técnica”. Koopmans adaptó algunas ideas generales del economista suizo-italiano V. Pareto para definir lo que se entendería por un vector de inputs y outputs técnicamente eficiente. Pareto, en su “Manuel d’économie politique” [73], estableció las bases de la concepción moderna de la “economía del bienestar” de acuerdo con el principio de que una política social es aceptable si consigue que algunas personas mejoren sin que otras empeoren. De esta forma, se evitaba

la necesidad de hacer comparaciones entre las ganancias de unos y las pérdidas de otros, lo que a su vez evitaba la necesidad de determinar las “funciones de utilidad” y/o los “pesos” que indicaban la importancia relativa de cada una de las ganancias y pérdidas de los individuos. Inspirado por estas ideas, Koopmans definió un vector de inputs y outputs técnicamente eficiente como aquel para el que es tecnológicamente imposible aumentar ninguno de sus outputs y/o reducir ninguno de sus inputs sin simultáneamente reducir al menos algún otro output y/o aumentar algún otro input.

Mientras que Koopmans ofreció una definición y caracterización de la eficiencia técnica, fue Debreu el primero que propuso una medida o índice del grado de eficiencia técnica con su “coeficiente de utilización de recursos”. Éste se calculaba como 1 menos la máxima reducción equiproporcional de todos los inputs que es consistente con la producción existente de outputs. A partir de él, Debreu obtuvo medidas de la magnitud y el costo de la ineficiencia técnica, pero sólo en su versión “débil”.

Pero sin duda fue M. J. Farrell, con su artículo seminal “The Measurement of Productive Efficiency” publicado en 1957 por la revista *Journal of the Royal Statistical Society*, el autor más influyente en temas relacionados con la medición de la eficiencia. Entre otras medidas, Farrell propuso un índice de eficiencia técnica que era un descendiente directo del anteriormente mencionado coeficiente de utilización de recursos de Debreu. Quizás, el aspecto más relevante del planteamiento de Farrell fue el hecho de que este autor usaba el comportamiento de otras unidades para evaluar el de cada unidad relativo a los inputs y outputs que todas ellas usaban. Esto hizo posible determinar empíricamente sus eficiencias relativas, para lo que Farrell utilizó métodos de la programación lineal tales como el simplex o los métodos duales. El resultado fue la conocida “medida de Farrell” de eficiencia, que el propio Farrell restringió al término de “eficiencia técnica” en referencia a la cantidad de “sobrante” que puede eliminarse sin empeorar ningún input ni output, y para distinguirlo de otros tipos de eficiencia de la literatura económica como la eficiencia de “escala” o la

eficiencia de “asignación”. Además, es importante destacar que en su enfoque Farrell evitó cualquier uso de precios y/o “mecanismos de intercambio” relacionados.

Tratando de responder a la situación planteada en el análisis del programa “Follow Through”, Rhodes, en plena década de los 70, llamó la atención de Cooper sobre el artículo de Farrell. Con anterioridad, Cooper había trabajado conjuntamente con A. Charnes en dar forma computacional a las ideas que Koopmans tenía acerca del “análisis de actividades” (lo que puede considerarse como el inicio de lo que hoy es la “Programación Multiobjetivo”). Así, siguiendo literalmente a Farrell, Cooper y Rhodes formalizaron todas estas ideas vía las siguientes definiciones de eficiencia de una unidad de decisión, que se denota habitualmente por “DMU” (la abreviatura de “decision making unit”), y que fueron las bases sobre las que se desarrolló la investigación posterior:

**Definición extendida de eficiencia de Pareto-Koopmans.** Una DMU puede alcanzar la eficiencia si, y sólo si, ninguno de sus inputs o outputs puede mejorarse sin empeorar alguno de los restantes inputs o outputs.

En la mayoría de las aplicaciones los niveles de eficiencia teóricamente posibles serán desconocidos. Por esta razón, la anterior definición se sustituía por la siguiente:

**Eficiencia relativa.** Una DMU tiene que evaluarse como eficiente si, y sólo si, el comportamiento de otras DMUs no muestra que algunos de sus inputs o outputs pueda ser mejorado sin empeorar alguno de los restantes inputs o outputs.

Estas definiciones introducidas por Cooper y Rhodes (que no por Farrell, aunque los modelos desarrollados por este autor y el uso que hacía de ellos se ajustaban a las mismas) sirvieron de guía para las siguientes investigaciones, como se relata a continuación. El programa “Follow Through” estudiaba la gestión de las escuelas en términos de outputs tales como “el incremento de la autoestima de un estudiante

desaventajado” (lo que se medía por tests psicológicos) e inputs como “el tiempo que una madre dedica a leer con su hijo”. La necesidad de tratar con inputs y outputs de esta naturaleza hizo que el enfoque de Farrell, en tanto que evitaba la necesidad de disponer de información sobre precios, cobrase un especial atractivo.

El trabajo empírico de Farrell se había limitado a casos en los que había un único output, y los intentos realizados para desarrollar una extensión al caso en el que hubiese múltiples outputs no proporcionaban herramientas que permitiesen abordar aplicaciones en las que se tratara con grandes bancos de datos, como era el caso del programa Follow Through. Al objeto de cubrir estas necesidades de carácter computacional, Cooper y Rhodes desarrollaron el siguiente par de problemas duales, que suponen la implementación de la anterior definición de eficiencia relativa de una  $DMU_0$  perteneciente a una muestra de  $n$  unidades descritas en términos de  $m$  inputs,  $x_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$  y  $s$  outputs,  $y_{r0}$ ,  $r = 1, \dots, s$ :

$$\begin{aligned}
 \text{mín } z_0 &= \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_{i0}^- + \sum_{r=1}^s s_{r0}^+ \right) \\
 \text{s.a.:} & \\
 \theta x_{i0} - s_{i0}^- &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
 \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 s_{i0}^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 s_{r0}^+ &\geq 0 \quad r = 1, \dots, s
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

y

$$\begin{aligned}
& \text{máx } \omega_0 = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\
& \text{s.a.:} \\
& \sum_{i=1}^m \nu_i x_{i0} = 1 \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
& \nu_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \\
& \mu_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s
\end{aligned} \tag{1.2}$$

donde  $\varepsilon$  es una cantidad infinitesimal no arquimediana positiva que Cooper introdujo en 1979 para evitar problemas con los óptimos alternativos del problema (1.1) en su formulación original que no consideraba las holguras en la función objetivo. En concreto, su uso (tal como explicamos a continuación) garantizaría que la suma de las holguras estuviese siempre maximizada sin alterar el valor de  $\theta$  en el óptimo,  $\theta_0^*$ .

El escalar  $\theta_0^*$  es referido a veces como la medida de eficiencia de Farrell. Fue entonces cuando se descubrió que la medida de Farrell fallaba a la hora de contabilizar las holguras no nulas, lo que representaba una fuente de ineficiencia que debe ser considerada incluso cuando la atención se restringe a la “eficiencia técnica”. El tratamiento de las holguras no nulas es una parte en la que la literatura del DEA continúa siendo deficitaria hoy día. En particular, un valor  $\theta_0^* = 1$  del problema (1.1) sin la cantidad no arquimediana  $\varepsilon$  no satisfará la definición de eficiencia relativa anterior si alguna de las holguras asociadas es no nula, puesto que tal valor positivo de la variable correspondiente podría ser modificado sin afectar a ninguna otra variable. Además, no podrá concluirse que la eficiencia se ha alcanzado a partir de una solución  $\theta_0^* = 1$  con todas las holguras nulas ya que podría existir un óptimo alternativo con  $\theta_0^* = 1$  y alguna holgura estrictamente positiva. Si esto ocurre, se dice que la unidad en cuestión es “débilmente eficiente”. Para solventar este inconveniente, observemos que la presencia de  $\varepsilon > 0$  implica que ningún valor



de las holguras podrá compensar cualquier incremento que produzcan en  $\theta$ . Esto es, en el proceso de optimización es prioritaria la minimización de  $\theta$ , por lo que habitualmente el problema (1.1) se resuelve en dos pasos: 1) Se minimiza  $\theta$ , y 2) se maximiza  $\sum_{i=1}^m s_{i0}^- + \sum_{r=1}^s s_{r0}^+$  bajo la condición de que  $\theta$  tome el valor óptimo obtenido en la primera etapa. De este modo, ya que las holguras son maximizadas, uno puede estar seguro de que una solución óptima con todas las holguras nulas significa que la  $DMU_0$  es eficiente si en la primera etapa  $\theta_0^* = 1$ . En ese caso, la definición anterior de eficiencia relativa aplicada al modelo (1.1) conduce a

**Eficiencia DEA.** Una  $DMU_0$  es eficiente si y sólo si  $\theta_0^* = 1$  y todas las holguras son nulas; o equivalentemente, si y sólo si  $\omega_0^* = z_0^* = 1$ .

De este modo, el par de problemas duales desarrollados por Cooper y Rhodes extendieron las ideas anteriores al caso de múltiples inputs y múltiples outputs, de manera que en la evaluación de eficiencia de cada DMU podían localizarse las ineficiencias en cada input y en cada output.

Pero estos autores quisieron ir todavía un poco más lejos en el desarrollo de estas medidas. En este punto, Cooper invitó a A. Charnes a unirse a Rhodes y a él en lo que prometía ser una línea de investigación muy productiva. Utilizando el trabajo previo de Charnes y Cooper [24], que había establecido el campo de la “Programación Fraccional”, Charnes logró representar el par de problemas (1.2) y (1.1) por medio del siguiente modelo equivalente en forma de ratio

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$v_i / \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_r / \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s$$

El problema (1.3) estableció una conexión entre lo que se había hecho en DEA y los conocidos enfoques del análisis de eficiencia utilizados en otros campos tales como la Ingeniería y la Economía. Para ser más concretos, dicho modelo representaba una generalización del “ratio” output/input que tradicionalmente se había utilizado como medida de eficiencia en esos campos. Consideremos, por ejemplo, la siguiente definición extraída del campo de la ingeniería de la combustión: “eficiencia es el ratio entre la cantidad de calor liberado por un determinado mecanismo y la máxima cantidad de calor que podría haber liberado a partir de la cantidad de fuel que está utilizando”. Esto es,  $E_0 = y_0/y_M$ , donde  $y_M$  representa el máximo calor que puede ser obtenido a partir del input dado de fuel e  $y_0$  es el calor que realmente se ha obtenido a partir del mismo input de fuel. Aunque la definición de eficiencia varía de un campo a otro, ésta captura la idea básica: el ratio representa la relación con alguna posibilidad máxima, por lo que  $0 \leq E_0 \leq 1$ . Además, dicho valor de eficiencia para un input dado  $x$  puede obtenerse a partir del modelo (1.3) sin más que sustituir los valores de inputs y los outputs de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \frac{uy_0}{vx_0} \\ & \text{s.a.:} \\ & \quad \frac{uy_M}{vx_M} \leq 1 \\ & \quad \frac{uy_0}{vx_0} \leq 1 \\ & \quad u, v \geq 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

En efecto, sean  $u^*$  y  $v^*$  un par de valores óptimos de (1.4). Dado que  $y_M \geq y_0$  y  $x_M = x_0 = x$ , se tendrá que  $u^*y_M = v^*x_M = v^*x_0$ , puesto que tiene que ocurrir que  $u^*y_M/v^*x_M = 1$ . De ahí se concluye lo siguiente

$$\frac{u^*y_0}{v^*x_0} = \frac{u^*y_0}{u^*y_M} = \frac{y_0}{y_M} = E_0. \quad (1.5)$$

Todos estos resultados se publicaron finalmente en el *European Journal of Operational Research* en 1978 en el que se considera como paper seminal del DEA, debido lógicamente a Charnes, Cooper y Rhodes [28]. No obstante, señalaremos que en el problema fraccional que aparecía en dicho trabajo sólo se exigía la no negatividad de los pesos, en lugar de la positividad estricta como en (1.3). En tal caso, dicho problema fraccional resultaba ser equivalente a los modelos DEA que no incluían la cantidad no arquimediana  $\varepsilon$ . Esto fue inmediatamente corregido en una breve nota [29] publicada al año siguiente por los mismos autores, donde se establecía que el carácter positivo de los pesos evitaría que fuesen clasificadas como eficientes aquellas unidades para las que se obtuviesen holguras estrictamente mayores que cero en la resolución de modelo correspondiente. En dicha nota se advertía que la positividad de los pesos habría resultado directamente de la necesidad de encontrar un problema fraccional equivalente a los modelos DEA que sí incluyesen a la cantidad  $\varepsilon$ .

De este modo, el DEA, que comenzó como una nueva herramienta para el análisis de la eficiencia técnica de DMUs del sector público, se ha convertido en un nuevo método para la estimación de fronteras de producción. Cabe destacar el vertiginoso desarrollo que el DEA experimentó en los primeros años que transcurrieron después de su nacimiento. Como dato ilustrativo, sirva el hecho de que entre 1978 y 1992 aparecieron alrededor de 400 publicaciones (entre artículos, libros,...) relacionados con el DEA. Hoy en día ya se contabilizan más de 1000 artículos. En Seiford [85] puede encontrarse una completa bibliografía que abarca el período 1978-1992 y en Seiford [86] el mismo autor ofrece un ameno trabajo acerca de la evolución y el “state of the art” del DEA. Este rápido desarrollo se debió en gran medida a las necesidades de extensiones del método que surgieron en las múltiples aplicaciones que se realizaron, y quizás también al establecimiento de las ya mencionadas relaciones

con el tradicional enfoque paramétrico del análisis de fronteras de producción.

A propósito de las aplicaciones, cabe reseñar la extensa variedad de campos en los que el DEA ha sido utilizado. Inicialmente, las aplicaciones se desarrollaron en ámbitos relacionados con la educación. De hecho, éste fue el caso del análisis del programa “Follow Through”. A partir de entonces, han sido muchos los sectores en los que el DEA ha demostrado satisfactoriamente su aplicabilidad. Así, podemos destacar las aplicaciones que se han desarrollado en el entorno sanitario (gestión de hospitales o farmacias), en el mundo financiero (estudio de entidades bancarias) o incluso los análisis de economías municipales, estatales o de países. Pero éstas representan únicamente una breve selección de las áreas en las el DEA se ha aplicado. En Seiford [86] podemos encontrar una extensa relación de trabajos aplicados que aparecen clasificados por períodos de cinco años. Como se afirma en el libro *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications* [27], editado por Charnes, Cooper, Lewin y Seiford en 1994, el DEA es una metodología cuya aceptación hoy día no es puesta en duda ni por investigadores ni por personas que lo han aplicado en distintas áreas. No obstante, todavía no somos conscientes de sus posibilidades finales.

## 1.2. DEA: Nociones básicas

El DEA ha supuesto un enfoque alternativo a los planteamientos paramétricos clásicos del análisis de fronteras de producción. En contraposición a éstos, cuyo objetivo es la estimación de una superficie de regresión que se ajuste a los datos atendiendo a algún criterio de optimalidad, en DEA se optimiza para cada unidad específica con el objetivo de estimar una frontera a trozos determinada por las DMUs eficientes en el sentido de Pareto (ver figura 1.1). En el análisis paramétrico, se asume que el modelo ajustado es aplicable a cada unidad en la muestra. Por el

contrario, en DEA se optimiza la medida de la gestión de cada DMU. De este modo, el objetivo en DEA es cada una de las observaciones *individuales* (esto implica que en un análisis tipo DEA ha de realizarse una optimización por cada unidad), mientras que en los planteamientos estadísticos basados en métodos de regresión el propósito es la descripción de una hipotética DMU “promedio” y la estimación de parámetros. Lógicamente, al igual que en el planteamiento paramétrico, en DEA se utiliza toda la información que proporcionan los datos observados, en este caso recurriendo a la programación matemática.

En un planteamiento paramétrico (tradicionalmente en el caso de un output y múltiples inputs) se requiere la especificación de una forma funcional que relacione la variable dependiente con las variables independientes (por ejemplo, una ecuación de regresión o una función de producción). Además, son necesarias también algunas hipótesis relativas a la distribución del término de error, tales como que éstos puedan considerarse una muestra aleatoria simple de una distribución normal. En DEA, por el contrario, no se requiere ninguna hipótesis sobre la forma funcional, ni tampoco sobre la distribución de los errores. Simplemente se calcula una medida de eficiencia relativa a una frontera extremal construida a partir de las observaciones muestrales, con la única condición de que todas las DMUs queden envueltas por dicha frontera<sup>1</sup>. Cada unidad que no esté situada sobre la frontera se evaluará en relación a una combinación convexa de DMUs que pertenecen a una cara de la frontera eficiente, de acuerdo con algún criterio que determina la proyección sobre ésta<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>En DEA se utiliza el calificativo “determinístico” para reflejar el hecho de que todas las observaciones de la muestra quedarán a un lado de la frontera estimada, pero esto no significa que no pueda estimarse una frontera de producción de carácter probabilístico (estocástico) utilizando modelos DEA (véase Simar [88]).

<sup>2</sup>Para una sencilla revisión de los métodos paramétricos al uso puede consultarse el libro de Coelli, Rao y Batesse [34].

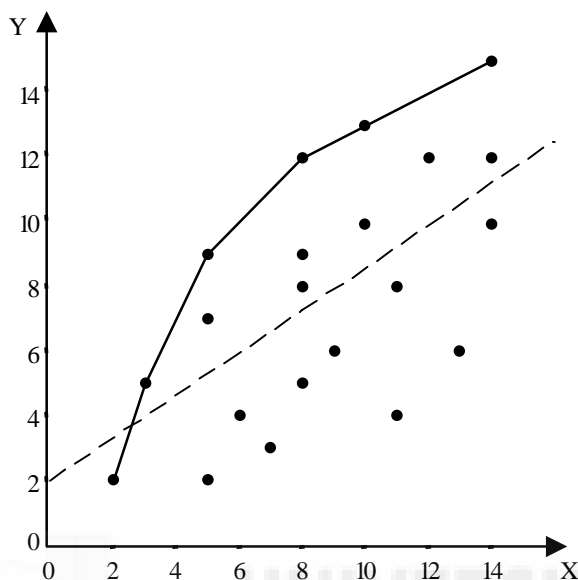


Figura 1.1: DEA versus regresión

La línea continua de la figura 1.1 representa la frontera obtenida en un análisis DEA a partir de la observación de algunas DMUs que utilizan diferentes cantidades de un input  $x$  para producir diferentes cantidades de un output  $y$ . La medida de eficiencia relativa de cada DMU se calcula en relación a las restantes unidades basándose en los valores observados de los inputs y los outputs de cada unidad. Los cálculos tienen por objetivo maximizar la medida de eficiencia relativa de cada DMU por medio de la selección de un conjunto de pesos para cada una de las variables que se determinan en función de las observaciones. En general, este análisis proporciona una superficie empírica de producción lineal a trozos (la línea continua de la figura 1.1), que en términos económicos representa la frontera de producción “best-practice”, esto es, la máxima cantidad de output empíricamente alcanzable para cualquier unidad en la muestra dado su nivel de inputs. Es importante destacar que el carácter extremal de dicha estimación de la frontera de producción es lo que justifica la necesidad, todavía mayor (si cabe) que en los planteamientos paramétricos, de la detección y aprendizaje a partir de los “outliers”.

Charnes, Cooper y Rhodes [28] extendieron las ideas de Farrell [51] al establecer una conexión entre la estimación de la eficiencia técnica y la estimación de las fronteras de producción. El modelo CCR<sup>3</sup> generalizó el “ratio” output/input de cada DMU (que como hemos mencionado anteriormente se ha utilizado como medida de eficiencia) en términos de un modelo de programación lineal fraccional en el que la descripción en función de múltiples inputs y múltiples outputs de cada DMU se transforma en el ratio entre un output “virtual” simple y un input “virtual” simple. La eficiencia técnica relativa de cualquier DMU se calcula formando el “ratio” entre una suma ponderada de outputs y una suma ponderada de inputs, donde los pesos (o multiplicadores) tienen que determinarse de manera que la medida de eficiencia resultante para cada DMU se obtenga tras imponer la restricción de que ninguna otra DMU tenga un score de eficiencia relativo mayor que 1.

En un análisis DEA se identifican las fuentes y el nivel de ineficiencia para cada uno de los inputs y cada uno de los outputs de cada unidad ineficiente (esto es, situada por debajo de la frontera). El nivel de ineficiencia se determina utilizando como referente otra DMU en la frontera o bien una combinación lineal convexa de éstas que usa el mismo nivel de inputs y produce el mismo o un nivel mayor de outputs. Esto se consigue imponiendo que en las soluciones factibles se permita el incremento de algunos outputs (o bien la reducción de algunos inputs o ambas cosas) sin empeorar el nivel de los restantes inputs o outputs. El cálculo de la mejora potencial de cada unidad ineficiente no se corresponde necesariamente con la gestión observada de alguna DMU real que forma parte de la frontera ni con la proyección determinística de una DMU ineficiente sobre la frontera. Las mejoras calculadas para las DMUs ineficientes (en cada input y cada output) son “indicativas” de potenciales mejoras alcanzables puesto que las proyecciones están basadas en el comportamien-

---

<sup>3</sup>En alusión a sus autores, el primer modelo DEA se referencia habitualmente por esta abreviatura.

to “best-practice” observado de DMUs “comparables” que están situadas sobre la frontera eficiente.

De este modo, el DEA como método orientado a la estimación de fronteras “best-practice” y a la optimización de las DMUs individualmente se ha convertido en una nueva vía para la organización y el análisis de datos. Resumiendo, podemos destacar los siguientes aspectos de interés relacionados con un análisis DEA: el objetivo son las observaciones individuales en contraposición a medias poblacionales; se proporcionan medidas de eficiencia en términos de la utilización de inputs para la producción de outputs (eficiencia técnica) sin que se requiera la especificación previa de precios (o pesos) para los inputs y los outputs; es posible tratar con múltiples inputs y múltiples outputs medidos en distintas unidades; y se obtiene una estimación de la frontera de producción sin que sea necesaria la especificación de una forma funcional que relacione los outputs con los inputs, que puede ser utilizada para calcular estimaciones específicas para cambios deseados en inputs y/o outputs de unidades por debajo de la frontera eficiente que se proyectan en ésta. Éstos pueden considerarse como algunos de los aspectos básicos de la metodología DEA, que han ido progresivamente completándose con los refinamientos y mejoras que han permitido a esta técnica abordar problemas cada vez más complejos. Algunas de estas extensiones y mejoras se comentan en la sección 1.4.

### 1.3. Modelos básicos

De ahora en adelante supondremos que se desea evaluar la eficiencia de un conjunto de  $n$  DMUs que consumen  $m$  inputs para producir  $s$  outputs. Concretamente, cada  $DMU_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , que puede describirse por un par  $(X_j, Y_j)$ , utiliza los inputs  $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})'$  para producir los outputs  $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})'$ . Asumiremos que tanto los inputs como los outputs son positivos. En función de los vectores



de inputs, puede definirse una matriz  $m \times n$  de inputs,  $X = [X_1 \dots X_n]$ , y del mismo modo una matriz  $s \times n$  de outputs,  $Y = [Y_1 \dots Y_n]$ .

### 1.3.1. El modelo CCR

Como se ha comentado anteriormente, Charnes, Cooper y Rhodes introdujeron una definición de eficiencia en forma de ratio que generalizaba la definición clásica del ratio entre un output simple y un input simple al caso en el que existiesen múltiples outputs y múltiples inputs. La principal virtud de dicho ratio era que el problema derivado de la existencia de múltiples outputs e inputs se solucionaba con la construcción de un ratio entre un output “virtual” simple y un input “virtual” simple para el que no había que asignar previamente los valores de los pesos. Si la  $DMU_0$  era la unidad que se deseaba evaluar, el problema quedaba reducido pues a maximizar el siguiente ratio:

$$\max_{u_r, v_i} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{m \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \quad (1.6)$$

Es obvio que si no se añaden restricciones adicionales, el ratio (1.6) no está acotado. El modelo de programación matemática conocido como CCR (en orientación input) en su versión en forma de ratio se obtuvo imponiendo que el ratio (1.6) fuera menor o igual que la unidad para cada DMU. El resultado fue el problema (1.3). Este modelo tiene infinitas soluciones. En efecto, si  $(u_1^*, \dots, u_m^*, v_1^*, \dots, v_s^*)$  es una solución óptima, entonces  $(\beta u_1^*, \dots, \beta u_m^*, \beta v_1^*, \dots, \beta v_s^*)$ , para cualquier  $\beta > 0$ , también lo es. La transformación de modelos de programación fraccional lineal en modelos lineales debida a Charnes y Cooper [24] permite la selección de una solución representativa para cada conjunto de soluciones óptimas proporcionales de (1.3) a partir del problema de programación lineal equivalente (1.2). Dicho problema es la

formulación del modelo CCR en función de los multiplicadores. El problema dual asociado a dicho modelo es (1.1), que se conoce como la formulación del modelo CCR en su versión de envoltura (éste es el origen del nombre “Data Envelopment Analysis” para esta metodología). Como se dijo anteriormente, (1.1) se resuelve en dos pasos: 1) Se minimiza  $\theta_0$ , y 2) se maximiza  $\sum_{i=1}^m s_{i0}^- + \sum_{r=1}^s s_{r0}^+$  sujeto al valor  $\theta_0^*$ . Así, una  $DMU_0$  será eficiente si y sólo si  $\theta_0^* = 1$  y todas las holguras son cero; o equivalentemente, si y sólo si  $\omega_0^* = z_0^* = 1$ .

La resolución de (1.1) determina un punto sobre la superficie de envoltura obtenido al reducir al máximo y de forma proporcional todos los inputs de la  $DMU_0$ . Las holguras no nulas y el valor  $\theta_0^* \leq 1$  identifican las fuentes y la cantidad de ineficiencia. Por su parte, al resolver el problema dual (1.2) obtenemos la expresión de un hiperplano soporte para el conjunto de referencia empírico que determina el conjunto de restricciones de (1.1) (o bien un haz de soportes si se presentan óptimos alternativos) en la  $DMU_0$ , si ésta es eficiente, o bien en su proyección sobre la frontera, si no lo es. Dichos hiperplanos permiten la obtención de estimaciones de los precios sombra o tasas marginales de sustitución técnicas.

De forma completamente análoga podrían haberse obtenido los modelos correspondientes a la orientación output. En tal caso, la medida de eficiencia relativa obtenida resulta de la expansión proporcional máxima de todos los outputs de la  $DMU_0$  que es factible para su nivel de inputs. Concretamente, será el valor óptimo del siguiente modelo DEA, que es la formulación en versión de envoltura del modelo CCR de orientación output

$$\begin{aligned}
\text{máx } z_0 &= \phi + \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_{i0}^- + \sum_{r=1}^s s_{r0}^+ \right) \\
\text{s.a.:} \\
x_{i0} - s_{i0}^- &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
\lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
s_{i0}^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
s_{r0}^+ &\geq 0 \quad r = 1, \dots, s
\end{aligned} \tag{1.7}$$

### 1.3.2. Los modelos CCR y BCC: planteamiento axiomático

En Banker, Charnes y Cooper [12] se propone un enfoque alternativo de tipo axiomático para la evaluación de la eficiencia que permite además establecer una conexión con la “función de distancia” de Shephard [87]. Dicha función puede relacionarse con el trabajo de Farrell que, como ya hemos comentado, fue pionero en la medición de eficiencia directamente a partir de datos observados (al menos en el caso de un output simple). De este modo, la función de distancia de Shephard puede usarse para extender estas ideas a situaciones más generales, en particular aquellas en las que se trata con múltiples outputs. La clave de dicho planteamiento axiomático reside en la caracterización del llamado conjunto de posibilidades de producción

$$T = \{(X, Y)/Y \text{ puede producirse a partir de } X\}. \tag{1.8}$$

A partir de  $T$ , se definen los conjuntos de posibilidades de inputs  $L(Y)$ , para cada  $Y$ , como

$$L(Y) = \{X/(X, Y) \in T\}, \tag{1.9}$$

y de forma similar los conjuntos de posibilidades de outputs  $P(X)$ , para cada  $X$ ,

$$P(X) = \{Y/(X, Y) \in T\}. \quad (1.10)$$

Se asumen los siguientes postulados para  $T$ :

Postulado 1. *Convexidad*. Si  $(X_j, Y_j) \in T$ ,  $j = 1, \dots, n$ , entonces

$$\left( \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \right) \in T,$$

para cualesquiera  $\lambda_j \geq 0$  tales que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ .

Postulado 2. *Ineficiencia (o disponibilidad libre)*.

a) Si  $(X, Y) \in T$  y  $\bar{X} \geq X$ , entonces  $(\bar{X}, Y) \in T$

b) Si  $(X, Y) \in T$  e  $\bar{Y} \leq Y$ , entonces  $(X, \bar{Y}) \in T$

Postulado 3. *No acotación de los rayos (o rendimientos a escala constantes)*. Si  $(X, Y) \in T$ , entonces  $(kX, kY) \in T$  para cualquier  $k > 0$ .

Postulado 4. *Mínima extrapolación*.  $T$  es la intersección de todos los conjuntos  $\hat{T}$  que satisfacen los postulados 1, 2 y 3 y sujetos a la condición de que cada uno de los vectores observados  $(X_j, Y_j) \in \hat{T}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

De este modo,  $T$  es el menor conjunto que satisface los postulados anteriores y es consistente con los datos observados.

Se comprueba fácilmente que el conjunto  $T$  puede caracterizarse de la siguiente forma

$$(X, Y) \in T \Leftrightarrow X \geq k \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \quad e \quad Y \leq k \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \quad (1.11)$$

para algún  $k > 0$  y algunos  $\lambda_j \geq 0$  tales que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ .

Una vez que se ha caracterizado el conjunto  $T$ , la estimación de la función de distancia de Shephard para los datos observados permite establecer una clara conexión con la medida de eficiencia CCR obtenida a partir de los modelos de la sección anterior. Shephard define una función de distancia  $g(X, Y)$  sobre un conjunto de inputs  $L(Y)$  como  $g(X, Y) = 1/h(X, Y)$ , donde  $h(X, Y) = \min\{h/hX \in L(Y), h \geq 0\}$ . Empleando la caracterización (1.11), se tendrá que

$$h(X, Y) = \min\left\{h/ hX \geq k \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq k \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, k > 0\right\}, \quad (1.12)$$

donde, haciendo  $\mu_j = k\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se obtiene un modelo cuyo dual es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad \omega_0 &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{i=1}^m \nu_i x_{i0} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & \nu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \mu_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (1.13)$$

Este problema coincide con la formulación (1.2) del modelo CCR excepto en que éste último requiere que los multiplicadores sean positivos mientras que en (1.13) sólo se exige que éstos sean no negativos. De hecho, ésta fue la primera formulación del modelo CCR que apareció en 1978. Nótese que el conjunto  $L_S(Y) := \{X/h(X, Y) = 1\}$  simplemente describe la frontera del conjunto  $L(Y)$ , y no la frontera eficiente de observaciones que producen dicha cantidad de outputs. Por tanto, la función de distancia de Shephard requiere un ligero refinamiento si se pretende que pueda

ser utilizada para propósitos relacionados con la medición de la eficiencia. Esto se consigue introduciendo la cantidad no arquimediana en (1.13), tal como se hizo en Charnes, Cooper y Rhodes [29], ya que así el conjunto de puntos cuyo valor óptimo del problema resultante sea igual a la unidad corresponderá al conjunto  $L_E(Y) := \{X/h(X, Y) = 1 \text{ con } \bar{X} \leq X \Rightarrow \bar{X} \notin L(Y) \text{ a no ser que } \bar{X} = X\} \subseteq L_S(Y)$ .

En este sentido se establece una equivalencia entre la medida de eficiencia CCR y la inversa de la distancia de Shephard para conjuntos  $L(Y)$  asociados con un conjunto  $T$  que satisface los postulados anteriores.

El postulado 3 permite extrapolar la gestión de las DMUs más eficientes con tamaños de escala eficientes (para el “mix” de inputs y outputs dado) e identificar así las ineficiencias de escala que puedan estar presentes en el nivel de operación de otras unidades. Si no se considera dicho postulado, se restringe la atención a ineficiencias de producción en el nivel de operación dado para cada DMU, y de este modo se desarrolla un procedimiento de medida de la eficiencia que asigna un valor igual a la unidad a una DMU si ésta está sobre la frontera de producción eficiente, incluso si dicha unidad no opera en el tamaño de escala más eficiente. Esta identificación de la frontera de producción eficiente permite determinar si en un determinado segmento de la superficie los rendimientos a escala son crecientes, constantes o decrecientes.

Si el conjunto  $T$  únicamente satisface los postulados 1, 2 y 4, entonces quedará caracterizado de la siguiente forma

$$(X, Y) \in T \Leftrightarrow X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \text{ e } Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \quad (1.14)$$

para algunos  $\lambda_j \geq 0$  tales que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ .

Si para esta nueva situación se deseara determinar la función de distancia de Shephard para el conjunto de inputs  $L(Y)$ , se llegaría al siguiente problema lineal

(haciendo las mismas consideraciones anteriores)

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_{i0}^- + \sum_{r=1}^s s_{r0}^+ \right) \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \theta x_{i0} - s_{i0}^- = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

que se conoce como la formulación del modelo BCC de orientación input en su versión de envoltura. La solución de (1.15) puede interpretarse de forma similar a la de (1.1). La única diferencia reside en que la inclusión de la restricción de convexidad reduce la región factible, de manera que ésta es ahora obtenida a partir de la envoltura convexa de las observaciones mientras que en el modelo CCR lo es a partir de la envoltura cónica.

De igual forma que en la sección anterior puede obtenerse un modelo BCC de orientación output, que en su versión de envoltura diferirá de (1.7) en la adición de la restricción de convexidad.

### 1.3.3. El modelo aditivo

Hemos visto que los modelos CCR y BCC proporcionan medidas de eficiencia técnica en el sentido de Debreu y Farrell. Ahora nos centraremos en el modelo aditivo, cuyos resultados responden al concepto económico de optimalidad de Pareto

tal y como ya había sido interpretado anteriormente por Koopmans. Dicho modelo fue introducido en 1985 por Charnes, Cooper, Golany, Seiford y Stutz [25]. La formulación en su versión de envoltura es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & - \sum_{i=1}^m s_{i0}^- - \sum_{r=1}^s s_{r0}^+ \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Al resolver (1.16) se maximiza la distancia  $L_1$  desde la  $DMU_0$  hasta la frontera eficiente en la dirección noroeste. Concretamente, para una  $DMU_0$  se selecciona el punto sobre la frontera eficiente que maximiza la distancia  $L_1$  de entre todos aquellos que dominan a dicha unidad. La  $DMU_0$  se considerará eficiente si y sólo si el valor óptimo de (1.16) es 0. Por tanto, dicha unidad será ineficiente si no está sobre la frontera eficiente, esto es, si alguna componente  $s_{i0}^-$  o  $s_{r0}^+$  es no nula, lo que, por otro lado, permitiría indicar las fuentes y la magnitud de la ineficiencia en los correspondientes inputs y outputs.

Obsérvese que el conjunto de posibilidades de producción asociado con (1.16) coincide con el del modelo BCC. Es posible incluso formular el modelo aditivo sin la restricción de convexidad (véase Ali y Seiford [4]), en cuyo caso el conjunto de posibilidades de producción asociado sería el mismo que el del modelo CCR.

Es obvio que los valores de la función objetivo del modelo aditivo para las DMUs



ineficientes dependen de las unidades de medida. Por esta razón, en 1987 sus mismos autores propusieron la siguiente normalización de la función objetivo del modelo aditivo

$$-\sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} - \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}, \quad (1.17)$$

dando lugar a un modelo que se conoció como el modelo aditivo extendido ([26]).

#### 1.4. Extensiones y mejoras

La teoría básica de la metodología DEA se ha ampliado con el gran número de refinamientos y extensiones que han dotado a esta técnica de un mayor grado de aplicabilidad. En esta sección destacamos algunas de las grandes líneas sobre las que se han desarrollado importantes extensiones de los modelos DEA.

Una de las primeras extensiones de los modelos DEA básicos estuvo orientada al tratamiento de variables (inputs y outputs) no discretionales. Las formulaciones de los modelos presentados en la sección anterior implícitamente asumen que todos los inputs y outputs son discretionales, es decir, controlables por el gestor de cada DMU, de manera que los niveles de dichas variables pueden modificarse a su discreción. Sin embargo, en la práctica ocurre a menudo que algunos de los inputs o los outputs involucrados son no controlables o bien sus niveles han sido fijados externamente. En el trabajo de 1986 de Banker y Morey [14] se ilustra el impacto de este tipo de variables en un análisis de eficiencia realizado sobre una cadena de restaurantes de comida rápida. La clave para el tratamiento matemático de variables no discretionales reside en no considerar en la función objetivo la cantidad en la que un input no discrecional puede reducirse o bien aquella en la que un output no discrecional puede ser aumentado. Sin embargo, la restricciones asociadas con dichas variables se mantienen en el modelo con objeto de seleccionar las unidades

de referencia apropiadas.

Una de las extensiones más significativas de la metodología DEA está relacionada con la restricción del rango de los multiplicadores. Pese a que inicialmente sólo se requiere que éstos sean positivos, esta completa flexibilidad en su especificación conduce en ocasiones a conclusiones indeseables, ya que la evaluación de una DMU como eficiente, en virtud de los valores obtenidos para los multiplicadores, puede ser difícil de justificar. Concretamente, los modelos asignan a menudo valores excesivamente grandes o irracionalmente pequeños en un intento de evaluar a cada unidad lo mejor posible. Por ello, se han desarrollado distintas técnicas que permiten la incorporación del conocimiento previo al análisis de la eficiencia. Entre ellas, destacamos aquéllas basadas en la imposición de cotas superiores e inferiores para los multiplicadores individualmente (Dyson y Thanassoulis [44]), la técnica conocida como “región de seguridad” (Thompson, Singleton, Thrall y Smith [95] y Thompson, Langemeier, Lee, Lee y Thrall [94]) y el modelo “cono ratio” (Charnes, Cooper, Huang y Sun [31]). El trabajo de Allen, Athanassopoulos, Dyson y Thanassoulis [6] constituye un interesante “survey” sobre el estado de este tema.

Una línea de investigación que está siendo desarrollada actualmente tiene por objetivo el establecimiento de fundamentos estadísticos de los modelos DEA, lo que supone una alternativa no paramétrica a los enfoques de la estimación de fronteras de producción anteriormente propuestos. En el trabajo de Simar [88] se discute en un sentido amplio los aspectos del análisis estadístico en modelos de fronteras de tipo DEA (los trabajos de Banker [11] y Grosskopf [61] son también de interés a este respecto, y en Simar y Wilson [93] se presenta la revisión más actualizada del tema). El primer trabajo en esta línea fue debido a Banker [10], quien en 1993 formalizó la relación entre el problema de la estimación de fronteras de producción y los modelos DEA en el caso de un output y múltiples inputs. Además de justificar la naturaleza estadística de los estimadores obtenidos a partir de los modelos DEA, Banker prueba

también su consistencia, lo que le permite desarrollar tests estadísticos asintóticos para abordar algunos problemas de interés desde una perspectiva estadística. Se han hecho también algunos intentos de abordar este problema en el caso de múltiples outputs y múltiples inputs. En particular, en Simar y Wilson [91] se propone un modelo estadístico que permite introducir la aleatoriedad de las medidas de eficiencia obtenidas a partir de los modelos DEA. También han sido estudiadas algunas propiedades relativas a la convergencia de dichos estimadores DEA, así como su distribución asintótica y las propiedades en muestras finitas de tales aproximaciones. Algunos resultados sobre este tema pueden encontrarse en Korostelev, Simar y Tsybakov [67], Kneip, Park y Simar [65] y Gijbels, Mammen, Park y Simar [56]. Por otro lado, Simar y Wilson [91] defienden la conveniencia de los métodos bootstrap para estimar la distribución muestral de los scores de eficiencia obtenidos a partir de un modelo DEA. A partir de ésta, se pueden derivar procedimientos para la obtención de intervalos de confianza y tests para la resolución de problemas de contraste de hipótesis (véanse Simar y Wilson [89], [90], [91] y [92]).

Uno de los aspectos relacionados con la medición de la eficiencia que ha despertado un gran interés recientemente ha sido el desarrollo de las medidas de eficiencia generalizadas (GEMs). El objetivo inicial de dichas medidas es el diseño de indicadores que tengan en cuenta todo tipo de ineficiencias (tanto radial como no radial) a la hora de evaluar a una DMU. Además, se intenta que estas medidas satisfagan ciertas propiedades deseables. En Cooper y Pastor [36] encontramos una amplia revisión del tema.

Finalmente, nos referiremos a un tema que en el contexto de la estimación de fronteras de producción y, en particular, en modelos DEA ha despertado escasa atención a pesar de su enorme importancia: la detección de “outliers” y observaciones influyentes. La medición de la eficiencia con modelos de tipo frontera de carácter determinístico es muy sensible a la presencia de outliers en la muestra, puesto que

---

dicha frontera queda determinada por observaciones muestrales que son puntos extremos. En particular, las observaciones que por errores en los datos se sitúen sobre la frontera eficiente podrían estar conduciendo a una evaluación errónea de algunas de las restantes DMUs; concretamente, la eficiencia de éstas podría resultar infraestimada. Estos hechos ponen de manifiesto la especial relevancia que cobran las observaciones influyentes en la metodología DEA, y justifican la necesidad del desarrollo de procedimientos para su detección.

Pero no son éstas las únicas direcciones sobre las que el DEA se ha ido extendiendo. Podemos simplemente citar entre otras las siguientes contribuciones significativas: los modelos no convexos conocidos como modelos FDH (“free disposal hull”) debidos a Deprins, Simar y Tulkens [41], los índices Malmquist (Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos [46], o más recientemente, Grifell-Tatjé, Lovell y Pastor [58] y Grifell-Tatjé y Lovell [59]), el análisis “window” (Charnes, Clark, Charles, Cooper y Golany [23]), la estimación de los rendimientos a escala con modelos DEA (Banker [9], Banker y Thrall [16]), el tratamiento de variables categóricas (Banker y Morey [15]) o de variables no positivas (Ali y Seiford [3], Lovell y Pastor [70] y Pastor [75]), la incorporación de relaciones ordinales a los modelos (Ali, Cook y Seiford [5]) o el enfoque “chance-constrained” de los modelos DEA (Land, Lovell y Thore [68]).



# Parte I

## Medidas de Eficiencia Generalizadas en DEA



## Capítulo 2

# La Evaluación de la Eficiencia con modelos DEA





---

Como ya se comentó anteriormente, la medición de la eficiencia comenzó con los trabajos de Debreu [40] y Farrell [51]. Posteriormente, algunas de las limitaciones del enfoque de Farrell para medir eficiencia tales como la necesidad de considerar tecnologías más complejas motivaron nuevos avances en este área. En una de las líneas de investigación que se desarrollaron, la medida de Farrell se generalizó para permitir que ésta tuviese en cuenta reducciones en los inputs y/o incrementos en los outputs que no fuesen necesariamente proporcionales, esto es, para que la medida resultante fuese de tipo no radial. Dicha generalización fue originalmente debida a Färe y Lovell [49], quienes en 1978 propusieron un enfoque axiomático del problema sugiriendo que una medida de eficiencia ideal debería satisfacer ciertas propiedades deseables. Para una medida de orientación input éstas eran las siguientes: 1) un vector de inputs debería ser evaluado como eficiente si, y sólo si, pertenece al conjunto eficiente  $\text{Eff}L(Y) = \{X \in L(Y) / \bar{X} \leq X \Rightarrow \bar{X} \notin L(Y)\}$ , donde  $L(Y)$  se define como en (1.9), 2) los vectores de inputs ineficientes deberían ser comparados con vectores del conjunto eficiente, 3) homogeneidad de grado -1 y 4) monotonía fuerte<sup>1</sup>. De acuerdo con estas ideas, definieron la que se conoció como “*Medida de Russell*”<sup>2</sup> de eficiencia técnica de orientación input, que supuestamente satisfacía dichas propiedades. Sin embargo, en el trabajo posterior de Färe, Lovell y Zieschang [50] se puntualizó que esta medida no verificaba la propiedad de homogeneidad de grado -1 en inputs. En dicho trabajo se propuso también una extensión de la medida anterior al caso de múltiples outputs. Otras propuestas de medidas de eficiencia que

---

<sup>1</sup>Russell [83] propone también cuatro propiedades deseables para una medida de eficiencia: “indicación”, esto es, la medida toma el valor 1 si, y sólo si, la unidad que se evalúa es eficiente en el sentido de Koopmans, “comensurabilidad”, esto es, que sea invariante a las unidades de medida, monotonía fuerte y homogeneidad.

<sup>2</sup>El término “*Medida de Russell*” es ciertamente extraño. Primero, porque la mencionada medida apareció originalmente en Färe y Lovell [49], siendo ésta la razón por la que en ocasiones es conocida por el nombre de estos dos autores. Segundo, y más importante, porque el propio Russell defiende claramente la medida de eficiencia de Farrell (véase Russell [82] y [83]).

pretendían extender o mejorar a las ya existentes en algún sentido se realizaron en Färe [45] y en Zieschang [107]. Para ser más concretos, nos estamos refiriendo a la medida asimétrica de Färe y a la conocida como medida de Zieschang. En particular, esta última se definió como una combinación de la medida de Farrell y la medida de Färe y Lovell en un intento de reunir lo mejor de cada una de ellas.

No existe ninguna medida que teóricamente pueda considerarse superior a las restantes. De hecho, Bol [18] y Russell [83] muestran que ninguna medida de eficiencia técnica puede cumplir simultáneamente los cuatro requisitos que propusieron Färe y Lovell en una amplia clase de tecnologías de producción. Las medidas no radiales presentan como ventaja sobre las radiales que verifican la definición de Koopmans de eficiencia. No obstante, sería difícil incluso elegir entre las medidas no radiales atendiendo únicamente a argumentos teóricos, puesto que ninguna de ellas cumple todos los requisitos de una medida de eficiencia ideal. Además, las medidas radiales poseen el atractivo de una posible interpretación en términos de costos que es independiente de los valores concretos de los precios de los inputs (obviamente, es posible una interpretación análoga en términos de beneficios para una medida de orientación output). De este modo, el debate sobre la “mejor” medida de eficiencia continúa abierto, lo que en parte puede explicar por qué en la práctica se siguen usando las medidas radiales para la evaluación de la eficiencia, ignorándose un posible análisis sobre la utilización de una medida alternativa más apropiada.

Ferrier, Kerstens y Vanden Eeckaut [52] estudian tanto teórica como empíricamente el comportamiento de las cuatro medidas de eficiencia siguientes en el contexto particular de una tecnología de tipo DEA: la medida de Farrell, la medida de Färe y Lovell, la medida de Zieschang y la medida asimétrica de Färe. En un análisis empírico realizado con medidas radiales, estos autores ponen de manifiesto la importancia de la ineficiencia no radial recogida en las holguras tras comprobar que la evaluación de únicamente un pequeño porcentaje de unidades ineficientes se

había realizado tras la proyección de éstas en el conjunto eficiente. Si a la evidencia empírica se añaden argumentos de tipo teórico como son el número de propiedades que satisfacen la medida de Färe y Lovell y la de Zieschang, la conclusión final es que dichas medidas proporcionan una valiosa alternativa a las radiales. Estos autores añaden además que la medida de Färe y Lovell y la de Zieschang presentan sólo pequeñas diferencias entre sí, tanto en la teoría como en la práctica. En De Borger, Ferrier y Kerstens [39] encontramos un análisis similar para una tecnología FDH. También está documentado en la literatura el problema inverso, esto es, el análisis del efecto de la elección de una tecnología sobre una medida de eficiencia, en particular, sobre las medidas radiales clásicas (véase, por ejemplo, Grosskopf [60]).

En 1985 Färe, Grosskopf y Lovell [47] proponen dos extensiones no orientadas de la medida de Farrell a las que estos autores atribuyen el calificativo de hiperbólica e hiperbólica generalizada, respectivamente. El carácter no orientado de estas medidas significa que éstas recogerán simultáneamente tanto la ineficiencia en inputs como en outputs. Las medidas hiperbólicas vuelven al espíritu original de la medida de Farrell en el sentido de que únicamente se consideran reducciones en los inputs e incrementos en los outputs de tipo proporcional. En esta línea se han hecho algunas aportaciones recientemente. Así, destacamos la extensión no orientada de la medida de Farrell debida a Briec [19], que puede verse a su vez como un caso particular de la medida propuesta por Chambers, Chung y Färe [22]. Esta última se obtiene proyectando en la frontera eficiente la unidad que se evalúa imponiendo que ésta siga un camino determinado por un vector especificado previamente para el que a priori existen múltiples elecciones posibles.

Färe, Grosskopf y Lovell [47] definieron además una medida de Russell de orientación output y una medida de Russell no orientada de eficiencia técnica. Ésta última extendía las dos versiones orientadas en el sentido de que simultáneamente consideraba la ineficiencia (radial y no radial) tanto en inputs como en outputs.

## 2.1. Medidas de Eficiencia y Modelos DEA

En esta primera parte de la memoria restringimos nuestra atención a las medidas de eficiencia no radiales y no orientadas definidas en el contexto de tecnologías de producción de tipo DEA. En particular, el desarrollo se hará para una tecnología que presente rendimientos a escala variables (VRS), si bien podría llevarse a cabo un discurso paralelo para rendimientos a escala constantes (CRS), lo que supondría la eliminación de la restricción de convexidad de los modelos DEA considerados. Así, a partir de una muestra en la que se observan los valores de los inputs y los outputs de un conjunto de DMUs, y asumiendo los postulados 1, 2 y 4 para el conjunto de posibilidades de producción (véase sección 1.3.2), pueden implementarse algunas de las medidas anteriormente mencionadas, o algunas otras, dando lugar a nuevos modelos de tipo DEA para la evaluación de la eficiencia, tal como sucediera originalmente con la medida de Farrell y los modelos CCR y BCC. Por ejemplo, la implementación de la medida hiperbólica no orientada en una tecnología de referencia de tipo DEA que satisfaga los mencionados postulados daría lugar al siguiente modelo<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \delta \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \delta X_0 \geq X\lambda \\
 & \frac{1}{\delta} Y_0 \leq Y\lambda \\
 & e'\lambda = 1 \\
 & \delta \geq 0, \lambda \geq 0_n
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

De forma similar obtendríamos el siguiente modelo para la medida hiperbólica

---

<sup>3</sup>Pese a que Farrell no definió ninguna medida no orientada, Färe, Grosskopf y Lovell (los autores de esta medida) le atribuyeron a él la autoría de esta medida hiperbólica puesto que era una extensión natural de sus ideas. De hecho, la bautizaron con el nombre de medida de Farrell no orientada de eficiencia técnica.

generalizada conocida como medida de Farrell no orientada generalizada de eficiencia técnica

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \quad \frac{\theta + \phi}{2} \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \quad \theta X_0 \geq X\lambda \\
 & \quad \frac{1}{\phi} Y_0 \leq Y\lambda \\
 & \quad e'\lambda = 1 \\
 & \quad \theta, \phi \geq 0, \lambda \geq 0_n
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Estos modelos son no lineales, por lo que la obtención de los valores de las medidas asociadas puede resultar costosa.

En la misma situación, la medida direccional introducida por Chambers, Chung y Färe es el valor óptimo del siguiente problema

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \quad \delta \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \quad X_0 - \delta G_X \geq X\lambda \\
 & \quad Y_0 + \delta G_Y \leq Y\lambda \\
 & \quad e'\lambda = 1 \\
 & \quad \delta \geq 0, \lambda \geq 0_n
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde ha de asumirse que el rayo  $(X_0, Y_0) + \delta(-G_X, G_Y)$ ,  $\delta \geq 0$ , corta a la frontera. De las posibles elecciones del vector  $(-G_X, G_Y)$ ,  $(-G_X, G_Y) = (-X_0, 0_s)$  conduciría a la medida BCC de orientación input,  $(-G_X, G_Y) = (0_m, Y_0)$  a la misma medida pero en orientación output y  $(-G_X, G_Y) = (-X_0, Y_0)$  a la medida introducida por Briec.

Con las medidas de Russell puede procederse de la misma forma. En particular, el valor de la medida de Russell no orientada podría obtenerse a partir de la siguiente

formulación de tipo DEA:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = \phi_r y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\
 & \phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como ya se ha dicho antes, las medidas no radiales presentan como ventaja sobre las radiales el hecho de que cumplen la definición de eficiencia de Koopmans. Concretamente, las medidas de eficiencia obtenidas a partir de los modelos DEA radiales tienen como principal inconveniente que los scores de eficiencia asociados no consideran la ineficiencia no radial recogida en las holguras, y la función objetivo no es un número real cuando éstas son positivas. De este modo, los scores de eficiencia clásicos (radiales) sobreestimarían la eficiencia de una unidad cuando se presentan holguras. Por otro lado, los modelos de tipo aditivo permiten identificar las fuentes y la magnitud de todo tipo de ineficiencia, pero no proporcionan valores que puedan utilizarse como medidas de eficiencia. La necesidad de disponer de medidas que consideren todas las fuentes de ineficiencia ha motivado el interés por el diseño de las que se han llamado *Medidas de Eficiencia Generalizadas (GEMs)*.

La medida de Russell obtenida a partir de (2.4) podría representar una solución en esta línea. Sin embargo, aunque el valor óptimo de este problema existe, puesto que la función objetivo de este problema es continua y las restricciones definen

un conjunto compacto, su resolución es más complicada que la de la mayoría de los restantes modelos DEA dado que este problema es no lineal. Además, es una medida difícil de interpretar. Estos inconvenientes de la medida de Russell ponen de manifiesto algunos de los aspectos sobre los que se habrá de prestar especial atención a la hora de definir una GEM.

## 2.2. Medidas de Eficiencia Generalizadas (GEMs)

Existe un acuerdo general en cuanto a la necesidad de analizar todo tipo de ineficiencias, tanto radial como no radial, a la hora de evaluar la eficiencia de una unidad. Sin embargo, no todos los autores coinciden en la necesidad de disponer de un escalar que recoja esta información. En el contexto de los modelos radiales, Tulkens [100] afirma *“I doubt that seeking for a single numerical index of efficiency including these “slacks” would be a useful extension. Additional columns exhibiting the values of all slacks would be more informative”*. En contra de este planteamiento están Bardhan, Bowlin, Cooper y Sueyoshi [17] por las dos siguientes razones: a) no se tiene en cuenta la posible existencia de óptimos alternativos, y b) no se incorporan las holguras a la medida de eficiencia. De alguna manera, Lovell [69] muestra cierta sintonía con las ideas de Tulkens cuando establece lo siguiente *“I do not like the idea of aggregating slacks, and I like even less the idea of combining slacks with a radial efficiency score”*. Las GEMs representan una forma de superar todas estas posturas, puesto que tales medidas se obtienen a partir de modelos de tipo aditivo en los que las holguras se combinan de manera conveniente al objeto de que la medida de eficiencia resultante satisfaga ciertas propiedades deseables. En esta línea desarrollaremos nuestras propuestas de medidas de eficiencia.

En 1994, Cooper y Pastor [36] propusieron la siguiente expresión general para una GEM



$$\Gamma = 1 - \left( \sum_{i=1}^m \omega_i^- s_i^{-*} + \sum_{r=1}^s \omega_r^+ s_r^{+*} \right) \quad (2.5)$$

donde  $s_i^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $s_r^{+*}$ ,  $r = 1, \dots, s$ , son las soluciones óptimas del modelo aditivo<sup>4</sup>. Es obvio que la elección de los pesos  $\omega_i^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $\omega_r^+$ ,  $r = 1, \dots, s$ , en (2.5) define una GEM (véase Cooper y Pastor [36] y Thrall [97] para diferentes elecciones de pesos). La expresión general de una GEM muestra que las componentes de ineficiencia asociadas con los inputs y con los outputs se combinan aditivamente, pero también podrían considerarse como GEMs las que se construyesen, por ejemplo, en forma de ratio (como veremos en el capítulo siguiente).

Cooper y Pastor [36] sugieren además que una GEM debe verificar ciertas propiedades deseables. Estos autores enumeran las siguientes cuatro propiedades que consideran básicas para una medida de eficiencia ideal, que recogen de alguna manera todas las ideas que, a este respecto, habían propuesto otros autores:

(P1)  $0 < \Gamma \leq 1$ .

(P2)  $\Gamma = 1 \Leftrightarrow$  la unidad que se evalúa es eficiente en el sentido de Koopmans.

(P3)  $\Gamma$  es independiente de las unidades de medida.

(P4)  $\Gamma$  es fuertemente monótona en inputs y en outputs.

De este modo, una medida de eficiencia que satisfaga estas propiedades tomará valores entre 0 y 1, alcanzando el valor máximo si, y sólo si, la unidad que se evalúa es eficiente en el sentido de Koopmans. Además, será independiente de las unidades en las que midan los inputs y outputs involucrados. La propiedad (P4)

---

<sup>4</sup>Incluso se han propuesto GEMs basadas en las soluciones de los modelos radiales (véase por ejemplo Tone [98]) si bien aquí no discutiremos ese caso que presenta claros inconvenientes.

puede enunciarse de la siguiente forma: sean dos unidades cuyos vectores de inputs y de outputs  $(X_0, Y_0)$  y  $(X_a, Y_a)$  son tales que  $X_0 \leq X_a$  e  $Y_0 \geq Y_a$  con al menos una desigualdad estricta, entonces  $\Gamma(X_0, Y_0) > \Gamma(X_a, Y_a)$ . Cooper y Pastor [36] insisten en que (iv) no es una propiedad que se cumpla con facilidad. Por esta razón, algunos autores han considerado en su lugar otras propiedades más débiles tales como la monotonía débil (que verifican las medidas radiales clásicas) o que la medida propuesta sea decreciente en los valores relativos de las holguras <sup>5</sup>.

Los primeros autores que definieron algunas medidas orientadas basadas en los valores óptimos de las holguras del modelo aditivo extendido fueron Ali y Lerne [2]. Entre otras, podemos citar la conocida como “iota”, una medida de la eficiencia total en inputs:

$$i = 1 - \left( \sum_{i=1}^m \nu_i^* s_{i0}^{-*} + \sum_{r=1}^s \mu_r^* s_{r0}^{+*} \right) / \sum_{i=1}^m \nu_i^* x_{i0} \quad (2.6)$$

o bien “omicron”, la correspondiente versión en outputs:

$$o = 1 + \left( \sum_{i=1}^m \nu_i^* s_{i0}^{-*} + \sum_{r=1}^s \mu_r^* s_{r0}^{+*} \right) / \sum_{r=1}^s \mu_r^* y_{r0} \quad (2.7)$$

donde  $\nu_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $\mu_r^*$ ,  $r = 1, \dots, s$ , son las soluciones del problema dual.

Éstas satisfacían algunas buenas propiedades, aunque en el caso de iota el principal inconveniente fue que podía tomar valores negativos. Una medida no orientada de este tipo que merece la pena destacar es la conocida como “*Medida de Proporciones de Eficiencia (MEP)*”, que aparece en Banker y Cooper [13]<sup>6</sup>:

---

<sup>5</sup>(P2) y una versión input de (P4) fueron previamente propuestas por Färe y Lovell [49] en un contexto general que presenta claros inconvenientes.

<sup>6</sup>Previamente, dicha medida fue propuesta en Bardhan, Bowlin, Cooper y Sueyoshi [17].

$$1 - \frac{1}{m + s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*}}{x_{i0}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^{+*}}{y_{r0} + s_{r0}^{+*}} \right) \quad (2.8)$$

Existe un serio inconveniente con este enfoque del problema de la medición de la eficiencia basado en la utilización de las soluciones de los modelos aditivos, puesto que en el caso de que se presentasen óptimos alternativos cuando se resuelven dichos modelos, podrían obtenerse distintos valores de las medidas mencionadas, es decir, éstas no estarían bien definidas. Una posible solución a este grave problema pasaría por incorporar la expresión de las medidas propuestas como la función objetivo del modelo DEA que represente la tecnología de referencia utilizada. En contrapartida, esto conduce a veces a modelos no lineales de costosa resolución, como ocurre cuando se trata de obtener el valor de la medida MEP en una tecnología de tipo DEA clásica tras incluir (2.8) como la función objetivo del modelo de programación asociado.

No obstante, algunas soluciones en esta línea pueden encontrarse ya en la literatura: Lovell, Pastor y Turner [71] utilizan la siguiente medida

$$\begin{aligned} & \text{mín} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}} \\ & \text{s.a.:} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.9)$$

en un análisis comparativo entre países europeos y no europeos de la OCDE (en el que no se utilizaban inputs). Cooper, Park y Pastor [37] proponen la medida conocida como *RAM* (“*Range Adjusted Measure*”) que se obtiene como la solución de

$$\begin{aligned}
\text{mín } RAM(X_0, Y_0) &= 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{R_r^+} \right) \\
\text{s.a.:} \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\
s_{i0}^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
s_{r0}^+ &\geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\
\lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $R_i^-$  y  $R_r^+$  son respectivamente los rangos del input  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y el output  $r$ ,  $r = 1, \dots, s$ . En el trabajo de Aida, Cooper, Pastor y Sueyoshi [1], esta medida se ha aplicado en el análisis de las agencias encargadas del suministro de agua y la prestación de otros servicios relacionados en la región japonesa de Kanto.

En particular, la medida RAM ha representado una importante contribución en el área de las medidas de eficiencia generalizadas. No obstante, sigue presentando algunos inconvenientes, tanto en lo referente a los valores que toma como a las propiedades que satisface. Esto nos lleva a insistir en la necesidad de seguir buscando nuevas medidas de eficiencia que cubran las debilidades de las ya existentes, continuando así con el debate sobre la mejor medida de eficiencia.



## Capítulo 3

# Una Nueva Medida de Eficiencia Técnica no Orientada de Tipo

Russell



### 3.1. La medida de Russell no orientada de eficiencia técnica

La medida de Russell no orientada de eficiencia técnica  $R_g(X_0, Y_0)$  fue definida en Färe, Grosskopf y Lovell [47] como una combinación de las versiones input y output de las conocidas medidas de Russell. En una tecnología DEA, estas dos últimas pueden obtenerse como los valores óptimos de los siguientes modelos

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad R_I(X_0, Y_0) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\
 \text{s.a.:} \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\
 \theta_i &\leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\
 \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

para el caso input, y

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad R_O(X_0, Y_0) &= \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \\
 \text{s.a.:} \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\
 \phi_r &\geq 1 \quad r = 1, \dots, s \\
 \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.2}$$



para el output, mientras que el valor  $R_g^*(X_0, Y_0)$  será el óptimo del problema (2.4), en el que  $R_g(X_0, Y_0)$  es una combinación específica de las funciones objetivo de (3.1) y de (3.2).

Si se aplica el siguiente cambio de variables al problema (2.4)

$$\begin{aligned}\theta_i &= \frac{x_{i0} - s_{i0}^-}{x_{i0}} = 1 - \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}}, & i = 1, \dots, m, \\ \phi_r &= \frac{y_{r0} + s_{r0}^+}{y_{r0}} = 1 + \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}, & r = 1, \dots, s,\end{aligned}\tag{3.3}$$

se tiene la siguiente formulación equivalente en función de las holguras totales

$$\begin{aligned}\text{mín } R_g(X_0, Y_0) &= 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0} + s_{r0}^+} \right) \\ \text{s.a.:} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= x_{i0} - s_{i0}^- & i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= y_{r0} + s_{r0}^+ & r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ s_{i0}^- &\geq 0 & i = 1, \dots, m \\ s_{r0}^+ &\geq 0 & r = 1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde se observa la coincidencia entre la función objetivo de este modelo y la expresión de la medida MEP (2.8) anteriormente citada.

Aunque  $R_g^*$  está bien definida, puesto que está integrada como la función objetivo de un modelo de programación, y además satisface las cuatro propiedades básicas enumeradas por Cooper y Pastor, esta medida presenta dos dificultades graves: 1) no tiene una interpretación clara, ya que es una media ponderada de una media aritmética y una media armónica (véase la formulación (2.4)), y 2) su valor ha de

obtenerse resolviendo un problema de programación no lineal.

Desde un punto de vista teórico, (2.4) (o, equivalentemente (3.4)) es un problema con buenas propiedades. En primer lugar, podemos afirmar que (2.4) tiene un óptimo global en virtud del teorema de Weierstrass, dado que la función objetivo es continua y las restricciones definen un conjunto compacto. Además, puesto que (2.4) es un problema convexo, ya que tanto la función objetivo como las restricciones son convexas, todo punto de Karush–Kuhn–Tucker de (2.4) será un óptimo global. Y recíprocamente, puesto que las restricciones son lineales, todo óptimo global de (2.4) será también un punto de Karush–Kuhn–Tucker. En resumen, el conjunto de óptimos globales de (2.4) coincide con el conjunto de puntos de Karush–Kuhn–Tucker (y este conjunto es no vacío por el teorema de Weierstrass). Por tanto, el conjunto de óptimos globales de (2.4) coincidirá con el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones no lineales determinado por la condiciones de Karush–Kuhn–Tucker. Dicho sistema es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m+s} - \alpha_i x_{i0} + \delta_i &= 0 & i = 1, \dots, m \\
 \frac{-1}{(m+s)\phi_r^2} + \beta_r y_{r0} - \varepsilon_r &= 0 & r = 1, \dots, s \\
 \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \beta_r y_{rj} + \gamma &= 0 & j = 1, \dots, n \\
 \delta_i(\theta_i - 1) &= 0 & i = 1, \dots, m \\
 \varepsilon_r(1 - \phi_r) &= 0 & r = 1, \dots, s \\
 \delta_i, \varepsilon_r &\geq 0, \alpha_i, \beta_r, \gamma \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

al que hay que añadir las condiciones de factibilidad del problema (2.4)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} & i = 1, \dots, m \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} & r = 1, \dots, s \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 & \\
\theta_i &\leq 1 & i = 1, \dots, m \\
\phi_r &\geq 1 & r = 1, \dots, s \\
\lambda_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A la vista de (3.5) puede concluirse que es prácticamente imposible dar una solución analítica de dicho sistema. Por tanto, para obtener los valores de la medida de Russell  $R_g^*$  en un análisis de eficiencia habría que recurrir a los algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, o bien a los algoritmos de resolución de problemas de programación no lineales. De hecho, ésta es la ruta que siguen Green, Cook y Doyle [57] en un análisis cuyos resultados se obtuvieron recurriendo al software GINO y MINOS. En cualquier caso, esta vía de obtención de medidas de eficiencia puede convertirse fácilmente en una tarea enormemente costosa en la práctica, especialmente cuando la muestra se compone de un número elevado de unidades.

Más adelante, comprobaremos además que esta medida tampoco satisface otras propiedades de interés.

### 3.2. El “ratio” entre las medidas de Russell

Como acabamos de ver, la medida de Russell  $R_g^*$ , obtenida como resultado de una combinación aditiva entre las medidas de Russell de orientación input y output, presenta dificultades importantes. Para soslayar dichos inconvenientes, nosotros

proponemos promediar por separado la eficiencia en los inputs y la eficiencia en los outputs y, entonces, combinar ambas componentes de eficiencia en un “ratio” en lugar de aditivamente. El resultado es el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \text{mín } R_e(X_0, Y_0) &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \\ \text{s.a.:} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \theta_i &\leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ \phi_r &\geq 1 \quad r = 1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esta medida aparece publicada en 1999 en Pastor, Ruiz y Sirvent [79] con el nombre de “enhanced Russell graph”, en virtud de su analogía con las demás medidas de Russell de eficiencia técnica, y es denotada por  $R_e^*$ . Su valor podrá interpretarse como el “ratio” entre el promedio de eficiencia de los inputs y el promedio de eficiencia de los outputs. Por tanto, dicha medida tiene un significado más claro que  $R_j^*$ . Además,  $R_e^*$  puede descomponerse en una componente de eficiencia media debida a los inputs y otra similar debida a los outputs, lo que permite explicar con mayor facilidad la eficiencia de la unidad que se está evaluando. En efecto, si  $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \phi_1^*, \dots, \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  es una solución óptima de (3.7), dichas componentes de eficiencia son, respectivamente, el numerador,  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i^*$ , y el denominador,  $\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r^*$ , de  $R_e^*$ , que representan, respectivamente, la proporción eficiente de los inputs usados y de los outputs producidos (en promedio) en relación a los niveles

observados para la  $DMU_0$ . Sin embargo, dicha descomposición, y la correspondiente interpretación, pueden no ser únicas debido a que pueden presentarse óptimos alternativos al resolver (3.7). Este punto podría comprobarse resolviendo el siguiente par de problemas lineales

$$\begin{aligned}
 \text{mín } z &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\
 \text{s.a.:} \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} & r = 1, \dots, s \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\
 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i &= R_e^* \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \\
 \theta_i &\leq 1 & i = 1, \dots, m \\
 \phi_r &\geq 1 & r = 1, \dots, s \\
 \lambda_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{máx } Z &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\
 \text{s.a.:} \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} & r = 1, \dots, s \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i &= R_e^* \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \\
\theta_i &\leq 1 & i = 1, \dots, m \\
\phi_r &\geq 1 & r = 1, \dots, s \\
\lambda_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

En caso de que los valores óptimos de (3.8) y (3.9) coincidan, la mencionada descomposición será única; si, por el contrario,  $z^* \neq Z^*$ , las diferencias entre estos dos valores indicarán el margen de operación de la  $DMU_0$  para mejorar su uso de sus inputs (y, por consiguiente, de sus outputs) con objeto de alcanzar la eficiencia.

De este modo,  $R_e^*$  es una medida de eficiencia técnica bien definida, ya que es el valor óptimo de un modelo de programación, y tiene una clara interpretación. Su uso se justificará además por las propiedades deseables que satisface. Éstas se probarán en la sección 3.4.

Utilizando de nuevo el cambio de variables (3.3), el modelo (3.7) puede reexpresarse en función de las holguras totales como la siguiente formulación, que guarda más relación con la expresión habitual de las GEMs

$$\begin{aligned}
\text{mín } R_e(X_0, Y_0) &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}} \\
\text{s.a.:} & \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= x_{i0} - s_{i0}^- & i = 1, \dots, m \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= y_{r0} + s_{r0}^- & r = 1, \dots, s
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ s_{i0}^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ s_{r0}^+ &\geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Debemos mencionar que la función objetivo de (3.10) fue propuesta como una medida de eficiencia generalizada en Cooper y Pastor [36], si bien allí no aparecía incluida en ningún modelo de programación. Además, el modelo (2.9) usado por Lovell, Pastor y Turner [71] en su evaluación macroeconómica de los países de la OCDE puede considerarse como una particularización de (3.10) para el caso de tener un único input y constante.

### 3.3. Linealización del modelo

Una de las principales ventajas de  $R_e$  sobre  $R_g$  es que el valor  $R_e^*$  se puede calcular con mucha mayor facilidad que el de  $R_g^*$ . La implementación de ambas medidas en las tecnologías clásicas del DEA nos ha llevado al modelo (3.4) para  $R_g$  y a los modelos (3.7) y (3.10) para  $R_e$ . Aunque todos estos problemas son no lineales, (3.4) es más complicado de resolver que (3.7) o (3.10) puesto que estos dos últimos son problemas de programación fraccional lineal ordinarios, cuya solución puede encontrarse mediante un problema de programación lineal.

En virtud de los conocidos resultados sobre programación fraccional debidos a Charnes y Cooper [24], consideremos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}
\beta &= \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}} \right)^{-1} \\
t_{i0}^- &= \beta s_{i0}^- & i &= 1, \dots, m \\
t_{r0}^+ &= \beta s_{r0}^+ & r &= 1, \dots, s \\
\mu_j &= \beta \lambda_j & j &= 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Entonces, una solución óptima del siguiente problema de programación lineal dará lugar a una solución óptima de (3.10)

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \beta - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_{i0}^-}{x_{i0}} \\
\text{s.a.:} \quad & \beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{t_{r0}^+}{y_{r0}} = 1 \\
& -\beta x_{i0} + \sum_{j=1}^n \mu_j x_{ij} + t_{i0}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& -\beta y_{r0} + \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} - t_{r0}^+ = 0 \quad r = 1, \dots, s \\
& -\beta + \sum_{j=1}^n \mu_j = 0 \\
& \beta \geq 0 \\
& t_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& t_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\
& \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Concretamente, se sabe que a partir de una solución óptima de (3.12) que satisfaga  $\beta > 0$  podemos obtener una solución óptima de (3.10) según el cambio de variables (3.11). Además, los valores óptimos asociados son iguales (ver Charnes y Cooper [24]). Nótese, además, que ninguna solución factible de (3.12) verifica  $\beta = 0$ , de manera que podemos usar (3.12) para resolver (3.7) y, en particular, para



obtener los valores  $R_e^*$  como los valores óptimos de (3.12). Por tanto, si estamos interesados únicamente en estos scores de eficiencia y no en la proyección eficiente de las unidades que se evalúan, ni siquiera necesitaremos transformar las soluciones óptimas de (3.12) vía (3.11).

Este hecho pone de manifiesto las grandes ventajas de carácter computacional que  $R_e^*$  presenta sobre la medida no orientada clásica de Russell  $R_g^*$ , a lo que han de añadirse las mejoras en lo relativo a la interpretación y a las buenas propiedades que satisface. Éstas se estudian en la siguiente sección<sup>1</sup>.

### 3.4. Propiedades de $R_e^*$

En esta sección enunciamos y probamos las propiedades que satisface la medida  $R_e^*$  para una  $DMU_0$  con vector de inputs y de outputs  $(X_0, Y_0)$ . En las cuatro primeras proposiciones comprobamos que dicha medida cumple los cuatro requerimientos básicos propuestos por Cooper y Pastor que mencionamos en la sección 2.2. Además, demostraremos que  $R_e^*$  verifica otras propiedades interesantes y estableceremos algunas relaciones entre ésta y algunas medidas de eficiencia clásicas.

**Proposición 3.1.**  $0 < R_e^* \leq 1$

**Demostración:** Obviamente,  $0 \leq R_e^* \leq 1$ . Además,  $R_e^*$  no puede tomar el valor 0 puesto que asumimos que los inputs y los outputs de todas las unidades son positivos. ■

**Proposición 3.2.**  $R_e^*(X_0, Y_0) = 1 \iff$  la  $DMU_0$  es eficiente en el sentido de Koopmans.

---

<sup>1</sup>En Tone [99] se estudia la formulación dual del problema (3.12).

**Demostración:** Si la  $DMU_0$  es eficiente en el sentido de Koopmans, no se podrá mejorar ninguno de sus inputs o de sus outputs sin empeorar alguna de las restantes variables. Por tanto, la única solución factible de (3.10) para dicha unidad es aquella en la que todas las holguras son cero y, por tanto,  $R_e^*(X_0, Y_0) = 1$ . Y, recíprocamente, si la  $DMU_0$  no es eficiente en el sentido de Koopmans, existirá alguna solución factible de (3.10) con alguna holgura estrictamente positiva y, por consiguiente,  $R_e^*(X_0, Y_0) \leq 1$ . ■

**Proposición 3.3.**  $R_e^*$  es independiente de las unidades de medida.

**Demostración:** Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de  $R_e^*$ , ya que los ratios considerados en la función objetivo de (3.10) no tienen unidades de medida. ■

**Proposición 3.4.**  $R_e^*$  es fuertemente monótona en inputs y en outputs.

**Demostración:** Para probar esta propiedad, tal como fue enunciada en la sección 2.2, será suficiente comprobar que dadas  $DMU_0$  y  $DMU_a$  cuyos vectores de inputs y de outputs  $(X_0, Y_0)$  y  $(X_a, Y_a)$  difieren en una única variable, entonces la unidad que posea el menor valor del input o el mayor valor del output será evaluada como más eficiente. La propiedad de monotonía fuerte se deduce inmediatamente sin más que aplicar secuencialmente este resultado. Haremos la prueba de esta propiedad en función del modelo (3.10).

En primer lugar, evaluaremos dos unidades que únicamente difieren en un input. Supongamos entonces que los valores de todas las variables para estas dos unidades coinciden excepto en el caso del input  $k$ , para el que se tiene que  $x_{ka} = x_{k0} + a$ ,  $a > 0$ . Entonces, tenemos que probar que  $R_e^*(X_a, Y_a)$  es estrictamente menor que  $R_e^*(X_0, Y_0)$ .

Denotemos por  $(P_0)$  y  $(P_a)$  a los problemas (3.10) correspondientes a la evaluación de la  $DMU_0$  y la  $DMU_a$  respectivamente, y sea  $(\lambda_{10}^*, \dots, \lambda_{n0}^*, s_{10}^{-*}, \dots, s_{m0}^{-*}, s_{10}^{+*}, \dots, s_{s0}^{+*})$  una solución óptima de  $(P_0)$ . Entonces, es fácil comprobar que  $(\lambda_{10}^*, \dots, \lambda_{n0}^*, h_{1a}^-, \dots, h_{ma}^-, s_{10}^{+*}, \dots, s_{s0}^{+*})$ , donde  $h_{ia}^- = s_{i0}^{-*}$ ,  $\forall i \neq k$ , y  $h_{ka}^- = s_{k0}^{-*} + a$ , es una solución factible de  $(P_a)$ . Por consiguiente,

$$R_e^*(X_a, Y_a) \leq \frac{1 - \frac{1}{m} \left( \sum_{i \neq k} \frac{s_{i0}^{-*}}{x_{i0}} + \frac{s_{k0}^{-*} + a}{x_{k0} + a} \right)}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^{+*}}{y_{r0}}},$$

y puesto que  $\frac{s_{k0}^{-*} + a}{x_{k0} + a} > \frac{s_{k0}^{-*}}{x_{k0}}$ , se tendrá que  $R_e^*(X_a, Y_a) < R_e^*(X_0, Y_0)$ .

Manteniendo la notación anterior, supongamos ahora que la  $DMU_0$  y la  $DMU_a$  coinciden en todos sus valores salvo en el output  $p$ , para el que se verifica  $y_{pa} = y_{p0} - a$ ,  $a > 0$ . De nuevo tenemos que probar que  $R_e^*(X_a, Y_a) < R_e^*(X_0, Y_0)$ . Sea otra vez  $(\lambda_{10}^*, \dots, \lambda_{n0}^*, s_{10}^{-*}, \dots, s_{m0}^{-*}, s_{10}^{+*}, \dots, s_{s0}^{+*})$  una solución óptima de  $(P_0)$ , entonces  $(\lambda_{10}^*, \dots, \lambda_{n0}^*, s_{10}^{+*}, \dots, s_{s0}^{+*}, h_{1a}^-, \dots, h_{ma}^-)$ , donde  $h_{ra}^+ = s_{r0}^{+*}$ ,  $\forall r \neq p$ , y  $h_{pa}^+ = s_{p0}^{+*} + a$ , es una solución factible de  $(P_a)$ . Por tanto,

$$R_e(X_a, Y_a) \leq \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{s_{i0}^{-*}}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \left( \sum_{r \neq p} \frac{s_{r0}^{+*}}{y_{r0}} + \frac{s_{p0}^{+*} + a}{y_{p0} - a} \right)},$$

y puesto que obviamente  $\frac{s_{p0}^{+*} + a}{y_{p0} - a} > \frac{s_{p0}^{+*}}{y_{p0}}$ , se tendrá que  $R_e^*(X_a, Y_a) < R_e^*(X_0, Y_0)$ . ■

Los mismos argumentos utilizados en las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 son aplicables para probar que la medida  $R_g^*$  también satisface esas propiedades. Asimismo, puede probarse que  $R_g^*$  es fuertemente monótona en inputs y en outputs de forma similar a como se ha hecho en la proposición 3.4

**Proposición 3.5.**  $R_g^*$  es fuertemente monótona en inputs y en outputs.

**Demostración:** En los mismos supuestos y con la misma notación empleada en la proposición 3.4, para la modificación del input se tiene que

$$R_g^*(X_a, Y_a) \leq 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i \neq k} \frac{s_{i0}^{-*}}{x_{i0}} + \frac{s_{k0}^{-*} + a}{x_{k0} + a} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^{+*}}{y_{r0}} \right) < R_g^*(X_0, Y_0)$$

por las mismas razones que antes; y para el output

$$R_g^*(X_a, Y_a) \leq 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*}}{x_{i0}} + \sum_{r \neq p} \frac{s_{r0}^{+*}}{y_{r0}} + \frac{s_{p0}^{+*} + a}{y_{p0} + s_{p0}^{+*}} \right) < R_g^*(X_0, Y_0),$$

puesto que  $\frac{s_{p0}^{+*} + a}{y_{p0} + s_{p0}^{+*}} > \frac{s_{p0}^{+*}}{y_{p0} + s_{p0}^{+*}}$ . ■

De este modo,  $R_e^*$  y  $R_g^*$  satisfacen las cuatro propiedades básicas. Esto también sucede con la medida RAM (véase Cooper, Park y Pastor [37]). En particular, las dos primeras proposiciones obligan a que estas tres medidas determinen el mismo conjunto de unidades eficientes. Por tanto, sólo diferirán en los valores que asignen a las unidades ineficientes.

Färe y Lovell [49] y Russell [83] también sugirieron que una buena medida de eficiencia debería satisfacer la propiedad de homogeneidad de grado -1 en los inputs. Una medida de eficiencia  $\Gamma$  verificará dicha propiedad si

$$\forall \theta > 0, \Gamma(\theta X_0, Y_0) = \frac{1}{\theta} \Gamma(X_0, Y_0). \quad (3.13)$$

En particular, las medidas radiales clásicas obtenidas a partir de los modelos CCR y BCC cumplen esta propiedad. No ocurre así con la medida de Russell de orientación input, que satisface la propiedad más débil de subhomogeneidad de grado -1 en inputs (véase Färe, Lovell y Zieschang [50]). Por definición, se considera que una medida de eficiencia  $\Gamma$  es subhomogénea de grado -1 en inputs si se satisface la siguiente relación

$$\Gamma(\theta X_0, Y_0) \leq \frac{1}{\theta} \Gamma(X_0, Y_0), \quad \theta \geq 1. \quad (3.14)$$

**Nota.** Este enunciado de la propiedad de subhomogeneidad podría inducir a confusión, puesto que podría interpretarse como

$$\Gamma(\theta X_0, Y_0) < (>) \frac{1}{\theta} \Gamma(X_0, Y_0), \quad \theta > (<) 1, \quad (3.15)$$

cuando puede alcanzarse la igualdad en ambos casos, como ocurre realmente con la medida de Russell de orientación input. Un enunciado más claro es el que utilizamos en la proposición 3.6.

En Färe, Grosskopf y Lovell [47] se estudian también las relaciones entre los cambios de escala en el vector de inputs y/o en el vector de outputs y los valores resultantes de la medida no orientada de Russell correspondientes. En la siguiente proposición estudiamos el comportamiento de nuestra medida en relación a estos cambios.

**Proposición 3.6.** *Dada la  $DMU_0$  con vector de inputs y outputs  $(X_0, Y_0)$ , sean  $DMU_\theta$ ,  $DMU_\phi$  y  $DMU_\lambda$  tres nuevas unidades cuyos vectores de inputs y de outputs son, respectivamente,  $(\theta X_0, Y_0)$ ,  $(X_0, \phi Y_0)$  y  $(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0)$ , donde  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\lambda$  son números reales positivos. Entonces,  $R_e^*$  satisface las siguientes relaciones*

$$(3.6.1) \text{ Si } \theta > (<) 1, \text{ entonces } R_e^*(\theta X_0, Y_0) \leq (\geq) \frac{1}{\theta} R_e^*(X_0, Y_0)$$

$$(3.6.2) \text{ Si } \phi < (>) 1, \text{ entonces } R_e^*(X_0, \phi Y_0) \leq (\geq) \phi R_e^*(X_0, Y_0)$$

$$(3.6.3) \text{ Si } \lambda > (<) 1, \text{ entonces } R_e^*(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0) \leq (\geq) \frac{1}{\lambda^2} R_e^*(X_0, Y_0)$$

**Demostración:** De forma natural, esta propiedad está más relacionada con la formulación (3.7) de  $R_e$ , puesto que analiza los efectos sobre  $R_e^*$  producidos por cambios equiproporcionales en las observaciones. Por esta razón, nos remitiremos a este modelo para su prueba.

Si  $\theta > 1$  y  $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \phi_1^*, \dots, \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  es una solución óptima de (3.7) cuando se evalúa a  $(X_0, Y_0)$ , entonces  $(\frac{\theta_1^*}{\theta}, \dots, \frac{\theta_m^*}{\theta}, \phi_1^*, \dots, \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  es una so-

lución factible de (3.7) cuando  $(\theta X_0, Y_0)$  es la unidad que se evalúa, puesto que las restricciones para los inputs y los outputs se satisfacen claramente y además se tiene que  $\frac{\theta_i^*}{\theta} < \theta_i^* \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Por tanto,

$$R_e^*(\theta X_0, Y_0) \leq \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^*}{\theta}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r^*} = \frac{1}{\theta} R_e^*(X_0, Y_0).$$

Teniendo en cuenta este resultado, si  $\theta < 1$ , se verificará lo siguiente

$$R_e^*(X_0, Y_0) = R_e^*\left(\frac{1}{\theta} \theta X_0, Y_0\right) \leq \theta R_e^*(\theta X_0, Y_0),$$

de donde se tiene (3.6.1).

La demostración de (3.6.2) es análoga a la de (3.6.1). En este caso es suficiente considerar  $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \phi_1^*, \dots, \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  como una solución factible de (3.7) para  $(X_0, \phi Y_0)$ .

La propiedad (3.6.3) es una consecuencia directa de (3.6.1) y (3.6.2). ■

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que no es posible conseguir cotas más finas que las obtenidas en el resultado anterior:

**Ejemplo 3.1.** Consideremos la situación sencilla planteada por los datos de la siguiente tabla

X	2	3	3	4	5	5	12
Y	2	2	4	2	4	6	3

Si tomamos  $\theta = \frac{5}{3} > 1$ , se tiene lo siguiente

$$R_e^*\left(\frac{5}{3} 3, 4\right) = R_e^*(5, 4) = \frac{3}{5} = \frac{3}{5} R_e^*(3, 4),$$

por lo que la cota es alcanzable. En el caso de que  $\theta = \frac{3}{2} > 1$ , tenemos además que

$$R_e^* \left( \frac{3}{2}, 2 \right) = R_e^*(3, 2) = 0,5 < \frac{2}{3} = \frac{2}{3} R_e^*(2, 2),$$

por lo que dicha cota no se alcanza siempre. Por consiguiente, no es posible encontrar una cota mejor.

Para cambios en los outputs pueden encontrarse situaciones similares. En cuanto a cambios simultáneos en inputs y en outputs, lo siguiente demuestra que no es posible encontrar mejores cotas que las establecidas en la proposición 3.6

$$R_e^* \left( \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, 4 \right) = R_e^* \left( 5, \frac{12}{5} \right) = 0,36 = \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \left( \frac{3}{5} \right)^2 R_e^*(3, 4)$$

y

$$R_e^* \left( \frac{6}{5}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, 3 \right) = R_e^* \left( 3, \frac{5}{2} \right) = 0,625 < \left( \frac{5}{6} \right)^2 = \left( \frac{5}{6} \right)^2 R_e^* \left( \frac{5}{2}, 3 \right).$$

□

La propiedad (3.6.1) establece la subhomogeneidad de grado -1 en inputs de  $R_e^*$ , lo que significa que un cambio de escala en el vector de inputs por un factor mayor (menor) que la unidad conduce a un valor de la medida de eficiencia menor (mayor) o igual que el inverso del factor de escala multiplicado por la medida de eficiencia de la unidad original. En (3.6.2) se establece de forma similar la subhomogeneidad de grado +1 en los outputs, mientras que en (3.6.3) se considera el cambio de escala simultáneo tanto en inputs como en outputs producido por factores inversos. De este modo, en la proposición 3.6 se cuantifica de una manera específica la sensibilidad de la nueva medida de Russell  $R_e^*$  con relación a las reducciones y/o aumentos proporcionales en los inputs y/o en los outputs que ya se había garantizado en la proposición 3.4.

Contrariamente a lo que ocurre con  $R_e^*$ ,  $R_g^*$  no es subhomogénea de grado -1 en inputs. Además, esta medida no es subhomogénea de grado +1 en outputs ni

tampoco satisface la propiedad (3.6.3)<sup>2</sup>. Veámoslo utilizando de nuevo los datos del ejemplo anterior

**Ejemplo 3.1 (continuación).**

$$R_g^* \left( \frac{5}{3}3, 4 \right) = R_g^*(5, 4) = 0,7944 \not\equiv \frac{3}{5} R_g^*(5, 4) = \frac{3}{5},$$

por lo que  $R_g^*$  no es subhomogénea de grado -1 en inputs,

$$R_g^* \left( 5, \frac{4}{6}6 \right) = R_g^*(5, 4) = 0,7944 \not\equiv \frac{4}{6} R_g^*(5, 6) = \frac{2}{3},$$

por lo que  $R_g^*$  no es subhomogénea de grado +1 en outputs, y

$$R_g^* \left( \frac{4}{3}3, \frac{3}{4}4 \right) = R_g^*(4, 3) = \frac{3}{4} \not\equiv \left( \frac{3}{4} \right)^2 R_g^*(3, 4) = \left( \frac{3}{4} \right)^2,$$

por lo que, finalmente,  $R_g^*$  tampoco satisface (3.6.3).  $\square$

Para la medida  $R_g^*$  pueden probarse las siguientes relaciones, que son claramente menos satisfactorias que las obtenidas para  $R_e^*$ .

**Proposición 3.7.** *En las mismas condiciones que en la proposición 3.6, se tiene lo siguiente para  $R_g^*$*

$$(3.7.1) \text{ Si } \theta > (<)1, R_g^*(\theta X_0, Y_0) < (>)R_g^*(X_0, Y_0)$$

$$(3.7.2) \text{ Si } \phi < (>)1, R_g^*(X_0, \phi Y_0) < (>)R_g^*(X_0, Y_0)$$

$$(3.7.3) \text{ Si } \lambda > (<)1, R_g^*(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0) \leq (\geq) \frac{1}{\lambda} R_g^*(X_0, Y_0)$$

**Demostración:** (3.7.1) y (3.7.2) se deducen inmediatamente a partir de la monotonía fuerte de esta medida. En cuanto a cambios simultáneos, consideremos  $(\frac{\theta_1^*}{\lambda}, \dots, \frac{\theta_m^*}{\lambda}, \lambda \phi_1^*, \dots, \lambda \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  como una solución factible de (2.4) para

---

<sup>2</sup>De forma similar puede mostrarse que la medida RAM tampoco satisface las propiedades establecidas en la proposición 3.6.



$(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0)$ , con  $\lambda > 1$ , obtenida a partir de  $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \phi_1^*, \dots, \phi_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ , siendo ésta una solución óptima para la  $DMU_0$ . Entonces

$$R_g^*(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0) \leq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^*}{\lambda} + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\lambda \phi_r^*} \right) = \frac{1}{\lambda} R_g^*(X_0, Y_0),$$

obteniéndose así el resultado deseado. ■

Todas estas relaciones ponen de manifiesto que  $R_g^*$  es menos sensible que  $R_e^*$  a la magnitud del factor de escala. En particular, (3.7.1) y (3.7.2) no añaden ninguna información a lo que ya se sabe a partir de la propiedad de monotonía<sup>3</sup>.

A continuación, estudiaremos las relaciones existentes entre  $R_e^*$  y los scores de eficiencia radiales clásicos. No debemos olvidar que, entre otras razones, las GEMs surgen con el propósito de solventar las deficiencias de las medidas radiales en cuanto a que éstas no consideran la ineficiencia no radial. Las relaciones que vamos establecer también estaban incluidas en la lista de propiedades deseables elaborada por Cooper y Pastor [36], mientras que Färe, Grosskopf y Lovell [47] sólo relacionaron, y en un contexto general, las medidas de Russell y de Farrell de acuerdo con su orientación. Comenzaremos probando el siguiente resultado general

**Proposición 3.8.** *Sea  $\Gamma$  una medida de eficiencia tal que  $0 < \Gamma \leq 1$  y sean  $\theta^*$  y  $\phi^*$  los scores de eficiencia radiales clásicos de orientación input y output respectivamente. Entonces,*

$$(3.8.1) \quad \Gamma \text{ es subhomogénea de grado } -1 \text{ en inputs} \Rightarrow \Gamma \leq \theta^*.$$

---

<sup>3</sup>Para la medida RAM únicamente puede afirmarse lo que establecen las siguientes relaciones:  $RAM(\theta X_0, Y_0) < RAM(X_0, Y_0)$  para  $\theta > 1$ ,  $RAM(X_0, \phi Y_0) < RAM(X_0, Y_0)$  para  $\phi < 1$  y  $RAM(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0) < RAM(X_0, Y_0)$  para  $\lambda > 1$ , que son todavía menos satisfactorias aún que las obtenidas para  $R_g^*$  y que, en ningún caso, aportan nada a lo que puede deducirse a partir de la monotonía fuerte que verifica esta medida.

$$(3.8.2) \quad \Gamma \text{ es subhomogénea de grado } +1 \text{ en outputs} \Rightarrow \Gamma \leq \frac{1}{\phi^*}.$$

**Demostración:** Sea una  $DMU_0$  con vector de inputs y de outputs  $(X_0, Y_0)$ . Si  $\theta^* = 1$ , (3.8.1) es obvia. En otro caso, esto es, si  $\theta^* < 1$ , puesto que por ser éste el score de eficiencia radial se garantiza que  $(\theta^* X_0, Y_0)$  pertenecerá al conjunto de posibilidades de producción, se tendrá que

$$\Gamma(X_0, Y_0) = \Gamma\left(\frac{1}{\theta^*} \theta^* X_0, Y_0\right) \leq \theta^* \Gamma(\theta^* X_0, Y_0) \leq \theta^*,$$

por ser  $\Gamma$  subhomogénea de grado -1 en inputs.

De forma similar, si  $\phi^* > 1$  es el score de eficiencia radial de orientación output de la  $DMU_0$ , entonces se verificará lo siguiente por ser  $\Gamma$  es subhomogénea de grado +1 en outputs

$$\Gamma(X_0, Y_0) = \Gamma\left(X_0, \frac{1}{\phi^*} \phi^* Y_0\right) \leq \frac{1}{\phi^*} \Gamma(X_0, \phi^* Y_0) \leq \frac{1}{\phi^*}.$$

■

**Corolario 3.8.1.**  $R_e^*$  satisface las siguientes relaciones con respecto a los scores de eficiencia radiales clásicos  $\theta^*$  y  $\phi^*$

$$(3.8.1.1) \quad R_e^* \leq \theta^*$$

$$(3.8.2.2) \quad R_e^* \leq \frac{1}{\phi^*}$$

**Demostración:** Inmediata, puesto que  $R_e^*$  es subhomogénea de grado -1 en inputs y de grado +1 en outputs. ■

En el corolario 3.8.1 se refleja la relación esperada entre  $R_e^*$  y los scores de eficiencia radiales clásicos  $\theta^*$  y  $\phi^*$ , puesto que, como cualquier GEM,  $R_e^*$  tiene en

cuenta tanto la ineficiencia radial como no radial (en este caso, en inputs y en outputs simultáneamente). Esto es, en dicha proposición se establece que  $R_e^*$  nunca podrá evaluar a una DMU como más eficiente de lo que lo harían  $\theta^*$  y  $\phi^*$ , que sólo consideran la ineficiencia radial (y además, son medidas orientadas). El significado de (3.8.1.1) es claro, pero dado que es difícil relacionar el score de eficiencia radial de orientación output  $\phi^*$  con  $R_e^*$ , en (3.8.1.2) hemos considerado el inverso de  $\phi^*$  (que coincide con  $\theta^*$  si se asumen rendimientos a escala constantes en la frontera eficiente). Además,  $R_e^*$  y  $\theta^*$  ( $\phi^*$ ) están estrechamente relacionados, ya que (3.7) extiende el modelo DEA radial clásico en el sentido de que cualquier solución factible del modelo de orientación input  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta)$  (con  $\phi$  en lugar de  $\theta$  para el modelo de orientación output) da lugar a una solución factible de (3.7)  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \overbrace{\theta, \dots, \theta}^{(m)}, \overbrace{1, \dots, 1}^{(s)})$   $((\lambda_1, \dots, \lambda_n, \overbrace{1, \dots, 1}^{(m)}, \overbrace{\phi, \dots, \phi}^{(s)}))$  cuyo valor en la función objetivo también coincide con  $\theta$  ( $\frac{1}{\phi}$  para el caso de orientación output).

A diferencia de  $R_e^*$ , la medida  $R_g^*$  no satisface ninguna de estas dos propiedades (y tampoco la RAM). Para ilustrar este hecho, podemos remitirnos de nuevo a los datos del ejemplo 3.1, en el que se verifica lo siguiente

$$R_g^*(5, 4) = 0,7944 > \frac{3}{5} = \theta^*(5, 4)$$

y

$$R_g^*(5, 4) = 0,7944 > \frac{2}{3} = \frac{1}{\phi^*(5, 4)}.$$

Nuestro siguiente objetivo es analizar la relación entre la magnitud de los valores que toman las dos medidas de Russell no orientadas  $R_e^*$  y  $R_g^*$ . Para ello, en primer lugar probaremos los siguientes resultados previos

**Lema 3.9.** *Dado un conjunto de valores  $\phi_1, \dots, \phi_s$ , tales que  $\phi_r \geq 1$ ,  $r = 1, \dots, s$ , se*

verifica la siguiente relación

$$\frac{1}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \leq \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r}. \quad (3.16)$$

**Demostración:** La desigualdad (3.16) refleja simplemente la conocida relación existente entre la media armónica y la media aritmética de un conjunto de valores. ■

**Lema 3.10.** *Dados los conjuntos de valores  $\theta_1, \dots, \theta_m$  y  $\phi_1, \dots, \phi_s$  correspondientes a una solución factible de (3.7), se verifica la siguiente relación*

$$\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \leq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right), \quad (3.17)$$

dándose la igualdad si y sólo si  $\theta_1 = \dots = \theta_m = 1$  y  $\phi_1 = \dots = \phi_s = 1$ .

**Demostración:** Puesto que por (3.16) se tiene que

$$\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \leq \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \right) \left( \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right), \quad (3.18)$$

para probar (3.17) bastará con demostrar la siguiente relación

$$\left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \right) \left( \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \leq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right). \quad (3.19)$$

Para ello, hagamos  $x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i$  e  $y = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r}$  y probemos que la función  $f(x, y) = \frac{1}{m+s}(x+y) - \frac{1}{m \cdot s}xy$ , definida en  $(0, m] \times (0, s]$  tiene un mínimo en  $(m, s)$  y vale 0. Si consideramos esta función definida en el compacto  $[0, m] \times [0, s]$ , podemos

afirmar que  $f$  alcanzará un mínimo en este conjunto por ser continua. Puesto que el determinante de la matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{m \cdot s} \\ \frac{-1}{m \cdot s} & 0 \end{pmatrix}$$

es negativo y ésta es una matriz  $2 \times 2$ , necesariamente uno de sus valores propios será positivo y el otro negativo. De este modo, dicha matriz es indefinida y, por consiguiente, el mínimo habrá de alcanzarse en la frontera, dado que en el interior la única situación posible es que se presente un punto de silla. En la frontera se tiene lo siguiente:  $f(0, y) = \frac{y}{m+s}$ ,  $0 \leq y \leq s$ , cuyo mínimo se alcanza en  $y = 0$  y vale 0;  $f(x, 0) = \frac{x}{m+s}$ ,  $0 \leq x \leq m$ , cuyo mínimo se alcanza en  $x = 0$  y vale 0;  $f(m, y) = \frac{m}{m+s} \left(1 - \frac{y}{s}\right)$ ,  $0 \leq y \leq s$ , cuyo mínimo se alcanza en  $y = s$  y vale 0; y, finalmente,  $f(x, s) = \frac{s}{m+s} \left(1 - \frac{x}{m}\right)$ ,  $0 \leq x \leq m$ , cuyo mínimo se alcanza en  $x = m$  y vale 0. Por consiguiente, el mínimo de  $f(x, y)$  se alcanza en los puntos  $(0, 0)$  y  $(m, s)$ , y vale 0. Restringiéndonos al rectángulo abierto  $(0, m] \times (0, s]$  tenemos la relación (3.19), que será de igualdad si y sólo si  $\sum_{i=1}^m \theta_i = m$  y  $\sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} = s$ , esto es, si y sólo si  $\theta_1 = \dots = \theta_m = 1$  y  $\phi_1 = \dots = \phi_s = 1$ .

La igualdad en (3.19) implica a su vez la igualdad en (3.17), que sólo se da si  $\theta_1 = \dots = \theta_m = 1$  y  $\phi_1 = \dots = \phi_s = 1$ . Y recíprocamente, para estos valores evidentemente se da la igualdad en (3.17). ■

La relación (3.17) establece que al comparar una  $DMU_0$  con otra unidad que la domine, el valor asociado de  $R_e$  siempre será menor o igual que el valor que registra  $R_g$  al comparar  $DMU_0$  con dicha unidad. Además, la igualdad se alcanzará si y sólo si  $DMU_0$  es eficiente en el sentido Koopmans.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos probar la siguiente pro-

posición que establece que la nueva versión de la medida de Russell no orientada que hemos propuesto toma valores inferiores a los de la original, y únicamente coinciden en la evaluación de unidades que son eficientes.

**Proposición 3.11.**  $R_e^* \leq R_g^*$ , dándose la igualdad si, y sólo si,  $R_e^* = R_g^* = 1$ .

**Demostración:** Puesto que el conjunto de soluciones factibles de los modelos que dan lugar tanto a  $R_e^*(X_0, Y_0)$  como a  $R_g^*(X_0, Y_0)$  es el mismo, en virtud del lema anterior se verificará  $R_e(X_0, Y_0) \leq R_g(X_0, Y_0)$  para cualquiera de estas soluciones. En particular, para una solución óptima de (2.4) tendremos que los valores asociados de los respectivos problemas satisfarán  $R_e(X_0, Y_0) \leq R_g^*(X_0, Y_0)$ . Por tanto,  $R_e^*(X_0, Y_0) \leq R_e(X_0, Y_0) \leq R_g^*(X_0, Y_0)$ .

Supongamos ahora que  $(\theta_1^{g^*}, \dots, \theta_m^{g^*}, \phi_1^{g^*}, \dots, \phi_s^{g^*}, \lambda_1^{g^*}, \dots, \lambda_n^{g^*})$  es una solución óptima de (2.4). Entonces, por (3.17) se verificará

$$R_e^*(X_0, Y_0) \leq \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i^{g^*}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r^{g^*}} \leq R_g^*(X_0, Y_0). \quad (3.20)$$

De este modo,  $R_e^*(X_0, Y_0) = R_g^*(X_0, Y_0)$  implicará que  $\theta_1^{g^*} = \dots = \theta_m^{g^*} = \phi_1^{g^*} = \dots = \phi_s^{g^*} = 1$ , y por tanto que  $R_e^*(X_0, Y_0) = R_g^*(X_0, Y_0) = 1$ , como queríamos demostrar. ■

### 3.4.1. Medidas invariantes frente a traslaciones

Cooper y Pastor [36] también consideran el hecho de que una medida sea invariante frente a traslaciones como una propiedad deseable. En virtud de dicha propiedad, es posible tratar con inputs y outputs sin restricciones en el signo. La

medida RAM es invariante frente a traslaciones, pero ni  $R_e^*$  ni  $R_g^*$  lo son. No obstante, es posible modificar estas medidas de forma apropiada hasta conseguir que satisfagan dicho requerimiento. En particular, sería posible definir versiones de  $R_e^*$  que sean invariantes frente a traslaciones mediante la elección adecuada de nuevos conjuntos de pesos para las holguras. Por ejemplo, los pesos actuales  $1/x_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $1/y_{r0}$ ,  $r = 1 \dots, s$ , podrían sustituirse por  $1/R_i^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $1/R_r^+$ ,  $r = 1 \dots, s$ , (como en la medida RAM), o bien por  $1/(x_{i0} - \underline{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $1/(\overline{y}_r - y_{r0})$ ,  $r = 1 \dots, s$ , donde  $\underline{x}_i = \min\{x_{ij}/j = 1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $\overline{y}_r = \max\{y_{rj}/j = 1, \dots, n\}$ ,  $r = 1 \dots, s$ , (este último conjunto de pesos fue utilizado en Pastor [74]) para definir respectivamente las siguientes medidas

$$R_e^R = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{R_i^-}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{R_r^+}} \quad (3.21)$$

y

$$R_e^M = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0} - \underline{x}_i}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{\overline{y}_r - y_{r0}}} \quad (3.22)$$

que, una vez implementadas en un modelo con un conjunto de restricciones idéntico al de (3.10), resultarían ser invariantes frente a traslaciones<sup>4</sup>. Sin embargo, esta mejora va a suponer algunas pérdidas en contrapartida. En primer lugar, estas versiones de  $R_e^*$  dejan de satisfacer las relaciones con la medidas radiales clásicas establecidas en el corolario 3.8.1, lo que ya supone una grave pérdida para una GEM. Veámoslo

---

<sup>4</sup>Con relación a la medida (3.22), hemos de indicar que a los sumandos correspondientes a las variables para las que  $x_{i0} - \underline{x}_i = 0$ , o bien  $\overline{y}_r - y_{r0} = 0$ , se les asignará el valor cero, puesto que en esa dimensión no podrán presentarse holguras.

con el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3.2.** Consideremos el siguiente conjunto de unidades descritas en términos de dos inputs y un output

$X_1$	$X_2$	$Y$
1	10	1
8	2	1
10	1	1
5	6	2
8	7	4
5	6	1

Para estos datos se tiene que  $R_e^{M^*}(5, 6; 1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = 1/\phi^*(5, 6; 1)$ . Si tenemos en cuenta además que, dada la relación existente entre los dos conjuntos de pesos que definen  $R_e^R$  y  $R_e^M$ , siempre se verificará que  $R_e^{R^*} \geq R_e^{M^*}$ , se tendrá también que  $R_e^{R^*}(5, 6; 1) > 1/\phi^*(5, 6; 1)$ .

Por otro lado, volviendo de nuevo a los datos del ejemplo 3.1, podemos comprobar que  $R_e^{R^*}(4, 2) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2} = \theta^*(4, 2)$ .  $\square$

En resumen,  $R_e^{R^*}$  no satisface (3.8.1.1), mientras que ni  $R_e^{R^*}$  ni  $R_e^{M^*}$  verifican (3.8.1.2). Como consecuencia,  $R_e^{R^*}$  no será subhomogénea de grado -1 en inputs y ni  $R_e^{R^*}$  ni  $R_e^{M^*}$  serán subhomogéneas de grado +1 en outputs, en virtud de la proposición 3.8. Por otro lado, puede probarse de forma sencilla que  $R_e^{M^*}$  sí es subhomogénea de grado -1 en inputs.

En segundo lugar, estas elecciones de pesos suelen conducir a situaciones que no se presentan con los modelos DEA en general. Veamos el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3.1 (continuación).** Con los datos de este ejemplo se tiene que  $R_e^{R^*}(3, 2) = \frac{2}{3}$ . En este mismo caso, si el punto (5,4) es sustituido por el punto



(6,1), el valor de dicha medida es  $R_e^{R^*}(3, 2) = \frac{5}{7}$ . Esta situación pone de manifiesto que la evaluación de la eficiencia de una unidad con la medida  $R_e^{R^*}$  puede verse afectada por las unidades ineficientes que componen la muestra.

De forma similar, cuando evaluamos la eficiencia del punto (5,4) con la medida  $R_e^M$  en el contexto de la muestra original se obtiene un valor de  $R_e^{M^*}(5, 4) = \frac{1}{3}$ . Si el punto (2,2) es reemplazado por el (1,2), la eficiencia del mencionado punto es ahora evaluada con un valor de  $R_e^{M^*}(5, 4) = \frac{1}{2}$ . De esto concluimos que la evaluación de la eficiencia de una unidad con la medida  $R_e^{M^*}$  puede estar influida por las unidades eficientes que no forman parte del grupo de referencia (“peer group”) de la unidad que se evalúa.  $\square$

### 3.5. Ejemplo empírico

En esta sección vamos a ilustrar el comportamiento de la medida de eficiencia generalizada  $R_e^*$  utilizando un conjunto de datos reales. Dichos datos aparecieron en el trabajo de Aida, Cooper, Pastor y Sueyoshi [1] en el que se evaluaba con la medida RAM la eficiencia de las agencias encargadas del suministro de agua y la prestación de otros servicios relacionados en la región japonesa de Kanto. El banco de datos consta de 108 observaciones descritas en términos de 5 inputs (número de empleados, gastos de funcionamiento antes de la depreciación, capital físico después de las amortizaciones, población y longitud de las tuberías) y 2 outputs (agua facturada e ingresos por funcionamiento). Se asumieron rendimientos a escala variables sobre la frontera.

Tras evaluar la eficiencia de las unidades de este banco de datos con nuestra nueva medida  $R_e^*$ , encontramos que 49 unidades son evaluadas como eficientes. Los resultados para las 59 restantes aparecen en la tabla 3.1. La primera columna incluye

los valores de  $R_e^*$ . La segunda y la tercera las componentes de eficiencia media en inputs y en outputs respectivamente. Las restantes columnas contienen los valores óptimos de las holguras (o ineficiencias) para cada uno de los inputs y de los outputs.

Por ejemplo,  $R_e^* = 0,84930$  es el ratio entre la eficiencia media de los inputs y la de los outputs para la DMU 1. La descomposición de  $R_e^*$  en sus componentes de eficiencia en inputs y en outputs revela la existencia de una unidad eficiente, o bien de una combinación de DMUs eficientes, que usa, en promedio, el 84,93 % de los inputs utilizados por la DMU 1 manteniendo el mismo nivel de producción de outputs. La observación clasificada como más ineficiente por la medida mejorada de Russell es la DMU 86, para la que el valor de dicha medida es  $R_e^* = 0,29861$ . En este caso la descomposición de  $R_e^*$  indica que existe una unidad eficiente, o bien una combinación convexa de éstas, que produce, en promedio, un 59,16 % más de outputs que la DMU 86 usando, en promedio, un 47,53 % de los inputs que dicha unidad utiliza.

Con objeto de comprobar si las mencionadas descomposiciones son únicas o no, hemos resuelto el par de problemas (3.8) y (3.9) para todas las unidades ineficientes. El resultado ha sido que los valores óptimos de estos dos problemas coinciden para todas las unidades excepto para la DMU 1 y la DMU 84. En estos dos casos, los valores mínimo y máximo posibles de la eficiencia de los inputs fueron  $z^* = 0,8493$  y  $Z^* = 1$  para la DMU 1 y  $z^* = 0,8622$  y  $Z^* = 0,9896$  para la DMU 84. Esto significa que la DMU 1 podría alcanzar la eficiencia con el nivel observado de inputs si se lograra un incremento en la producción de outputs del 17.74 % (en promedio), o bien rebajando dicho nivel de inputs hasta el 86.22 % (en promedio), lo que en este último caso extremo permitiría mantener el nivel observado de producción de outputs. Una interpretación similar puede hacerse para la DMU 84.







Puesto que la eficiencia de estas agencias fue originalmente evaluada con la medida RAM, a continuación realizamos una breve comparación entre los valores de ésta y los obtenidos con la medida  $R_e^*$ . Obviamente, ambas medidas coinciden en la clasificación de unidades eficientes. La tabla 3.2 recoge los valores de  $R_e^*$  y RAM para las 59 unidades ineficientes. Inmediatamente, se observa una gran diferencia entre las magnitudes de los valores de ambas medidas, destacando el hecho de que la medida RAM toma valores extremadamente altos. Los valores de  $R_e^*$  van desde 0,29861, para la DMU 86, hasta 0,91974, para la DMU 104. Contrastan fuertemente con éstos los valores correspondientes a la medida RAM, para la que el mínimo observado es 0,97759, y lo que es más, sólo cuatro unidades son evaluadas con un score de eficiencia inferior a 0,99. Este hecho pone de manifiesto la escasa capacidad de la medida RAM para discriminar entre DMUs atendiendo a su eficiencia, ya que esta medida toma siempre valores muy altos.

En la tabla 3.2 hemos incluido también una columna con el valor del score de eficiencia de orientación input clásico  $\theta^*$  al objeto de comparar las medidas de eficiencia radiales y no radiales. Como cabía esperar  $\theta^*$  es siempre mayor que  $R_e^*$ . Sin embargo, con los valores de la medida RAM ocurre siempre lo contrario, ya que éstos son siempre mayores que  $\theta^*$ .

### 3.6. La medida RAM

Los resultados del análisis realizado en la sección 3.5 ponen de manifiesto que la medida RAM toma siempre valores anormalmente altos. La explicación de este comportamiento anómalo es el uso del inverso del rango muestral como el conjunto de pesos que acompañan a las holguras, ya que el rango puede tomar valores muy grandes en relación a éstas.



Además, como ya ocurrió con  $R_e^R$ , con la medida RAM también pueden presentarse las mismas situaciones inusuales en el contexto general de los modelos DEA que ya describimos entonces (véase página 71). Si en el ejemplo 3.1 evaluamos al punto (3,2) con la medida RAM, éste obtiene un score de eficiencia de 0.75. Supongamos que el punto (5,4), que es ineficiente, es reemplazado por el punto (5,1), que también lo es. En ese caso, el punto (3,2) sería evaluado con un valor de 0.8 con la medida RAM. Esto es, tal como sucedía con  $R_e^R$ , las unidades ineficientes pueden influir en la eficiencia de las restantes DMUs cuando ésta se evalúa con la medida RAM.

### 3.6.1. La medida “BCC-projected RAM”

Conscientes de los inconvenientes que pueden presentar los valores de la medida RAM, sus propios autores introdujeron la siguiente medida de eficiencia

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^* y_{r0} + v_0^*}{\sum_{i=1}^m \nu_i^* x_{i0}} \leq 1 \quad (3.23)$$

obtenida en función de las soluciones del problema dual de (2.10), que fue bautizada con el nombre “BCC-projected RAM”<sup>5</sup>. Su uso está destinado a presentaciones cuando surgen dificultades debidas a la elevada magnitud de la medida RAM, puesto que en ese caso esta última sería difícil de interpretar. Para conseguir que dicha medida esté bien definida, ésta se implementa en un problema de programación fraccional imponiendo que los ratios (3.23) sean menores o iguales que la unidad para todas las unidades de la muestra. Utilizando de nuevo los resultados clásicos

---

<sup>5</sup>Originalmente, los autores de esta medida afirman que ésta toma siempre valores no negativos, si bien no puede garantizarse que esto sea cierto en general.



de la programación fraccional debidos a Charnes y Cooper, el valor óptimo del modelo resultante puede obtenerse resolviendo el siguiente problema lineal (véase Cooper, Park y Pastor [37] para más detalles)

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \theta - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{R_r^+} \right) \\
 \text{s.a.:} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

El problema (3.24) presenta el atractivo de su similitud con el modelo BCC, lo que explica que la medida que se obtiene al resolver dicho problema se haya bautizado con el nombre de “BCC-projected RAM”, a lo que se une el hecho de que en ocasiones ésta proporciona valores más razonables que la medida RAM, como ocurrió con el análisis de las agencias encargadas del suministro de agua en la región de Kanto (véase tabla 3.2). A pesar de estas ganancias respecto a la medida original, los autores apuntan también algunas pérdidas, siendo quizás la imposibilidad de obtener rankings en función de los valores resultantes de (3.24) la contrapartida más destacable respecto a la medida RAM.

Pero, desafortunadamente, éstos no son los únicos defectos de esta medida. A continuación, vamos a comprobar cómo la combinación de un score de eficiencia radial con las ineficiencias de tipo no radial recogidas en las holguras puede traer consigo consecuencias fatales. De hecho, como se comentó en la sección 2.2, algunos

autores ya habían apuntado su preocupación ante esta forma de diseñar medidas de eficiencia. En primer lugar, dicha combinación supone que de la ineficiencia total en los inputs una parte es valorada en relación a unos pesos y otra respecto a otros distintos. En concreto, los pesos de la ineficiencia radial son  $1/mx_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y los de la ineficiencia no radial  $1/(m+s)R_i^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ésta es una condición, implícitamente asumida, de difícil justificación.

En segundo lugar, y mucho más importante, tenemos que destacar el hecho de que el modelo anterior puede conducir a problemas no acotados. Por ejemplo, consideremos la siguiente muestra compuesta por 3 DMUs descritas en términos de 2 inputs y 1 output: A(1,3;1), B(2,2;2) y C(4,3;1). En este caso, A y B son eficientes; sin embargo, no es posible evaluar la eficiencia de C con (3.24) puesto que el problema asociado con esta unidad es no acotado.

Es posible incluso establecer ciertas condiciones generales para las que el modelo (3.24) resultará un problema no acotado. En efecto, sea  $(\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n, s_{10}^-, \dots, s_{m0}^-, s_{10}^+, \dots, s_{s0}^+)$  una solución factible de (3.24) (en particular, un óptimo si éste existiese) con un valor asociado de la función objetivo igual a  $z_0$ . Entonces, para cualquier  $k \geq 0$ , el vector

$$(\theta + k, \lambda_1, \dots, \lambda_n, s_{10}^- + kx_{10}, \dots, s_{m0}^- + kx_{m0}, s_{10}^+, \dots, s_{s0}^+) \quad (3.25)$$

será también una solución factible de (3.24) con el siguiente valor asociado de la función objetivo

$$\tilde{z}_0 = z_0 + k \left( 1 - \frac{1}{m+s} \sum_{i=1}^m \frac{x_{i0}}{R_i^-} \right) \quad (3.26)$$

Por tanto, si  $1 - \frac{1}{m+s} \sum_{i=1}^m \frac{x_{i0}}{R_i^-} < 0$ , o equivalentemente, si  $\sum_{i=1}^m \frac{x_{i0}}{R_i^-} > m+s$ , lo que puede ocurrir cuando los inputs utilizados varían en un rango pequeño y evaluamos a una unidad con los mayores valores de dichos inputs, entonces (3.24)

será un problema no acotado.

En pocas palabras, pueden encontrarse infinitas soluciones de (3.24) asociadas con un mismo punto proyección sobre la frontera eficiente aumentando simultáneamente el valor de  $\theta$  y la ineficiencia no radial en los inputs recogida en las holguras de manera que ambos incrementos se compensen para cumplir así las restricciones del modelo. El problema reside en que cada una de estas soluciones tiene asociado un valor diferente de la función objetivo, pudiendo ésta resultar no acotada como hemos visto anteriormente.

Una forma posible de lograr que (3.24) sea un problema acotado sería añadir la condición  $\theta \leq 1$  al conjunto de restricciones. Ésta es una restricción razonable puesto que con ella no se permitiría la posibilidad de considerar expansiones proporcionales de los inputs de una unidad cuando se desea evaluar su eficiencia, que es lo que sucedería al aumentar  $k$  en (3.25). Además, la condición  $\theta \leq 1$ , que impide que el score de eficiencia radial pueda crecer ilimitadamente, obliga a su vez a que esto también ocurra con la ineficiencia no radial, resultando así que el problema (3.24) sí estará acotado. Por ejemplo, al añadir esta restricción al modelo cuando se evalúa la eficiencia del punto C anteriormente mencionado, la solución óptima sería:  $\theta^* = 1$ ,  $\lambda_A^* = 0$ ,  $\lambda_B^* = 1$ ,  $\lambda_C^* = 0$ ,  $s_1^{-*} = 2$ ,  $s_2^{-*} = 1$  y  $s_1^{+*} = 1$ , con un valor óptimo de  $1/9$ .

No obstante, el modelo (3.24) con la restricción adicional  $\theta \leq 1$  sigue planteando situaciones hasta cierto punto extrañas, pese a ser un problema acotado. En efecto, la solución óptima anterior indica que la evaluación de la eficiencia del punto C se ha obtenido al comparar dicho punto con el punto eficiente B. Sin embargo, la solución factible  $\theta = 2/3$ ,  $\lambda_A = 0$ ,  $\lambda_B = 1$ ,  $\lambda_C = 0$ ,  $s_1^- = 2/3$ ,  $s_2^- = 0$  y  $s_1^+ = 1$ , que también nos lleva al punto B como referente sobre la frontera eficiente, da lugar ahora a un valor de la función objetivo de (3.24) igual a  $7/27$  (razón por la que dicha solución no es óptima, ya que este valor es mayor que  $1/9$ ). Parece lógico pensar que las distintas soluciones de un modelo utilizado para la evaluación de

la eficiencia que estén asociadas con un mismo referente sobre la frontera tuvieran también asociado un mismo valor de la función objetivo de dicho modelo. De hecho, esto siempre ocurre con cualquier modelo DEA, incluso en el caso de que dicho referente estuviese asociado con múltiples soluciones del problema. Quizás, resultaría conveniente especificar un criterio razonable (aparte de la imposición de minimizar la función objetivo de (3.24)) que justificase la elección entre las dos soluciones que conducen al punto B. En cualquier caso, el uso como medida de eficiencia de los valores proporcionados por este modelo debería estar justificado tanto por las propiedades que satisface dicha medida como por el hecho de que sus valores puedan interpretarse claramente.

### **3.7. Ratios de eficiencia de beneficios**

A lo largo de este capítulo, hemos presentado medidas de eficiencia que describen los aspectos puramente técnicos de un proceso de producción. Su uso está destinado a situaciones en las que o bien no se dispone de información relativa a precios y costos unitarios o bien cuando su utilidad es limitada puesto que hay una amplia variedad de precios y costos que podría ser necesario considerar. Para ofrecer una visión más completa del problema de la medición de la eficiencia, en esta sección incluimos otras medidas de eficiencia de un carácter económico más marcado que se encuentran en la literatura. Por supuesto, éstas podrán obtenerse siempre que la información sobre precios y costos se conozca con exactitud. Además, queremos resaltar el hecho de que estas medidas de eficiencia económica responden también a la idea del uso de ratios que nosotros hemos utilizado en este capítulo para desarrollar medidas de eficiencia técnica; lo único que diferencia a estos dos tipos de medidas es la elección del conjunto de pesos que las definen. Los modelos recogidos aquí aparecen en el capítulo 8 del libro Cooper, Seiford y Tone [35] publicado en 1999 (véase también Cooper, Park y Pastor [37] para otros modelos alternativos de

eficiencia que incorporan información relativa a precios y costos).

Sean  $p_0 = (p_{10}, \dots, p_{s0})$  y  $c_0 = (c_{10}, \dots, c_{m0})$  los vectores de precios y costos unitarios, respectivamente, para una determinada  $DMU_0$  con vector de inputs y outputs  $(X_0, Y_0)$ . En ocasiones se está interesado en ratios que expresen las tasas de rendimientos en lugar de utilizar cantidades totales. Por ejemplo, medidas de eficiencia de beneficios tales como el siguiente índice (beneficio real frente al máximo beneficio posible) pueden resultar de interés

$$E_p = \frac{p_0 Y_0 - c_0 X_0}{p_0 Y_0^* - c_0 X_0^*}, \quad (3.27)$$

donde el máximo beneficio posible,  $p_0 Y_0^* - c_0 X_0^*$ , es el valor óptimo del siguiente modelo

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (p_0 Y_0 - c_0 X_0) + \left( \sum_{r=1}^s p_{r0} s_{r0}^+ + \sum_{i=1}^m c_{i0} s_{i0}^- \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.28)$$

De este modo, bajo la condición  $p_0 Y_0 - c_0 X_0 > 0$ , tendremos que  $0 < E_p \leq 1$ , y una  $DMU_0$ ,  $(X_0, Y_0)$  será eficiente en cuanto a sus beneficios si  $E_p = 1$ . Además, los valores de las holguras en cada variable pueden indicar direcciones de mejora<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Existen también modelos que proporcionan medidas de eficiencia de costos o bien medidas

En lugar de maximizar los beneficios, que resultan difíciles de manejar en caso de ser negativos, podríamos considerar alternativamente la siguiente medida de eficiencia del ratio ingresos/gastos definida como el ratio ingresos/gastos observado frente al máximo valor posible de dicho ratio

$$E_{rc} = \frac{p_0 Y_0 / c_0 X_0}{p_0 Y_0^* / c_0 X_0^*}, \quad (3.29)$$

donde el valor máximo del ratio ingresos/gastos,  $\frac{p_0 Y_0^*}{c_0 X_0^*}$ , se obtiene como el valor óptimo del siguiente modelo

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \frac{p_0 Y_0 + \sum_{r=1}^s p_{r0} s_{r0}^+}{c_0 X_0 - \sum_{i=1}^m c_{i0} s_{i0}^-} \\ & \text{s.a.:} \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \quad s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ & \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.30)$$

El problema (3.30) es un modelo de programación lineal fraccional, cuyo valor óptimo podrá obtenerse recurriendo de nuevo a los resultados sobre transformaciones de este tipo de modelos en problemas lineales debidos a Charnes y Cooper.

---

de eficiencia de ingresos. Puesto que nos hemos centrado en medidas no orientadas, sólo haremos mención de medidas de eficiencia de beneficios.

El problema  $E_{rc}$  es un índice de eficiencia similar a  $E_p$ , pero presenta como ventaja respecto a este último que puede utilizarse incluso en situaciones en las que las DMUs presenten déficits, esto es, cuando  $p_0Y_0 - c_0X_0 < 0$ .

### 3.8. Medidas de eficiencia generalizadas en FDH

Como ya hicimos en la sección anterior, en ésta consideraremos una nueva reformulación del planteamiento del problema de la medición de la eficiencia que hemos seguido en las primeras secciones de este capítulo. En concreto, ahora pretendemos poner de manifiesto algunas circunstancias de interés que se presentan cuando se considera una tecnología diferente como es el FDH a la hora de evaluar la eficiencia.

En algunas circunstancias puede resultar aconsejable eliminar la hipótesis de convexidad de los modelos DEA y, por consiguiente, evaluar la eficiencia siguiendo un planteamiento basado en el concepto de dominancia. La idea consiste en evaluar el comportamiento de cada  $DMU_0$  determinando si los valores de dicha unidad están dominados por los de alguna otra. En concreto, se trata de analizar si existe alguna otra  $DMU_j$  con  $x_{ij} \leq x_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $y_{rj} \geq y_{r0}$ ,  $r = 1, \dots, s$ , con al menos una desigualdad estricta. Entonces, una  $DMU_0$  se considerará eficiente si y sólo si ninguna otra unidad la domina. Este planteamiento conduce de forma natural a la metodología FDH introducida en 1984 por Deprins, Simar y Tulkens [41]. Existen en la literatura numerosas aplicaciones del FDH y en muy diversos ámbitos. Entre otros, podemos citar las redes de banca, las oficinas de correos, los municipios o los sistemas de transporte urbano (véase, por ejemplo, Tulkens y Vanden Eeckaut [101] y [102]). Un conjunto de posibilidades de producción del tipo FDH se diferencia de la tecnología DEA (VRS) clásica en que se construye sin imponer el postulado de convexidad (véase sección 1.3.2). El conjunto de referencia

asociado se obtendrá como resultado de añadir las condiciones  $\lambda_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , a (1.14). De este modo, si se deseara evaluar la eficiencia de una  $DMU_0$  en términos de cualquiera de las medidas mencionadas hasta ahora, pero en un entorno FDH, bastaría con resolver el modelo correspondiente a la medida en cuestión una vez que se han añadido las restricciones  $\lambda_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Por ejemplo, si dicha medida fuese  $R_e$ , el problema de programación sería el siguiente

$$\text{mín } R_e^{FDH}(X_0, Y_0) = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r}$$

s.a.:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &= \theta_i x_{i0} & i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &= \phi_r y_{r0} & r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \theta_i &\leq 1 & i = 1, \dots, m \\ \phi_r &\geq 1 & r = 1, \dots, s \\ \lambda_j &\in \{0, 1\} & j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.31}$$

De la misma forma, si se quisiese obtener el valor de  $R_g$ , bastaría con sustituir la función objetivo de (3.31) por

$$R_g^{FDH}(X_0, Y_0) = \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right). \tag{3.32}$$

De hecho, algunas medidas de este tipo ya han sido utilizadas en diferentes aplicaciones que pueden encontrarse en la literatura. Por ejemplo, Fried y Lovell, junto con algún otro autor, recurren de nuevo al uso de las medidas de Russell en una serie de trabajos en los que se evaluaba la gestión de las “Credit Unions” en los Estados Unidos (véase Fried y Lovell [54] y Fried, Vanden Eeckaut y Lovell[55]).



Independientemente de la medida de eficiencia elegida, cuando la tecnología de referencia es el FDH el modelo resultante es siempre un problema de programación entera mixta, por lo que no serán aplicables los algoritmos estándar para su resolución ni tampoco se tendrá acceso a los resultados derivados de la teoría de la dualidad de la programación lineal. No obstante, en cuanto a la resolución, podemos decir que siempre es fácil obtener la solución óptima de estos problemas siguiendo un algoritmo de dominancia de vectores similar al propuesto en Tulkens [100]. En particular, el valor óptimo de (3.31),  $R_e^{FDH^*}(X_0, Y_0)$ , puede obtenerse aplicando el siguiente algoritmo:

1. Construir el conjunto de índices  $D(X_0, Y_0) = \{k \in \{1, \dots, n\} / x_{ik} \leq x_{i0}, \forall i = 1, \dots, m, \text{ e } y_{rk} \geq y_{r0}, \forall r = 1, \dots, s, \text{ con al menos una desigualdad estricta}\}$ ,
2. a) Si  $D(X_0, Y_0) = \emptyset$ , entonces  $R_e^*(X_0, Y_0) = 1$ .  
b) Si  $D(X_0, Y_0) \neq \emptyset$ , entonces

$$R_e^{FDH^*}(X_0, Y_0) = \min_{k \in D(X_0, Y_0)} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik}}{x_{i0}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk}}{y_{r0}}} \quad (3.33)$$

Obviamente, este algoritmo puede aplicarse de forma análoga para calcular el valor de cualquier otra medida de eficiencia en una tecnología de tipo FDH. Esto representa una considerable ventaja, en especial para aquellas medidas, tales como la medida de Russell  $R_g^*$ , cuya implementación en una tecnología de tipo DEA da lugar a problemas de programación matemática no lineales que son más costosos de resolver.

En el capítulo de mejoras derivadas del uso de tecnologías FDH hemos de añadir otra de carácter interpretativo como es el hecho de que las evaluaciones de eficiencia se obtengan con relación a una unidad observada y no utilizando como referente

a una unidad ficticia resultante de una combinación de las restantes unidades que componen la muestra. Esto, sin embargo, trae consigo también algunas contrapartidas, puesto que en algunas ocasiones, especialmente cuando se consideran muchas variables (inputs y/o outputs), la imposibilidad de encontrar unidades que dominen a una dada conduce a la evaluación como eficientes de un número de DMUs anormalmente elevado. Como dato ilustrativo, sirva el resultado del análisis de eficiencia en una tecnología FDH del banco de datos de las agencias de suministro de agua en la región de Kanto utilizado en la sección 3.5, en el que 105 de las 108 unidades que componen la muestra son evaluadas como eficientes. En este caso, uno dudaría de que los resultados obtenidos reflejasen la verdadera eficiencia relativa de la gestión de las unidades involucradas en dicho estudio<sup>7</sup>.

Finalmente, aprovechamos esta discusión sobre las ventajas e inconvenientes del uso de tecnologías FDH para llamar la atención sobre otro aspecto de interés relacionado con la medición de eficiencia. Como muestra el algoritmo anterior, el cálculo de una medida de eficiencia en una tecnología FDH se reduce finalmente a la comparación de los inputs y de los outputs de la unidad que se evalúa con los correspondientes inputs y outputs de un número finito de unidades de las que componen la muestra. En virtud de este hecho, el criterio utilizado para calcular las medidas mencionadas en este capítulo podría cambiarse y obtener éstas como el valor máximo que resultaría de la comparación de la DMU que se evalúa con las unidades eficientes (en lugar de minimizar dicho valor, que es lo que se hace habitualmente), sin necesidad de realizar un esfuerzo computacional adicional. En ese caso, las medidas de eficiencia resultantes se obtendrían al comparar la DMU evaluada con el referente “más próximo” sobre la frontera eficiente, puesto que, por lo general, los valores de

---

<sup>7</sup>Una forma de atenuar las consecuencias de este problema podría pasar por la relajación de las condiciones de dominancia, por ejemplo admitiendo la posibilidad de “sustituciones” en inputs y/o en outputs.

los índices de eficiencia involucrados aumentan a medida que las coordenadas de los puntos proyección son cada vez más próximos a los de la unidad que se evalúa<sup>8</sup>. En ese sentido, podemos considerar que dichos referentes serían “más representativos” que los obtenidos como la solución óptima de un problema de programación en los que se minimiza el valor de la medida utilizada, puesto que sus correspondientes inputs y outputs guardarán un mayor grado de similitud con los de la unidad que se evalúa. En resumen, la aplicación del criterio de maximización puede conducir a medidas de eficiencia “más sensibles”, ya que éstas resultarán de una comparación más homogénea entre la unidad que se evalúa y la unidad sobre la frontera que se usa como referente para dicha evaluación. En particular, esto es una tarea simple desde el punto de vista computacional cuando se asume una tecnología de referencia FDH.

### 3.8.1. La distancia mínima a la frontera

La posibilidad de encontrar proyecciones sobre la frontera eficiente que constituyan referentes más representativos para la unidad que se evalúa cuando se usan tecnologías FDH, está poniendo de manifiesto, a su vez, una de las debilidades más importantes que, en nuestra opinión, presentan algunos modelos DEA en cuanto a su uso para la medición de eficiencia. En la formulación habitual del modelo DEA aditivo (o del aditivo invariante), el óptimo se alcanza cuando se maximizan las holguras. Por consiguiente, la solución óptima de estos modelos proporciona el punto (o los puntos) proyección sobre la frontera más lejano a la unidad que se evalúa en

---

<sup>8</sup>No obstante, la mencionada proximidad no ha de entenderse literalmente, puesto que las medidas involucradas no siempre son una distancia en el sentido estrictamente topológico.

términos de la distancia  $L_1$  (o  $L_1$  ponderada)<sup>9</sup>. Algo similar puede afirmarse para otras variantes de estos modelos, en particular, aquellos que dan lugar a las medidas de eficiencia generalizadas que venimos estudiando en este capítulo. Sin embargo, no es habitual encontrar en la literatura razones que justifiquen la conveniencia del uso de los modelos aditivos en su formulación habitual (esto es, maximizando la distancia  $L_1$  o  $L_1$  ponderada a la frontera) o, por el contrario, la de algún otro método que permita obtener medidas de eficiencia con relación al punto “más próximo” sobre la frontera eficiente, cuando es evidente la necesidad de tal justificación a la vista de las discrepancias que pueden presentarse entre los resultados obtenidos siguiendo cada uno de estos dos criterios. Quizás, la única justificación para esto sea la inexistencia (hasta el momento) de un modelo o de un algoritmo que permita determinar el punto de la frontera eficiente más próximo a uno dado del conjunto de posibilidades de producción en términos de una distancia de tipo  $L_1$ , o bien, aquel que maximiza el valor de una determinada GEM.

En una discusión sobre el uso de las medidas radiales y las dificultades derivadas del hecho de que éstas no consideren la ineficiencia no radial recogida en las holguras, Lovell y Vanden Eeckaut [72] sugieren distintas vías de solución para el tratamiento de éstas. Entre ellas, se propone el uso de medidas de eficiencia no radiales. En particular, estos autores prestan especial atención a las tecnologías FDH (destacando, tal como nosotros hemos hecho anteriormente, algunas de las virtudes que se derivan de la evaluación de eficiencia en un entorno de esta naturaleza), y proponen como medida de eficiencia la siguiente

$$\min_{k \in D_0^*} \left\{ \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{x_{i0}}{x_{ik}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk}}{y_{r0}} \right) \right\}, \quad (3.34)$$

---

<sup>9</sup>En estos casos, la proximidad o lejanía de las proyecciones sobre la frontera sí puede interpretarse literalmente en el sentido de mínima o máxima distancia a la frontera.

donde  $D_0^*$  es el conjunto de índices correspondientes a las unidades no dominadas que dominan a la  $DMU_0$ . Ésta es una versión modificada de la medida de Russell no orientada que, en particular, tomará valores no inferiores a 1.

Si analizamos (3.34), advertiremos que el mínimo de dicha expresión se alcanzará para una unidad  $(X_k, Y_k)$  en  $D_0^*$  tal que minimice en promedio los ratios  $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $\frac{y_{rk}}{y_{r0}}$ ,  $r = 1, \dots, s$ . Teniendo en cuenta que  $(X_k, Y_k)$  dominará a  $(X_0, Y_0)$ , el mínimo estará asociado con una unidad  $(X_k, Y_k)$  cuyos inputs y outputs sean en promedio los “más próximos” a los de la unidad  $(X_0, Y_0)$ . Sorprendentemente, estos autores no destacan en ningún momento este hecho, cuando supone un cambio significativo con relación a los criterios tradicionalmente utilizados.

De igual forma que con la medida anterior podría procederse con la medida de Russell. En ese caso, bastaría con maximizar, en lugar de minimizar, la expresión de dicha medida cuando se compara la  $DMU_0$  con las unidades de  $D_0^*$ . Denotemos por  $r_g^{FDH^*}(X_0, Y_0)$  a la medida resultante. Entonces,

$$r_g^{FDH^*}(X_0, Y_0) = \max_{k \in D_0^*} \left\{ \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik}}{x_{i0}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk}}{y_{r0}} \right) \right\}, \quad (3.35)$$

que ahora tomaría valores entre 0 y 1. Asimismo, si estuviésemos interesados en nuestra medida  $R_e$ , bastaría con modificar el algoritmo anterior de manera que  $D(X_0, Y_0)$  fuese reemplazado por  $D_0^*$  (es decir, que este conjunto sólo incluyese los índices de las unidades que dominan a la  $DMU_0$  y son eficientes) y se maximizase en (3.33) en lugar de que la expresión involucrada fuese minimizada. Denotemos por  $r_e^{FDH^*}(X_0, Y_0)$  a la medida resultante. Entonces,

$$r_e^{FDH^*}(X_0, Y_0) = \max_{k \in D_0^*} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik}}{x_{i0}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk}}{y_{r0}}} \quad (3.36)$$

De este modo, obtendríamos los valores de las medidas de Russell para una  $DMU_0$  por comparación con el referente “más próximo” sobre la frontera eficiente. Y, por consiguiente,  $r_g^{FDH*}$  y  $r_e^{FDH*}$  podrían considerarse como medidas de eficiencia “más sensibles” que  $R_g^{FDH*}$  y  $R_e^{FDH*}$ , respectivamente, puesto que las primeras se obtendrían utilizando referentes “más representativos” para la  $DMU_0$ .

En el siguiente ejemplo aplicamos algunas de las medidas que hemos comentado en esta sección sobre un conjunto de datos reales. En particular, vamos a prestar especial atención a las medidas  $R_e^{FDH*}$  y  $r_e^{FDH*}$ . Como ya apuntamos anteriormente, los resultados obtenidos pondrán de manifiesto la necesidad de establecer razones que justifiquen la aplicación del criterio de máxima distancia o bien del de mínima distancia a la frontera, puesto que las diferencias que se observan entre los valores que toman cada una de ellas nos llevarían a conclusiones muy dispares sobre la eficiencia de las unidades que se están evaluando.

**Ejemplo 3.3.** Como hemos comentado anteriormente, el cálculo de medidas de eficiencia con el banco de datos utilizado en el ejemplo empírico de la sección 3.5 cuando se asume una tecnología FDH resulta poco ilustrativo puesto que sólo 3 de las 108 unidades que componen la muestra resultan ineficientes. Por esta razón, nos serviremos en su lugar de los datos que aparecen en una aplicación realizada por Pastor, Lozano y Pastor [77] para la comparación de la eficiencia de los sistemas bancarios de 10 países europeos. La muestra se compone de 612 DMUs descritas en términos de 2 inputs y 4 outputs. En este caso, si se considera un conjunto de referencia FDH, encontramos que 189 unidades son eficientes y 423 ineficientes, lo que significa un 31 % de eficientes frente a un 69 % aproximadamente de ineficientes. Estos resultados no resultan tan sorprendentes como los mencionados anteriormente.

En este ejemplo nos hemos centrado en las medidas  $R_e^{FDH*}$  y  $r_e^{FDH*}$ . Para cada unidad de las que componen la muestra hemos representado los valores de estas dos medidas en la figura 3.1. Una simple mirada sobre dicho gráfico nos permite

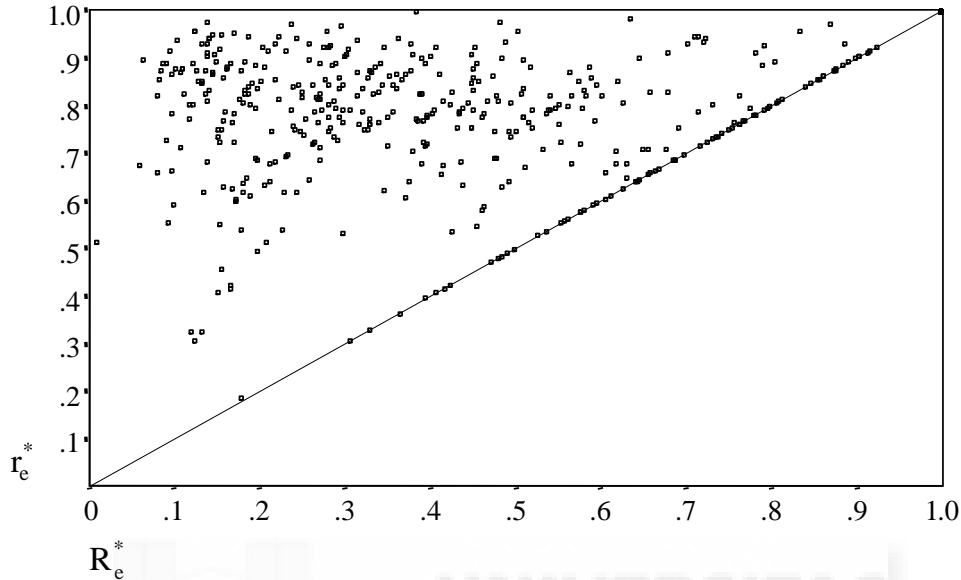


Figura 3.1:  $R_e^*$  y  $r_e^*$  (FDH)

detectar las notorias discrepancias entre los valores de ambas medidas. Si bien ambos valores coinciden para algunas unidades, además de obviamente para las eficientes, se observa un gran número de puntos en la esquina superior izquierda del gráfico. Las unidades situadas en esta zona registran un valor de  $r_e^{FDH^*}$  mucho mayor que el correspondiente a la medida  $R_e^{FDH^*}$ . Por ejemplo, para la DMU 562 se tiene que  $R_e^{FDH^*} = 0,09597$  (que se obtiene al comparar a dicha unidad con la DMU 469), mientras que  $r_e^{FDH^*} = 0,91560$  (que se ha obtenido utilizando como referente a la DMU 190). Lo mismo sucede con otras muchas unidades tales como la DMU 28, la DMU 50, la DMU 56, etc. En nuestra opinión, en tales casos uno debería al menos dudar de que la medida  $R_e^{FDH^*}$  esté proporcionando evaluaciones razonables de la eficiencia de dichas unidades. En cualquier caso, como ya hemos comentado, no existe ninguna razón objetiva para decantarse por el uso de una u otra medida. Si acaso, el hecho de que  $r_e^{FDH^*}$  resulte de la comparación con el referente “más próximo” sobre la frontera y, por tanto, dicho referente presente un mayor grado de similitud con la unidad que se evalúa, podría representar una razón para decidimos por el uso de esta medida y, en general, por aquellas que responden de alguna manera

al criterio de “mínima distancia” a la frontera.  $\square$

En tecnologías DEA, la discusión anterior no suele plantearse debido a la imposibilidad práctica de elegir entre los dos criterios mencionados para determinar la proyección sobre la frontera eficiente. En el uso de los modelos de tipo aditivo se asume tradicionalmente la maximización de las holguras (o la de ciertas combinaciones de éstas), quizás porque, como ya hemos comentado, la minimización de dichas holguras bajo la condición de alcanzar la frontera eficiente traería consigo muchas dificultades. Sin embargo, las graves discrepancias que hemos observado en el ejemplo anterior entre las medidas  $R_e^{FDH*}$  y  $r_e^{FDH*}$  sugieren la posibilidad de que éstas también se presenten entre los valores que corresponderían a una tecnología DEA, esto es, entre  $R_e^{DEA*}$  y  $r_e^{DEA*}$  <sup>10</sup>. En el trabajo de Pastor y Borrás [76] se obtienen resultados que, en cierto sentido, ilustran este hecho. En nuestra opinión, tales circunstancias deberían hacernos reflexionar sobre la necesidad de justificar el uso de uno u otro tipo de medidas, puesto que los valores de cada una de ellas podrían conducirnos a conclusiones muy dispares sobre la eficiencia de las unidades que se evalúan.

---

<sup>10</sup>Por  $r_e^{DEA*}$  denotamos al máximo valor de la función objetivo de (3.7) que se obtendría al comparar a la unidad que se evalúa con todos los puntos de la frontera eficiente que la dominan.





# Conclusiones

El hecho de que las medidas radiales no consideren la ineficiencia no radial recogida en las holguras representa una seria debilidad de éstas en cuanto a su uso para la evaluación de la eficiencia. Las medidas de eficiencia generalizadas (GEMs) y, en especial, aquellas que satisfacen ciertas propiedades deseables, han supuesto un considerable avance en el área de la medición de la eficiencia, entre otras razones porque han dado solución a algunos de los inconvenientes de las medidas radiales. No obstante, en nuestra opinión queda aún un largo camino por recorrer en la búsqueda de mejores medidas de eficiencia. En particular, gran parte de nuestros esfuerzos futuros habrán de dirigirse a resolver el problema de la determinación del punto de la frontera de un conjunto de referencia de tipo DEA “más próximo” a uno dado, lo que representaría un primer paso crucial para el desarrollo de medidas de eficiencia más sensibles.

Se pueden encontrar en la literatura algunos intentos de abordar este problema. Coelli [33] destaca dos importantes inconvenientes de la segunda etapa de la resolución de los modelos radiales (lo que hace extensible dicha discusión a los modelos de tipo aditivo): primero, se maximiza la suma de las holguras en lugar de que ésta sea minimizada y, por consiguiente, este método no identificará al punto eficiente “más próximo” a uno dado sino al “más lejano”; y segundo, dicho punto no será invariante a las unidades de medida. Tratando de solucionar estos inconvenientes y, en especial, de dar una respuesta a la necesidad de encontrar puntos proyección que

sean “representativos”, este autor propone un algoritmo multietápico que, tras una secuencia de movimientos radiales, intenta determinar un punto sobre la frontera cuyos “mixes” de inputs y de outputs guarden la mayor similitud posible con los originales. Además, el punto proyectado será invariante a las unidades de medida utilizadas. Hemos de destacar que dicho algoritmo no necesariamente proporciona el punto proyección “más próximo” en el sentido de que éste minimice la suma de las holguras una vez que se ha realizado la contracción radial en la primera etapa. Es más, Coelli afirma que un método que fuese capaz de conseguir esto no necesariamente proporcionará referentes “representativos”. Teniendo en cuenta además que el punto proyección no sería invariante a las unidades de medida, este autor acaba concluyendo que *“we hence would not recommend that too much effort be put into devising an algorithm of this type”*.

Para el caso de la mínima distancia  $L_1$  a la frontera eficiente Briec [20] ha aportado una solución parcial probando que la mínima distancia a la frontera débilmente eficiente se obtiene comparando las máximas reducciones (o aumentos) a lo largo de cada uno de los ejes asociados a las variables. Basándose en este resultado, Pastor y Borrás [76] han diseñado un algoritmo que proporciona “buenas” soluciones al problema que nos ocupa.

Un enfoque diferente de este problema puede encontrarse en los trabajos de Pille y Paradi [80] y Frei y Harker [53]. En éstos encontramos sendos algoritmos para la identificación de todas las facetas que componen la frontera eficiente. El método de Frei y Harker asume que todas las facetas que componen la frontera pueden determinarse a partir de todos los hiperplanos que se generan a partir de la resolución de un modelo DEA. Puesto que esto no es cierto en general, el mencionado método no siempre conduce a un resultado óptimo. Esto es puesto de manifiesto en el trabajo de Pille y Paradi, cuyo algoritmo se basa en la construcción de todas facetas mediante la identificación de todos los vértices que forman cada una de ellas. En

ambos casos, los métodos propuestos requieren un enorme esfuerzo computacional.

La disponibilidad de una representación de la frontera eficiente constituiría un paso previo crucial para la obtención de la proyección de una unidad ineficiente en el punto más próximo de la frontera eficiente (nuevamente en el sentido estricto de mínima distancia, ahora en términos de la distancia  $L_2$ )<sup>11</sup>. A partir de ahí, el siguiente paso sería la obtención de medidas de eficiencia sensibles que utilicen dichas proyecciones como los referentes sobre la frontera eficiente.



---

<sup>11</sup>Esto conllevaría la resolución de ciertos problemas de programación cuadrática, si bien el método sería fácilmente extensible a distancias de tipo  $L_1$ .



## Parte II

# Detección de Observaciones Influyentes en DEA



## Capítulo 4

# El Análisis de Influencia en Fronteras de Producción





## 4.1. El análisis de influencia: Consideraciones generales

En general, en un estudio de influencia se investiga la estabilidad de los resultados de un determinado análisis cuando se modifica la formulación del problema. La idea es la siguiente: se introducen pequeñas perturbaciones en dicha formulación y se observa entonces cómo éstas afectan a los resultados del análisis. Hay tres factores importantes a los que debe atenderse cuando se diseña una técnica para el análisis de influencia: la elección de los elementos del problema que se van a modificar, el aspecto del análisis que se desea controlar y la forma en que se van a medir los efectos de las perturbaciones introducidas. Las posibles respuestas a estas cuestiones independientes pueden conducir a una amplia variedad de técnicas de valoración de la influencia. Por ejemplo, los métodos que resulten de una modificación de los datos, como podría ser la eliminación de casos individuales, pueden ser completamente diferentes de aquellos que tienen por objeto estudiar la estabilidad de los resultados cuando se alteran algunas de las hipótesis de los modelos utilizados tales como la normalidad de los errores.

## 4.2. Observaciones influyentes

En particular, un criterio que se usa frecuentemente en la práctica a la hora de diseñar métodos para el análisis de influencia es aquel en el que el problema original se modifica por medio de la eliminación de datos, bien de uno en uno o por grupos. Las técnicas que se han desarrollado a partir de este planteamiento gozan de gran aceptación, y han sido aplicadas en muchos problemas además de en los ya clásicos contextos de la regresión por mínimos cuadrados. El propósito de estas técnicas es pues la detección de *observaciones influyentes*, esto es, la identificación de aquellos casos cuya eliminación de la muestra trae consigo cambios sustanciales en los resultados del análisis.

Cook y Weisberg [38] puntualizan que las técnicas de detección de observaciones influyentes tienen como único objeto la identificación de los casos influyentes, y no especificar qué hacer con éstos una vez que hayan sido encontrados. En general, no será posible dar recomendaciones globales acerca de qué hacer con las observaciones influyentes, ya que éstas necesariamente dependerán del contexto. Simplemente pueden darse algunas directrices de actuación generales. Si los casos influyentes corresponden a errores de medida graves o errores de transcripción, entonces dichos casos deberían ser eliminados o, si es posible, corregidos. Cook y Weisberg advierten, sin embargo, que el propósito de estas técnicas no es proporcionar reglas para rechazar datos, ya que los casos influyentes no son necesariamente indeseables. De hecho, éstos pueden proporcionar a menudo información más importante que la mayoría de los casos restantes.

Conviene en este punto hacer una distinción entre las nociones de *observación influyente* y la de *outlier*. Hawkins [64] propone la siguiente definición intuitiva de outlier: “*an observation which deviates so much from other observations as to arouse suspicions that it was generated by a different mechanism*”. Otra definición en esta línea es la debida a Gunst y Mason [63]: observaciones tales que “*do not fit in with the pattern of the remaining data points and are not at all typical of the rest of the data*”. Así, en una muestra que contenga outliers se observarán grandes discrepancias entre éstos y las restantes observaciones.

La detección de outliers es también de gran interés, dado que ésta puede conducir al descubrimiento de fenómenos que podrían pasar desapercibidos si un análisis de esta naturaleza no se llevase a cabo. En concreto, los outliers pueden indicar condiciones bajo las que un determinado proceso funciona de forma diferente, posiblemente mejor o tal vez peor. Puede ocurrir incluso que del análisis de los outliers se obtengan conclusiones de mayor relevancia que las que pueden derivarse del estudio del grueso de los datos. En cualquier caso, y pese a la importancia de los outliers, hemos de

matizar que este concepto no debe confundirse con el de observación influyente tal como ha sido definido en este capítulo, si bien éstos están muy relacionados puesto que una misma observación puede ser considerada simultáneamente como outlier y como influyente.

### 4.3. Análisis de influencia en modelos determinísticos de fronteras de producción

El análisis de eficiencia con modelos determinísticos de fronteras de producción es muy sensible a la presencia de outliers en la muestra. Esto es una consecuencia del hecho de que la estimación de la frontera queda determinada por las observaciones muestrales que son puntos extremos. En particular, aquellas observaciones contaminadas por errores en los datos que resulten ser puntos extremos sobre la frontera eficiente podrían conducir a valores engañosos de la medida de eficiencia para algunas de las restantes unidades que componen la muestra. Para ser más concretos, la eficiencia de algunas unidades podría resultar subestimada como consecuencia de la presencia de observaciones (influyentes) en la muestra, de ahí la importancia de su detección<sup>1</sup>.

En esta segunda parte de la memoria, nos ocupamos del análisis de influencia en modelos determinísticos de fronteras de producción. Nos centraremos en la detección de observaciones influyentes y, en particular, en la identificación de aquellos casos cuya presencia en la muestra afecte considerablemente a la evaluación de la eficiencia de otras unidades cuando dicha evaluación se realiza con un modelo DEA. En cuanto

---

<sup>1</sup>Simar [88] enfatiza la necesidad de detectar y eliminar outliers cuando se usan modelos determinísticos. En el caso de que dichas observaciones no puedan ser identificadas, este autor recomienda el uso de modelos estocásticos con objeto de que la frontera estimada sea más robusta.

a la forma en que vamos a medir los efectos de la eliminación de casos de la muestra, las técnicas que desarrollaremos se basarán en unas nuevas medidas de la influencia de una unidad situada sobre la frontera en la evaluación de la eficiencia de cada una de las restantes unidades de la muestra. Para cada unidad potencialmente influyente (todas las unidades eficientes extremas<sup>2</sup>), la información proporcionada por estas medidas se sintetizará utilizando métodos descriptivos y gráficos.

El diseño de estas medidas de influencia está estrechamente ligado a la forma en que se mide la eficiencia. Así, en el capítulo 5 proponemos un método de detección de observaciones influyentes para el caso en que la eficiencia se evalúe con modelos DEA de tipo radial, mientras que en el capítulo 6 nos ocuparemos del caso de los modelos DEA no radiales. La mayoría de las técnicas de detección de observaciones influyentes en DEA se han desarrollado especialmente para modelos de tipo radial. No obstante, a continuación podremos comprobar que algunos métodos generales, tal como el propuesto en Wilson [105], son aplicables a cualquier tipo de modelo, en particular a los no radiales. Asimismo, veremos que la idea que siguen algunas de las técnicas utilizadas con modelos radiales podría adaptarse fácilmente al caso de evaluar la eficiencia con modelos DEA de tipo no radial.

La aplicación de las técnicas que vamos a desarrollar permitirá, en una primera fase, la identificación de aquellas observaciones que afectan considerablemente a la medida de eficiencia de las restantes unidades. Además, éstas podrán ordenarse atendiendo a la relevancia de su influencia, que se determinará de acuerdo con los valores de la medida de influencia que se hayan registrado para cada una de ellas. Posteriormente, el analista tendrá que comprobar si las unidades que se han detectado como influyentes están contaminadas por errores en los datos o no, y decidir,

---

<sup>2</sup>Se dice que una unidad es eficiente extrema si es eficiente y punto extremo, esto es, que no es combinación lineal convexa de otros puntos de la muestra.

en consecuencia, qué hacer con ellas. Uno de los principales intereses del uso de este tipo de técnicas es que proporcionan reglas sencillas de clasificación y ordenación de observaciones para una posterior investigación. En la práctica, esto puede suponer un ahorro considerable de recursos, ya que el chequeo de datos es en ocasiones muy costoso, especialmente cuando se trata con muestras grandes.

#### 4.3.1. Métodos para la detección de observaciones influyentes en modelos de fronteras de producción

La literatura sobre métodos de detección de observaciones influyentes en el contexto de los modelos de fronteras de producción es escasa, tanto cuando la estimación de dichas fronteras se plantea con modelos paramétricos como con no paramétricos.

##### 4.3.1.1. Caso paramétrico

Con objeto de conseguir una frontera robusta, Timmer [96] y Wilson y Jadow [104] proponen la eliminación sucesiva de observaciones eficientes hasta que se estabilicen las estimaciones de los parámetros de una frontera de producción de tipo Cobb-Douglas,  $y_j = \prod_{i=0}^m x_{ij}^{\alpha_i} \varepsilon_j$ , que se ajusta utilizando métodos de programación lineal.

Seaver y Triantis [84] estiman fronteras de producción paramétricas por mínimos cuadrados corregidos y realizan un estudio de detección de outliers y observaciones influyentes utilizando métodos habituales en los modelos de regresión lineal basados en los residuos tales como la distancia de Cook, el estadístico de influencia o el estadístico AP. Además, estos autores sugieren que estas técnicas pueden aplicarse también a los modelos no paramétricos de tipo DEA. Sin embargo, Wilson ([105] y

[106]) afirma que, con excepción del estadístico AP, el resto de métodos no serían aplicables a los modelos DEA puesto que éstos utilizan técnicas de programación lineal para la estimación de las fronteras y, por lo tanto, no se dispondrá de residuos de mínimos cuadrados ordinarios.

#### 4.3.1.2. Caso no paramétrico: modelos DEA

Las técnicas de análisis de influencia que se aplican en la estimación de fronteras de producción no paramétricas de tipo DEA son de muy distinta naturaleza a las utilizadas en los planteamientos paramétricos. Fundamentalmente, esto se debe a las dos siguientes razones: primera, los modelos DEA son no paramétricos y, por tanto, no será posible desarrollar métodos de diagnóstico basados en los parámetros estimados; y segunda que, como acabamos de comentar, los modelos DEA, y en general los métodos de estimación que utilizan la programación lineal, no proporcionan residuos de mínimos cuadrados ordinarios, por lo que los métodos que los utilizan no serán aplicables en estos casos.

Sin embargo, es posible explotar las particularidades de la estimación no paramétrica para el desarrollo de nuevos métodos de diagnóstico. En particular, una de las principales ventajas del uso de fronteras no paramétricas es que permiten abordar el problema de la detección de observaciones influyentes en situaciones en las que se considera más de un output. Wilson ha sido uno de los autores que más ha destacado por sus contribuciones en temas relacionados con la detección de outliers y observaciones influyentes. En Wilson [105] se propone una generalización al caso de múltiples outputs del estadístico AP (Andrews y Pregibon [8]) destinada a la detección de este tipo de observaciones. La expresión de dicho estadístico es la siguiente

$$AP = \frac{|X_{(j)}^{*'} X_{(j)}^*|}{|X^{*'} X^*|} \quad (4.1)$$

donde  $X^*$  es una matriz  $n \times (1 + m + s)$  que contiene las observaciones de los  $m$  inputs y de los  $s$  outputs para las  $n$  unidades de la muestra (además de una columna inicial de unos) y  $X_{(j)}^*$  es la matriz resultante de eliminar de  $X^*$  la fila correspondiente a la  $DMU_j$ . De este modo,  $AP^{-1/2} - 1$  será el cambio proporcional del volumen del elipsoide generado por  $X^{*'}X^*$  que se produce cuando se elimina el caso correspondiente a la  $DMU_j$ . Por tanto, valores bajos de AP indicarán que dicha unidad es un valor atípico.

Aunque Wilson propone esta técnica pensando en su utilización en modelos DEA, su uso es claramente extensible a modelos paramétricos, tanto estocásticos como no estocásticos. En la propia definición de AP puede apreciarse que dicho estadístico no está relacionado en ningún sentido con la medición de la eficiencia, sino que únicamente atiende al volumen del elipsoide generado por las observaciones muestrales. Por esta misma razón, puede considerarse que el uso de AP en este contexto está fundamentalmente dirigido a la detección de outliers (que, por supuesto, pudieran ser también observaciones influyentes). Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3.1 (continuación).** El valor del estadístico AP para cada una de las unidades que compone la muestra es el siguiente:

X	2	3	3	4	5	5	12
Y	2	2	4	2	4	6	3
AP	0.64	0.70	0.75	0.73	0.82	0.30	0.05

En particular, para la última unidad, un valor observado tan pequeño de AP indica un cambio sustancial en el volumen del elipsoide. Sin embargo, esta unidad no puede considerarse como influyente, dado que es claramente ineficiente, sino como un outlier puesto que tiene un valor anormalmente alto del input para el valor registrado del output.  $\square$

Con relación a esta técnica de detección, es importante mencionar finalmente



que, como el propio autor reconoce, un análisis basado en el estadístico AP puede convertirse en una tarea computacionalmente inabordable a medida que el tamaño muestral y la dimensión del espacio de inputs y de outputs crece, como de hecho ocurre con dicho estadístico en su uso original.

Entre las técnicas desarrolladas específicamente en el contexto de los modelos DEA, mencionamos en primer lugar a Dusansky y Wilson ([42] y [43]) quienes, en un intento de identificar las observaciones influyentes, comparan los scores de eficiencia de la muestra completa con los que se obtienen cuando la unidad cuya influencia está siendo estudiada es eliminada de la muestra. Para ello, utilizan los siguientes descriptivos: la diferencia de medias, la suma de diferencias absolutas y la suma de diferencias al cuadrado.

Una idea similar es la que subyace tras el método propuesto en Wilson [106], si bien este autor hace especial hincapié en la idoneidad del uso del score de eficiencia modificado  $\lambda^*$  introducido por Andersen y Petersen [7] (llamado a veces score de supereficiencia) para propósitos relacionados con el análisis de influencia. Para una  $DMU_0$  cualquiera, dicho score es el valor óptimo del siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \lambda_0 \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \lambda_0 x_{i0} \geq \sum_{j \neq 0} z_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j \neq 0} z_j y_{rj} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j \neq 0} z_j = 1 \\
 & z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Claramente, la diferencia entre (4.2) y un modelo DEA radial habitual es que cuando se evalúa la  $DMU_0$  dicha unidad es eliminada del conjunto de referencia. Como consecuencia, el score de eficiencia modificado  $\lambda_0^*$  no está acotado, a diferencia

del score clásico<sup>3</sup>. En concreto, las DMUs cuyo score de eficiencia clásico sea menor que la unidad obtendrán el mismo valor con el score de eficiencia modificado. Sin embargo, las unidades con score de eficiencia clásico igual a uno tendrán un valor de  $\lambda_0^*$  mayor o igual que la unidad. En este último caso,  $\lambda_0^*$  se interpreta como la máxima cantidad en la que el vector de inputs de la  $DMU_0$  puede ser proporcionalmente incrementado sin que su proyección llegue a ser dominada por una combinación lineal de las restantes DMUs en la muestra.

Según Wilson, dicho score permite incorporar a la información sobre cambios en los scores de eficiencia habituales otros dos tipos de información relativa a: 1) cuánto soporte tiene la frontera eficiente en el entorno de la unidad que está siendo clasificada, y 2) en qué medida la forma local de la frontera para las restantes unidades está afectada por la presencia de esta unidad.

**Ejemplo 4.1.** Consideremos la siguiente situación sencilla, propuesta en Wilson [106], en la que 7 observaciones son descritas en términos de dos inputs y un output constante. Los valores de dichas variables así como los scores de eficiencia modificados y clásicos están recogidos en la tabla 4.1.

$DMU$	$X_1$	$X_2$	$Y$	$\lambda_k^*$	$\theta_k^*$
A	0.5	8	1	4.00000	1
B	2	6	1	0.85185	0.85185
C	3	2	1	1.60000	1
D	4	6	1	0.58974	0.58974
E	5	3	1	0.65000	0.65000
F	7	4	1	0.48148	0.48148
G	8	1	1	2.00000	1

Cuadro 4.1: Scores de eficiencia modificados y clásicos.

<sup>3</sup>Es importante señalar que para algunas unidades estos problemas pueden ser no factibles.

En la situación descrita por este ejemplo se tiene que, en particular,  $\lambda_C^* = 1,6$ , lo que indica que los inputs de esta unidad tendrían que ser incrementados en un 60% para alcanzar la frontera que determinan el resto de unidades en la muestra (ver figura 4.1). Según el propio autor, esta es una cantidad relativamente grande, e indica que hay poco soporte para la frontera en el entorno de C. Para las DMUs A y G,  $\lambda^*$  es incluso mayor, lo que sugiere de nuevo que hay poco soporte para la frontera en el entorno de estas unidades. Los valores de  $\lambda^*$  para estas tres DMUs indican que estas unidades son atípicas (esto es, outliers). Así, uno debería ser escéptico y manifestar cierta reserva a la hora de considerar como eficientes a las unidades que han sido evaluadas como tales. Sin embargo, esta no es una conclusión sorprendente ya que el tamaño muestral es muy pequeño.

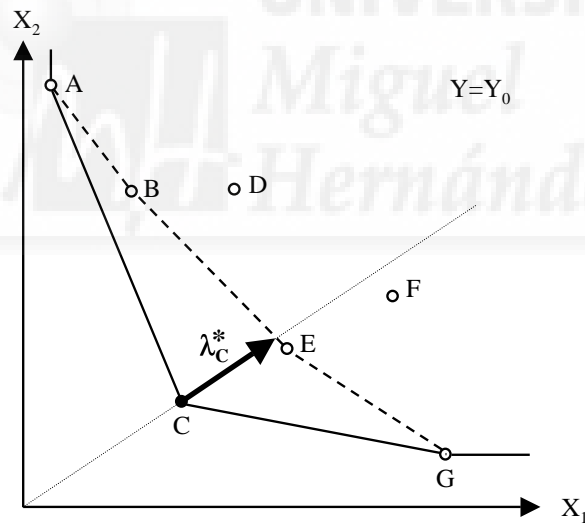


Figura 4.1: Score de eficiencia modificado

De acuerdo con este último método propuesto por Wilson, para medir cuánto afecta la presencia de la DMU C en la muestra a la medida de eficiencia de las DMUs B, D, E, F y G, se resuelve de nuevo (4.2) cuando DMU C es eliminada del conjunto de referencia, obteniéndose en cada caso  $\lambda_{kC}^*$ , y se compara este valor con  $\lambda_k^*$ , el obtenido cuando C está en la muestra. Un razonamiento similar puede hacerse para las DMUs A y G. En la tabla 4.2 se recogen los valores de  $\lambda_k^*$  y de

$\lambda_{kj}^*$ ,  $k \neq j$ , para las DMUs A, C y G. Estos se utilizarán posteriormente para definir unos indicadores que proporcionarán cierta información relativa a la influencia de estas tres unidades. De la información contenida en dicha tabla podemos concluir que la DMU A afecta a la evaluación de la eficiencia de las unidades B y D (ya que  $\lambda_B^* \neq \lambda_{BA}^*$  y  $\lambda_D^* \neq \lambda_{DA}^*$ ); que la DMU C afecta a los scores de eficiencia de todas las unidades excepto la A y que, finalmente, la DMU G afecta a las medidas de eficiencia de las unidades E y F.

DMU	$\lambda_k^*$	$\lambda_{kA}^*$	$\lambda_{kC}^*$	$\lambda_{kG}^*$
A	4.00000	-	4.00000	4.00000
B	0.85185	1.50000	1.04054	0.85185
C	1.60000	1.60000	-	1.60000
D	0.58974	0.63637	0.80000	0.58974
E	0.65000	0.65000	1.06977	0.66667
F	0.48148	0.48148	0.73077	0.50000
G	2.00000	2.00000	3.00000	-

Cuadro 4.2: Valores de  $\lambda_k^*$  y de  $\lambda_{kj}^*$  para las DMUs A, C y G.

Wilson define varios descriptores con el propósito de resumir la información recogida en la tabla 4.2. En particular, introduce las siguientes medidas asociadas con una  $DMU_j$  cuya influencia se desea estudiar:

1.  $n_j^*$ , que es  $n_j$  más el número de casos donde  $\lambda_k^*$  está definido y  $\lambda_{kj}^*$  no, siendo  $n_j$  el número de casos en los que  $\lambda_{kj}^*$  y  $\lambda_k^*$  están definidos y  $\lambda_{kj}^* \neq \lambda_k^*$ , y

2.  $\bar{\delta}_j$ , definida como

$$\bar{\delta}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k \in C} (\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*) \quad (4.3)$$

donde  $C = \{k/k = 1, \dots, n, k \neq j, \lambda_{kj}^* \text{ y } \lambda_k^* \text{ definidos}\}$ .

En la tabla 4.3 presentamos los resultados del cálculo de estas medidas para los datos del ejemplo. Los valores de  $n_j^*$  indican que cada una de las observaciones A y

G influyen en la medida de eficiencia de otras dos unidades, mientras que la DMU C influye en otras 5 unidades. El cambio medio de eficiencia (calculado sobre el total de unidades que experimentan algún cambio),  $\bar{\delta}_j$ , para las DMUs A y C es bastante grande en relación a la cantidad media de ineficiencia que normalmente aparece en las aplicaciones empíricas. Sin embargo, la DMU C afecta a la medida de eficiencia de más DMUs que lo que lo hace la DMU A. Por tanto, la cantidad  $n_j^* \times \bar{\delta}_j$  proporciona una medida de la importancia relativa de los efectos de A y C. Si el chequeo de datos fuese costoso y los recursos escasos (lo que suele ser habitual), el analista preferiría examinar primero si la observación C ha sido medida correctamente; en caso de que no fuese así, investigaría si ésta puede ser corregida y, en caso de que esto no fuera posible, eliminaría dicha unidad, ya que de otro modo su presencia en la muestra estaría distorsionando la evaluación de eficiencia de otras DMUs<sup>4</sup>.

<i>DMU</i>	$n_j^*$	$\bar{\delta}_j$	$n_j^* \times \bar{\delta}_j$
A	2	0.34739	0.69478
C	5	0.41360	2.06800
G	2	0.01759	0.03518

Cuadro 4.3: Medidas de influencia de Wilson para las DMUs A, C y G.

□

Como se ha mencionado anteriormente, Wilson afirma que el uso del score de eficiencia modificado para estudiar la influencia de observaciones en la muestra tiene la ventaja de incorporar otra información de interés a la relativa a cambios en el score de eficiencia clásico. Sin embargo, un serio inconveniente derivado de su uso

---

<sup>4</sup>Es importante señalar que en el cálculo de  $\bar{\delta}_j$  no se consideran a las  $DMU'_k$ s para las que no se producen cambios entre  $\lambda_{kj}^*$  y  $\lambda_k^*$ , mientras que en  $n_j^* \times \bar{\delta}_j$  se asigna implícitamente el cambio promedio a las  $DMU'_k$ s para las que no es posible evaluar dicho cambio puesto que  $\lambda_{kj}^*$  no está definido.

es que el conjunto de restricciones en (4.2) no siempre es factible, de manera que el valor óptimo  $\lambda^*$  no existirá en tales casos. Por tanto, no podrá garantizarse la obtención del valor  $\lambda_j^*$  para todas las  $DMU_j$ 's cuya influencia se desee investigar. Esto puede observarse en el análisis de influencia que Wilson realiza sobre los datos relativos a una muestra de plantas generadoras de electricidad que aparecieron en Färe, Grosskopf y Pasurka [48]. En dicho análisis, el score de eficiencia modificado de 18 unidades, de las 83 que componían la muestra, no estaba definido.





## Capítulo 5

# Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA Radiales





## 5.1. Introducción

En este capítulo abordamos el problema de la detección de observaciones influyentes en un análisis de eficiencia realizado con un modelo DEA de tipo radial. La técnica que desarrollaremos se basará en una nueva medida de la influencia de una determinada  $DMU_j$  en la evaluación de la eficiencia de cualquier otra unidad  $DMU_0$  de las que componen la muestra. Este nuevo método apareció publicado en 1999 en Pastor, Ruiz y Sirvent [78]<sup>1</sup>.

El problema de la medición de la influencia de la  $DMU_j$  en la eficiencia de la  $DMU_0$  se planteará en los siguientes términos: consideraremos una muestra de  $n$  observaciones descritas en términos de  $m$  inputs y  $s$  outputs cuya eficiencia se evalúa con un modelo BCC de orientación input. No obstante, el desarrollo del método que vamos a proponer sería completamente análogo si se usase cualquier modelo DEA radial (CCR o BCC) en cualquiera de sus dos orientaciones. En concreto, el score de eficiencia de una  $DMU_0$  cualquiera se obtendrá como el valor óptimo del siguiente modelo DEA, que llamaremos *modelo total*

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \theta_0^t \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \theta_0^t x_{i0} \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{hk} \geq y_{h0} \quad h = 1, \dots, s \\
 & \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \\
 & \alpha_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

---

<sup>1</sup>En este trabajo se propone también un planteamiento estadístico del problema, si bien aquí no entraremos en los aspectos del análisis estadístico en DEA.

Se tratará pues de cuantificar de alguna manera la influencia que la  $DMU_j$  ha tenido en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ <sup>2</sup>. Para ello, otro elemento importante en la formulación de nuestro problema será el siguiente modelo, llamado *modelo reducido*, obtenido a partir de (5.1) eliminando la  $DMU_j$  de la muestra

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \theta_0^r \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \theta_0^r x_{i0} \geq \sum_{k \neq j} \gamma_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{k \neq j} \gamma_k y_{hk} \geq y_{h0} \quad h = 1, \dots, s \\
 & \sum_{k \neq j}^n \gamma_k = 1 \\
 & \gamma_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n, k \neq j
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

El problema de la medición de la influencia también podría plantearse de forma natural usando las formulaciones duales de (5.1) y (5.2), ya que las restricciones en estos problemas están directamente asociadas con las unidades y, por consiguiente, la eliminación de una de ellas se correspondería con la consiguiente eliminación de su restricción asociada. No obstante, la presentación de nuestro método se hará en función de las formulaciones primales, ya que en ese caso el planteamiento y, sobre todo, la interpretación resultan más sencillas.

---

<sup>2</sup>Dado que nuestro objetivo será el análisis de influencia en las medidas de eficiencia obtenidas a partir de los modelos DEA, hemos considerado el modelo BCC en su versión que no incluye la suma de las variables de holgura en la función objetivo.

## 5.2. Una medida radial del “desplazamiento” entre fronteras

Es obvio que si no se considera a la  $DMU_j$  en la muestra, entonces la frontera eficiente del modelo total se desplazará hasta la frontera eficiente asociada con el modelo reducido. Para ser más precisos, si la  $DMU_j$  es eficiente extrema según (5.1) entonces se producirá un desplazamiento real entre ambas fronteras. La idea básica del método que proponemos consiste en medir de una forma específica dicho “desplazamiento”. En concreto, la medida de la influencia que la  $DMU_j$  ha tenido en la eficiencia de la  $DMU_0$  se realizará sobre el rayo determinado por el vector de inputs de esta última. Como, por otra parte, la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$  se obtiene midiendo la contracción proporcional de sus inputs (esto es, a lo largo del mencionado rayo) hasta alcanzar la frontera, la medida del “desplazamiento” que proponemos proporcionará a su vez una medida de la influencia de la  $DMU_j$  en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ . Este proceso se repetirá para cada unidad de la muestra (excepto, obviamente, para la  $DMU_j$ ), obteniéndose un conjunto de  $n - 1$  valores que nos informarán sobre el impacto que la presencia de la  $DMU_j$  ha tenido en la evaluación de eficiencia realizada con (5.1).

En concreto, la medida de la influencia de una  $DMU_j$  eficiente en la eficiencia de cualquier otra  $DMU_0$ , que denotaremos por  $\psi_{0j}^*$ , se obtendrá siguiendo el procedimiento en dos etapas que describimos a continuación:

Etapa 1) Proyectamos todas las unidades de la muestra reducida en su propia frontera (isocuanta). Para ello, reduciremos proporcionalmente los vectores de inputs de cada  $DMU_k$  por el correspondiente factor  $\theta_k^{r*}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , que se ha obtenido resolviendo (5.2) para cada una de estas unidades. El resultado es un nuevo conjunto de  $n - 1$  unidades “virtuales” que son eficientes (en el sentido Farrell) en relación a la muestra reducida.

Entonces,

Etapa 2) Incorporamos la  $DMU_j$  a la muestra y evaluamos la eficiencia de la unidad virtual asociada con la  $DMU_0$  de la forma habitual. Sea  $\psi_{0j}^*$  el score de eficiencia resultante. Así,  $\psi_{0j}^* = 1$  significa que, una vez eliminada la ineficiencia relativa a la muestra reducida (si la hubiere),  $DMU_0$  pasa a ser eficiente. Por tanto, como toda la ineficiencia detectada originalmente puede ser explicada por la muestra reducida, podemos concluir que la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra no tiene ninguna influencia en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ . En caso contrario, si  $\psi_{0j}^* < 1$ , puede afirmarse que  $DMU_j$  afecta a la eficiencia de la  $DMU_0$ , ya que se ha detectado que la unidad virtual asociada con dicha unidad es ineficiente y esto sólo puede explicarse por la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. Además,  $\psi_{0j}^*$  será una medida de la magnitud de esta influencia. Concretamente, como  $\psi_{0j}^*$  puede considerarse un score de eficiencia convencional, esta medida podría interpretarse como el porcentaje de inputs que la  $DMU_0$  debería usar para operar eficientemente una vez que ésta es eficiente en relación a la muestra reducida.

Tras repetir este proceso para cada una de las unidades distintas de la  $DMU_j$ , se dispondrá de los  $n - 1$  valores  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , que constituirán una muestra de datos relativos a la influencia de la  $DMU_j$  obtenida a partir de la información suministrada por las observaciones.

Para ilustrar gráficamente este procedimiento podemos servirnos de la figura 5.1, que corresponde nuevamente a los datos del ejemplo 4.1. En ella reflejamos la situación asociada con el análisis de la influencia de la DMU C. La frontera total se representa por una línea continua, mientras que la reducida se describe por una línea discontinua. Para cada una de las unidades que componen la muestra reducida (todas excepto la DMU C) se obtendrá una medida del “desplazamiento” entre ambas

fronteras siguiendo cada uno de los rayos definidos por los correspondientes vectores de inputs. Estas medidas se denotan por  $\psi_{kC}^*$ ,  $k \neq C$ . En particular,  $\psi_{DC}^* = 0,74$ , que puede considerarse como una medida de la “distancia radial” entre  $D'$  y  $D$ , es a su vez una medida del desplazamiento de la frontera total a lo largo del rayo definido por el vector de inputs de la unidad  $D$ . Y lo que es más, ésta puede interpretarse diciendo que la DMU  $D$  debería reducir su uso de inputs al 74 % (aproximadamente) una vez que es eficiente en relación a todas las unidades excepto la DMU  $C$  (esto último se lograría si la DMU  $D$  redujese su nivel original de inputs al 80 % ( $\theta_D^{rC*} = 0,8$ )).

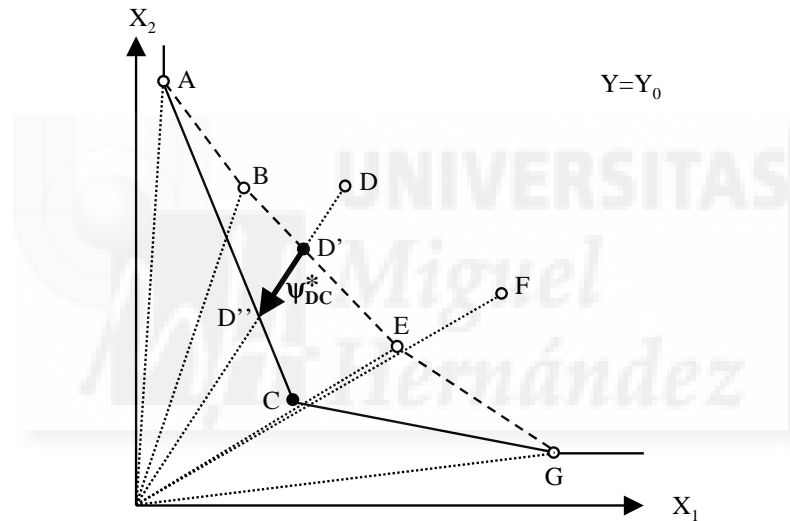


Figura 5.1: Medida  $\psi_{0j}^*$

Finalmente, debemos mencionar que la idea del procedimiento que hemos propuesto guarda cierta similitud con la de las técnicas utilizadas por Brockett y Golany [21] y Grosskopf y Valdmanis [62] para comparar la eficiencia de dos grupos de unidades (por ejemplo, hospitales públicos y privados). En ambos casos, para comparar la eficiencia entre grupos, primero ésta se corrige por la ineficiencia detectada dentro de cada grupo, lo que realmente supone la proyección previa de cada unidad en la frontera que determinan todas las unidades del grupo al que pertenece dicha unidad.

### 5.3. Un modelo para valorar la influencia de la $DMU_j$ en la eficiencia de la $DMU_0$

Siguiendo el procedimiento en dos pasos descrito anteriormente, es obvio que  $\psi_{0j}^*$  se obtendrá como el valor óptimo de la siguiente versión modificada del modelo total utilizado originalmente en la evaluación de eficiencia:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \psi_{0j} \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \psi_{0j}(\theta_0^{r*} x_{i0}) \geq \sum_{k \neq j} \lambda_k (\theta_k^{r*} x_{ik}) + \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{hk} \geq y_{h0} \quad h = 1, \dots, s \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
 & \lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como se apuntó anteriormente,  $\psi_{0j}^*$  podrá ser interpretado como un score de eficiencia convencional, ya que (5.3) puede ser considerado como un modelo DEA. En efecto, puede decirse que si la  $DMU_0$  fuera eficiente con respecto a la muestra reducida, entonces debería reducir sus inputs al  $\psi_{0j}^* \times 100\%$  para lograr ser eficiente con respecto a la muestra completa. Por tanto, esta medida nos informa sobre la reducción adicional en el uso de inputs que debería hacer la  $DMU_0$  para lograr ser eficiente cuando la  $DMU_j$  es considerada en la muestra una vez que consiga ser eficiente con relación a la muestra reducida.

#### 5.3.1. Algunos resultados sobre la medida de influencia $\psi_{0j}^*$

Es obvio que para cualquier  $DMU_0$  se verificará siempre que  $\theta_0^{t*}$  es menor o igual que  $\theta_0^{r*}$  ya que ambos modelos están anidados. A continuación, establecemos

la relación exacta entre  $\theta_0^{t*}$  y  $\theta_0^{r*}$  por medio de  $\psi_{0j}^*$ . Este resultado proporcionará, a su vez, una forma sencilla de obtener la solución de (5.3) que evitará la necesidad de resolver dicho problema.

**Proposición 5.1.** *Para cada  $DMU_0$  en la muestra reducida, la medida de influencia  $\psi_{0j}^*$  satisface la siguiente relación*

$$\theta_0^{t*} = \psi_{0j}^* \theta_0^{r*} \quad (5.4)$$

**Demostración:** Sea  $(\theta_0^{t*}, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$  una solución óptima del modelo total y sea  $\theta_0^{r*}$  el valor óptimo del modelo reducido para la  $DMU_0$ . Entonces,  $\psi_{0j} := \frac{\theta_0^{t*}}{\theta_0^{r*}}$  satisface

$$\begin{aligned} \psi_{0j}(\theta_0^{r*} x_{i0}) = \theta_0^{t*} x_{i0} &\geq \sum_{k=1}^n \alpha_k^* x_{ik} \geq \sum_{k \neq j} \alpha_k^* (\theta_0^{r*} x_{ik}) + \alpha_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k^* y_{hk} &\geq y_{h0}, \quad h = 1, \dots, s \end{aligned}$$

verificándose además la restricción de convexidad. Por consiguiente,  $(\psi_{0j}, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$  es una solución factible de (5.3) para la  $DMU_0$ , y consecuentemente  $\frac{\theta_0^{t*}}{\theta_0^{r*}} \geq \psi_{0j}^*$ .

Veamos ahora que el valor óptimo de (5.3) es mayor o igual que  $\frac{\theta_0^{t*}}{\theta_0^{r*}}$ , lo que concluirá la prueba.

Sea  $(\psi_{0j}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  una solución óptima de (5.3) y  $(\theta_k^{r*}, \gamma_1^{k*}, \dots, \gamma_{j-1}^{k*}, \gamma_{j+1}^{k*}, \dots, \gamma_n^{k*})$  una solución óptima del modelo reducido (5.2) para la  $DMU_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ . Entonces, para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ ,

$$\begin{aligned} \theta_k^{r*} x_{ik} &\geq \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} x_{iv}, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} y_{hv} &\geq y_{hk}, \quad h = 1, \dots, s \\ \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} &= 1 \end{aligned}$$



Por tanto,

$$\begin{aligned}\psi_{0j}^* \theta_0^{r*} x_{i0} &\geq \sum_{k \neq j} \lambda_k^* \left( \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} x_{iv} \right) + \lambda_j^* x_{ij} = \sum_{v=1}^n \beta_v x_{iv}, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{h0} &\leq \sum_{k \neq j} \lambda_k^* \left( \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} y_{hv} \right) + \lambda_j^* y_{hj} = \sum_{v=1}^n \beta_v y_{hv}, \quad h = 1, \dots, s\end{aligned}$$

donde

$$\beta_v = \begin{cases} \sum_{k \neq j} \lambda_k^* \gamma_v^{k*} & v \neq j \\ \lambda_j^* & v = j \end{cases} \quad v = 1, \dots, n.$$

Además, como  $\sum_{k=1}^n \lambda_k^* = 1$  y  $\sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} = 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , entonces también se verificará

$$\sum_{v=1}^n \beta_v = \sum_{v \neq j} \left( \sum_{k \neq j} \lambda_k^* \gamma_v^{k*} \right) + \lambda_j^* = \sum_{k \neq j} \lambda_k^* \left( \sum_{v \neq j} \gamma_v^{k*} \right) + \lambda_j^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k^* = 1$$

De este modo,  $(\psi_{0j}^* \theta_0^{r*}, \beta_1, \dots, \beta_n)$  es una solución factible del modelo total, luego  $\psi_{0j}^* \theta_0^{r*} \geq \theta_0^{t*}$ , alcanzándose por tanto la igualdad buscada.

Obviamente, la prueba seguiría siendo válida para el modelo CCR sin más que eliminar las restricciones de convexidad. ■

Por tanto, en virtud de la proposición anterior, no será necesario resolver (5.3) para obtener el valor  $\psi_{0j}^*$  para cada  $DMU_0$  en la muestra reducida, ya que éste podrá calcularse fácilmente como el ratio entre  $\theta_0^{t*}$  y  $\theta_0^{r*}$ .

El siguiente resultado confirma que nuestra medida verifica lo que la lógica parece indicar, esto es, el hecho de que sólo las unidades que son puntos eficientes extremos pueden ser influyentes (en Charnes, Cooper y Thrall [32] se establecen resultados

para la clasificación y caracterización de los puntos eficientes):

**Proposición 5.2.** Si  $\psi_{0j}^* < 1$  para alguna  $DMU_0$  en la muestra reducida  $\Rightarrow DMU_j$  es un punto eficiente extremo de (5.1).

**Demostración:** Probaremos que si  $DMU_j$  no es un punto eficiente extremo de (5.1), entonces  $\psi_{0j}^* = 1$  para toda  $DMU_0$ .

Si  $DMU_j$  no es un punto eficiente extremo DEA de (5.1), existirán  $\phi_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , tales que

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq \sum_{k \neq j} \phi_k x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{hj} &\leq \sum_{k \neq j} \phi_k y_{hk}, \quad h = 1, \dots, s \\ \sum_{k \neq j} \phi_k &= 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, sea  $(\theta_0^{t*}, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$  una solución óptima del modelo total (5.1) para  $DMU_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \theta_0^{t*} x_{i0} &\geq \sum_{k=1}^n \alpha_k^* x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{h0} &\leq \sum_{k=1}^n \alpha_k^* y_{hk}, \quad h = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Así, si definimos  $\beta_k = \alpha_k^* + \phi_k \alpha_j^*$ ,  $k \neq j$ , entonces  $(\theta_0^{t*}, \beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)$  será una solución factible del modelo reducido (5.2) para la  $DMU_0$  ya que

$$\begin{aligned} \theta_0^{t*} x_{i0} &\geq \sum_{k=1}^n \alpha_k^* x_{ik} \geq \sum_{k \neq j} \alpha_k^* x_{ik} + \alpha_j^* \sum_{k \neq j} \phi_k x_{ik} = \sum_{k \neq j} \beta_k x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{h0} &\leq \sum_{k=1}^n \alpha_k^* y_{hk} \leq \sum_{k \neq j} \alpha_k^* y_{hk} + \alpha_j^* \sum_{k \neq j} \phi_k y_{hk} = \sum_{k \neq j} \beta_k y_{hk}, \quad h = 1, \dots, s \end{aligned}$$

y, dado que todos los modelos involucrados cumplen la restricción de convexidad,

esto es  $\sum_{k=1}^n \alpha_k^* = \sum_{k \neq j} \phi_k = 1$ , también se verificará

$$\sum_{k \neq j} \beta_k = \sum_{k \neq j} (\alpha_k^* + \phi_k \alpha_j^*) = \sum_{k \neq j} \alpha_k^* + \alpha_j^* \sum_{k \neq j} \phi_k = \sum_{k=j}^n \alpha_k^* = 1.$$

Por tanto, si  $\theta_0^{r*}$  es el valor óptimo de (5.2) para la  $DMU_0$ , entonces  $\theta_0^{r*} \leq \theta_0^{t*}$ . Por otro lado  $\theta_0^{t*} \leq \theta_0^{r*}$  dado que (5.2) está anidado en (5.1), de donde  $\theta_0^{r*} = \theta_0^{t*}$ , y se tendrá que  $\psi_{0j}^* = 1$ .

De la misma forma que en la proposición anterior, la prueba seguiría siendo válida si se usase el modelo CCR. ■

#### 5.4. Una descomposición de la ineficiencia total

La medida de influencia  $\psi_{0j}^*$  ha resultado de la aplicación de un procedimiento de dos etapas cuya idea queda reflejada en la siguiente figura

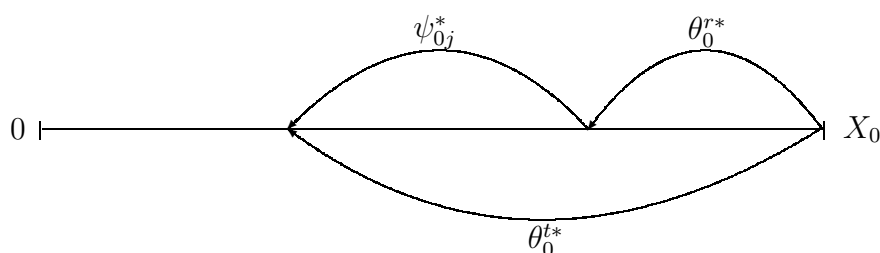


Figura 5.2: Medida de influencia  $\psi_{0j}^*$

Esta figura sugiere la siguiente descomposición de la ineficiencia total en función

de la medida de influencia  $\psi_{0j}^*$

$$1 - \theta_0^{t*} = (1 - \theta_0^{r*}) + (\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}) = (1 - \theta_0^{r*}) + \theta_0^{r*}(1 - \psi_{0j}^*) \quad (5.5)$$

En (5.5) la ineficiencia total de la  $DMU_0$  se descompone en una primera componente que está asociada con la muestra reducida,  $1 - \theta_0^{r*}$ , y en una segunda componente,  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*} = \theta_0^{r*}(1 - \psi_{0j}^*)$ , que es función de  $\psi_{0j}^*$ , y que representa una parte de dicha ineficiencia que puede explicarse por la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. Algunos métodos de detección de observaciones influyentes, como los utilizados en Dusansky y Wilson ([42] y [43]), están basados en las cantidades  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$ . En principio, estas diferencias son simplemente indicadores intuitivos de cambios en la eficiencia de la  $DMU_0$  debidos a la eliminación de la  $DMU_j$ , pero el hecho de que  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$  forme parte de la descomposición (5.5) constituye un argumento adicional para justificar su uso como una medida de influencia puesto que, en este caso, tiene una clara interpretación. En concreto, dado que  $(\theta_0^{r*} X_0, Y_0)$  es eficiente con relación a la muestra reducida,  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$  representa el porcentaje de inputs de la  $DMU_0$  que se han detectado como usados ineficientemente debido a la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. La posibilidad de disponer de una descomposición de la ineficiencia total en la que una de las componentes sea  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$  se debe finalmente al hecho de que el rayo que sigue la  $DMU_0$  hasta alcanzar la isocuanta en su evaluación de eficiencia con el modelo reducido es una parte del rayo seguido por la misma unidad hasta la isocuanta cuando la eficiencia se evalúa con el modelo total. En el capítulo siguiente veremos que cuando la evaluación de eficiencia tiene lugar en otros contextos distintos a los radiales, el uso de las diferencias entre los scores originales y los que se obtienen cuando se elimina una unidad no siempre resulta tan atractivo.

De acuerdo con el razonamiento anterior,  $\psi_{0j}^*$  y  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$  pueden considerarse como dos medidas de influencia sensibles. Además, como cabría esperar, éstas están estrechamente relacionadas. En efecto, sea  $\tilde{\psi}_{0j}^* := \theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$ , entonces

$$\psi_{0j}^* = \frac{\theta_0^{r*} - \tilde{\psi}_{0j}^*}{\theta_0^{r*}} = \frac{\theta_0^{t*}}{\theta_0^{r*} + \tilde{\psi}_{0j}^*}. \quad (5.6)$$

**Ejemplo 4.1 (continuación).** La tabla 5.1 contiene los scores de eficiencia totales y reducidos resultantes de la eliminación de las DMUs A, C y G, así como los valores asociados de la medida de influencia  $\psi_{0j}^*$ . Según la proposición 5.2, estas tres unidades son las únicas potencialmente influyentes. En particular, la influencia de la DMU C queda descrita por los valores  $\psi_{kC}^*$  para las  $DMU'_k$ s distintas de la DMU C. Como se dijo anteriormente,  $\psi_{DC}^* = 0,74$  significa que, con relación al uso de inputs que la harían ser eficiente respecto a todas las unidades excepto a la DMU C, la DMU D debería lograr una reducción aproximada del 74 % para ser eficiente cuando se compara además con la DMU C. Análogamente, podría interpretarse el valor  $\psi_{FC}^* = 0,66$ . Las unidades B y E, que son eficientes respecto a la muestra sin la DMU C, deberían reducir sus inputs al 85 % y al 66 %, respectivamente, para ser eficientes cuando se considera a esta última unidad. En este último caso, toda la ineficiencia detectada originalmente para estas dos unidades puede explicarse por la presencia de la DMU C en la muestra. Finalmente, las unidades A y G no pueden verse afectadas por la DMU C (ni por ninguna otra) ya que éstas eran eficientes originalmente. Por tanto,  $\psi_{AC}^* = \psi_{GC}^* = 1$ .

DMU	$\theta_k^{t*}$	DMU A		DMU C		DMU G	
		$\theta_k^{rA*}$	$\psi_{kA}^*$	$\theta_k^{rC*}$	$\psi_{kC}^*$	$\theta_k^{rG*}$	$\psi_{kG}^*$
A	1	-	-	1	1	1	1
B	0.85	1	0.85	1	0.85	0.85	1
C	1	1	1	-	-	1	1
D	0.59	0.64	0.93	0.80	0.74	0.59	1
E	0.65	0.65	1	1	0.65	0.67	0.97
F	0.48	0.48	1	0.73	0.66	0.50	0.96
G	1	1	1	1	1	-	-

Cuadro 5.1: Valores de  $\psi_{kj}^*$  para las DMUs A, C y G.

Como ocurría en el análisis de Wilson, las DMUs A y G afectan a la eficiencia de otras dos unidades. Sin embargo, según nuestra medida, la DMU C influye en cuatro unidades en lugar de en cinco, puesto que la medida de eficiencia de la DMU G no se ve afectada por la DMU C cuando se usa el score de eficiencia clásico (como ya apuntaba el propio Wilson). Además, las medidas obtenidas por el método descrito en esta sección y por el método de Wilson parecen conducir a conclusiones diferentes acerca de la influencia de las unidades eficientes. La medida  $\psi_{kj}^*$ , que toma valores en  $(0, 1]$ , representa invariablemente el cambio de eficiencia de la  $DMU_k$  debido a la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. Esta misma interpretación tienen las diferencias  $\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*$  del método de Wilson para las  $DMU_k$ 's que son ineficientes tanto cuando la  $DMU_j$  está en la muestra como cuando no lo está. En este caso, tales diferencias toman valores en  $[0, 1)$ . En el ejemplo 4.1,  $\lambda_{DC}^* - \lambda_D^* = 0,21$  y  $\lambda_{FC}^* - \lambda_F^* = 0,25$  proporcionan la misma información que  $\psi_{DC}^* = 0,74$  y  $\psi_{FC}^* = 0,66$  acerca de la influencia de C en D y en F, respectivamente. Si, por el contrario, la  $DMU_k$  es eficiente, o bien pasa a serlo cuando se elimina la  $DMU_j$ , entonces tanto el significado como el rango de variación de  $\psi_{kj}^*$  y de  $\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*$  difieren notablemente. Cuando la  $DMU_k$  es eficiente,  $\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*$  puede tomar valores en  $[0, +\infty)$ , y esta diferencia se interpreta como el cambio en la forma local de la frontera alrededor de la  $DMU_k$  debido a la presencia de la  $DMU_j$ , mientras que  $\psi_{kj}^*$  valdría 1, indicando que la  $DMU_k$  es eficiente independientemente de la presencia de  $DMU_j$  en la muestra. En el ejemplo se tiene que  $\psi_{GC}^* = 1$ , lo que indica que C no afecta a la eficiencia de G, mientras que  $\lambda_{GC}^* - \lambda_G^* = 3 - 2 = 1$  es una medida del cambio en la forma local de la frontera en el entorno de G que es debido a C. Si la  $DMU_k$  pasa a ser eficiente cuando se elimina  $DMU_j$  de la muestra, los valores  $\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*$ , que nuevamente varían en el rango  $[0, +\infty)$ , son incluso más difíciles de interpretar, puesto que dichas diferencias recogen algo más que se agrega a los cambios en la eficiencia clásica. De nuevo en el ejemplo 4.1, la influencia de C en B es medida por la diferencia  $\lambda_{BC}^* - \lambda_B^* = 1,04 - 0,85 = 0,19$ . Este cambio podría verse quizás como  $\lambda_{BC}^* - \lambda_B^* = (1,04 - 1) + (1 - 0,85) = 0,04 + 0,15 = 0,19$ , de manera que al cambio en el score

de eficiencia clásico,  $1 - 0,85 = 0,15$ , se añade la componente,  $1,04 - 1 = 0,04$  que, teniendo en cuenta el significado del score de eficiencia modificado, podría ser interpretada como una medida del soporte que tiene la frontera resultante de eliminar C en el entorno de B. Análogo razonamiento podría hacerse con la medición de la influencia de C en la DMU E.  $\square$

De este modo,  $\bar{\delta}_j$ , como promedio de las diferencias  $\lambda_{kj}^* - \lambda_k^*$ , es una medida que combina información de distinta naturaleza (cambios en la eficiencia clásica y cambios en la forma local de la frontera en el entorno de una unidad), y por tanto, será difícil de interpretar. Además, dado que  $\bar{\delta}_j$  varía en  $[0, +\infty)$ , mientras que los cambios en el score de eficiencia clásico varían en  $[0, 1)$ , es posible que cambios importantes en esta componente pasasen desapercibidos en el caso de no presentarse cambios en la forma local de la frontera, puesto que finalmente darían lugar a valores de  $\bar{\delta}_j$  entre 0 y 1, que podrían considerarse pequeños si se tiene en cuenta el posible rango de variación de esta medida. Asimismo, valores altos de  $\bar{\delta}_j$  que fuesen debidos exclusivamente a cambios en la forma local de la frontera podrían generar cierta confusión en lo que se refiere a la medición de eficiencia convencional.

## 5.5. Análisis de influencia basados en $\psi_{0j}^*$

Como venimos diciendo, el valor  $\psi_{0j}^*$  proporciona una medición de la influencia de la  $DMU_j$  en la eficiencia de la  $DMU_0$ . Además, repitiendo el proceso seguido para calcular este valor para la  $DMU_0$  con las restantes unidades obtenemos la muestra  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , que es un conjunto de valores que reúne información relativa a la influencia de la  $DMU_j$  que ha sido extraída a partir de las observaciones. Del mismo modo, para completar un análisis de influencia tendremos que disponer de la muestra  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , para todas las  $DMU'_j$ s potencialmente influyentes, esto es, las evaluadas como eficientes extremas por (5.1).

Cuando se trata con muestras pequeñas, como la del ejemplo 4.1, esta información es manejable y se pueden extraer directamente conclusiones sobre la influencia de cada  $DMU_j$  analizada. Sin embargo, es más habitual en la práctica enfrentarse con muestras de gran tamaño, de manera que se hace necesario resumir de alguna manera dicha información con objeto de poder realizar una valoración de la influencia de cada unidad y poder comparar ésta con la de las restantes unidades influyentes a efectos de conseguir una ordenación entre las unidades que han sido detectadas como tales.

Puesto que para cada  $DMU_j$  los valores  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , son una muestra de scores de eficiencia convencionales, el uso de estadísticos descriptivos tales como los percentiles pueden resultar de utilidad para sintetizar la información proporcionada por estas mediciones. Los percentiles proporcionarán información relativa no sólo a la magnitud de la medida de influencia sino también a la proporción de unidades afectadas por cada  $DMU_j$ . Además, los percentiles son a priori preferibles a indicadores clásicos como la media y la desviación típica dado que la distribución de una muestra de scores de eficiencia es con frecuencia bastante asimétrica. En tales casos, resulta apropiado también representar gráficamente dicha distribución por medio de los clásicos gráficos de cajas. En conjunto, el uso de estos procedimientos numéricos y gráficos aplicados sobre las medidas de influencia desarrolladas aquí pueden resultar de gran utilidad para la detección de observaciones influyentes en un análisis de eficiencia realizado con modelos DEA radiales.

En la siguiente sección aplicamos estas técnicas sobre un banco de datos reales. Del análisis de influencia que vamos a realizar, podremos concluir que nuestro método representa una alternativa, o quizás más bien un complemento, para otros existentes en la literatura, tales como los de Dusansky y Wilson ([42] y [43]) o Wilson [106], que han sido descritos al principio del capítulo<sup>3</sup>. Nótese, por otro lado, que

---

<sup>3</sup>Algunos autores como Seaver y Triantis [84] y Welsch [103] sugieren que en un análisis de



todos estos métodos, incluido el que acabamos de proponer, requieren un esfuerzo computacional similar, puesto que todos se basan en la comparación de scores de eficiencia cuando la unidad bajo estudio está en la muestra y cuando ésta no está, y en el cálculo posterior de algún indicador que resuma las comparaciones unidad a unidad obtenidas para todas las observaciones de la muestra.

### 5.5.1. Ejemplo empírico (Programa “Follow Through”)

En esta sección aplicamos las técnicas de análisis de influencia propuestas en este capítulo sobre el conocido banco de datos relativo al programa educativo “Follow Through” que aparece en el trabajo de Charnes, Cooper y Rhodes [30]. En Wilson [106] se presenta un análisis de influencia sobre este mismo banco de datos, lo que nos permitirá comparar los resultados obtenidos con ambos métodos. En este estudio se evaluaron 70 escuelas utilizando cinco inputs y tres outputs. Se utilizó un modelo BCC de orientación input, encontrándose que 27 unidades eran puntos eficientes extremos.

Las muestras  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , para cada una de las de 27  $DMU_j$ 's potencialmente influyentes están representadas por los correspondientes gráficos de cajas en la figura 5.3. Cada una de las muestras consta de 43 observaciones, que se corresponden con las unidades evaluadas con un score de eficiencia inferior a la unidad (las unidades evaluadas originalmente como eficientes no pueden verse afectadas por la presencia de ninguna otra unidad de la muestra, en contraste con lo que podría ocurrir con el método de Wilson). Los puntos atípicos y extremos dentro de cada distribución han sido etiquetados con el número de la DMU afectada por la unidad cuya influencia se está evaluando.

---

influencia puede ser aconsejable la utilización de más de un método de diagnóstico.

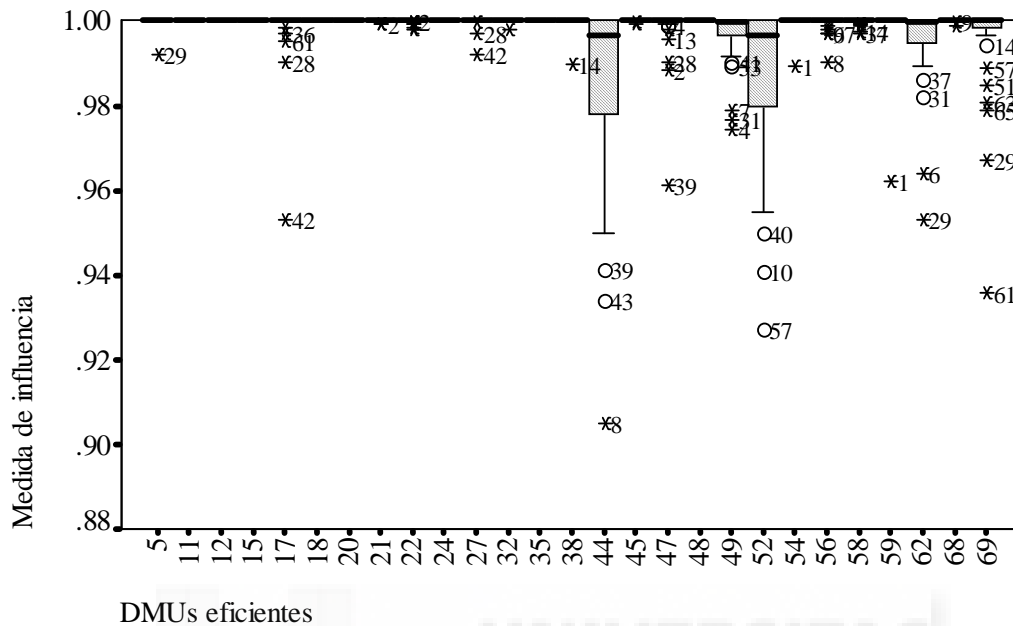


Figura 5.3: Box-plots de las muestras  $\psi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$

Puede observarse que las unidades que muestran mayor influencia son las DMUs 44 y 52. La tabla 5.2 recoge un análisis descriptivo de la distribución de la medida de influencia para estas dos unidades. En dicha tabla hemos considerado algunos percentiles y el valor mínimo observado en cada muestra. También hemos incluido otras unidades, tales como las DMUs 17, 47, 49, 59, 62 y 69, que exhiben un cierto grado de influencia pero considerablemente más débil que las dos citadas anteriormente.

Destaca claramente, como ya se ha visto en los gráficos de cajas, la influencia de las DMUs 44 y 52. Hay un 5% de unidades que reducen su score de eficiencia a menos del 93.5% debido a la presencia de la unidad 44 en la muestra, y el 10% de DMUs más afectadas por esta unidad reducen su eficiencia a menos del 95.6%. La DMU 8 es claramente la más afectada por la unidad 44, con un valor  $\psi_{8,44}^* = 0,905$  (en el gráfico de cajas correspondiente a la DMU 44 se puede apreciar que es un valor atípico extremo dentro de su distribución). En concreto, esta unidad pasa de ser eficiente cuando la DMU 44 no está en la muestra a tener un score de eficiencia

<i>DMU</i>	<i>Mínimo</i>	$P_5$	$P_{7,5}$	$P_{10}$	$P_{25}$
17	0.953	0.991	0.996	0.997	1
44	0.905	0.935	0.944	0.956	0.975
47	0.961	0.989	0.992	0.997	1
49	0.975	0.977	0.982	0.990	0.996
52	0.927	0.943	0.951	0.956	0.976
59	0.962	1	1	1	1
62	0.953	0.968	0.983	0.987	0.994
69	0.936	0.970	0.980	0.982	0.998

Cuadro 5.2: Análisis descriptivo de la medida de influencia

igual a 0.9501 si se considera esta unidad. La unidad 52 produce efectos similares a los de la DMU 44: hay un 5 % de unidades cuya eficiencia baja a menos del 94.3 % y un 10 % que la reducen a menos del 95.6 %. El mínimo observado en esta muestra es 0.927, asociado con la unidad 57.

Tras estas dos unidades, podemos mencionar en un segundo nivel de influencia a las DMUs 62 y 69. En cualquier caso, esta influencia no parece relevante ya que puede afirmarse que el 95 % de las unidades mantiene su eficiencia por encima del 97 % (el  $P_5$  de la distribución de la medida de influencia para estas unidades es, respectivamente, 0.968 y 0.970). De estas dos unidades, la distribución de la medida de influencia para la DMU 69 presenta un mayor número de observaciones atípicas extremas (véase figura 5.3), destacando la asociada a la DMU 61 que es el valor mínimo de esta distribución, 0.936. Los valores de los percentiles de la distribución asociada con la DMU 49 son similares a los registrados para las DMUs 62 y 69, si bien la unidad 49 parece ser algo menos influyente a tenor del mayor valor del mínimo de su distribución.

Finalmente, de las DMUs 47 y 17 podemos destacar la influencia que han ejercido en la evaluación de una de las restantes unidades (la 42 para la DMU 17, con un valor de la medida de influencia  $\psi_{42,17}^* = 0,953$  y la 39 para la DMU 47, con  $\psi_{39,47}^* = 0,961$ ).

En estos dos casos, el  $P_5$  de las tres distribuciones asociadas es del orden de 0.99 o superior. Una situación extrema en este sentido es la que muestra la unidad 59, para la que  $\psi_{1,59}^* = 0,962$  y  $\psi_{k,59}^* = 0, \forall k \neq 1, 59$ .

En gran medida, nuestros resultados coinciden con los obtenidos por Wilson, quien también clasifica a las DMUs 44 y 52 como las unidades más influyentes tras observar que alcanzan los valores máximos de la medida  $n_j^* \times \bar{\delta}_j$ :  $n_{44}^* \times \bar{\delta}_{44} = 1,3190$  y  $n_{52}^* \times \bar{\delta}_{52} = 0,7568$ . Sin embargo, en lo referente a las restantes DMUs, nuestra clasificación de las observaciones influyentes contrasta con la obtenida por Wilson. En la clasificación obtenida por este autor, tras las unidades 62 y 69 aparecen las DMUs 59, 56, 15 y 58 que, de este modo, son consideradas como más influyentes que las observaciones 49, 47 y 17. Éstas tres últimas afectan a más de las restantes DMUs pero tienen un valor inferior del cambio medio. Una posible explicación para este hecho es que el método de Wilson también es sensible a cambios en la forma local de la frontera, por lo que ésta podría ser la razón para destacar a las unidades 59, 56, 15 y 58, mientras que éstas no parecen mostrar una influencia destacable cuando se utiliza nuestro método, que únicamente es sensible a cambios en el score de eficiencia convencional (en particular, todos los valores de la distribución de la medida de influencia de la DMU 15 son iguales a 1 y, como ya se dijo anteriormente, en el caso de la DMU 59 sólo un valor es inferior a 1).

Una vez que se han clasificado y ordenado las observaciones que se han detectado como influyentes, el analista tendrá que estudiar si éstas están contaminadas por errores en los datos. En una primera aproximación, puede ser útil a tal efecto examinar los valores observados de los inputs y los outputs para todas las unidades. La figura 5.4 contiene los gráficos de cajas para cada variable. Para la DMU 44, los valores de los inputs 2, 3 y 4 y los de todos los outputs son atípicos para sus correspondientes distribuciones. Esta unidad tiene el máximo valor del score de eficiencia modificado  $\lambda_{44}^* = 2,0816$ . Además, como se ha explicado anteriormente,

esta unidad presenta un alto grado de influencia. Por tanto, la unidad 44 puede considerarse como un outlier y además como una observación influyente. Todo esto parece indicar que esta unidad merece un análisis más profundo, ya que debe determinarse si los datos de la DMU 44 contienen errores o no. Y en este último caso, se tratará de analizar si el comportamiento de esta unidad está revelando condiciones de funcionamiento mejores.

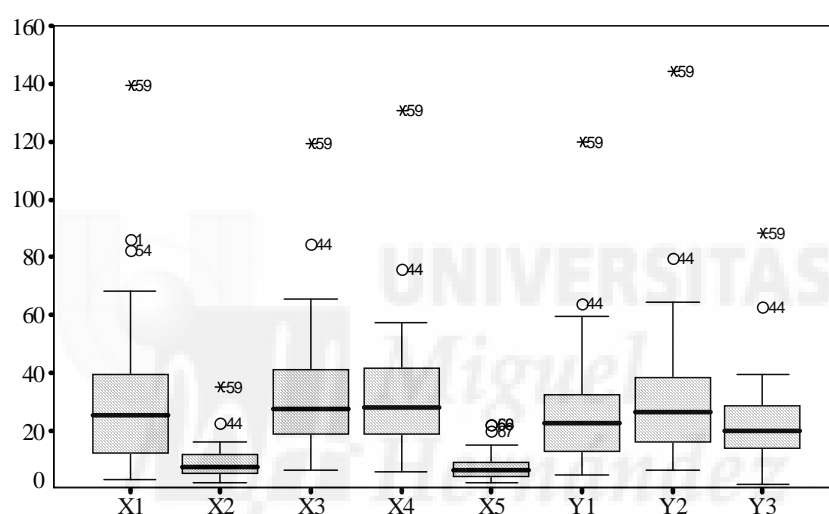


Figura 5.4: Box-plots variables

En la figura 5.4 puede apreciarse también que los valores de todos los inputs y todos los outputs de la DMU 59 son extremos. Sin embargo, no parece que esta unidad pueda ser considerada como una observación influyente en lo referente a la eficiencia convencional, sino simplemente como un outlier, ya que esta unidad apenas afecta a los scores de eficiencia usuales (sólo  $\psi_{1,59}^* = 0,96214$  es menor que 1). En este caso,  $\lambda_{59}^*$  no está definido, lo que quizás podría esperarse. De hecho, en Wilson [105] se realizó un análisis de outliers sobre este conjunto de datos en el que las unidades 44, 59, 35, 50 y 54 (además de otras cinco ineficientes) fueron consideradas como outliers, siendo las dos primeras las “más obvias” según este autor.

## 5.6. Extensiones a otros problemas relacionados

La técnica de análisis de influencia que hemos propuesto ha sido desarrollada para el caso en el que se desee valorar la influencia de una unidad individual en la eficiencia de las restantes unidades de la muestra. Tradicionalmente, se sugiere que los análisis que tienen por objeto la detección de observaciones influyentes continúen con el estudio de la influencia de grupos de dos o más unidades en los resultados del análisis original. En cualquier caso, el estudio de la influencia de pares de observaciones (o de la de grupos de mayor tamaño) puede resultar de gran interés si, en particular, nos lleva a la detección de observaciones influyentes cuyos efectos podrían haber pasado desapercibidos cuando se estudia su influencia individualmente. No obstante, pese a que la extensión de los métodos de diagnóstico al caso de grupos de unidades es conceptualmente inmediata, en la práctica puede convertirse en una tarea computacionalmente inabordable, especialmente si se desea estudiar la influencia de todos los posibles subconjuntos de observaciones. En algunos contextos, como en los modelos de regresión, se proponen reglas heurísticas de selección de grupos como una ayuda a la hora de abordar estos problemas. Sin embargo, no puede garantizarse que alguna de estas estrategias conduzca finalmente a la identificación de todos los casos anómalos.

El método que hemos presentado es fácilmente extensible para el análisis del impacto en la eficiencia de grupos de unidades. En general, lo será para cualquier reformulación del problema de la evaluación de eficiencia en la que los datos se modifiquen de manera que la frontera asociada con el nuevo conjunto de datos esté anidada dentro de la frontera original. A continuación, describimos algunas situaciones que se presentan en la práctica y que pueden plantearse de este modo.

### 5.6.1. Subconjuntos de más de una unidad

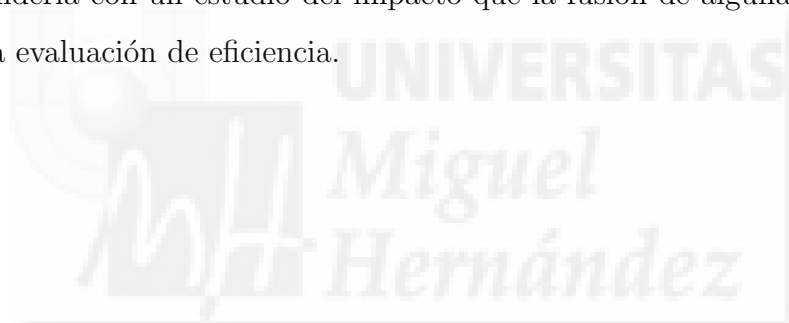
Es obvio que si un subconjunto de más de una unidad es eliminado de la muestra, entonces la frontera asociada con el conjunto de datos resultante también estará anidada dentro de la frontera original. Por tanto, para cada una de las unidades del nuevo problema podremos obtener una valoración de la influencia que ha tenido el grupo eliminado sin más que obtener una medida “radial” de la distancia entre las dos fronteras a lo largo del rayo determinado por el vector de inputs de cada una de estas unidades (de forma completamente análoga a como se ha hecho en el caso de una unidad simple).

Esto nos permitiría abordar problemas como los siguientes:

- a) *El problema del enmascaramiento.* El análisis de influencia de grupos de dos unidades puede ser de utilidad para la detección de pares de observaciones influyentes cuyos efectos pudieran estar enmascarados por la proximidad de una unidad a la otra. La formación de los pares puede hacerse de dos formas: por medio de grupos de dos unidades eficientes o bien seleccionado una unidad eficiente del primer análisis y otra que es evaluada como eficiente cuando se elimina la que se ha elegido en primer lugar.
- b) En ocasiones, la muestra puede estar formada por grupos de unidades de distinta naturaleza. Por ejemplo, un pequeño grupo de entidades privadas y el resto de entidades públicas. La aplicación de nuestra técnica en esta situación podría proporcionar información relativa a la influencia que tienen las entidades privadas en la evaluación de la eficiencia de las públicas.

### 5.6.2. Fusión de dos o más unidades

Otra reformulación de un análisis de eficiencia que resulta de la modificación de los datos originales es aquella en la que éstos se sustituyen por una nueva muestra en la que dos o más unidades individuales son reemplazadas por una única unidad que tiene por inputs y outputs la suma de los inputs y de los outputs correspondientes a las unidades individuales (o bien una combinación cónica de éstos). Nótese que si asumimos que la frontera satisface la condición de rendimientos a escala constantes, la frontera asociada con el nuevo conjunto de datos estará anidada dentro de la original. En este caso, un análisis de influencia con nuestra metodología se correspondería con un estudio del impacto que la fusión de algunas unidades ha tenido en la evaluación de eficiencia.







## Capítulo 6

# Detección de Observaciones Influyentes en Modelos DEA no Radiales



## 6.1. Introducción

En este capítulo abordamos el problema de la detección de observaciones influyentes en un análisis de eficiencia realizado con un modelo DEA de tipo no radial. El planteamiento y la notación utilizada coincidirán con los empleados en el capítulo anterior que abordaba el caso de los modelos DEA radiales. La presentación también seguirá un esquema similar: primero, definiremos una medida que permita valorar la influencia de una determinada  $DMU_j$  eficiente en la eficiencia de cualquier otra unidad de la muestra,  $DMU_0$ , cuando ésta se ha evaluado con un modelo DEA no radial; seguidamente, propondremos el uso de las mismas técnicas numéricas y gráficas que utilizamos en el capítulo anterior y que tienen por objeto facilitar el tratamiento de la información proporcionada por los valores de la medida de influencia para, finalmente, dar lugar a un método que de forma sencilla permita la identificación de las observaciones influyentes. Dicho método se presenta en el trabajo de Ruiz y Sirvent [81].

En particular, supondremos que la eficiencia del conjunto de unidades sobre el que se va a realizar el análisis de influencia se ha evaluado con la medida de Russell de eficiencia técnica. Para ser más concretos, el desarrollo de este capítulo se hará en términos de la versión input de la medida de Russell, si bien podría llevarse a cabo de forma completamente análoga para un modelo de orientación output.

En principio, el método que vamos a proponer será aplicable exclusivamente en el caso en el que la eficiencia se evalúe con la medida de Russell de orientación input, en tanto que la medida de influencia en la que éste está basado se ha diseñado específicamente para esta situación. No obstante, podremos comprobar cómo la idea de esta técnica puede adaptarse al caso en que la eficiencia se evalúe con modelos radiales con la misma orientación. Del mismo modo, algunos de los métodos de detección de observaciones influyentes utilizados con los modelos radiales, tales como

los que se encuentran en Dusansky y Wilson [42] y [43], podrían aplicarse también en el caso no radial; o bien, algunas técnicas generales de detección de observaciones influyentes, y también de outliers, como la versión del estadístico AP desarrollada por Wilson [105], podrían utilizarse en este caso. Finalmente, discutiremos las ventajas e inconvenientes de algunos de estos métodos.

## 6.2. La medida de Russell de eficiencia técnica de orientación input

La medida de Russell de eficiencia técnica de orientación input para una  $DMU_0$  puede obtenerse como el valor óptimo del problema (3.1). En este capítulo utilizaremos la siguiente reformulación en términos de las holguras de dicho problema, a la que se llega aplicando de nuevo el cambio de variables (3.3):

$$\begin{aligned}
 \text{mín } R_{I0} &= 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} \\
 \text{s.a.:} & \\
 \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} &= x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} &\geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 \sum_{k=1}^n \lambda_k &= 1 \\
 s_{i0}^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 \lambda_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

El valor óptimo de (6.1),  $R_{I0}^*$ , determina la máxima distancia  $L_1$  ponderada desde el vector de inputs de la  $DMU_0$  a la frontera, siendo  $1/mx_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , el conjunto de pesos. De este modo,  $R_{I0}^*$  podrá interpretarse como el porcentaje de los inputs de la  $DMU_0$  que dicha unidad debería usar (en promedio) para operar

eficientemente. En el modelo (6.1) podemos observar además que  $R_{I_0}^*$  tiene en cuenta todas las fuentes de ineficiencia en los inputs, esto es, tanto la radial como la no radial. No obstante, el score de eficiencia del modelo BCC de orientación input,  $\theta_0^*$ , puede obtenerse como el valor óptimo del modelo (6.1) en el caso de que el modelo se modifique añadiendo las restricciones  $\frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} = 1 - \theta_0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### 6.3. Una medida del “desplazamiento” entre fronteras con distancias del tipo $L_1$

En esta sección ponemos de manifiesto algunas de las consecuencias que tiene el uso de distancias del tipo  $L_1$  para la evaluación de la eficiencia a la hora de valorar la influencia de una determinada  $DMU_j$  en la medida de eficiencia de cualquier otra  $DMU_0$ . En un intento de definir una medida de influencia, una primera aproximación podría pasar por adaptar el procedimiento en dos etapas seguido en el capítulo anterior para calcular  $\psi_{0j}^*$  al caso en que la eficiencia se evalúe con la medida de Russell. Sin embargo, esto no resulta sencillo puesto que, a diferencia de lo que ocurre con los modelos radiales, cuando se resuelve (6.1) es posible que se presenten óptimos alternativos que determinen distintos puntos de proyección sobre la frontera eficiente. Si esto ocurriese en el momento en que se evalúa la eficiencia de la  $DMU_0$  cuando la  $DMU_j$  no está en la muestra, resultaría que en la primera etapa tendríamos más de una unidad virtual sobre la frontera reducida asociada con la  $DMU_0$ . Entonces, la aplicación de la segunda etapa, en la que se debe evaluar la eficiencia de las unidades virtuales para obtener una medida del desplazamiento entre fronteras, derivaría en un problema de programación no lineal dado que los denominadores de los pesos de la función objetivo de (6.1) serían también variables al haber más de una unidad virtual. En ese caso, la obtención de una medida de influencia sería más costosa puesto que la resolución de estos problemas presenta, en principio, muchas más dificultades que un problema de tipo lineal como el obtenido para valorar la

influencia en el caso radial.

La técnica desarrollada en el caso radial se basa en la idea de medir el desplazamiento entre las fronteras reducida y total a lo largo del rayo definido por el vector de inputs de la  $DMU_0$ . Puesto que dicho rayo es precisamente el camino que la  $DMU_0$  sigue hasta la frontera cuando se evalúa su eficiencia, el valor  $\psi_{0j}^*$ , que puede verse como una medida de la distancia radial entre las dos fronteras, puede interpretarse en términos de influencia en el score de eficiencia de la  $DMU_0$ . En el caso de que sea la medida de Russell la que se utilice para la evaluación de la eficiencia, esta idea nos llevaría a medir la distancia  $L_1$  ponderada entre las dos fronteras a lo largo del camino seguido por la  $DMU_0$  para obtener  $R_{I0}^*$ . Sin embargo, se presentan algunas dificultades para desarrollar este planteamiento que se derivan del uso de una distancia del tipo  $L_1$  para medir la eficiencia, independientemente de la ya mencionada posible existencia de óptimos alternativos en (6.1). En el siguiente ejemplo, ponemos de manifiesto dichos inconvenientes; no obstante, en el análisis de la situación que vamos a plantear surgen algunas ideas que serán la clave para el desarrollo de una nueva medida de influencia para el caso en que la eficiencia se evalúe con modelos DEA no radiales.

**Ejemplo 6.1.** Consideremos el siguiente ejemplo sencillo en el que la eficiencia de una muestra de 5 DMUs descritas en términos de dos inputs y un output constante se evalúa con la medida de Russell.

$DMU$	$X_1$	$X_2$	$Y$	$R_I^*$
A	1	6	1	1
B	6	1	1	1
C	3.5	6	1	0.64
D	5	5	1	0.70
E	6	6	1	0.58

Cuadro 6.1: Ejemplo ilustrativo

En particular, el valor de la medida de Russell para la DMU D es  $R_{ID}^* = 0,7$ . Este score de eficiencia puede obtenerse en particular utilizando el punto  $D_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  como el referente sobre la frontera eficiente, siendo  $s_{1D}^{-*} = 1$ ,  $s_{2D}^{-*} = 2$  la solución óptima asociada (véase el gráfico de la izquierda de la figura 6.1).

Supongamos que estuviéramos interesados en analizar la influencia de la DMU A en la medida de eficiencia de la DMU D. De acuerdo con el planteamiento anterior, nuestro objetivo sería medir de alguna manera el desplazamiento entre las fronteras total y reducida a lo largo del camino seguido por la DMU D para obtener  $R_{ID}^*$ . Sin embargo, podemos tener múltiples caminos entre las dos fronteras asociados con  $D_1$ , como consecuencia del uso de una distancia del tipo  $L_1$  para la evaluación de la eficiencia de la DMU D. Para ser más precisos, cada punto sobre la frontera reducida que domine al vector de inputs de la DMU D y esté dominado por  $D_1$  determinará un camino que podría dar lugar a una medición particular del desplazamiento entre ambas fronteras (nótese que en el caso radial, una solución óptima determina un único camino que puede ser usado para medir dicho desplazamiento). Por tanto, podríamos tener más de una medición del desplazamiento entre fronteras para una misma solución óptima de (6.1), una para cada uno de los caminos así obtenidos. Por ejemplo, en el gráfico de la derecha de la figura 6.1 vemos que los puntos  $D_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $D_3 \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \end{pmatrix}$  y  $D_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  determinan tres caminos diferentes entre  $D_1$  y el vector de inputs de la DMU D a través de la frontera reducida. Así, la distancia entre  $D_1$  y cada uno de estos puntos proporcionaría una medición distinta del mencionado desplazamiento entre fronteras. En concreto, los valores de estas mediciones serían 0,2, 0,15 y 0,1, respectivamente, que se han obtenido con la distancia  $L_1$  ponderada utilizada en la evaluación de la eficiencia de la DMU D.

En resumen, una solución óptima dada de (6.1),  $s_{i0}^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , puede dar lugar a múltiples descomposiciones  $(s_{i0}^{-*} - t_{i0}^-) + t_{i0}^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tales que el punto  $X_0 - \sum_{i=1}^m (s_{i0}^{-*} - t_{i0}^-) e_i^-$  esté sobre la frontera reducida (siendo  $e_i^-$  el  $i$ -ésimo vector



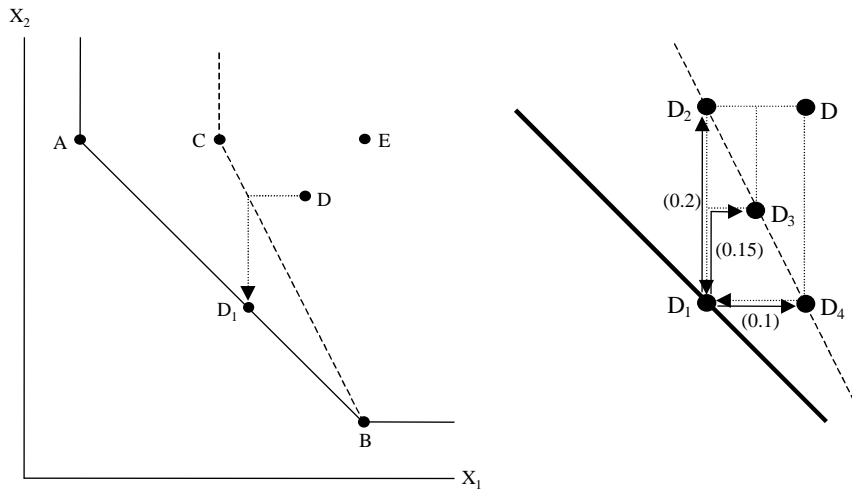


Figura 6.1: Medición del desplazamiento entre fronteras

de la base canónica de  $\mathbb{R}^m$  asociada con dicha solución óptima). Cada conjunto de valores  $t_{i0}^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , determina pues un camino desde  $X_0 - \sum_{i=1}^m s_{i0}^{-*} e_i^-$  (la proyección sobre la frontera total) hasta el vector de inputs de la  $DMU_0$  a través de la frontera reducida. Por tanto, para cada  $t_{i0}^-$ ,  $i = 1, \dots, m$ , la cantidad  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_{i0}^-}{x_{i0}}$  proporcionará una medición diferente del desplazamiento entre fronteras asociada con la misma solución óptima de (6.1). El número de mediciones que podrían obtenerse siguiendo esta idea sería incluso mayor si además se obtuviesen óptimos alternativos cuando se resuelve (6.1), esto es, si se tuviesen múltiples soluciones óptimas  $s_{i0}^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . De hecho, esto es lo que realmente ocurre en este ejemplo cuando se evalúa la eficiencia de la  $DMU D$  con (6.1): tal como se representa en la figura 6.2 todos los puntos del segmento  $\overline{D_5 D_6}$ , siendo  $D_5$  y  $D_6$  los puntos  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  respectivamente, pueden usarse como referentes sobre la frontera total que conducen al score de eficiencia  $R_{ID}^* = 0,7$ , y pueden obtenerse como  $D - (s_{1D}^{-*} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_{2D}^{-*} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ , siendo  $s_{1D}^{-*}$ ,  $s_{2D}^{-*}$  los óptimos alternativos de (6.1) obtenidos en la evaluación de la  $DMU D$ .

El razonamiento anterior sugiere la siguiente pregunta: una vez que se ha eva-

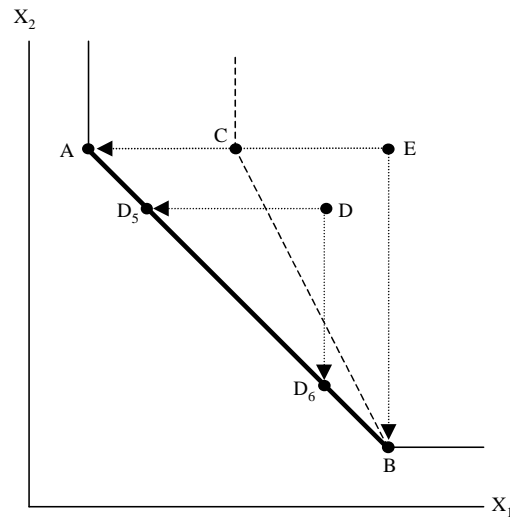


Figura 6.2: Medición del desplazamiento entre fronteras (óptimos alternativos)

luado la eficiencia de la  $DMU_0$  con (6.1), ¿cuál es el camino que determina una medición del desplazamiento entre fronteras tal que pueda ser usada como una medida sensible de la influencia de la  $DMU_j$  en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ ? El siguiente análisis de los datos de nuestro ejemplo arrojará alguna luz para encontrar una respuesta a esta pregunta.

Supongamos ahora que deseásemos analizar la influencia de la DMU A en el score de eficiencia de la DMU E. La medida de Russell para esta última unidad es  $R_{IE}^* = 7/12$ . Cuando se resuelve (6.1) para evaluar la eficiencia de la DMU E, encontramos que todos los puntos del segmento  $\overline{AB}$  están asociados con las múltiples soluciones óptimas de este problema (véase de nuevo la figura 6.2). Por consiguiente, siguiendo los infinitos caminos que definen cada uno de estos puntos y el vector de inputs de la DMU E podríamos obtener diferentes mediciones del desplazamiento entre fronteras producido cuando no se considera a la DMU A en la muestra. No obstante, de todas las proyecciones de la DMU E sobre la frontera total, destacamos el caso asociado con la DMU B, que puede usarse, en particular, como referente para obtener el score de eficiencia de la DMU E. Puesto que el vector de inputs de la DMU B está sobre ambas fronteras, resultará que no existe ningún desplazamiento entre

las fronteras a lo largo del camino que sigue la DMU E hasta la frontera eficiente cuando se utiliza a la DMU B como referente. En términos de la evaluación de la eficiencia, esto significa que si la DMU A no fuese considerada en la muestra, el score de eficiencia de la DMU E seguiría siendo  $R_{IE}^* = 7/12$ . Por tanto, puede decirse que la DMU A no tiene ninguna influencia en la evaluación de la eficiencia de la DMU E (nótese que si se utilizara cualquier otro punto del segmento  $\overline{AB}$  como referente, la correspondiente evaluación de eficiencia sí estaría afectada por la presencia de la DMU A en la muestra). De este modo, aunque existen infinitos caminos que conectan el vector de inputs de la DMU E con la frontera eficiente y todos conducen al score de eficiencia  $R_{IE}^* = 7/12$ , el que determina la DMU B da lugar a la descripción más razonable de la influencia de la DMU A en la medida de eficiencia de la DMU E.

La característica del vector de inputs de la DMU B que nos interesa destacar en este momento es que puede considerarse como la proyección de la DMU E más cercana a la frontera reducida (de hecho, la distancia entre éste y dicha frontera es cero). Extendiendo esta idea a situaciones más generales, establecemos el criterio que utilizaremos para medir la influencia en la eficiencia. Esto es, el valor de la medida de influencia resultará de la medición del desplazamiento entre fronteras efectuada sobre el camino que proporciona la distancia mínima entre éstas. Teniendo en cuenta este criterio, en la situación anterior la medida de influencia resultante estará asociada con la evaluación de eficiencia de la DMU E menos afectada por la presencia de la DMU A en la muestra. Éste es claramente un criterio conservador, lo que resulta apropiado cuando se trata de valorar la influencia de una unidad.

Un ejemplo de una situación más general que la planteada cuando se mide la influencia de la DMU A en la DMU E se presenta cuando se trata de valorar la influencia de la DMU A en la eficiencia de la DMU D. En la figura 6.2 se observa que la DMU A influye en la evaluación de la eficiencia de la DMU D, puesto que no podría haberse obtenido el score de eficiencia de esta última unidad sin la DMU

A en la muestra. De acuerdo con el criterio establecido anteriormente, para medir esta influencia tendríamos que encontrar el punto del segmento  $\overline{D_5 D_6}$  más cercano a la frontera reducida. Obviamente, cuando hablamos de cercanía lo hacemos en términos de la distancia  $L_1$  ponderada que tiene como pesos los que se utilizan la función objetivo de (6.1) cuando se evalúa a la DMU D, ya que ésta es la distancia que se usa para valorar la eficiencia de dicha unidad. Puede comprobarse que  $D_6$  es el punto más próximo a la frontera reducida de entre todos los del segmento  $\overline{D_5 D_6}$ . El valor asociado de la distancia  $L_1$  ponderada es 0.1, que se obtiene como la distancia entre  $D_6$  y  $D_7 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  (véase figura 6.3). Además, este valor puede considerarse como una parte de la ineficiencia de la DMU D,  $1 - R_{ID}^* = 0,3$ . De este modo, 0.1 de la ineficiencia total de la DMU D, 0.3, puede explicarse por la presencia de la DMU A en la muestra. Concretamente, este valor puede interpretarse como el porcentaje de inputs de la DMU D (10%, en promedio) que se han detectado como usados ineficientemente debido a la presencia de la DMU A en la muestra.

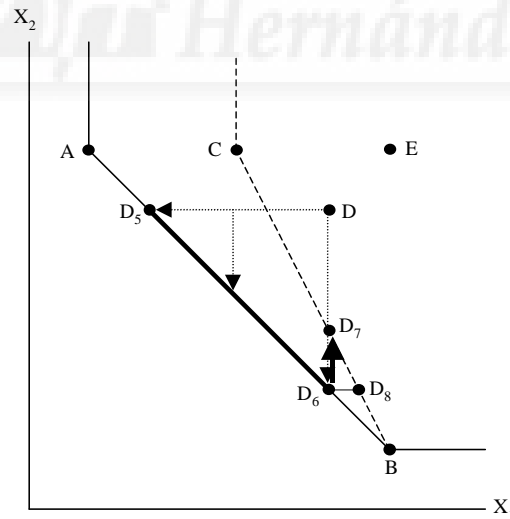


Figura 6.3: Influencia de DMU A en DMU D (1)

Obsérvese que al medir la distancia  $L_1$  ponderada entre un punto proyección de la DMU D y la frontera reducida a lo largo de un camino asociado con la correspondiente solución óptima de (6.1), estaremos capturando una componente de la

ineficiencia de la DMU D. Si además minimizamos esta distancia, estaremos capturando la componente de ineficiencia asociada con la evaluación de la eficiencia de la DMU D menos afectada por la presencia de la DMU A.

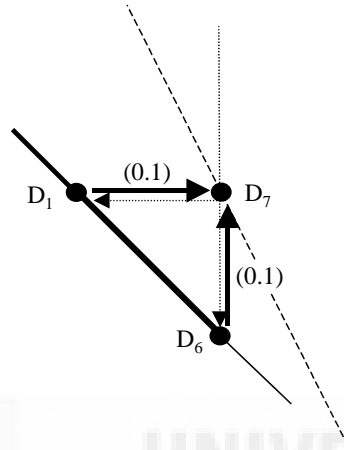


Figura 6.4: Influencia de DMU A en DMU D (2)

Lógicamente, el criterio anterior puede conducirnos a múltiples caminos asociados con diferentes soluciones óptimas  $s_{i0}^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , de (6.1), pero todos tendrán asociado el mismo valor de la medida de influencia. De hecho, en nuestro ejemplo, todos los puntos del segmento  $\overline{D_1 D_6}$  están tan próximos a la frontera reducida como lo está  $D_6$ , ya que dichos puntos están a la misma distancia  $L_1$  ponderada de  $D_7$ , 0.1, que sería el valor asociado de la medida de influencia (véase figura 6.4).  $\square$

#### 6.4. Un modelo para valorar la influencia de la $DMU_j$ en la eficiencia de la $DMU_0$

Teniendo en cuenta las ideas expuestas en el análisis previo, la medida que proponemos para valorar la influencia de una determinada  $DMU_j$  en la ineficiencia de cualquier otra  $DMU_0$  se obtendrá como el valor óptimo del siguiente problema de programación lineal

$$(P^I) \quad \min \quad \varphi_{0j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_{i0}^-}{x_{i0}}$$

s.a.:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (6.2a)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \quad (6.2b)$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} = 1 - R_{I0}^* \quad (6.2c)$$

$$\sum_{k \neq j} \alpha_k x_{ik} = x_{i0} - s_{i0}^- + t_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (6.2d)$$

$$\sum_{k \neq j} \alpha_k y_{rk} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \quad (6.2e)$$

$$s_{i0}^- \geq t_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (6.2f)$$

$$\sum_{k \neq j} \alpha_k = 1 \quad (6.2g)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad (6.2h)$$

$$s_{i0}^-, t_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\alpha_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n, k \neq j$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$$

El valor óptimo  $\varphi_{0j}^*$  mide la mínima distancia  $L_1$  ponderada desde todos los puntos proyección asociados con las soluciones óptimas de (6.1) para la  $DMU_0$  a los puntos sobre la frontera reducida que pueden ser alcanzados a lo largo de los correspondientes caminos que sigue la  $DMU_0$  para obtener su score de eficiencia  $R_{I0}^*$ . Veámoslo revisando el significado de las restricciones de este problema. Con las restricciones (6.2a)-(6.2c) consideramos todos los puntos del conjunto de posibilidades de producción que están asociados con las soluciones óptimas de (6.1) para

la  $DMU_0$ , esto es, todos los puntos sobre la frontera eficiente total que pueden utilizarse como referentes para evaluar la eficiencia de la  $DMU_0$ . De todos los puntos que estarían en el conjunto de posibilidades de producción definido por una muestra de observaciones que no incluyese a la  $DMU_j$ , con las restricciones (6.2d) y (6.2e) consideramos sólo aquéllos cuyo vector de inputs se puede alcanzar desde todos los puntos que satisfacen (6.2a)-(6.2c) incrementando sus inputs. Para evitar la posibilidad de que un punto que satisfaga (6.2a)-(6.2e) no esté sobre uno de los caminos determinados por las soluciones óptimas de (6.1) para la  $DMU_0$ , en (6.2f) imponemos que el vector de inputs de cualquier punto que cumpla las restricciones (6.2a)-(6.2e) domine al de la  $DMU_0$ . Por ejemplo, en la figura 6.3 podemos observar que  $D_7$  es el único punto sobre la frontera reducida que satisface este requerimiento de dominancia en relación a  $D_6$ . Sin embargo,  $D_8 \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , que también está sobre la frontera reducida, está más próximo a  $D_6$  de lo que lo está  $D_7$  (la distancia  $L_1$  ponderada entre  $D_6$  y  $D_8$  es 0.05), pero éste no domina al vector de inputs de la DMU D. Finalmente, (6.2g) y (6.2h) son las restricciones de convexidad clásicas, que deberían ser eliminadas si se asumiera una tecnología con rendimientos a escala constantes.

#### 6.4.1. Algunos resultados sobre la medida de influencia $\varphi_{0j}^*$

En la siguiente proposición se determina el rango de posibles valores de  $\varphi_{0j}^*$ :

**Proposición 6.1.** *Para cualquier  $DMU_0$ , la medida de influencia de la  $DMU_j$ ,  $\varphi_{0j}^*$ , verifica*

$$0 \leq \varphi_{0j}^* < 1. \quad (6.3)$$

**Demostración:** Obviamente,  $0 \leq \varphi_{0j}^* \leq 1$ . Además,  $\varphi_{0j}^*$  no puede alcanzar el valor 1 puesto que esto sólo podría ocurrir en el caso de que el vector inputs de la  $DMU_0$

se proyectase en  $0_m$  al ser evaluada con (6.1), lo que no es posible si hemos asumido que los inputs y los outputs de todas las unidades son estrictamente positivos. ■

Los distintos valores de  $\varphi_{0j}^*$  se interpretan como sigue:  $\varphi_{0j}^* = 0$  significa que existe al menos un punto proyección de la  $DMU_0$  sobre la frontera total cuyo valor asociado de la función objetivo de (6.1) es la medida de Russell,  $R_{I0}^*$ , que puede expresarse como una combinación convexa de unidades que no incluye a la  $DMU_j$ . Por tanto, en ese caso puede afirmarse que la  $DMU_j$  no influye en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ . En caso contrario, esto es, si  $\varphi_{0j}^* > 0$ , la  $DMU_j$  sí que habrá influido en la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$ , puesto que el valor  $R_{I0}^*$  no podría obtenerse sin  $DMU_j$  en la muestra. Además,  $\varphi_{0j}^*$  puede utilizarse como una medida de dicha influencia ya que representa el porcentaje promedio de inputs de la  $DMU_0$  usados ineficientemente por dicha unidad que ha sido detectado debido a la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra.

De este modo, el valor óptimo de  $(P^I)$  proporciona una medida de la influencia de la  $DMU_j$  en la eficiencia no radial de la  $DMU_0$  (cuando ésta se evalúa con la medida de Russell de orientación input) con la que se logra evitar las dificultades derivadas tanto del uso de distancias del tipo  $L_1$  para la evaluación de la eficiencia como las de la posible existencia de óptimos alternativos cuando se resuelve (6.1).

El siguiente resultado establece que, como por lógica cabría esperar, cuando se utiliza  $\varphi_{0j}^*$  en un análisis de influencia, sólo las unidades eficientes extremas son potencialmente influyentes, tal como ya sucedió con  $\psi_{0j}^*$  en el caso radial:

**Proposición 6.2.** Si  $\varphi_{0j}^* > 0$  para alguna  $DMU_0$  en la muestra reducida  $\Rightarrow$  la  $DMU_j$  es un punto eficiente extremo de (6.1).

**Demostración:** Probaremos que si  $DMU_j$  no es un punto eficiente extremo de (6.1), entonces  $\varphi_{0j}^* = 0$  para toda  $DMU_0$ .



Sea  $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, s_{10}^{-*}, \dots, s_{m0}^{-*})$  una solución óptima de (6.1) para una  $DMU_0$  cualquiera. Si  $\lambda_j^* = 0$ , entonces  $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\tilde{s}_{i0}^- = s_{i0}^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\tilde{\alpha}_k = \lambda_k^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , y  $\tilde{t}_{i0}^- = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , será una solución factible de  $(P^I)$  cuyo valor asociado de la función objetivo es 0. Teniendo en cuenta la proposición 6.1, se tendrá pues que  $\varphi_{0j}^* = 0$ .

Si, por el contrario,  $\lambda_j^* > 0$ , la  $DMU_j$  será eficiente, y puesto que no es extrema, existirán  $\phi_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , tales que

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k \neq j} \phi_k x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{hj} &\leq \sum_{k \neq j} \phi_k y_{hk}, \quad h = 1, \dots, s \\ \sum_{k \neq j} \phi_k &= 1 \end{aligned}$$

Sean entonces  $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\alpha}_k = \lambda_k^* + \phi_k \lambda_j^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ ,  $\tilde{\lambda}_j = 0$ ,  $\tilde{s}_{i0}^- = s_{i0}^{-*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $\tilde{t}_{i0}^- = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Es fácil comprobar que estos valores constituyen una solución factible de  $(P^I)$  con valor asociado de la función objetivo igual a 0. Por las mismas razones que antes, se tendrá que  $\varphi_{0j}^* = 0$ . ■

## 6.5. Una descomposición de la ineficiencia total

Como consecuencia de las restricciones (6.2f), las soluciones óptimas del problema  $(P^I)$  conducen a la siguiente descomposición de la ineficiencia total de la  $DMU_0$

$$1 - R_{I0}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*} - t_{i0}^{-*}}{x_{i0}} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_{i0}^{-*}}{x_{i0}}. \quad (6.4)$$

De acuerdo con (6.4), si el vector de inputs de la  $DMU_0$  se modifica según

$X_0 - \sum_{i=1}^m (s_{i0}^{-*} - t_{i0}^{-*}) e_i^-$ , lo que significa reducir su uso de inputs en el  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*} - t_{i0}^{-*}}{x_{i0}} \times 100\%$  (en promedio), la  $DMU_0$  pasará a ser eficiente en relación a la muestra reducida. Por tanto, el resto de la ineficiencia, que será valorada en la cantidad  $\varphi_{0j}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_{i0}^{-*}}{x_{i0}}$ , sólo podrá explicarse por la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. Claramente, la descomposición (6.4) será única incluso en el caso de que se presenten óptimos alternativos al resolver  $(P^I)$ .

De este modo, la resolución de  $(P^I)$  conduce a una descomposición de la ineficiencia total de la  $DMU_0$  en la que la primera componente está asociada con la muestra reducida y la segunda,  $\varphi_{0j}^*$ , representa una parte de la ineficiencia que puede explicarse por la presencia de la  $DMU_j$  en la muestra. Retomando el ejemplo 6.1, se tiene que 0.1 de la ineficiencia total de la DMU D,  $1 - R_{ID}^* = 1 - 0,7 = 0,3$ , se debe a la DMU A. Esto significa que la presencia de la DMU A en la muestra puede explicar que el 10% (en promedio) de los inputs de la DMU D se consideren como usados ineficientemente.

La descomposición (6.4) nos permite enunciar además la siguiente proposición

**Proposición 6.3.** *Sea  $R_{I0}^{r*}$  la medida de Russell de orientación input de una  $DMU_0$  que se ha obtenido cuando la  $DMU_j$  no está en la muestra. Entonces,*

$$R_{I0}^{r*} = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*} - t_{i0}^{-*}}{x_{i0}} \Leftrightarrow \varphi_{0j}^* = R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*. \quad (6.5)$$

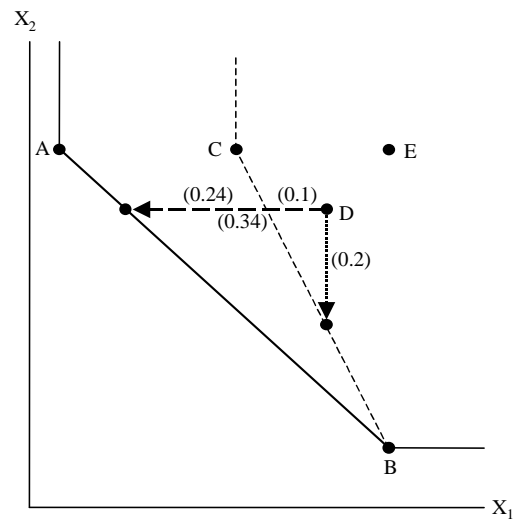
**Demostración:** Se deduce inmediatamente a partir de (6.4). ■

Nuestro interés en este resultado reside en el hecho de que  $1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^{-*} - t_{i0}^{-*}}{x_{i0}}$  no siempre coincide con la medida de Russell de la  $DMU_0$  obtenida a partir de la muestra reducida. Por consiguiente,  $\varphi_{0j}^*$  y  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*$  podrían considerarse como dos medidas de influencia diferentes. En tales casos,  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*$  sería meramente

un indicador de cambios en la eficiencia, por lo que el uso de  $\varphi_{0j}^*$  podría resultar preferible. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo

**Ejemplo 6.1 (continuación).** Si en los datos del ejemplo 6.1 el vector de inputs de la DMU A pasa a ser  $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , se tendrá que  $\varphi_{DA}^* = 0,24$  mientras que  $R_{ID}^{r*} - R_{ID}^* = 0,8 - 0,66 = 0,14$ . En principio, puesto que  $R_{ID}^{r*} - R_{ID}^* = 0,14$  resulta de la descomposición  $1 - R_{ID}^* = (1 - R_{ID}^{r*}) + (R_{ID}^{r*} - R_{ID}^*)$  ( $0,34 = 0,2 + 0,14$ ), podría pensarse en interpretar dicho valor como un porcentaje de inputs (en promedio) usados ineficientemente que puede explicarse por la presencia de la DMU A en la muestra (véase figura 6.5). Sin embargo, si tenemos en cuenta que el valor 0.2 proviene de promediar las holguras obtenidas cuando se evalúa la eficiencia de la DMU D sin la DMU A en la muestra,  $0,2 = \frac{1}{2} \left( \frac{0 + 2}{5} \right)$ , se tendría que 0.14 sería el resultado del promedio  $0,14 = \frac{1}{2} \left( \frac{3,4 + (-2)}{5} \right)$ , en el que la componente asociada con la variable  $x_2$  es negativa, y no podría asociarse con una reducción de los inputs de la DMU D puesto que esto carecería de sentido. De este modo, el uso del valor 0.14 como medida de la influencia de la DMU A en la DMU D puede no tener una justificación tan clara como cuando se usan las diferencias entre scores en un contexto radial. Por tanto, en caso de usar las diferencias entre scores como medidas de influencia, éstas únicamente deberían interpretarse como indicadores de cambios en la eficiencia debidos a la eliminación de una determinada unidad.

Las diferencias que hemos observado entre los comportamientos de  $R_{I_0}^{r*} - R_{I_0}^*$  y  $\varphi_{0j}^*$  se deben implícitamente a que cada una de estas medidas responde a un planteamiento distinto.  $R_{I_0}^{r*} - R_{I_0}^*$  responde a la idea clásica de evaluar la eficiencia de la  $DMU_0$  y repetir luego el análisis cuando se ha eliminado a la  $DMU_j$  de la muestra con objeto de valorar los cambios producidos. Por el contrario, al calcular  $\varphi_{0j}^*$  se elimina a la  $DMU_j$  pero se fija el camino seguido por la  $DMU_0$  hasta la frontera con objeto de valorar el papel que jugó la  $DMU_j$  en la evaluación original de la eficiencia de dicha unidad. Este último planteamiento se ajusta más fielmente

Figura 6.5:  $\varphi_{0j}^*$  vs.  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*$ 

a lo que en realidad ha de ser una medida de influencia que el que se sigue en la obtención de las diferencias  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*$ , puesto que, en este caso, los caminos asociados con la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$  cuando la  $DMU_j$  está en la muestra y cuando no está pueden no guardar ninguna relación. En particular, si esto ocurre será imposible asociar dicha medida con una descomposición razonable de la ineficiencia de la  $DMU_0$ . En la figura 6.5 podemos ver que el camino asociado con la evaluación de eficiencia de la DMU D cuando la DMU A no está en la muestra (la línea de puntos) no forma parte del camino que siguió la DMU D hasta la frontera en su evaluación de eficiencia original (la línea discontinua de trazos largos). En consecuencia, la diferencia  $R_{ID}^{r*} - R_{ID}^* = 0,14$  es una cantidad que no se corresponde con ninguna descomposición que permita explicar alguna componente de la ineficiencia de la DMU D, y únicamente podrá utilizarse como un indicador de cambios en la eficiencia de la DMU D producidos por la eliminación de la DMU A.

Esta situación pone de manifiesto la importancia de disponer de una descomposición en la que sus componentes expliquen con claridad la ineficiencia de la  $DMU_0$ . Con la medida  $\varphi_{0j}^*$  esto se ha conseguido tras imponer las restricciones (6.2f) en el modelo ( $P^I$ ). En el contexto de los modelos radiales, tanto las diferencias  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$

como la medida  $\psi_{0j}^*$  estaban asociadas directa o indirectamente con una descomposición de la ineficiencia total puesto que, en tal caso, el rayo sobre el que tiene lugar la evaluación de la eficiencia de la  $DMU_0$  tanto cuando la  $DMU_j$  está en la muestra como cuando no lo está es en ambas situaciones el mismo. Sin embargo, con modelos no radiales hemos podido comprobar que esto no siempre es posible, por lo que el uso de las diferencias  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^*$  no resulta tan atractivo.  $\square$

## 6.6. Análisis de influencia basados en $\varphi_{0j}^*$

De la misma forma que en el caso radial, para cada  $DMU_j$  potencialmente influyente tendremos que resolver los  $n - 1$  problemas ( $P^I$ ) asociados con cada una de las restantes  $DMU'_k$ s con objeto de obtener las muestras  $\varphi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , que nos permitirán completar el análisis de influencia sobre los datos originales. Este proceso puede simplificarse resolviendo ( $P^I$ ) únicamente para aquellas  $DMU'_0$ s tales que  $R_{I0}^* < 1$ , puesto que el valor de la medida de influencia para las unidades eficientes será necesariamente cero.

Para conjuntos de unidades con pocas observaciones, la información proporcionada por estas muestras puede tratarse sin grandes dificultades. En particular, con los datos del ejemplo 6.1 que venimos utilizando a lo largo del capítulo tendríamos que la influencia de la DMU A queda descrita por los siguientes valores:  $\varphi_{BA}^* = 0$ ,  $\varphi_{CA}^* = 0,36$ ,  $\varphi_{DA}^* = 0,1$  y  $\varphi_{EA}^* = 0$ . En cuanto a la DMU B tenemos:  $\varphi_{AB}^* = 0$ ,  $\varphi_{CB}^* = 0$ ,  $\varphi_{DB}^* = 0,3$  y  $\varphi_{EB}^* = 0$ . En este caso, concluiríamos que la DMU A afecta de modo sustancial a la eficiencia de dos unidades mientras que la DMU B lo hace sólo sobre una.

En el caso más realista de disponer de un conjunto de datos de mayor tamaño, aplicaremos el mismo tipo de técnicas (numéricas y gráficas) que en el caso radial

para analizar la información proporcionada por las muestras de valores de la medida de influencia, puesto que el espíritu de éstas es en ambos casos es el mismo. A continuación, recurrimos de nuevo a los datos del programa “Follow Through” para ilustrar la aplicación de estas técnicas.

### 6.6.1. Ejemplo empírico (Programa “Follow Through”)

La evaluación de la eficiencia de las 70 DMUs que componen la muestra con la medida de Russell de orientación input revela que 27 unidades son consideradas como eficientes, esto es,  $R_{Ij}^* = 1$  para estas  $DMU'_j$ s. Puesto que además son extremas, éstas serán las unidades potencialmente influyentes.

A continuación, resolvemos el modelo ( $P^I$ ) para obtener las muestras de la medida de influencia  $\varphi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , para cada una de las 27  $DMU'_j$ s eficientes. En la figura 6.6 representamos gráficamente la distribución de cada una de estas muestras por medio de su correspondiente gráfico de cajas. Además, dichas distribuciones son descritas también con algunas medidas tales como el máximo y algunos percentiles. Los resultados se muestran en la tabla 6.2.

Como ya ocurrió en el caso radial, las DMUs 44 y 52 se presentan como las más influyentes. No obstante, la unidad 44 parece ahora más influyente que la 52. Para el 25 % de las unidades más afectadas por la DMU 44, al menos 0.09 de su ineficiencia se debe a la presencia de esta unidad en la muestra. Para encontrar un grado de influencia similar (0.10) nos tenemos que ceñir al 10 % de las unidades más afectadas por la DMU 52 (el percentil 90 de la distribución de la medida de influencia para la DMU 52 es 0.10).

En un segundo nivel de influencia tenemos de nuevo a las DMUs 62 y 69, seguidas por la DMU 58, cuya influencia en el caso radial fue casi inapreciable. La

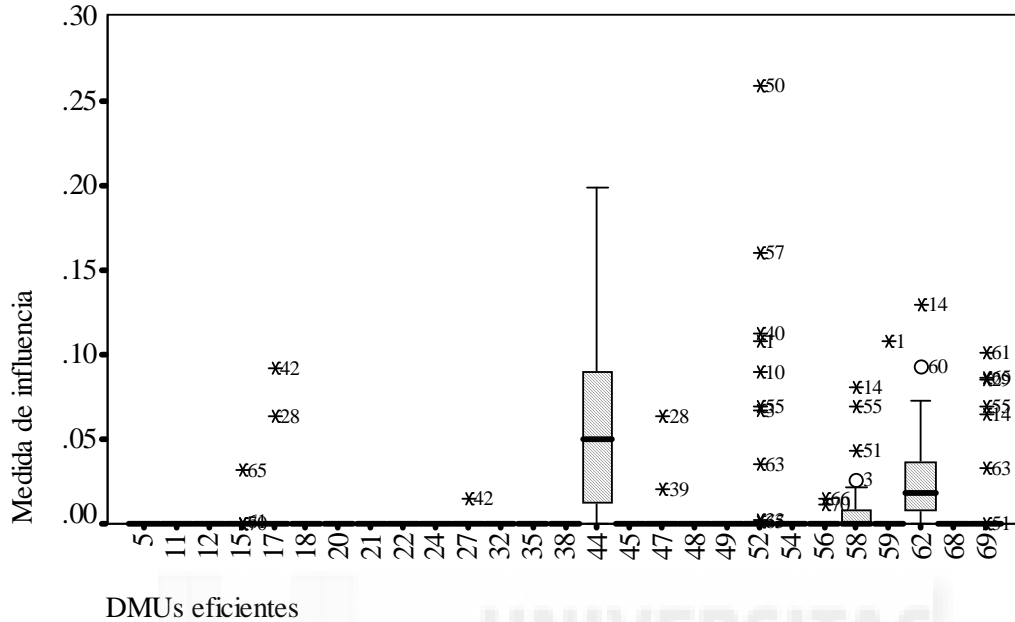


Figura 6.6: Box-plots de las muestras  $\varphi_{kj}^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq j$

influencia de las unidades 49, 47 y 17 es ahora más débil que cuando la eficiencia se medía radialmente, especialmente en el caso de la DMU 49, cuya muestra asociada está compuesta de valores que son siempre cero.

Debemos mencionar que no es sorprendente encontrar diferencias entre los análisis de influencia realizados en el caso radial y en el no radial puesto que cada uno de ellos está referido a una forma distinta de evaluar la eficiencia.

### 6.7. Caso particular: Eficiencia radial

Un razonamiento similar al utilizado para concluir que el modelo (6.1) puede particularizarse para obtener los scores de eficiencia radiales (véase sección 6.2) puede ser utilizado también para adaptar el método que hemos presentado al caso en que se desee valorar la influencia cuando la eficiencia se mide radialmente. Para

<i>DMU</i>	<i>Máximo</i>	$P_{75}$	$P_{90}$	$P_{95}$
17	0.092	0.000	0.000	0.051
44	0.199	0.090	0.127	0.147
47	0.064	0.000	0.000	0.017
49	0.000	0	0	0
52	0.258	0.000	0.101	0.151
58	0.081	0.010	0.025	0.064
59	0.108	0.000	0.000	0.000
62	0.130	0.037	0.066	0.089
69	0.101	0.000	0.068	0.087

Cuadro 6.2: Análisis descriptivo de la medida de influencia (caso no radial)

adaptar  $(P^I)$  al caso radial, observemos primeramente que, al añadir las condiciones  $\frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} = 1 - \theta_0^{t^*}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , el modelo total determinará un único punto proyección sobre la isocuanta. Obviamente, su vector de inputs será  $\theta_0^{t^*} X_0$ . Por consiguiente, las restricciones (6.2a)-(6.2c) y (6.2h) pueden ser eliminadas del modelo. Además, puesto que sólo podrá garantizarse que la mencionada proyección esté sobre la isocuanta y no sobre la frontera eficiente, el sentido de las restricciones (6.2d) pasará a ser de desigualdad. Finalmente, si hacemos el siguiente cambio de variables

$$\tilde{\varphi}_{i0} = \frac{t_{i0}^-}{x_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.6)$$

e imponemos la condición  $\tilde{\varphi}_{10} = \dots = \tilde{\varphi}_{m0} = \tilde{\varphi}_{0j}$  para tener incrementos equiporcionales, entonces el modelo  $(P^I)$  quedará



$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \tilde{\varphi}_{0j} \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \sum_{k \neq j} \alpha_k x_{ik} \leq \theta_0^{t*} x_{i0} + \tilde{\varphi}_{0j} x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{k \neq j} \alpha_k y_{rk} \geq y_{r0} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \theta_0^{t*} + \tilde{\varphi}_{0j} \leq 1 \\
 & \sum_{k \neq j} \alpha_k = 1 \\
 & \tilde{\varphi}_{0j} \geq 0 \\
 & \alpha_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n, \quad k \neq j
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Puesto que  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\forall k \neq j$ ,  $0$ , y  $\tilde{\varphi}_{0j} = 1 - \theta_0^{t*}$  es una solución factible de (6.7), y éste es un problema de minimización, cualquier solución óptima de un modelo idéntico a (6.7) pero que no incluya la restricción  $\theta_0^{t*} + \tilde{\varphi}_{0j} \leq 1$  también cumplirá esta desigualdad. Por tanto, el valor óptimo de (6.7) puede obtenerse resolviendo dicho problema sin la mencionada restricción.

La nueva medida  $\tilde{\varphi}_{0j}^*$  representaría en principio otra alternativa a  $\psi_{0j}^*$  a la hora de abordar el análisis de influencia en la eficiencia cuando ésta se mide de manera radial. Pero si tenemos en cuenta que  $(\theta_0^{t*} + \tilde{\varphi}_{0j}^*)X_0$  es el punto del rayo definido por el vector de inputs de la  $DMU_0$  más próximo a  $\theta_0^{t*}X_0$  que puede expresarse como una combinación de unidades de la muestra que no incluye a la  $DMU_j$ , resultará que dicho punto estará sobre la isocuanta del modelo reducido. Por consiguiente,  $\theta_0^{t*} + \tilde{\varphi}_{0j}^* = \theta_0^{r*}$ . Equivalentemente,

$$\tilde{\varphi}_{0j}^* = \theta_0^{r*} - \theta_0^{t*} = \tilde{\psi}_{0j}^*. \tag{6.8}$$

De este modo, podemos concluir que  $\varphi_{0j}^*$  es la generalización natural al caso no radial de las diferencias  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$ . En este sentido, hemos de insistir en que  $\varphi_{0j}^*$  no necesariamente coincide con  $R_{J_0}^{r*} - R_{J_0}^*$ , que es la medida en la que, en principio,

podría pensarse como la extensión al caso no radial de  $\theta_0^{r*} - \theta_0^{t*}$ . Y lo que es más, como hemos ilustrado en la sección 6.5, el uso de  $\varphi_{0j}^*$  es, en ocasiones, preferible al de las diferencias  $R_{I0}^{r*} - R_{I0}^{t*}$  por razones de tipo interpretativo. De todo esto podemos extraer la conclusión de que las medidas obtenidas a partir de modelos en los que se imponen criterios sensibles para la valoración de la influencia pueden ser preferibles a aquellas que son simplemente indicadores intuitivos de cambios en la eficiencia, tales como las diferencias o los ratios. En determinados contextos, ambos planteamientos pueden llevarnos a las mismas medidas, como ha ocurrido en el caso radial, pero cuando esto no es así, como en el caso no radial que hemos desarrollado en este capítulo, los modelos pueden proporcionar medidas más sensibles. En contrapartida, la necesidad de resolver dichos modelos siempre va a suponer un mayor esfuerzo computacional que el que representa el mero cálculo de las diferencias o los ratios de los scores de eficiencia. En nuestro caso, esto no ha significado una dificultad grave puesto que las medidas que hemos propuesto se obtienen resolviendo problemas lineales de un grado de complejidad similar al de los modelos DEA utilizados habitualmente en la evaluación de eficiencia.

## 6.8. Extensiones a otros problemas relacionados

En el apartado de extensiones de la técnica desarrollada en este capítulo, son aplicables todas las consideraciones que, en ese sentido, hicimos en el caso radial. Es obvio que este método es fácilmente adaptable para medir la influencia de grupos, abordar el problema del enmascaramiento o valorar los efectos de la fusión de unidades en la eficiencia. En esencia, la medida de influencia en el caso no radial es también una medida del desplazamiento entre fronteras anidadas, y todas las situaciones anteriores responden a ese planteamiento. Quizás, sería interesante intentar la posible extensión de las ideas desarrolladas en los capítulos 5 y 6 para diseñar una técnica de detección de observaciones influyentes para el caso en que la eficiencia se

evalúe con medidas no orientadas como las que aparecen en la primera parte de esta memoria.



# Conclusiones

El análisis de eficiencia con modelos DEA es muy sensible a la presencia de observaciones atípicas en la muestra debido al carácter determinístico de la frontera respecto de la que se calculan las medidas de eficiencia. Sin embargo, la literatura sobre métodos de diagnóstico en este contexto es ciertamente escasa. En esta parte de la memoria hemos propuesto algunas técnicas de detección de observaciones influyentes para modelos DEA tanto radiales como no radiales. Dichas técnicas están basadas en distintas medidas de influencia que hemos definido con el propósito de que éstas capturen el impacto que la presencia de una unidad potencialmente influyente ha tenido en la evaluación de eficiencia de cualquier otra unidad. Esta idea es la que ha conducido a ciertos problemas de programación lineal cuyo valor óptimo es la medida de influencia buscada. Finalmente, la resolución de dichos problemas proporciona una descomposición que permite explicar la ineficiencia de cualquier unidad a través de dos componentes claramente interpretables. En particular, una de ellas podrá explicarse por la presencia en la muestra de la unidad cuya influencia se desea valorar. Hemos podido comprobar que este planteamiento conduce en ocasiones, tales como en el caso de los modelos no radiales, a medidas de influencia más sensibles que las que se obtienen a partir de los enfoques clásicos basados en la comparación de los scores de eficiencia originales y los resultantes de la eliminación de una unidad de la muestra. A este respecto, queremos insistir en que el problema del análisis de influencia en modelos DEA no radiales no había sido tratado de forma específica hasta ahora. En este caso, la técnica que hemos propuesto ha permitido

superar satisfactoriamente los inconvenientes adicionales que conllevan el uso de distancias  $L_1$  y la posible existencia de óptimos alternativos en los modelos DEA de este tipo.

Con el desarrollo de estas técnicas de detección de observaciones influyentes hemos pretendido realizar una aportación en este área poco investigada y en la que, como algunos autores apuntan, siempre habrá necesidad de un método más. Ha sido precisamente la escasez de estas técnicas la razón por la que nos hemos centrado en modelos orientados, puesto que en una primera aproximación éste constituye un caso más simple. Queda pues para una futura investigación la extensión de las ideas desarrolladas aquí para tratar el problema del análisis de influencia en modelos no orientados como los estudiados en la primera parte de la memoria.





## Bibliografía



- 
- [1] AIDA, K., COOPER, W.W , PASTOR, J.T. Y SUEYOSHI, T. (1998). Evaluating Water Supply Services in Japan with RAM - A Range-Adjusted Measure of Efficiency, *Omega*, **26/2**, 207-232.
- [2] ALI, A.I. Y LERME, C.S. (1991). Data Envelopment Analysis Models: A Framework, Working paper, School of Management, University of Massachusetts at Amherst.
- [3] ALI, A.I. Y SEIFORD, L.M. (1990). Translation Invariance in Data Envelopment Analysis, *Operations Research Letters*, **9/6**, 403-405.
- [4] ALI, A.I. Y SEIFORD, L.M. (1993). The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis, en *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Fried, H., Lovell, C.A.K y Schmidt S.S. (editores), Oxford University Press, Inc.
- [5] ALI, A.I., COOK, W.D. Y SEIFORD, L.M. (1991). Strict vs. Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **37/6**, 733-738.
- [6] ALLEN, R., ATHANASSOPOULOS, A., DYSON, R.G. Y THANASSOULIS, E. (1997). Weights Restrictions and Value Judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, Development and Future Directions, *Annals of Operations Research*, **73**, 13-34.
- [7] ANDERSEN, P. Y PETERSEN, N.C. (1993). A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **39/10**, 1261-1264.
- [8] ANDREWS, D.F. Y PREGIBON, D. (1978). Finding the Outliers That Matter, *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, **40**, 85-93.
- [9] BANKER, R.D. (1984). Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, **17**, 35-44.



- 
- [10] BANKER, R.D. (1993). Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation, *Management Science*, **39/10**, 1265-1273.
- [11] BANKER, R.D. (1996). Hypothesis Tests Using Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **7/2**, 139-159.
- [12] BANKER, R.D., CHARNES, A. Y COOPER, W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **30/9**, 1078-1092.
- [13] BANKER, R.D. Y COOPER, W.W. (1994). Validation and Generalization of DEA and its Uses, *Top*, **2**, 249-314.
- [14] BANKER, R.D. Y MOREY, R. (1986). Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs, *Operations Research*, **34/4**, 513-521.
- [15] BANKER, R.D. Y MOREY, R. (1986). The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **32/12**, 1613-1627.
- [16] BANKER, R.D. Y THRALL, R.M. (1992). Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, **62**, 74-84.
- [17] BARDHAN, I., F. BOWLIN, W.W. COOPER Y T. SUEYOSHI (1996). Models for Efficiency Dominance in DEA, *Journal of the Operational Research Society of Japan*, **39**, 322-344.
- [18] BOL, G. (1986). On Technical Efficiency Measures: A Remark, *Journal of Economic Theory*, **38/2**, 91-107.
- [19] BRIEC, W. (1997). A Graph-Type Extension of Farrell Technical Efficiency Measure, *Journal of Productivity Analysis*, **8/1**, 95-110.

- 
- [20] BRIEC, W. (1999). Hölder Distance Functions and Measurement of Technical Efficiency, *Journal of Productivity Analysis*, **11/2**, 111-132.
- [21] BROCKETT, P.L. y B. GOLANY (1996). Using Rank Statistics for Determining Programmatic Efficiency Differences in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, **42/3**, 466-472.
- [22] CHAMBERS, R.G., CHUNG, Y. y FÄRE, R. (1996). Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory*, **70/2**, 407-419.
- [23] CHARNES, A., CLARK, T., COOPER, W.W. y GOLANY, B. (1985). A Developmental Study of Data Envelopment Analysis in Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the U.S. Air Force, en R. Thompson y R.M. Thrall (eds.) *Annals of Operation Research*, **2**, 95-112.
- [24] CHARNES, A. y COOPER, W.W. (1962). Programming With Linear Fractional Functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, **9**, 181-186.
- [25] CHARNES, A., COOPER, W.W., GOLANY, B., SEIFORD, L. y STUTZ, J. (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions, *Journal of Econometrics*, **30 (1/2)**, 91-107.
- [26] CHARNES, A., COOPER, W.W., GOLANY, B., SEIFORD, L. y STUTZ, J. (1987). A Dimensionless Efficiency Measure for Departures from Pareto Optimality, Research Report CCS 480, Center for Cybernetic Studies, The University of Texas, Austin.
- [27] CHARNES, A., COOPER, W.W., LEWIN, A. y SEIFORD, L. (1994). *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers.

- 
- [28] CHARNES, A., COOPER, W.W. Y RHODES, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, **2/6**, 429-444.
- [29] CHARNES, A., COOPER, W.W. Y RHODES, E. (1979). Short Communication: Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, **3/4**, 339.
- [30] CHARNES, A., COOPER, W.W. Y RHODES, E. (1981). Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through, *Management Science*, **27/6**, 668-697.
- [31] CHARNES, A., COOPER, W.W., HUANG, Z.M. Y SUN, D.B. (1990). Polyhedral Cone-Ratio DEA Models With an Illustrative Application to Large Commercial Banks, *Journal of Econometrics*, **46**, 73-91.
- [32] CHARNES, A., COOPER, W.W. Y THRALL, R.M. (1991). A Structure for Classifying and Characterizing Efficiency and Inefficiency in Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **2**, 197-237.
- [33] COELLI, T. (1998). A Multi-Stage Methodology for the Solution of Orientated DEA Models, *Operations Research Letters*, **23**, 143-149.
- [34] COELLI, T., RAO, D.S.P. Y BATTESE, G.E. (1998). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Norwell, Mass: Kluwer Academic Publishers.
- [35] COOPER, W.W., SEIFORD, L. Y TONE, K. (1999). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers.
- [36] COOPER, W.W. Y PASTOR, J.T. (1995). Global Efficiency Measure in DEA, Working Paper Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante.

- [37] COOPER, W.W., PARK, K.S. Y PASTOR, J.T. (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Others Models and Measures in DEA, *Journal of Productivity Analysis*, **11**, 5-42.
- [38] COOK, R.D. Y S. WEISBERG (1982). *Residuals and Influence in Regression*, New York: Chapman and Hall.
- [39] DE BORGER, B. Y KERSTENS, K. (1996). Radial and Nonradial Measures of Technical Efficiency: An Empirical Illustration for Belgian Local Government, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 41-62.
- [40] DEBREU, G. (1951). The Coefficient of Resource Utilization, *Econometrica*, **19**, 273-292.
- [41] DEPRINS, D., SIMAR, L. Y TULKENS, H. (1984). Measuring Labour Efficiency in Post Offices, en M. Marchand, P. and H. Tulkens eds., *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement*. Amsterdam, North-Holland, Cap. 10, 243-267.
- [42] DUSANSKY, R. Y WILSON, P.W. (1994). Measuring Efficiency in the Care of Developmentally Disabled, *Review of Economics and Statistics*, **76**, 340-345.
- [43] DUSANSKY, R. Y WILSON, P.W. (1995). On the Relative Efficiency of Alternative Modes of Producing Public Sector Output: The Case of Developmentally Disabled, *European Journal of Operational Research*, **80**, 608-628.
- [44] DYSON, R.G. Y THANASSOULIS, E. (1988). Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, **39/6**, 563-576.
- [45] FÄRE, R. (1975). Efficiency and the Production Function, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, **35:3-4**, 317-324.

- [46] FÄRE, R., GROSSKOPF, S., LINDGREN, B. Y ROOS, P. (1994). Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach, en *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin y L. Seiford (eds.), Kluwer-Academic Publishers, Boston.
- [47] FÄRE, R., GROSSKOPF, S. Y LOVELL, C.A.K. (1985). *The Measurement of Efficiency of Production*, Kluwer-Nijhoff Publishing.
- [48] FÄRE, R., GROSSKOPF, S. Y PASURKA, C. (1986). Effects on Relative Efficiency in Electric Power generation Due to Environmental Controls, *Resources and Energy*, **8**, 167-184.
- [49] FÄRE, R. Y LOVELL, C.A.K. (1978). Measuring the Technical Efficiency of Production, *Journal of Economic Theory*, **19**, 150-162.
- [50] FÄRE, R., LOVELL, C.A.K. Y ZIESCHANG, K. (1983). Measuring the Technical Efficiency of Multiple Outputs Technologies, in Eichhorn, W., Henn, R. Neumann, K. and Shephard, R.W. eds., *Quantitative Studies on Production and Prices*, Würzburg and Vienna: Physica-Verlag.
- [51] FARRELL, M.J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A: General* **120**, 253-281.
- [52] FERRIER, G., KERSTENS, K. Y VANDEN EECKAUT, P. (1994). Radial and Nonradial Technical Efficiency Measures on a DEA Reference Technology: A Comparison Using US Banking Data, *Recherches Economiques de Louvain*, **60/4**, 449-479.
- [53] FREI, F.X. Y HARKER, P.T. (1999). Projections onto Efficient Frontiers: Theoretical and Computational Extensions to DEA, *Journal of Productivity Analysis*, **11/3**, 275-300.

- 
- [54] FRIED, H.O. Y LOVELL, C.A.K. (1993). *Evaluating the Performance of Credit Unions*, Madison, Wis., Filene Research Institute.
- [55] FRIED, H.O., VANDEN EECKAUT, P. Y LOVELL, C.A.K. (1993). Evaluating the Performance of U.S. Credit Unions, *Journal of Banking and Finance*, **7**, 251-265.
- [56] GIJBELS, I., MAMMEN, E., PARK, B.U. Y SIMAR, L. (1999). On Estimation of Monotone and Concave Frontier Functions, *Journal of the American Statistical Association*, aceptado.
- [57] GREEN, R.H., COOK, W. Y DOYLE, V. (1997). A Note on the Additive Data Envelopment Analysis Model, *Journal of the Operational Research Society*, **48**, 446-448.
- [58] GRIFELL-TATJÉ, E., LOVELL, C.A.K. Y PASTOR, J.T. (1998). A Quasi-Malmquist Productivity Index, *Journal of Productivity Analysis*, **10**, 7-20.
- [59] GRIFELL-TATJÉ, E. Y LOVELL, C.A.K. (1999). A Generalized Malmquist Productivity Index, *Top*, **7/1**, 81-101.
- [60] GROSSKOPF, S. (1986). The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency, *Economic Journal*, **96(382)**, 499-513.
- [61] GROSSKOPF, S. (1996). Statistical Inference and Nonparametric Efficiency: A Selective Survey, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 161-176.
- [62] GROSSKOPF, S. Y V. VALDMANIS (1987). Measuring Hospital Performance, *Health Economics* **6**, **6**, 89-107.
- [63] GUNST, R.F. Y MASON, R.L. (1980). *Regression Analysis and its Applications*, New York: Marcel Dekker.
- [64] HAWKINS, D.M. (1980). *Identification of Outliers*, New York: Chapman and Hall.

- [65] KNEIP, A., PARK, B.U. Y SIMAR, L. (1998). A Note on the Convergence of Nonparametric DEA Efficiency Measures, *Econometric Theory*, **14**, 783-793.
- [66] KOOPMANS, T.C. (1951). Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, en T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, John Wiley.
- [67] KOROSTELEV, A., SIMAR, L. Y TSYBAKOV, A. (1995). On Estimation of Monotone and Convex Boundaries, *Publications de L'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, **39/1**, 3-18.
- [68] LAND, K.C., LOVELL, C.A.K. Y THORE, S. (1993). Chance-Constrained Data Envelopment Analysis, *Managerial and Decision Economics*, **14/6**, 541-554.
- [69] LOVELL, C.A.K. (1994). Linear Programming Approaches to the Measurement and Analysis of Productive Efficiency, *Top*, **2/2**, 175-248.
- [70] LOVELL, C.A.K. Y PASTOR, J.T. (1995). Units Invariant and Translation Invariant DEA Models, *Operations Research Letters*, **18/3**, 147-151.
- [71] LOVELL, C.A.K., PASTOR, J.T. Y TURNER, J.A. (1995). Measuring Macroeconomic Performance in the OECD: A Comparison of European and Non-European Countries, *European Journal of Operational Research*, **87/3**, 507-518.
- [72] LOVELL, C.A.K. Y VANDEN EECKAUT, P. (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, en *Mathematical Modeling in Economics*, W.E. Diewert, K. Spremann y F. Stehling (editores), Physica-Verlag, Berlin (1993). **87/3**, 507-518.
- [73] PARETO, V. (1927) *Manuel d'Economie Politique*, deuxième edition, Marcel Girard (Paris).

- [74] PASTOR, J.T. (1994). New Additive Models for Handling Zero and Negative Data, Working Paper del Dept. de Estadística e I.O. de la Universidad de Alicante.
- [75] PASTOR, J.T. (1996). Translation Invariance in Data Envelopment Analysis: A Generalization, *Annals of Operations Research*, **66**, 93-102.
- [76] PASTOR, J.T. Y BORRÁS, F. (1999). Determining the Best DEA Efficiency Evaluation of a Set of Units, trabajo presentado en el VI European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis celebrado en Copenhagen.
- [77] PASTOR, LOZANO, A. Y PASTOR, J.M. (1997). Efficiency of European Banking Systems: A Correction by Environment Variables, Working Paper, IVIE, Valencia (Spain).
- [78] PASTOR, J.T., RUIZ, J.L. Y SIRVENT, I. (1999). A Statistical Test for Detecting Influential Observations in DEA, *European Journal of Operational Research*, **115/3**, 542-554.
- [79] PASTOR, J.T., RUIZ, J.L. Y SIRVENT, I. (1999). An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure, *European Journal of Operational Research*, **115/3**, 596-607.
- [80] PILLE, P. Y PARADI, J. (1997). Facets at the Frontier and Efficiency Measurement in DEA, Paper presented at the fifth European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis, Copenhagen, October, 1997.
- [81] RUIZ, J.L. Y SIRVENT, I. (1998). Techniques for the Assessment of Influence in DEA, *European Journal of Operational Research*, aceptado.
- [82] RUSSELL, R. (1985). Measures of Technical Efficiency, *Journal of Economic Theory*, **35/1**, 109-126.



- [83] RUSSELL, R. (1988). On the Axiomatic Approach to the Measurement of Technical Efficiency, en W. Eichhorn (ed.) *Measurement in Economic*, Heidelberg, Physica-Verlag, 109-126.
- [84] SEAVER, B.L. Y TRIANTIS, K.P. (1989). The Implications of Using Messy Data to Estimate Production-Frontier-Based Technical Efficiency Measures, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 49-59.
- [85] SEIFORD, L. (1994). A DEA Bibliography (1978-1994), en *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin y L. Seiford (editores), Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [86] SEIFORD, L. (1996). Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of the Art (1978-1975), *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 99-137.
- [87] SHEPHARD, R.W. (1970). *The Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [88] SIMAR, L. (1996). Aspects of Statistical Analysis in DEA-Type Frontiers Models, *Journal of Productivity Analysis*, **7**, 177-185.
- [89] SIMAR, L. Y WILSON, P.W. (1998). Nonparametric Tests of Returns to Scale, Discussion paper #9811, Institut de Statistique and CORE, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [90] SIMAR, L. Y WILSON, P.W. (1998). A General Methodology for Bootstrapping in Nonparametric Frontier Models, Discussion paper #9814, Institut de Statistique and CORE, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [91] SIMAR, L. Y WILSON, P.W. (1998). Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Frontier Models, *Management Science*, **44/1**, 49-61.

- 
- [92] SIMAR, L. Y WILSON, P.W. (2000). Testing Restrictions in Nonparametric Efficiency Models, Discussion paper #0013, Institut de Statistique and CORE, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [93] SIMAR, L. Y WILSON, P.W. (2000). Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: The State of the Art, *Journal of Productivity Analysis*, **13**, 49-78.
- [94] THOMPSON, R.G., LANGEMEIER, L.N., LEE, C.T., LEE, E. Y THRALL, R.M. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis With an Application to Kansas Farming, *Journal of Econometrics*, **46**, 93-108.
- [95] THOMPSON, R.G., SINGLETON, F.D.JR., THRALL, R.M. Y SMITH, B.A. (1986). Comparative Site Evaluation for Locating High-Energy Physics Lab in Texas, *Interfaces*, **16/6**, 35-49.
- [96] TIMMER, C.P. (1971). Using a Probabilistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency, *Journal of Political Economy*, **79**, 776-794.
- [97] THRALL, R.M. (1996). Duality, Classification and Slacks in DEA, *Annals of Operations Research*, **66**, 109-138.
- [98] TONE, K. (1993). An  $\varepsilon$ -free DEA and a New Measure of Efficiency, *Journal of the Operational Research Society of Japan*, **36/3**, 167-174.
- [99] TONE, K. (1997). A Slack-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, aceptado.
- [100] TULKENS, H. (1993). On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit, *Journal of Productivity Analysis*, **4**, 183-210.

- 
- [101] TULKENS, H. Y VANDEN EECKAUT, P. (1991). Nonparametric Efficiency Measurement for Panel Data: Methodologies and an FDH Application to Retail Banking, Research Report, CORE, Louvain-laNeuve, Belgium.
- [102] TULKENS, H. Y VANDEN EECKAUT, P. (1993). Non Parametric Efficiency, Progress and Regress Methods for Panel Data: Methodological Aspects, Discussion Paper 9316, CORE, UCL, Louvain-laNeuve, Belgium.
- [103] WELSCH, R.E. (1982). Influence Functions and Regressions Diagnostics, en *Modern Data Analysis*, R.L Launer y A.F. Siegel editores. New York: Academic Press, 149-169.
- [104] WILSON, G.W. Y J.M. JADLOW (1982). Detecting Influential Observations in Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **6**, 27-45.
- [105] WILSON, P.W. (1993). Competition, Profit Incentives, and Technical Efficiency in the Provision of Nuclear Medicine Services, *The Bell Journal of Economic*, **13**, 472-482.
- [106] WILSON, P.W. (1995). Detecting Influential Observations in Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, **6**, 27-45.
- [107] ZIESCHANG, K. (1984). An Extended Farrell Efficiency Measure, *Journal of Economic Theory*, **33**, 387-396.