

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ

Escuela Politécnica Superior de Elche

**CONTROL BILATERAL POR CONVERGENCIA DE
ESTADOS DE SISTEMAS TELEOPERADOS CON
RETARDOS EN LA TRANSMISIÓN**



TESIS DOCTORAL

por

José María Azorín Poveda
Ingeniero en Informática

2003

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INDUSTRIALES

DIVISIÓN DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Escuela Politécnica Superior de Elche

**CONTROL BILATERAL POR CONVERGENCIA DE
ESTADOS DE SISTEMAS TELEOPERADOS CON
RETARDOS EN LA TRANSMISIÓN**



Autor

José María Azorín Poveda
Ingeniero en Informática

Directores

Rafael Aracil Santonja
Doctor Ingeniero Industrial

Óscar Reinoso García
Doctor Ingeniero Industrial

Elche, 2003

TRIBUNAL

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Vocal secretario:



Calificación de la Tesis:

AUTORIZACIÓN DE PRESENTACIÓN DE TESIS DOCTORAL

Directores: Dr. Rafael Aracil Santonja y Dr. Óscar Reinoso García

Título de la tesis: Control bilateral por convergencia de estados de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión

Autor: José María Azorín Poveda

Departamento: Ingeniería de Sistemas Industriales
Universidad Miguel Hernández

Los directores de la tesis reseñada certificamos que ha sido realizada bajo nuestra dirección por D. José María Azorín Poveda en el Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales de la Universidad Miguel Hernández y autorizamos su presentación de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 8º del R. D. 778/1998, de 30 de abril, por el que se regula el tercer ciclo de estudios universitarios.

Elche, 5 mayo 2003



Firmado: D. Rafael Aracil Santonja



Firmado: D. Óscar Reinoso García

Óscar Reinoso García, Director del Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales de la Universidad Miguel Hernández,

CERTIFICA

Que el trabajo realizado por D. José María Azorín Poveda titulado “**Control bilateral por convergencia de estados de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión**”, ha sido dirigido por el Dr. D. Rafael Aracil Santoja y el Dr. D. Óscar Reinoso García y realizado en el Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales, se encuentra en condiciones de ser leído y defendido como Tesis Doctoral ante el correspondiente tribunal en la Universidad Miguel Hernández.

Lo que firmo para los efectos oportunos en Elche a 5 de mayo de 2003.

UNIVERSITAS
Miguel Hernández
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
DE SISTEMAS INDUSTRIALES
Fdo. Oscar Reinoso García

Director Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales

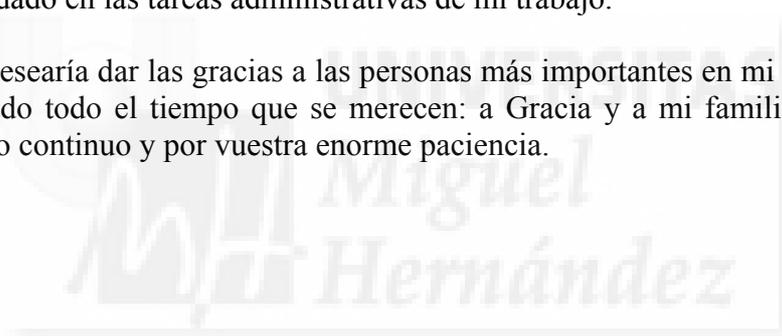
Agradecimientos

En primer lugar desearía expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de Tesis, Rafael Aracil y Óscar Reinoso, por sus inestimables ideas y consejos que han permitido la realización de esta Tesis.

Asimismo quisiera hacer constar mi gratitud a mis compañeros de la División de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Escuela Politécnica Superior de Elche, los profesores: José María Sabater, Nicolás García, Ramón Ñeco, Carlos Pérez, Luis Miguel Jiménez, César Fernández, Rafael Puerto y Asunción Vicente. De un modo u otro, todos han sido una parte muy importante en este tiempo y en este trabajo.

También deseo dar las gracias a compañeros de otras universidades de los que siempre obtuve acertados consejos y gran ayuda: Roque Salterén y Miguel Almonacid. Gracias también a los miembros de la División de Ingeniería Mecánica de la Escuela Politécnica Superior de Elche, Emilio Velasco y Miguel Ángel Oliva, y a Antonia Montoya, por haberme ayudado en las tareas administrativas de mi trabajo.

Por último, desearía dar las gracias a las personas más importantes en mi vida, a las que no he dedicado todo el tiempo que se merecen: a Gracia y a mi familia. Gracias por vuestro apoyo continuo y por vuestra enorme paciencia.



Resumen

Esta Tesis Doctoral tiene como objetivo presentar un nuevo método de diseño y control de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión basado en la convergencia de estados. El método permite que el esclavo siga al maestro, a pesar de la existencia de retardos, siendo además capaz de establecer la dinámica del esclavo, así como la dinámica del error entre el maestro y el esclavo.

En primer lugar se describe de forma detallada el método de diseño y control para un sistema teleoperado con retardos en la transmisión en el que el maestro y el esclavo son representados por ecuaciones diferenciales de segundo orden, explicando el modelado del sistema teleoperado en variables de estado en el que se basa el método.

Seguidamente se estudia de forma exhaustiva el comportamiento dinámico del sistema teleoperado, indicando de qué forma es afectado por los parámetros de diseño considerados. Asimismo se analiza la robustez del método de control a ligeras variaciones en los parámetros de diseño.

A continuación se explican los criterios que se utilizan para analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos. Mediante estos criterios se estudia la influencia de los parámetros de diseño en la estabilidad asintótica, indicando bajo qué condiciones se vuelve inestable el sistema, o en el caso de que sea inestable, como puede estabilizarse.

Además se generaliza el método de diseño y control de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión al caso en el que el maestro y el esclavo del sistema teleoperado sean modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n .

Por último se muestran los resultados experimentales obtenidos al aplicar el método de diseño y control a un sistema teleoperado real de un grado de libertad.

Abstract

This Doctoral Thesis has as objective to present a new design and control method of teleoperation systems with communication time delay based in state convergence. The method allows that the slave follows the master in spite of the time delay. Also the proposed method allows to establish as the slave dynamics as the master – slave error dynamics.

First at all, the design and control method considering a teleoperation system with time delay where the master and the slave are represented by second order differential equations is described, explaining the modelling of the teleoperation system in the state space that the method uses.

The dynamic behaviour of the teleoperation system is completely studied, indicating how the design parameters affect it. Also, the robustness of the control method against slight variations of the design parameters is analyzed.

Then, the criteria used to analyse the asymptotic stability of the teleoperation system with time delay are explained. Through these criteria, the influence of the design parameters in the asymptotic stability is studied, showing the conditions where the system becomes unstable, or if the system is not stable, indicating how the system can be stable.

In addition, the design and control method of teleoperation systems with communication time delay is generalized to the case where the master and the slave of the teleoperation system can be modelled by n order linear differential equations.

Finally, the experimental results obtained applying the design and control method to a real teleoperation system of one degree of freedom are presented.

Contenido

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Motivación y marco de la Tesis.....	1
1.2 Objetivos de la Tesis.....	2
1.3 Estructura de la Tesis.....	3
Capítulo 2. Control con retardos en teleoperación	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 Teleoperación.....	6
2.2.1 Orígenes.....	6
2.2.2 Elementos de un sistema de teleoperación.....	8
2.3 Control en teleoperación.....	9
2.3.1 Introducción al control de sistemas teleoperados.....	9
2.3.2 Esquemas clásicos de control bilateral.....	10
2.4 Control en teleoperación con retardos.....	15
2.4.1 Orígenes.....	15
2.4.2 El problema de la inestabilidad con retardos.....	17
2.4.3 Retardos en la realimentación de información visual.....	17
2.4.4 Retardos en la realimentación de información cinestésica.....	19
2.5 Esquemas de control bilateral de sistemas teleoperados con retardo constante.....	20
2.5.1 Control bilateral basado en pasividad.....	21
2.5.2 Control bilateral basado en variables de onda.....	23
2.5.3 Control bilateral acomodaticio compartido.....	26
2.5.4 Control bilateral con telemonitorización.....	28
2.5.5 Control optimizado para transparencia.....	30
2.5.6 Control adaptativo de movimiento/fuerza garantizando estabilidad.....	32
2.5.7 Otros esquemas de control.....	34
2.6 Esquemas de control bilateral de sistemas teleoperados con retardo variable.....	36
2.7 Conclusiones.....	37
Capítulo 3. Modelado y diseño de un sistema de control de teleoperación con retardos en la transmisión por convergencia de estados	39
3.1 Introducción.....	39
3.2 Modelado del sistema teleoperado.....	40
3.2.1 Análisis del modelo.....	42
3.2.2 Modelado del entorno.....	44

3.2.3 Aproximación del retardo.....	47
3.3 Diseño del control del sistema teleoperado con retardos en la transmisión por convergencia de estados.....	49
3.4 Diseño del control de teleoperación con retardos considerando que la fuerza del operador no es constante.....	56
3.4.1 Opción 1: $g_2 = 0$	60
3.4.2 Opción 2: $J_m + Tr_{m2} = 0$	64
3.5 Diseño del control de teleoperación con retardos considerando mayor aproximación del retardo	66
3.6 Conclusiones.....	79

Capítulo 4. Análisis del comportamiento dinámico del sistema teleoperado con retardos..... 81

4.1 Introducción.....	81
4.2 Consideraciones importantes.....	82
4.3 Pruebas en simulación del método de diseño.....	84
4.3.1 Sistema teleoperado I: maestro < esclavo	86
4.3.2 Sistema teleoperado II: maestro = esclavo.....	94
4.3.3 Sistema teleoperado III: maestro > esclavo	100
4.3.4 Conclusiones	105
4.4 Influencia de la elección de los polos del error y del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	109
4.4.1 Influencia de los polos del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.....	111
4.4.2 Influencia de los polos del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.....	116
4.4.3 Influencia conjunta de los polos del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	121
4.5 Robustez del método de control a variaciones de los parámetros de diseño del sistema teleoperado	123
4.5.1 Influencia del retardo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	124
4.5.2 Influencia del entorno en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	126
4.5.3 Influencia del maestro en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	129
4.5.4 Influencia del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	131
4.5.5 Conclusiones	133
4.6 Conclusiones.....	134

Capítulo 5. Análisis de estabilidad del sistema de control de teleoperación con retardos..... 137

5.1 Introducción.....	137
5.2 Estabilidad de sistemas lineales con retardo	139
5.2.1 Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia ...	140
5.2.2 Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio del tiempo	143

5.3 Análisis de estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos	145
5.4 Estudio de estabilidad asintótica de sistemas teleoperados con retardos	148
5.4.1 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado I: maestro < esclavo	149
5.4.2 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado II: maestro = esclavo	151
5.4.3 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado III: maestro > esclavo	155
5.4.4 Conclusiones	157
5.5 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del polinomio característico del esclavo y del error	159
5.5.1 Influencia de los polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado	160
5.5.2 Influencia de los polos del error en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado	162
5.5.3 Influencia conjunta de los polos del esclavo y del error	164
5.6 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del tiempo de retardo de diseño	165
5.7 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del entorno de interacción	167
5.8 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado de la constante de reflexión de esfuerzos	168
5.9 Conclusiones	172

Capítulo 6. Generalización del método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión

6.1 Introducción	175
6.2 Sistema teleoperado modelado por ecuaciones diferenciales que no contienen ceros	177
6.2.1 Modelado del sistema teleoperado	177
6.2.2 Diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos por convergencia de estados	183
6.3 Sistema teleoperado modelado por ecuaciones diferenciales que contienen ceros	190
6.3.1 Modelado del sistema teleoperado	191
6.3.2 Diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos por convergencia de estados	196
6.4 Conclusiones	209

Capítulo 7. Pruebas experimentales

7.1 Introducción	211
7.2 Descripción del entorno experimental	212
7.2.1 Descripción del sistema teleoperado	212
7.2.2 Tarjeta de adquisición <i>National Instruments</i>	213
7.3 Identificación del sistema teleoperado	214
7.3.1 Identificación en velocidad	215
7.3.2 Identificación en posición	217
7.4 Modelado y diseño del sistema de control teleoperado con retardos	219
7.4.1 Modelado del sistema teleoperado	219
7.4.2 Diseño del sistema de control	222

7.5 Resultados en simulación	223
7.6 Resultados reales	229
7.6.1 Respuesta del sistema teleoperado simulando la fuerza del operador mediante un escalón y simulando la interacción del esclavo con el entorno	230
7.6.2 Respuesta del sistema teleoperado simulando la fuerza del operador mediante una rampa y simulando la interacción del esclavo con el entorno	243
7.6.3 Respuesta del sistema teleoperado ante una fuerza ejercida por el operador cualquiera y un entorno de interacción real	249
7.7 Conclusiones	261

Capítulo 8. Conclusiones

265

8.1 Conclusiones y aportaciones de la Tesis	265
8.2 Futuros trabajos	267

Bibliografía

269

Índice de figuras

279

Índice de tablas

287



Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación y marco de la Tesis

La teleoperación es una disciplina científica comprendiendo el conjunto de tecnologías que permiten a un operador gobernar un dispositivo remoto mediante el control de un dispositivo local [Vertut-85]. En la actualidad la teleoperación pertenece al ámbito de la robótica, si bien sus orígenes fueron diferentes.

Desde sus orígenes los robots han sido aplicados mayoritariamente en el sector de la industria automovilística [Barrientos-97]. En 1960 se fabricó el primer robot industrial, que fue utilizado al poco tiempo en una fábrica de *General Motors* en una aplicación de fundición por inyección. La robótica ha estado ligada a la realización de una tarea de forma repetitiva, aportando mayor calidad y rapidez que un operador humano.

Los orígenes de la teleoperación fueron motivados por los requerimientos de la industria nuclear. En 1948 Ray Goertz, del *Argonne National Laboratory* de Estados Unidos, desarrolló el primer sistema de teleoperación maestro-esclavo, en el que ambos manipuladores estaban unidos mecánicamente [Goertz-64]. A partir de entonces empezaron a surgir sistemas teleoperados servocontrolados de tipo eléctrico. Para que el operador tuviera constancia de las fuerzas ejercidas por el esclavo en el entorno remoto, y de este modo se mejorara la realización de las tareas, se desarrollaron sistemas en los que las fuerzas de interacción del esclavo con el entorno eran realimentadas hacia el maestro. A este tipo de sistemas se les denomina sistemas de teleoperación con control bilateral.

La existencia de retardos en la comunicación entre el entorno local, en el que se encuentra el maestro, y el entorno remoto, en el que se ubica el esclavo, supone un gran problema en la estabilidad de los sistemas teleoperados. Esto se puso de manifiesto en las primeras aplicaciones de teleoperación en el espacio en los años 60, debido a las grandes distancias existentes entre la zona local (base terrestre) y la zona remota (órbita espacial) que han de cubrir las ondas de radio [Sheridan-93]. En un sistema con control bilateral la aparición de retardos desestabiliza el sistema [Ferrell-66]. Del mismo modo que los requerimientos en la industria nuclear condujeron al desarrollo de los sistemas de teleoperación, las necesidades de la industria espacial han potenciado el estudio de la problemática de los retardos en la teleoperación.

Una opción muy utilizada para solucionar la problemática de los retardos cuando éstos son considerables, como ocurre en las aplicaciones de teleoperación en el espacio, consiste en utilizar los denominados visualizadores predictivos [Bejczy-90] con

generación de fuerzas virtuales. En este caso el operador realiza sus acciones utilizando un modelo simulado de la zona remota, de forma que se le realimenta en tiempo real fuerzas de interacción generadas virtualmente.

A diferencia de las aplicaciones espaciales, donde el retardo existente en la comunicación es importante, en la mayoría de aplicaciones de teleoperación los retardos existentes son pequeños. Para este tipo de aplicaciones existen en la literatura diversos esquemas de control en tiempo real en los que existe un bucle de realimentación del esclavo hacia el maestro.

Esta Tesis se enmarca dentro de la teleoperación, y más concretamente, en el campo del control bilateral de sistemas teleoperados con retardos en la comunicación. Dentro de este campo, la Tesis se centra en los sistemas de control bilateral válidos para retardos en la comunicación constantes de hasta pocos segundos, presentando un nuevo método de diseño y control de sistemas bilaterales de teleoperación con retardos.

1.2 Objetivos de la Tesis

Como se ha citado en el apartado anterior, la Tesis se enmarca en los sistemas de control bilateral con retardos “pequeños” en la comunicación, siendo su objetivo primordial la presentación de un nuevo método de diseño y control de sistemas bilaterales de teleoperación con retardos. Más concretamente, los objetivos específicos que se han marcado en la realización de esta Tesis han sido los siguientes:

- Estudiar los diferentes esquemas de control bilateral de sistemas teleoperados con retardos existentes en la literatura.
- Presentar un nuevo modelado de sistemas teleoperados con retardos en variables de estado en el que se tengan en consideración todas las interacciones que puede aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno.
- Obtener un modelo de estado completo del sistema teleoperado con retardos, en el que no existan términos afectados por el retardo existente en la comunicación.
- Establecer un método de diseño claro y conciso basado en el espacio de estados que permita obtener los parámetros de regulación del sistema teleoperado, de forma que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos y, además, pueda establecerse el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.
- Indicar de qué forma seleccionar los parámetros de diseño del sistema teleoperado para obtener el comportamiento dinámico deseado.
- Analizar la robustez del sistema teleoperado a variaciones de los parámetros de diseño.
- Mostrar las herramientas que pueden utilizarse para estudiar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos.
- Analizar la influencia de los parámetros de diseño en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos, indicando bajo qué condiciones se vuelve inestable el sistema, o en el caso de que sea inestable, de qué forma puede estabilizarse.

- Generalizar el método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales de cualquier orden.
- Aplicar el nuevo método de diseño a un sistema teleoperado real para demostrar su validez experimentalmente.

1.3 Estructura de la Tesis

La Tesis se divide en ocho capítulos. A continuación se describe brevemente el contenido de cada capítulo:

- En el presente capítulo se ha indicado el marco en el que se encuadra la tesis, el control bilateral de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión, planteando asimismo los objetivos que debe cubrir, y cómo ha sido estructurada.
- El capítulo 2 aporta un estado del arte de los sistemas de control bilateral teleoperados con retardos en la transmisión que pueden encontrarse en la literatura. En este estado de arte se efectúa una distinción entre aquellos esquemas que se utilizan cuando el retardo en la comunicación es constante, de los empleados cuando el retardo es variable, efectuando un mayor énfasis en los esquemas existentes cuando el retardo es constante. Esto se debe a que esta Tesis aporta un novedoso método de control de sistemas teleoperados en los que existen un retardo en la transmisión constante. Asimismo, en este capítulo se presenta una introducción a la teleoperación y al control de sistemas teleoperados, explicando los esquemas de control bilateral clásicos empleados cuando no existen retardos en la comunicación.
- El capítulo 3 representa la principal aportación de la Tesis. En este capítulo se va a presentar un nuevo método de diseño y control de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión. El método permite que el esclavo siga al maestro, a pesar de la existencia de retardos, siendo además capaz de establecer la dinámica del esclavo, así como la dinámica del error entre el maestro y el esclavo. Este método se basa en un novedoso modelado del sistema teleoperado en variables de estado en el dominio del tiempo, en el que se han contemplado todas las posibles interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – medio. El método de diseño utiliza la aproximación de Taylor para modelar el retardo existente en la transmisión, lo cual constituye una idea original en el modelado y diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos. A lo largo del capítulo se explica como efectuar el modelado de un sistema teleoperado de un grado de libertad y como obtener las ecuaciones de diseño que permiten calcular los valores de los reguladores que aparecen en el sistema.
- En el capítulo 4 se verifica en simulación el método de diseño presentado en el capítulo 3 sobre diversos sistemas teleoperados de un grado de libertad, considerando diferentes tipos de entornos con los que interacciona el esclavo así como distintos tiempos de retardo. Asimismo se efectúa un estudio exhaustivo del comportamiento dinámico del sistema teleoperado, analizando como afecta a la respuesta del sistema y a las señales de control, la clase de sistema teleoperado considerado, el tipo de entorno y el retardo existente. Además se estudia como es influenciado el comportamiento del sistema por la elección

realizada de la dinámica deseada del esclavo y del error. Por último se analiza la robustez del método de control a ligeras variaciones en los parámetros de diseño.

- El capítulo 5 está dedicado al estudio de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos aportado en la Tesis. En primer lugar se presenta un resumen de los métodos existentes para analizar la estabilidad de un sistema lineal con retardos. Seguidamente se explican los criterios que van a utilizarse para realizar el análisis de estabilidad. Mediante estos criterios se estudia la estabilidad asintótica de los sistemas teleoperados presentados en el capítulo 4, y se analiza la influencia en la estabilidad asintótica de los parámetros de diseño. A partir de este análisis se indica bajo qué condiciones se vuelve inestable el sistema, o en el caso de que sea inestable, como puede estabilizarse.
- En el capítulo 6 se generaliza el método de diseño presentado en el capítulo 3, en el que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n . Para realizar esta generalización, se distingue el caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones que no contienen ceros, del caso en que sí contienen ceros. Este capítulo constituye otra clara aportación de la Tesis, pues el método que se expone permite efectuar el diseño del sistema teleoperado con retardos para cualquier modelo lineal de maestro y esclavo.
- El capítulo 7 describe las pruebas experimentales realizadas sobre un sistema teleoperado de un grado de libertad desarrollado en el Área de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Miguel Hernández de Elche. En este capítulo se muestran diversos resultados experimentales obtenidos al controlar el sistema teleoperado, considerando diferentes retardos y entornos de interacción, que validan el novedoso método de diseño y control aportado por la Tesis.
- Por último, en el capítulo 8 se resumen las principales conclusiones que se han derivado de la realización de la Tesis, citando además los posibles trabajos futuros relacionados con las investigaciones desarrolladas.

Capítulo 2

Control con retardos en teleoperación

2.1 Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de los sistemas de control utilizados en teleoperación cuando existen retardos en la comunicación. En este sentido, este capítulo aporta un estado del arte de los sistemas de control bilateral con retardos que pueden encontrarse en la literatura. En este estado de arte se efectúa una distinción entre aquellos esquemas que se utilizan cuando el retardo en la comunicación es constante, de los empleados cuando el retardo es variable. Esta diferenciación se debe a que la presente Tesis va a presentar un nuevo método de control bilateral de sistemas teleoperados en los que existe un retardo constante en la comunicación. Por este motivo se hará especial hincapié en los esquemas existentes cuando el retardo es constante, explicando sus principales características. Asimismo se expondrán de forma resumida las principales soluciones utilizadas cuando el retardo en la comunicación es variable, ya que, si bien este aspecto no es analizado en la Tesis, sí debe tenerse en cuenta como futuro campo de trabajo. Antes de presentar los diferentes sistemas de control bilateral con retardos, se explicarán los esquemas de control bilateral clásicos, empleados cuando no existen retardos en la comunicación. En este capítulo, además, inicialmente se introducirá brevemente la teleoperación, explicando sus orígenes y los elementos básicos de los que se compone un sistema teleoperado.

La estructura de este capítulo va a ser la siguiente. En primer lugar se presentará la teleoperación, indicando cuáles fueron sus orígenes y de qué elementos consta un sistema teleoperado. A continuación se estudiará el control en teleoperación sin considerar la existencia de retardos en la comunicación, realizando una clasificación de los tipos de control empleados en teleoperación, y explicando los esquemas de control bilateral considerados clásicos. Seguidamente se profundizará en el control en teleoperación con retardos, citando sus orígenes y problemática, y detallando las primeras soluciones adoptadas, diferenciándolas en función de si los retardos afectan a la realimentación de información visual o de si afectan a la realimentación de información cinestésica o de fuerza. Posteriormente se describirán los sistemas de control bilateral válidos para retardos de pocos segundos en los que existe una realimentación de la fuerza del esclavo hacia el maestro, profundizando en el caso de que el retardo es constante, y resumiendo los esquemas utilizados cuando el retardo es variable. Por último se expondrán las principales conclusiones del capítulo.

2.2 Teleoperación

La *teleoperación*, como su nombre indica (el prefijo *tele-* connota distancia), hace referencia a la realización de tareas a distancia. En un sentido más concreto, la teleoperación comprende el conjunto de tecnologías que posibilitan a un operador gobernar un dispositivo remoto mediante el control de un dispositivo local. Más adelante, dentro de este apartado, se describirán los elementos que forman parte de un sistema teleoperado.

2.2.1 Orígenes

A lo largo de la historia el hombre ha venido usando diferentes herramientas bien para extender su alcance, o bien para realizar tareas que le comportan un cierto peligro. Por ejemplo, mediante unas tenazas de herrero es posible manejar objetos calientes sin peligro de quemarse.

Los orígenes de la teleoperación actual fueron motivados por los requerimientos de la industria nuclear [Vertut-85]. A principios del siglo pasado se descubrieron los peligros que entrañaba al operador el manejo de materiales radiactivos. La primera solución por la que se optó fue el utilizar pinzas de manipulación de hasta 50 cm para alejar al operador del material radiactivo. Conforme evolucionó la industria nuclear, se emplearon pinzas que se ubicaban detrás de barreras de protección. Sin embargo, estas pinzas poseían muchos inconvenientes, como por ejemplo, la restricción en los movimientos que podían realizarse.

A partir de 1947, Ray Goertz, del *Argonne National Laboratory* de Estados Unidos lideró una serie de investigaciones cuyo objetivo era el desarrollo de sistemas de telemanipulación para facilitar la realización de tareas a distancia [Goertz-64]. Fue en 1948 cuando se desarrolló el primer sistema maestro – esclavo (modelo M1). En este sistema el maestro y el esclavo estaban unidos mecánicamente. El sistema permitía que la pinza del esclavo reprodujera los movimientos impuestos por el operador sobre el extremo del maestro. Años más tarde, en 1954, se desarrolló un sistema en el que el esclavo reproducía los movimientos del maestro, y en el que existía realimentación de fuerza del esclavo hacia el maestro (modelo E1), Figura 2.1. Este sistema utilizaba un servocontrol eléctrico bilateral en lugar de conexiones mecánicas. En 1965 fue fabricado el primer sistema teleoperado industrial (modelo E4), que se caracterizaba por poseer un monitor de televisión y una cámara controlada por el movimiento de la cabeza del operador.

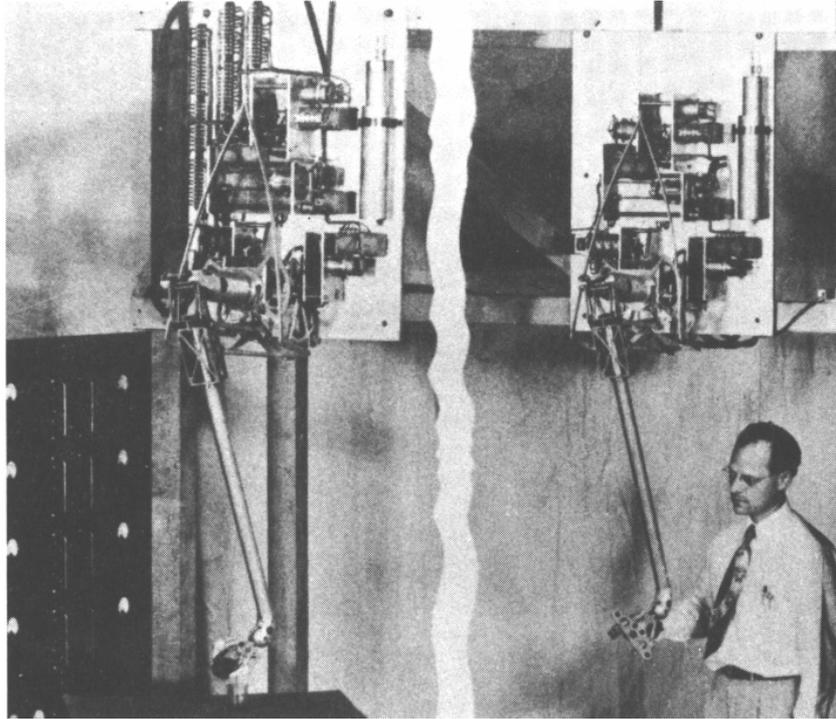


Figura 2.1. Primer sistema teleoperado eléctrico (modelo E1), desarrollado por R. Goertz.

En 1958 Ralph Mosher y su equipo en *General Electric* desarrollaron un sistema teleoperado con accionamiento hidroeléctrico y con realimentación de fuerza denominado *Handyman* [Mosher-60], Figura 2.2. Este sistema constaba de dos brazos manipuladores y de dos maestros en forma de exoesqueleto que rodeaban los brazos del operador. Carl Flatau en 1965, del *Brookhaven National Laboratory*, desarrolló un telemanipulador en el que se utilizó por primera vez sensores de fuerza y motores DC.

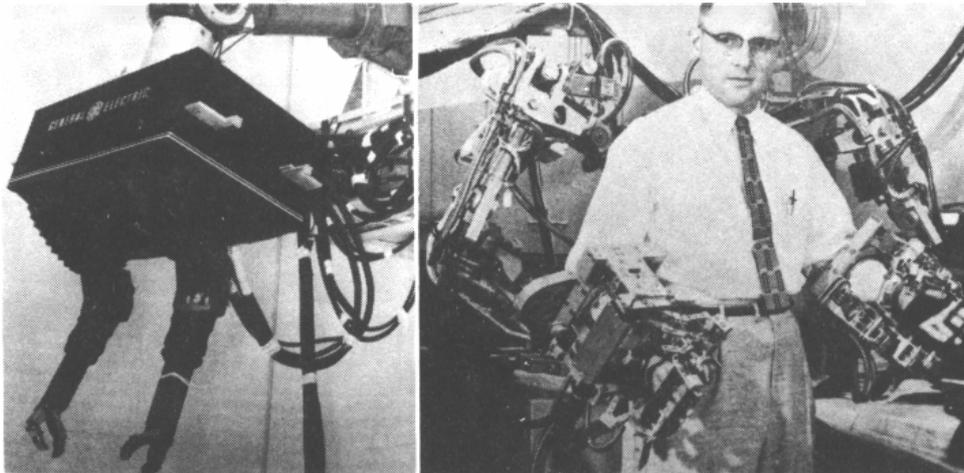


Figura 2.2. Sistema teleoperado *Handyman* creado por R. Mosher.

Por otra parte, a partir de 1956, comenzó en Europa el desarrollo de sistema teleoperados en el sector nuclear. Pesanti y Cherel construyeron para la Agencia de Energía Atómica francesa, CEA (*Commissariat à l'Energie Atomique*), un sistema maestro – esclavo mecánico [Pesanti-59]. En 1958 Cherel y Valentin desarrollaron un manipulador motorizado con transmisión magnetomecánica. En el mismo año, un

equipo italiano, en colaboración con el *Argonne National Laboratory*, crearon el sistema teleoperado Mascot. En 1959 Germond construyó un telemanipulador neumático. Más adelante, en 1965, Jean Vertut desarrolló un sistema teleoperado mecánico.

En los años 60 comenzó la tecnología de la teleoperación a utilizarse en aplicaciones submarinas [Wernli-82] y espaciales [Vertut-85]. En 1961, un submarino americano tripulado, el batiscafo *Trieste*, fue equipado con un telemanipulador que era controlado unilateralmente mediante un teclado.

En 1967 el dispositivo *Surveyor III*, aterrizó sobre la superficie de la Luna. Este dispositivo poseía brazos manipuladores para tomar muestras de tierra lunar y medir la fuerza requerida para realizar esta operación. Fue la primera teleoperación en el espacio.

Para obtener información ampliada acerca del origen de los sistemas de teleoperación, así como de su evolución, puede consultarse [Vertut-85].

2.2.2 Elementos de un sistema de teleoperación

Un sistema teleoperado básicamente se compone de un dispositivo maestro y un sistema esclavo. El dispositivo maestro se ubica en la zona en la que se encuentra el operador (zona local), mientras que el esclavo se encuentra en la zona en la que debe realizarse la tarea (zona remota). En un funcionamiento normal del sistema teleoperado, el operador comanda el maestro para que el esclavo realice la tarea en el entorno remoto al reproducir las órdenes del maestro. Puesto que el esclavo se ubica en una zona remota a la que el operador no tiene acceso, es necesario que en el sistema exista una interfaz visual con la que el operador pueda observar la realización de la tarea. Esta interfaz visual se consigue mediante cámaras que se ubican en el entorno remoto y los correspondientes monitores que se encuentran en la zona local. Asimismo para aumentar la *telepresencia* del operador [Held-92] y, de este modo mejorar la realización de las tareas, se suele realimentar sobre el operador las fuerzas de interacción del esclavo con el entorno. Para ello se suelen utilizar sensores de fuerza/par en el esclavo junto con accionadores en el maestro.

En sistemas teleoperados avanzados, para mejorar la comunicación del operador con el sistema, se utilizan interfaces de lenguaje natural que permiten al operador comandar el sistema mediante el habla [Ñeco-01]. Asimismo en ocasiones se mejora la interfaz visual incorporando gráficos generados por computador, creándose lo que se denomina *realidad aumentada* [Azuma-97]. Generalmente al conjunto de equipos y programas que comunican al operador con los elementos del entorno remoto se le denomina interfaz [Ferre-97].

Para la comunicación de señales entre el entorno local y el entorno remoto es necesario utilizar canales de comunicación que posean el ancho de banda adecuado. Cuando la distancia entre el entorno local y el entorno remoto sea excesivamente elevada o el canal no posibilite una velocidad de transmisión alta, aparecerán retardos en la comunicación que deberán ser considerados para el control del sistema teleoperado. En la presente Tesis se asumirá que el canal de comunicación introduce un retardo en la comunicación que es conocido y constante. Habitualmente en los sistemas de teleoperación avanzados

se utiliza un computador en la zona local y otro en la zona remota para procesar el flujo de señales así como para otros fines (procesamiento lenguaje natural, realidad aumentada,...) [Reinoso-01].

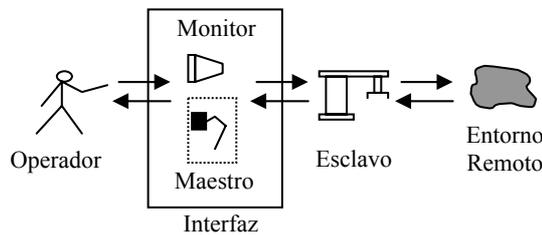


Figura 2.3. Elementos principales de un sistema teleoperado.

Un sistema de teleoperación consta, básicamente, de los siguientes elementos, Figura 2.3:

- *Operador*: Persona que realiza a distancia el control de la operación. Su acción puede ir desde un control continuo hasta un control supervisado [Sheridan-92].
- *Esclavo*: Dispositivo que se encuentra en la zona remota y que está siendo controlado por el operador. Podrá ser un manipulador o un robot.
- *Interfaz*: Equipos y programas que comunican al operador con los elementos del entorno remoto: manipulador maestro, monitores de vídeo, sistema de reconocimiento de voz ...
- *Control y canales de comunicación*: Dispositivos que se encargan de la transmisión y procesamiento de las señales que se envían entre la zona remota y la local.
- *Sensores*: Dispositivos que recogen la información de la zona local y de la zona remota para ser utilizada por el interfaz y el control.

2.3 Control en teleoperación

Antes de comenzar el estudio de los sistemas de control utilizados en teleoperación cuando existen retardos en la comunicación, se va a realizar una introducción al control en teleoperación, y se van a presentar de forma resumida los esquemas de control empleados habitualmente cuando no existen retardos. En [Peñín-98] puede encontrarse un amplio análisis de estos esquemas.

2.3.1 Introducción al control de sistemas teleoperados

El primer control utilizado en los sistemas teleoperados fue de tipo unilateral. En este control no existe realimentación desde el esclavo hacia el maestro. Sólo se realiza el control en un sentido, desde el maestro hacia el esclavo. El maestro genera las señales de referencia, de posición o velocidad, para los bucles de control de las articulaciones del esclavo. A este tipo de control también se le denomina control en bucle abierto.

Para aumentar el rendimiento del operador en la realización de tareas, generalmente se realimenta sobre el maestro la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, aumentando de este modo la telepresencia [Held-92]. En este caso el control implantado se denomina bilateral. En el control bilateral existen variables de control en el sentido del maestro al esclavo y en el sentido del esclavo al maestro.

El control de sistemas teleoperados puede clasificarse como se indica en [Peñín-98], en control independiente o integrado, y control en posición o en velocidad.

- Control independiente o integrado [Vertut-85]. En el control independiente el maestro en el mismo instante sólo puede generar señales de referencia a una articulación del esclavo. Sin embargo en el control integrado, el maestro genera las señales de referencia de uso simultáneo en todos los bucles de control del esclavo. Dentro del control integrado hay que diferenciar si el maestro y el esclavo poseen o no cinemática equivalente. En el caso de que sean de cinemática equivalente, las señales de referencia obtenidas de las articulaciones del maestro serán aplicadas directamente sobre los bucles de las articulaciones del esclavo. Por el contrario, si son cinemáticamente diferentes, deberán realizarse transformaciones intermedias de forma que el movimiento en posición y orientación del maestro se convierta en comandos de posición y orientación para el extremo del esclavo.
- Control en posición o en velocidad. En esta clasificación se distingue el control según las señales que genera el maestro para controlar el esclavo. Si las señales que envía el maestro son las posiciones de referencia del esclavo, se tratará de un control en posición, mientras que si son las velocidades de referencia del esclavo, se hablará de un control en velocidad.

2.3.2 Esquemas clásicos de control bilateral

Se van a presentar los esquemas de control bilateral habitualmente utilizados en los sistemas teleoperados [Peñín-98]. En concreto se van a detallar los esquemas de control bilateral posición – posición, fuerza – posición y presión – posición.

Para describir estos esquemas de control se va a considerar un modelo simplificado lineal de sistema teleoperado de un grado de libertad [Yokokohji-92], Figura 2.4. En este modelo se considera el maestro, el esclavo y el entorno, por el contrario no se tiene en cuenta el operador. Este modelo es válido para los tres esquemas de control bilateral clásicos. La única diferencia entre ambos vendrá dada por la ley de control bilateral de las fuerzas que generan los actuadores del maestro y del esclavo. El manipulador maestro se modela como una masa de valor m_m que en su movimiento ha de vencer un rozamiento viscoso de valor b_m . La fuerza generada por su accionamiento se denomina τ_m , mientras que la generada por el operador se llama f_m . El esclavo es modelado como una masa de valor m_s que tiene asociada un rozamiento viscoso b_s . La fuerza generada por el accionamiento del esclavo se denomina τ_s . El entorno es modelado durante el contacto como una rigidez de valor k_e . La fuerza de reacción del entorno sobre el esclavo se denomina f_s . Este modelado corresponde a un entorno de tipo Kelvin en el que se ha supuesto despreciable la masa y el rozamiento viscoso asociados al entorno [Janabi-95].

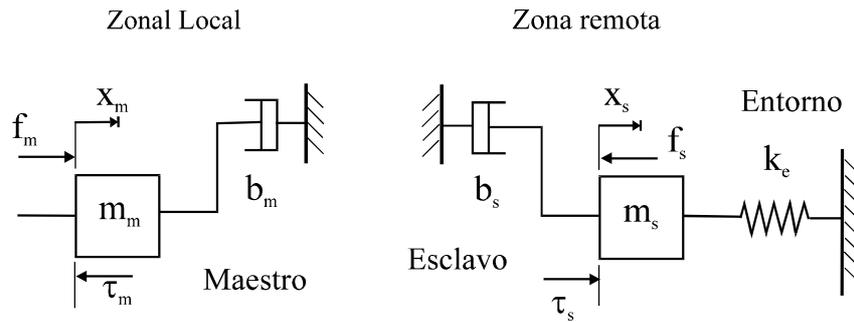


Figura 2.4. Modelo de un sistema teleoperado de un único grado de libertad.

Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema teleoperado, sin considerar las fuerzas generadas en los actuadores del maestro y del esclavo, que vendrán determinadas por la ley de control empleadas, son:

$$f_m - \tau_m = m_m \ddot{x}_m + b_m \dot{x}_m \quad (2.1)$$

$$\tau_s - f_s = m_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s \quad (2.2)$$

$$f_s = k_e x_s \quad (2.3)$$

A continuación se van a describir los esquemas de control bilateral clásicos utilizando el modelo de sistema teleoperado considerado.

Control posición – posición

En este esquema se controla al maestro con un bucle de posición en el que se realimenta la posición actual del esclavo. El esclavo también se encuentra servocontrolado en posición, tomando como referencia la posición del maestro. En este control no es necesario utilizar ningún sensor de fuerza/par, Figura 2.5.

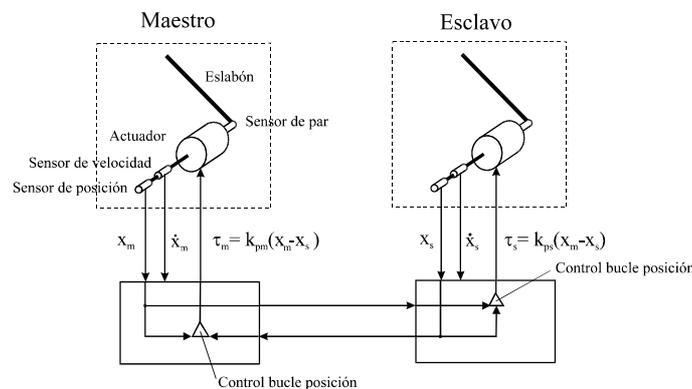


Figura 2.5. Esquema de control bilateral posición – posición.

Las ecuaciones que determinan la señal de control del maestro y del esclavo en un esquema de control bilateral posición – posición son las siguientes:

$$\tau_m = k_{pm}(x_m - x_s) \quad (2.4)$$

$$\tau_s = k_{ps}(x_m - x_s) \quad (2.5)$$

Como se observa en la ecuación (2.4) la fuerza que genera el accionamiento del maestro es directamente proporcional a la diferencia de posiciones entre el maestro y el esclavo a través de un regulador proporcional de constante k_{pm} , denominado constante del servo de posición del maestro. La ley de control del esclavo, como se especifica en la ecuación (2.5), se obtiene a través de un regulador proporcional de constante k_{ps} , que trabaja con el error de posición entre el maestro y el esclavo.

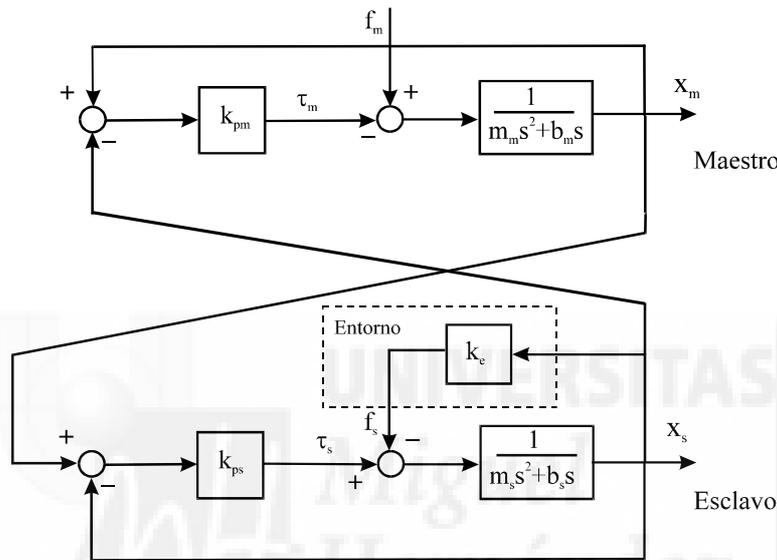


Figura 2.6. Diagrama de bloques del esquema posición – posición.

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5), se obtiene el diagrama de bloques del esquema de control bilateral posición – posición, Figura 2.6. El funcionamiento del esquema de control posición – posición es el siguiente. Para mover el maestro el operador aplica una determinada fuerza f_m . La posición del maestro sirve como referencia al bucle de posición del esclavo. Al mismo tiempo, la posición del esclavo se realimenta al bucle de posición del maestro, por lo que el maestro será frenado por la posición del esclavo. Cuando el esclavo interactúe con el entorno, se detendrá su avance, de forma que existirá un error entre la posición del maestro y del esclavo, y se generará una fuerza τ_m en el maestro. Cuando esta fuerza sea igual a la fuerza f_m aplicada por el operador, el maestro se parará, y por lo tanto, también lo hará el esclavo.

Control fuerza – posición

En este esquema el esclavo se encuentra servocontrolado en posición tomando como referencia la posición en cada momento del maestro. Por otra parte el actuador del maestro recibe una señal de realimentación de fuerza proveniente del sensor de fuerza en el eje del esclavo, Figura 2.7.

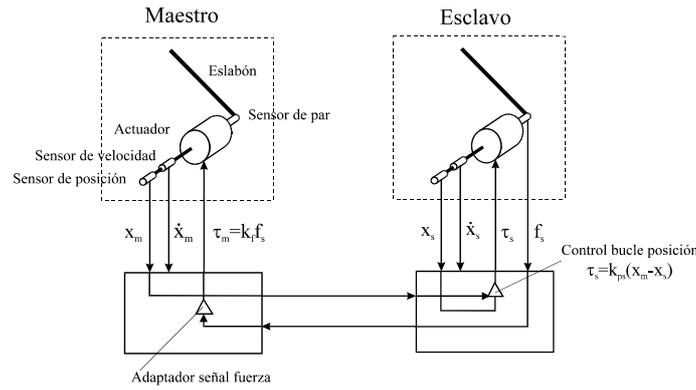


Figura 2.7. Esquema de control bilateral fuerza – posición.

Las ecuaciones que rigen la ley de control en un esquema de control bilateral fuerza – posición son las siguientes:

$$\tau_m = k_f f_s \quad (2.6)$$

$$\tau_s = k_{ps} (x_m - x_s) \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.6) se muestra que la fuerza que genera el accionamiento del maestro es directamente proporcional a la fuerza de reacción con el entorno f_s a través de una constante de proporcionalidad k_f , denominada *constante de reflexión de esfuerzos*. La ley de control del esclavo, como se especifica en la ecuación (2.7), se obtiene a través de un regulador proporcional de constante k_{ps} , que trabaja con el error de posición entre el maestro y el esclavo. Esta ley de control es la misma que se utiliza en el esquema de control posición – posición.

Hay que destacar la influencia del coeficiente de reflexión de esfuerzos k_f en el comportamiento de los sistemas teleoperados. Este coeficiente pondera la reflexión de fuerzas hacia el operador. Debido a que es un factor de realimentación de un sistema dinámico (esclavo) sobre otro (maestro), afecta en gran medida a la estabilidad del sistema. El valor de este coeficiente vendrá impuesto por el tipo de aplicación. En aplicaciones de macroteleoperación, donde las fuerzas del esclavo sean superiores a las del maestro, se deseará que este coeficiente tenga un valor inferior a la unidad. Por el contrario, en aplicaciones de microteleoperación, donde las fuerzas del maestro sean superiores a las del esclavo, será deseable que el coeficiente de reflexión de esfuerzos tenga un valor superior a la unidad. Hay que señalar que, a medida que aumenta el valor del coeficiente de reflexión de esfuerzos, el sistema tiende a inestabilizarse.

Realizando la transformada de Laplace sobre las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) y (2.7), se obtiene el diagrama de bloques del esquema de control bilateral fuerza – posición, Figura 2.8. El funcionamiento del esquema de control fuerza – posición es el que se describe a continuación. El operador aplica una fuerza f_m para mover el maestro. La posición del maestro sirve de referencia al bucle de posición en el esclavo, de forma que el esclavo siempre tiende a seguir al maestro. Si no existe contacto con el entorno, no existe ninguna fuerza que se oponga al movimiento del maestro (al ser k_e nula). Cuando se produce un contacto, conforme el esclavo avanza en su interacción, se genera una fuerza de contacto f_s cada vez mayor, que será realimentada al maestro a través de la

constante k_f de reflexión de esfuerzos. Cuando τ_m sea igual a la fuerza f_m aplicada por el operador, el maestro se parará, y por lo tanto, también lo hará el esclavo.

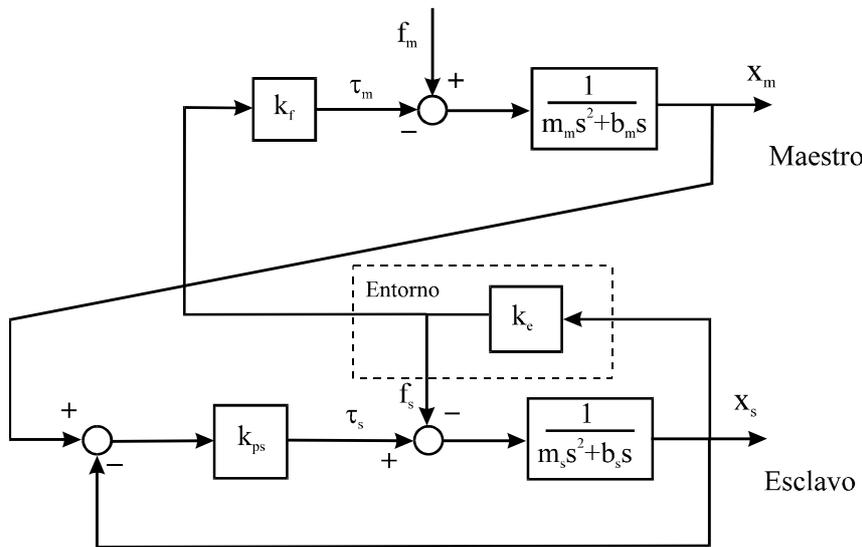


Figura 2.8. Diagrama de bloques del esquema fuerza – posición.

Control presión – posición

Este esquema de control corresponde a una variación muy común en la implementación práctica del esquema fuerza – posición. Al igual que en el esquema fuerza – posición, el esclavo se encuentra servocontrolado en posición tomando como referencia la posición del maestro. Sin embargo, el actuador del maestro recibe una señal de realimentación de fuerza que no proviene de un sensor de fuerza en el eje del esclavo, sino de la fuerza de entrada a la articulación del esclavo, Figura 2.9.

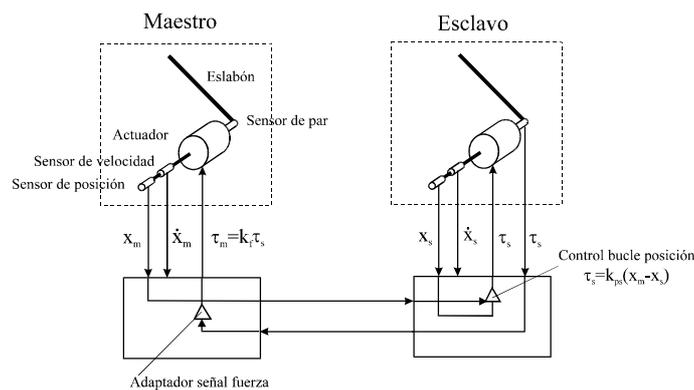


Figura 2.9. Esquema de control bilateral presión – posición.

En este esquema, las ecuaciones que determinan la acción de control del maestro y del esclavo son las siguientes:

$$\tau_m = k_f \tau_s \quad (2.8)$$

$$\tau_s = k_{ps}(x_m - x_s) \quad (2.9)$$

En la ecuación (2.8) la fuerza que genera el accionamiento del maestro es directamente proporcional a la fuerza de entrada a la articulación τ_s a través de la constante k_f de reflexión de esfuerzos. La ley de control del esclavo, como se especifica en la ecuación (2.9), se obtiene a través de un regulador proporcional de constante k_{ps} , que trabaja con el error de posición entre el maestro y el esclavo. Esta ley de control es la misma que se utiliza en los dos esquemas de control presentados anteriormente.

Aplicando la transformada de Laplace sobre las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.8) y (2.9) se obtiene el diagrama de bloques del esquema de control bilateral presión – posición, Figura 2.10. El funcionamiento del esquema de control presión – posición es el que se describe a continuación. El operador aplica una fuerza f_m para mover el maestro. La posición del maestro sirve de referencia al bucle de posición en el esclavo, de forma que el esclavo siempre tiende a seguir al maestro. En lugar de realimentar al maestro la fuerza de reacción con el entorno, se realimenta la fuerza de entrada a la articulación del esclavo, que frenará el movimiento del maestro. Cuando τ_m sea igual a la fuerza f_m generada por el operador, el maestro se detendrá, por lo tanto, también lo hará el esclavo.

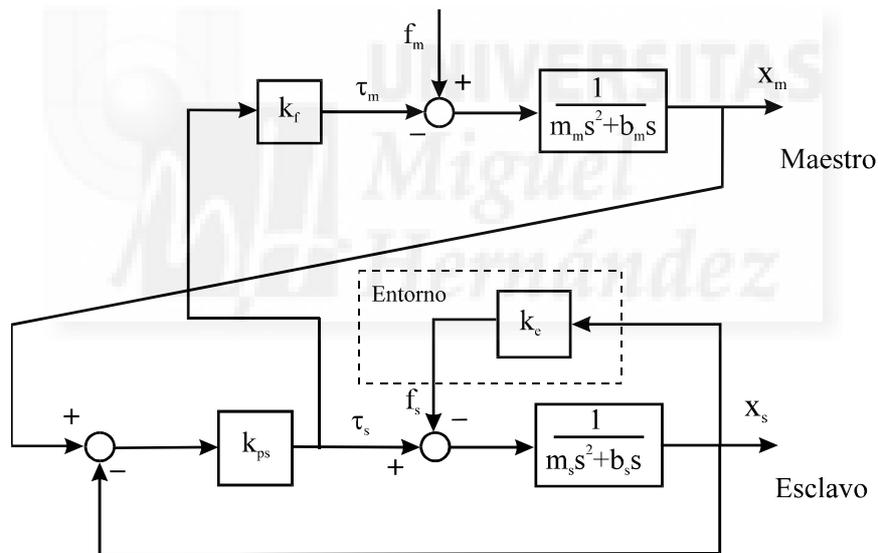


Figura 2.10. Diagrama de bloques del esquema presión – posición.

2.4 Control en teleoperación con retardos

2.4.1 Orígenes

La existencia de retardos en la comunicación supone un gran problema en la estabilidad de los sistemas teleoperados. Esto se puso de manifiesto cuando se realizaron las primeras aplicaciones de teleoperación en el espacio en los años 60, debido a las grandes distancias existentes entre la zona local (base terrestre) y la zona remota (órbita espacial) que han de cubrir las ondas de radio [Sheridan-93]. El tiempo de ciclo (tiempo transcurrido entre la emisión de una señal y la recepción de su respuesta) para sistemas

en órbita terrestre es como mínimo de 0.4 segundos, mientras que para sistemas en órbita espacial es típicamente de 3 segundos. Normalmente estos tiempos son mayores debido a los procesamientos en los satélites y demás estaciones de comunicación, de forma que las comunicaciones con sistemas en órbita terrestre se pueden retrasar hasta 6 segundos.

Como se ha indicado en el epígrafe 2.2.1, en 1967 el dispositivo *Surveyor III* realizó la primera teleoperación en el espacio. Seguidamente, la entonces URSS realizó una misión exploratoria en la Luna mediante el vehículo *Soviet Lunakod*. Este vehículo fue telecontrolado directamente desde la Tierra con sólo unos pocos segundos de retraso en la transferencia de información. En estas aplicaciones pronto se detectó que el principal problema era provocado por el retardo existente en la comunicación [Vertut-85].

A partir de 1969 la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) comenzó a trabajar en el campo de los retardos. Ray Goertz empezó el desarrollo de sistemas maestro – esclavo mecánicos encargados de la captura de satélites. Dentro del MIT, el *Draper Laboratory*, desarrolló la idea de teleoperación asistida por computador para solucionar el problema de los retardos. Al mismo tiempo, equipos de investigación del *Marshall Space Flight Center*, en Huntsville (EEUU), del *Johnson Space Flight Center*, en Houston (EEUU) y de la Universidad de Stanford (EEUU) se centraron en el estudio del efecto del retardo en la teleoperación y en los aspectos de control.

En 1976 la NASA envió el vehículo espacial *Viking* a Marte, Figura 2.11. Este vehículo fue programado para realizar únicamente tareas automatizadas. El retardo existente en la comunicación hasta la Tierra era de 30 minutos, por lo que era imposible un control directo por parte del operador. El vehículo era capaz de resolver ciertos problemas por sí mismo, parando de forma automática cuando no podía resolver un problema. En este caso, el operador podía mandar un comando programado para indicar como continuaba, de forma que el vehículo tardaba 60 minutos en seguir operando (retraso de 30 minutos en llegar la información al operador, más otros 30 minutos en llegar al vehículo el comando).

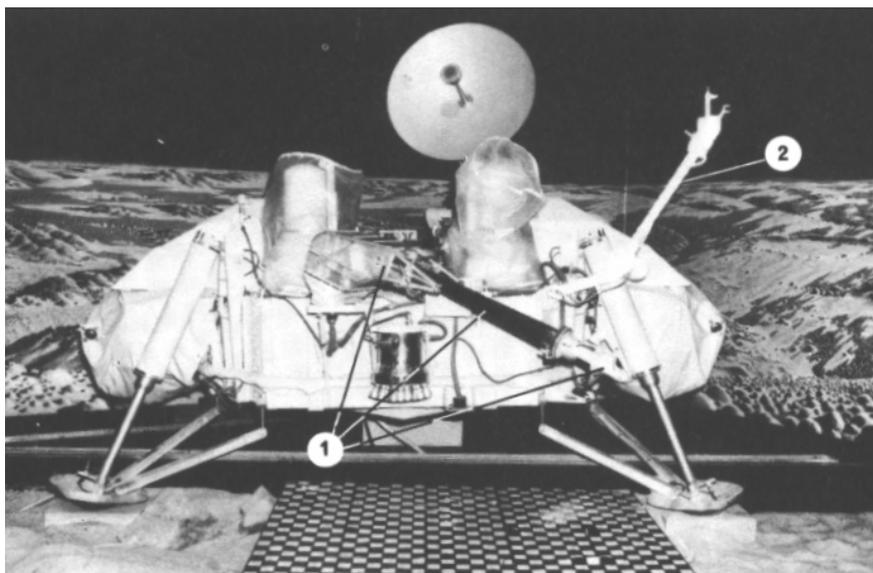


Figura 2.11. Vehículo espacial *Viking* enviado a Marte. (1) manipulador, (2) brazo con instrumentos metereológicos.

Del mismo modo que los requerimientos en la industria nuclear condujeron al desarrollo de los sistemas de teleoperación, las necesidades de la industria espacial han potenciado el estudio de la problemática de los retardos en la teleoperación.

Otro campo de utilización de la teleoperación en el que existen problemas por la aparición de retardos ha sido el de las aplicaciones submarinas. En aplicaciones de teleoperación submarinas que utilizan telemetría acústica para la comunicación entre el maestro y el esclavo también existen considerables retardos en la comunicación, debido a que la velocidad de transmisión del sonido en el agua es de 1700m/s [Sheridan-93].

2.4.2 El problema de la inestabilidad con retardos

La existencia de un retardo en un sistema de control en bucle cerrado afecta de forma negativa a la estabilidad del mismo. Para anular el error entra la referencia y la salida del sistema, la mayoría de sistemas utilizan una realimentación negativa y una ganancia mayor a la unidad en el rango de frecuencias de interés. Sin embargo, si la ganancia es mayor a la unidad en una frecuencia tal que el retardo es igual a la mitad de un ciclo, esto provocará que la realimentación sea positiva en lugar de negativa, de forma que la energía en esa frecuencia se estará continuamente sumando al bucle, y la amplitud del sistema crecerá sin límite, inestabilizándose el sistema. Por lo tanto, si se trabaja a frecuencias inferiores a aquella en la que el retardo es igual a la mitad de un ciclo, la ganancia será inferior a la unidad, y el sistema será estable [Sheridan-93].

Desde el punto de vista de los sistemas teleoperados la existencia de retardos en la comunicación afecta del siguiente modo a la estabilidad del sistema. Al aparecer retardos en la comunicación, la información que el operador recibe del entorno remoto está retrasada. Esta información es habitualmente visual y cinestésica. La información visual generalmente viene dada en forma de imágenes, mientras que la cinestésica corresponde a las fuerzas y momentos ejercidos por el esclavo que son realimentados hacia al maestro. Debido a que el operador trabaja con información no actualizada, éste genera acciones de control sobre situaciones pasadas, que además llegan retrasadas al manipulador remoto. De este modo, el sistema entra en inestabilidad.

2.4.3 Retardos en la realimentación de información visual

Como se ha indicado la problemática de los retardos en los sistemas teleoperados fue detectada en las aplicaciones espaciales. En estas aplicaciones el control era unilateral, realimentando al operador únicamente información visual. Para solucionar la problemática de los retardos, W. R. Ferrell propuso la estrategia denominada *mover y esperar* [Ferrell-65]. En esta estrategia el operador realiza un movimiento de control discreto y espera a visualizar el resultado de la acción de control antes de efectuar otra. Sin embargo R. Held mostró que la adaptación senso-motriz del operador es esencialmente imposible para retardos incluso de 0.3s, de forma que los operadores no pueden asociar los movimientos efectuados a los del dispositivo remoto [Held-66].

En los sistemas de control unilateral una solución ampliamente utilizada es lo que se conoce como visualizadores predictivos (*predictor display*). En un visualizador

predictivo el operador realiza sus acciones utilizando un modelo simulado de la zona remota. De esta forma el operador trabaja en tiempo real con el simulador sin tener que esperar a recibir la información visual retardada del resultado real. Tal como se indica en [Sheridan-93] son muy útiles cuando el retardo es importante (mayor de 0.5 s) y los movimientos del operador son relativamente lentos (por debajo de 1 Hz).

M. V. Noyes construyó el primer visualizador predictivo para teleoperación [Noyes-84]. En este visualizador, gráficos generados artificialmente eran superpuestos sobre la imagen de video real. En concreto un modelo alámbrico de la configuración actual del manipulador era representada sobre la imagen de video. Esta configuración era obtenida utilizando un modelo cinemático del manipulador y considerando las mismas señales de control que eran enviadas al manipulador remoto real. De esta forma el modelo calculado era dibujado en la imagen en la misma ubicación donde debería encontrarse después de un periodo de retardo. Como es lógico, si transcurría dicho periodo sin mover el manipulador, el modelo gráfico y la imagen real del manipulador se superpondrían.

Más adelante, A. K. Bejczy y W. S. Kim desarrollaron un visualizador predictivo similar usando tanto un modelo alámbrico como sólido del manipulador [Bejczy-90]. Los anteriores visualizadores predictivos utilizaban un modelo cinemático para obtener la configuración del manipulador virtual. Hirzinger *et al.* desarrollaron un visualizador predictivo en el que el manipulador que se superpone a la imagen de video real es generado utilizando un modelo dinámico [Hirzinger-89]

La efectividad de los visualizadores predictivos ha sido demostrada para modelos sencillos de manipuladores y tareas no complejas. Sin embargo tienen importantes limitaciones debido a que es necesario poseer un modelo muy preciso del manipulador remoto, el modelo debe ser calibrado cuidadosamente con la imagen de video en posición, escala y perspectiva, y no son adecuados para tareas en las que se requiere mucha precisión, como las de inserción.

L. Conway *et al.* extendieron la idea de los visualizadores predictivos en lo que denominaron desincronización espacial y temporal (*time and position clutching*) [Conway-90]. La desincronización espacial y temporal parten de la idea de que el visualizador predictivo no tiene porqué estar sincronizado con la tarea real. De forma que sería posible grabar la tarea que debe realizar el robot en el simulador, y una vez finalizada enviarla para que sea reproducida en el robot real. En este caso podrían editarse las maniobras del robot hasta que sean las deseadas antes de enviarlas al robot remoto. Los visualizadores predictivos, así como las técnicas de desincronización espacial y temporal, se enmarcan dentro de lo que se conoce como *teleprogramación* [Funda-91].

En la desincronización temporal el operador puede acelerar el control de la tarea simulada, enviando comandos y obteniendo las respuestas del simulador con mayor rapidez, en el caso de que tenga que realizar maniobras sencillas, y disminuir el ritmo de control de la tarea para maniobras complejas donde son necesarios más puntos de muestreo. Durante la realización de la tarea simulada el ordenador almacena los distintos comandos generados para enviarlos después al sistema de control del robot remoto para que sean procesados en tiempo real, interpolando entre puntos de muestreo cuando sea necesario.

Por otro lado la desincronización espacial permite probar comandos en el simulador para comprobar su funcionamiento, sin la necesidad de enviarlos al robot remoto. Lógicamente la desincronización espacial implica desincronización temporal. Asimismo cuando sean probados nuevos comandos en el simulador, se dejarán de grabar en el buffer de datos. De este modo cuando se vuelva a grabar un comando en el buffer puede ser necesario realizar una interpolación desde la posición previa hasta la nueva.

Una forma de evitar la problemática de los retardos en teleoperación es utilizar lo que se denomina *control supervisado* [Sheridan-92]. En este control, el operador, en lugar de estar dentro del bucle de control del sistema teleoperado comandando en todo momento al robot, indica la tarea que debe hacer el robot remoto, de forma que únicamente se encarga de supervisar la realización de la tarea. En este caso el robot remoto es controlado por un computador ubicado en la zona remota que se encarga de generar los comandos de control usando sus propios sensores. Puesto que el computador encargado del control se ubica junto al robot, no existen retardos en la comunicación, por lo que desaparece el problema de la inestabilidad. En este sentido, el control supervisado puede parecer que corresponde a un funcionamiento automático en lugar de teleoperado, puesto que básicamente consiste en la programación del computador para que el funcionamiento del robot sea autónomo. Sin embargo se trata de un control supervisado, puesto que el operador continuamente monitoriza la tarea, interviniendo cuando detecta alguna anomalía, y actualiza o modifica el programa del computador. Lógicamente el retardo existente entre la zona local y la remota no se elimina. Tal como se indica en [Sheridan-93], el retardo existente en la confirmación de resultados al supervisor es aceptable siempre que: (i) sea menor que el tiempo para la ejecución de la tarea, (ii) el subobjetivo a conseguir sea una parte suficientemente grande de la tarea total, (iii) los aspectos no predecibles del entorno remoto no cambien demasiado rápido, y (iv) el sistema automático subordinado sea de confianza.

2.4.4 Retardos en la realimentación de información cinestésica

En el control bilateral de sistemas teleoperados existe una realimentación de la fuerza de interacción del esclavo con el entorno hacia el maestro. Cuando el retardo afecta a la realimentación de fuerza las soluciones indicadas en el epígrafe anterior no son válidas. La diferencia respecto a la realimentación de información visual retardada se basa en que al recibir el operador una fuerza retardada, siente una perturbación inesperada sobre su mano, que no puede ignorar y, al responder, provoca la inestabilidad sobre el proceso [Ferrell-66]. Sin embargo, en la realimentación de información visual retardada, el operador puede ignorar la perturbación y evitar la inestabilidad por ejemplo con la estrategia de mover y esperar.

Se han propuesto diversas alternativas para solucionar el problema originado por la realimentación de fuerza retardada. La más simple consiste en mostrar la realimentación de fuerza de forma visual, aunque en este caso no se trata de un esquema de control bilateral. Otra alternativa es realimentar la fuerza sobre la mano que no controla el maestro o el *joystick*, o realimentar fuerzas mayores a una cierta magnitud durante un intervalo de tiempo en el que se reduce la ganancia por debajo de la unidad.

Una opción muy utilizada cuando existen retardos importantes en la comunicación es utilizar visualizadores predictivos con generación de fuerzas virtuales. De este modo se realimenta al operador en tiempo real la fuerza virtual. Para realimentar fuerzas al operador de forma virtual es necesario utilizar algoritmos de detección de colisiones [Bon-97] y algoritmos de generación de fuerzas virtuales [Bergamasco-95] [Colgate-94]. Una característica deseable en los algoritmos de detección de colisiones y generación de fuerzas virtuales es que sean precisos y de bajo coste computacional. En la Figura 2.12 se muestra la arquitectura de un sistema teleoperado controlado por un visualizador predictivo con generación de fuerzas virtuales.

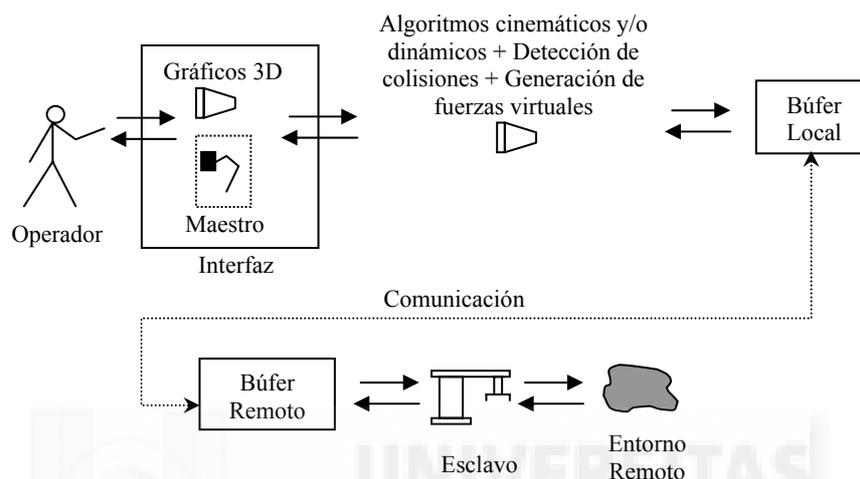


Figura 2.12. Arquitectura de un sistema teleoperado controlado mediante un visualizador predictivo con generación de fuerzas virtuales.

A diferencia de las aplicaciones espaciales o submarinas, donde el retardo existente en la comunicación es importante, en la mayoría de aplicaciones de teleoperación los retardos existentes son pequeños. Para este tipo de aplicaciones se han propuesto diversos esquemas de control en tiempo real en los que existe un bucle de realimentación del esclavo hacia el maestro. En esta Tesis se presenta un nuevo esquema de control para sistemas teleoperados con retardos. Este esquema se enmarca dentro de los esquemas de control válidos para retardos de hasta pocos segundos en los que existe una realimentación de la fuerza del esclavo hacia el maestro. Por este motivo en el siguiente apartado se va a realizar un estado del arte de los distintos esquemas de control bilateral propuestos para solucionar la problemática de los retardos.

2.5 Esquemas de control bilateral de sistemas teleoperados con retardo constante

En este apartado se van a presentar los esquemas de control de sistemas teleoperados propuestos en la literatura cuando el retardo existente en la comunicación es constante y en los que existe un bucle de realimentación del esclavo hacia el maestro [Sheridan-93] [Arcara-02].

2.5.1 Control bilateral basado en pasividad

R. J. Anderson y M. W. Spong propusieron un sistema de control bilateral con reflexión de fuerzas que es estable independientemente del retardo existente en la comunicación basándose en el concepto de pasividad [Anderson-89]. Basándose en la teoría del cuadripolo (*two-port approach*) [Raju-89] y utilizando la teoría de la pasividad y la teoría de dispersión (*scattering*), demuestran la estabilidad del sistema independientemente del retardo. La teoría de pasividad indica que un sistema es estable si es pasivo, y para ser pasivo debe disipar energía, nunca incrementar la energía. Un sistema es pasivo si y sólo si la norma de su operador de dispersión (*scattering*) es menor o igual a uno.

Los autores representan un sistema teleoperado como se muestra en la Figura 2.13. Los parámetros y variables de este sistema se indican en la Tabla 2.1.



Figura 2.13. Diagrama de bloques de un sistema teleoperado.

	Variables		Parámetros	
Operador Humano	F_h	Fuerza aplicada		
Maestro	F_m	Fuerza	M_m	Inercia
	v_m	Velocidad	B_m	Rozamiento viscoso
	τ_m	Par motor		
	x_m	Posición		
Bloque de comunicación	F_{md}	Fuerza deseada	T	Retardo
	v_{sd}	Velocidad deseada	n	Factor de escala
Esclavo	v_s	Velocidad	M_s	Inercia
	F_s	Fuerza	B_{s1}	Rozamiento viscoso error
	x_s	Posición	B_{s2}	Rozamiento viscoso velocidad
	τ_s	Par motor	K_s	Ganancia de rigidez
Entorno	F_e	Fuerza de contacto	Z_e	Impedancia
			α_f	Ganancia de fuerza

Tabla 2.1. Variables y parámetros del sistema teleoperado.

Demostaron que la causa de inestabilidad en los sistemas teleoperados con retardos se debe a que la aparición de retardos transforma el bloque de comunicación entre la zona local y la remota en un elemento no pasivo. Para solucionar el problema de la inestabilidad definen una ley de control que garantiza la pasividad del bloque de comunicación independientemente del tiempo de retardo. Para ello buscan que las características del bloque de comunicación sean idénticas a las de una línea de transmisión sin pérdidas. De este modo se asegura la pasividad del sistema y, por tanto, la estabilidad con retardos en la comunicación.

Consideran que el modelo dinámico del maestro y del esclavo viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$M_m \dot{v}_m = F_h + \tau_m \quad (2.10)$$

$$M_s \dot{v}_s = -F_e + \tau_s \quad (2.11)$$

donde v_m y v_s es la velocidad del maestro y del esclavo, τ_m y τ_s es el par del maestro y del esclavo, M_m y M_s es la inercia del maestro y del esclavo, F_h es el par del operador, y F_e es el par del entorno.

La ley de control que proponen para el sistema es la siguiente:

$$\tau_m = -B_m v_m - F_{md} \quad (2.12)$$

$$\tau_s = -B_{s2} v_s + F_s - \alpha_f F_e \quad (2.13)$$

donde B_m es el rozamiento viscoso del maestro, B_{s2} es el rozamiento viscoso de la velocidad del esclavo, α_f es una constante de ganancia de fuerza, F_{md} es la fuerza que se refleja al maestro, y F_s , denominado par de coordinación, viene dado por:

$$F_s = K_s \int (v_{sd} - v_s) dt + B_{s1} (v_{sd} - v_s) \quad (2.14)$$

donde B_{s1} es el rozamiento viscoso del error del esclavo y K_s es la ganancia de rigidez. El par de coordinación se basa en el error entre las variables del maestro y del esclavo, y su objetivo es conseguir que el maestro y el esclavo se sigan mutuamente.

Para garantizar la pasividad del bloque de comunicación independientemente del retardo, y de este modo, asegurar la estabilidad del sistema ante cualquier retardo, proponen la siguiente ley para el bloque de comunicación:

$$F_{md}(t) = F_s(t-T) + n^2 (v_m(t) - v_{sd}(t-T)) \quad (2.15)$$

$$v_{sd}(t) = v_m(t-T) + \frac{1}{n^2} (F_{md}(t-T) - F_s(t)) \quad (2.16)$$

donde n es un factor de escalado a causa de que las señales de fuerza y velocidad pueden diferir en órdenes de magnitud.

La ley de control dada por las ecuaciones (2.12) – (2.16) asegura la estabilidad del sistema teleoperado ante cualquier retardo. En la Figura 2.14 se muestra el diagrama de bloques del esquema de control del sistema teleoperado.

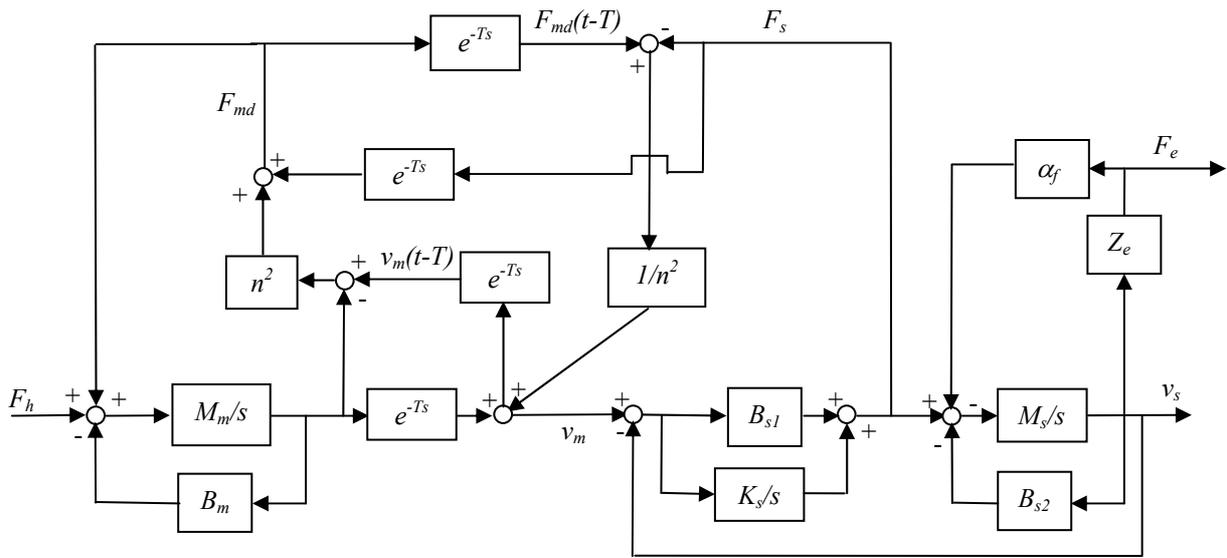


Figura 2.14. Diagrama de bloques del esquema de control bilateral basado en pasividad.

En [Anderson-89] se muestran resultados experimentales que validan la ley de control con retardos de hasta 2 segundos. Sin embargo, como se indica en el artículo, el seguimiento de fuerza y posición se degrada conforme aumenta el tiempo de retardo.

En [Anderson-92] extienden el esquema de control obtenido para un sistema teleoperado de un grado de libertad, al caso de un sistema de teleoperación no lineal de n grados de libertad, y demuestran su estabilidad.

El problema del esquema basado en el concepto de pasividad es que, para asegurar la estabilidad del sistema ante retardos, es necesario pasivar demasiado al sistema, lo que produce un funcionamiento lento y difícil para el operador. En [Lawn-93] se muestra a través de diversos experimentos que en los sistemas de teleoperación pasivos el operador tarda un 50% más en completar la tarea que si utiliza un sistema de teleoperación básico.

2.5.2 Control bilateral basado en variables de onda

G. Niemeyer y J.-J. E. Slotine introdujeron el concepto de variables de onda [Niemeyer-91] [Niemeyer-96] efectuando una reformulación del formalismo de pasividad propuesto por R. J. Anderson y M. W. Spong [Anderson-89]. Los autores demuestran que la pasividad de las variables de onda es robusta a retardos en la comunicación de forma que proponen realizar la comunicación en un sistema teleoperado directamente en el dominio de la variable de onda.

Las variables de onda permiten codificar la información de velocidad y de fuerza. Se definen como:

$$u(t) = \frac{b\dot{x}(t) + F(t)}{\sqrt{2b}} \quad (2.17)$$

$$v(t) = \frac{b\dot{x}(t) - F(t)}{\sqrt{2b}} \quad (2.18)$$

donde $u(t)$ representa la variable de onda que va del maestro al esclavo, y $v(t)$ representa la variable de onda que va del esclavo al maestro, y b es una constante positiva que indica la impedancia de la onda y sirve como parámetro para ajustar un controlador a un entorno particular o tarea.

En la Figura 2.15 se muestra un sistema teleoperado donde la comunicación se realiza mediante variables de onda. Como puede observarse, tanto en la zona local como en la remota, la información se transforma en variables de onda antes de transmitirse. La velocidad (\dot{x}_m) y la fuerza del maestro (F_m) se transforman en la señal de onda u_m , que llega al esclavo después de un retardo T , donde es decodificada en una velocidad (\dot{x}_s) o en una fuerza (F_s).

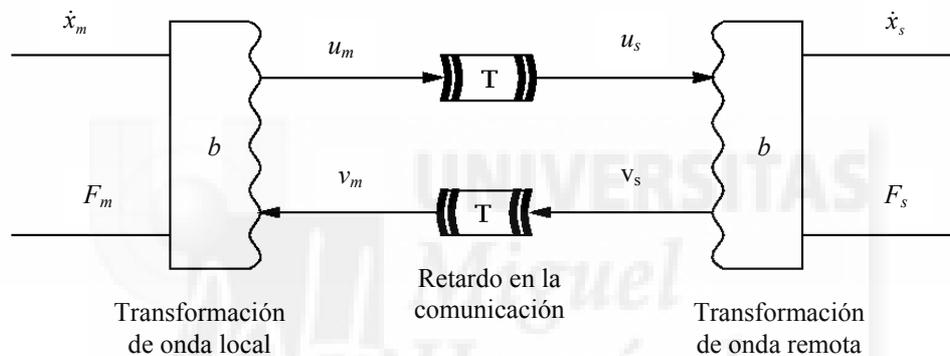


Figura 2.15. Sistema teleoperado basado en variables de onda.

La razón de introducir las variables de onda se debe a su efecto en la pasividad del sistema. Los autores demuestran que los sistemas expresados en variables de onda son pasivos y por lo tanto estables ante cualquier tiempo de retardo.

Los autores proponen un esquema de control donde la transmisión de información entre el maestro y el esclavo se realiza mediante variables de onda, Figura 2.16. En función de que los reguladores se diseñen para seguir una posición y velocidad o una fuerza deseada, podrán implementarse distintos tipos de controles. Para mostrar un ejemplo de esquema de control se va a considerar que el esclavo sigue un movimiento deseado mediante un control PD, mientras que el maestro aplica las fuerzas deseadas directamente. Este esquema sería similar al clásico fuerza – posición. Para analizar otros esquemas de control consultar [Niemeyer-96].

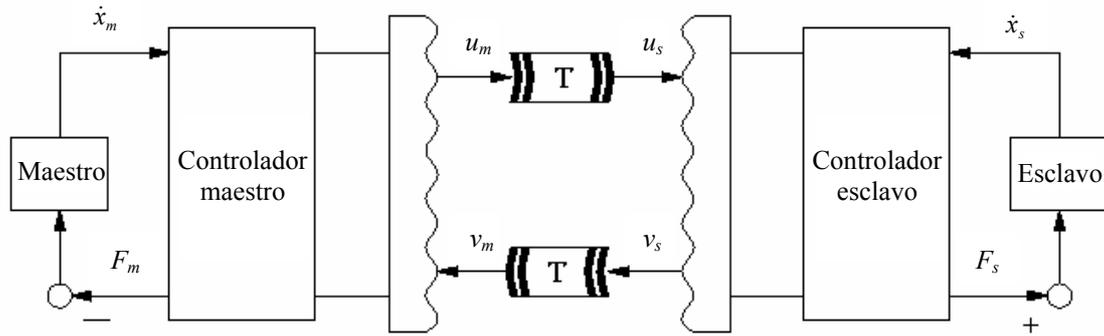


Figura 2.16. Esquema de control basado en variables de onda.

El controlador del esclavo vendrá dado por:

$$F_s = -B(\dot{x}_s - \dot{x}_{sd}) - K(x_s - x_{sd}) \quad (2.19)$$

donde B es la ganancia de velocidad y K es la ganancia de posición para forzar al esclavo a seguir la velocidad deseada \dot{x}_{sd} . La velocidad deseada puede ser decodificada a partir de la transformación de onda:

$$\dot{x}_{sd} = \frac{\sqrt{2b}u_s + B\dot{x}_s + K(x_s - x_{sd})}{B + b} \quad (2.20)$$

La posición deseada debe calcularse a partir de esta velocidad:

$$x_{sd} = \int_0^t \dot{x}_{sd}(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

La onda de regreso vendrá dada por:

$$v_s = u_s - \sqrt{\frac{2}{b}} F_s \quad (2.22)$$

En la parte del maestro, la fuerza deseada se aplicará al maestro directamente. El valor es calculado a partir de la transformación de onda:

$$F_m = b\dot{x}_m - \sqrt{2b}v_m \quad (2.23)$$

Por último la variable de onda que va hacia el esclavo se calculará como:

$$u_m = \sqrt{2b}\dot{x}_m - v_m \quad (2.24)$$

En [Niemeyer-96] se muestran resultados experimentales que demuestran la validez del control.

Los autores han utilizado las variables de onda para afrontar específicamente la teleoperación cuando existen retardos importantes en la comunicación [Niemeyer-97], así como cuando los retardos son variables [Niemeyer-98].

2.5.3 Control bilateral acomodaticio compartido

W. S. Kim *et al.* propusieron un esquema de control acomodaticio compartido (*shared compliant control*) para solucionar la problemática de la aparición de retardos en los sistemas teleoperados [Kim-92].

En un esquema de control bilateral convencional, cada articulación está servo-controlada en posición con una rigidez del servo elevada. Esto provoca que el robot sea propenso a colisionar fuertemente con objetos del entorno. Con un control acomodaticio se consigue suavizar las fuerzas de contacto del robot con el entorno, de forma que el robot tiene un comportamiento más suave con el entorno, acomodándose a las restricciones del entorno. Por ejemplo, en una tarea de inserción de bulones en agujeros (*peg-in-the-hole*) el control acomodaticio posibilita que el robot se acomode a la estructura del agujero de forma que sea más fácil la realización de la tarea por el operador.

Existen dos formas de conseguir la acomodación del robot al entorno: colocando elementos mecánicos pasivos entre el efector y el robot que se deforman para facilitar la tarea según las fuerzas de contacto, y la acomodación activa. La acomodación activa consiste en modificar el comando de posición del robot mediante cálculos por computador que utilizan las fuerzas de contacto obtenidas a partir de un sensor de fuerza/par situado en el extremo del robot. En [Kim-92] se implementa un control acomodaticio activo en el que la señal de fuerza/par del extremo del robot es primero filtrada mediante un filtro paso – bajo y, después, se realimenta a la señal de posición/orientación que viene del operador, Figura 2.17. La ventaja de utilizar una acomodación activa frente a una pasiva radica en que es posible ajustar los parámetros para establecer la acomodación deseada del robot al entorno. Al control acomodaticio también se le denomina control acomodaticio compartido, ya que el control es compartido entre el control manual del operador y el control acomodaticio autónomo del robot remoto. En realidad el control acomodaticio no es un esquema de control bilateral, ya que no existe reflexión de fuerza hacia el maestro.

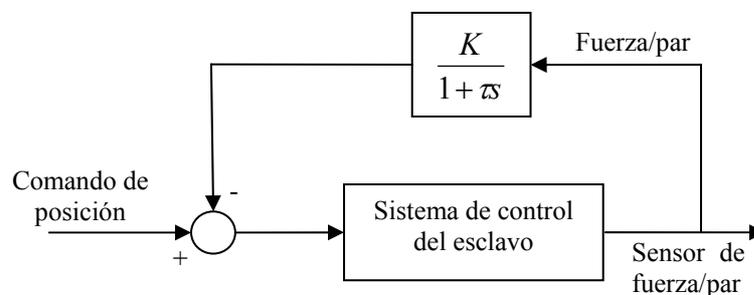


Figura 2.17. Implementación del control acomodaticio compartido.

En [Kim-92] se analizan las ventajas de la utilización de un esquema de control acomodaticio compartido frente a un esquema fuerza-posición cuando existen retardos

en la comunicación. Para ello los autores implementaron en un sistema teleoperado de 6 grados de libertad ambos esquemas de control de forma separada y sometieron a varios operadores a realizar tareas de inserción de bulones en agujeros considerando diversos tiempos de retardo (de 2 ms a 4096 ms). Para comparar la ejecución de las tareas por parte de los operadores emplearon el tiempo de realización y la suma de fuerzas cuadradas.

Los resultados que obtuvieron demuestran las ventajas del esquema de control acomodaticio compartido frente al esquema fuerza-posición:

- El esquema fuerza-posición no puede implementarse cuando los retardos son superiores a 0.5s-1s, debido a la inestabilidad que se origina.
- En el control acomodaticio el retardo no causa ningún problema de estabilidad a causa de que el bucle de realimentación de fuerza reside en la parte del robot. El control acomodaticio es el único control que permite realizar la tarea cuando el retardo es superior a 1s.
- El tiempo de realización y la suma de fuerzas cuadradas se incrementa en ambos esquemas al incrementarse el retardo, aunque en el control acomodaticio se incrementa en menor velocidad que en el control fuerza-posición.

Los autores indican que un uso combinado del esquema de control acomodaticio junto a la reflexión de fuerza puede mejorar la seguridad y estabilidad del sistema teleoperado. Esto es debido a que el bucle acomodaticio tiende ligeramente a estabilizar el bucle de reflexión de fuerza y a suavizar la interacción del esclavo con el entorno.

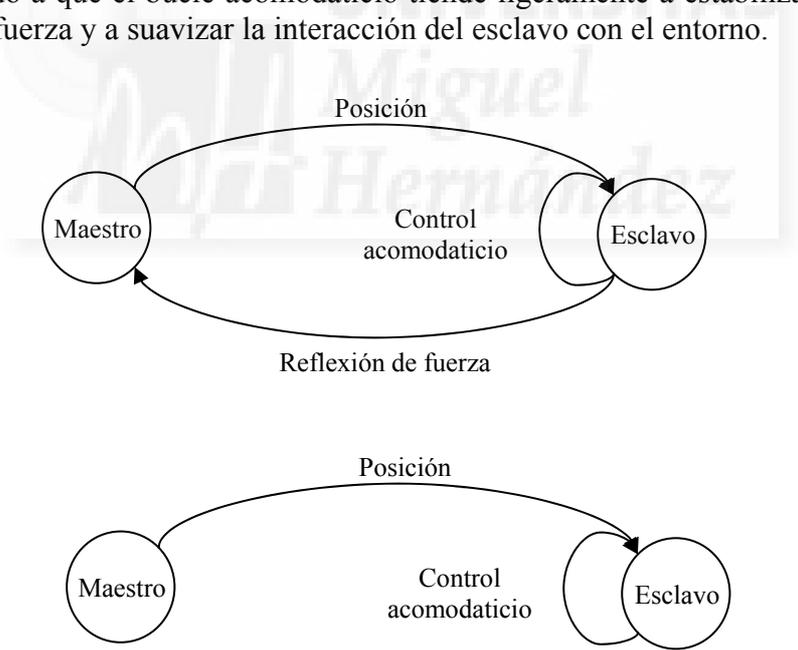


Figura 2.18. Esquema de control acomodaticio con reflexión de fuerza (parte superior); esquema de control acomodaticio (parte inferior).

Por último, en base a los resultados experimentales obtenidos, los autores proponen los siguientes esquemas de control dependiendo del retardo existente en la comunicación:

- Si el retardo es inferior a 0.5 s – 1 s, utilizar un esquema de control acomodaticio junto a la reflexión de fuerza, ver Figura 2.18 (parte superior).

- Si el retardo es mayor de 1 s, utilizar un control acomodaticio compartido sin reflexión de fuerza, ver Figura 2.18 (parte inferior). En este caso el esquema no sería de control bilateral, ya que no existe realimentación de fuerza sobre el maestro.

2.5.4 Control bilateral con telemonitorización

S. Lee y H. S. Lee presentaron un esquema de control bilateral en el que se utiliza una fuerza de realimentación denominada de *telemonitorización* para solucionar la problemática de los retardos [Lee-93]. Los autores además implementan un control de impedancia generalizado para modificar las características dinámicas del maestro y del esclavo. En el diseño del esquema de control consideran la dinámica del operador implicada en generar el comando de control a partir del estímulo visual y de fuerza. Esto se debe a que un esquema de control diseñado sin considerar la dinámica del operador puede volverse inestable cuando se introduce el operador en el bucle de control. Con el esquema de telemonitorización que proponen consiguen un funcionamiento óptimo del sistema teleoperado asegurando la estabilidad del sistema hasta un determinado retardo máximo.

El control acomodaticio compartido introduce incertidumbre en el operador, debido a la influencia del control automático, que modifica sus comandos. Esto puede degradar de forma importante el funcionamiento del sistema teleoperado. Por otra parte, los sistemas diseñados para ser estables ante cualquier retardo en la comunicación sufren de tener un funcionamiento poco satisfactorio.

Para solucionar el problema de la incertidumbre del operador y optimizar el funcionamiento del sistema teleoperado asegurando la estabilidad sólo hasta retardos pequeños (hasta 3 s), los autores proponen realimentar al maestro lo que llaman fuerza de *telemonitorización*. La fuerza de telemonitorización (f_{ref}) corresponde a una combinación lineal de dos fuerzas, la fuerza debida al error de posición (f_{rp}) y el error de fuerza (e_f):

$$f_{ref} = e_f - f_{rp} \quad (2.25)$$

donde la fuerza debida al error de posición (f_{rp}) viene dada por:

$$f_{rp} = G_{rp} e_s \quad (2.26)$$

siendo e_s el error de posición, diferencia entre la posición deseada del esclavo (x_{ds}) y su posición actual (x_s), $e_s = x_{ds} - x_s$, y G_{rp} la matriz de compensación del error de posición, que se determina para obtener el mejor funcionamiento del sistema. El error de fuerza se calcula como la diferencia entre la fuerza de contacto deseada (f_d) y la fuerza realimentada (f_r):

$$e_f = f_d - f_r = f_d + k_{cs} f_{es} \quad (2.27)$$

donde $f_r = -k_{cs}f_{es}$, siendo f_{es} la fuerza medida en el extremo del esclavo, y k_{cs} representa la matriz de transformación de fuerza, que se calculará para obtener el funcionamiento óptimo del sistema teleoperado.

Con la fuerza de telemonitorización el operador tiene constancia de los errores de seguimiento de fuerza y posición del esclavo, y además existen suficientes parámetros para optimizar el funcionamiento del sistema teleoperado asegurando la estabilidad hasta retardos menores de 3 s.

Por otra parte los autores proponen modificar de forma activa la dinámica del maestro y del esclavo. Para ello implementan un control de impedancia generalizado [Lee-91]. De esta forma es posible modificar la dinámica del esclavo para que interactúe con un entorno desconocido según unas características de impedancia deseadas. El control de impedancia generalizado (GIC: *Generalized Impedance Control*) se basa en primer lugar en definir el comportamiento dinámico deseado en términos de la impedancia generalizada (GI: *Generalized Impedance*). La dinámica deseada se consigue hallando la aceleración a partir de la GI y aplicando la aceleración calculada a la dinámica del brazo para obtener la entrada de control.

Consideran que el modelo dinámico del maestro viene dado por:

$$f_{am} + f_{em} = m_{am}\ddot{x}_m + u_{bm} \quad (2.28)$$

donde f_{am} representa la fuerza del actuador del maestro, f_{em} es la fuerza interna debida a la interacción con el brazo humano: $f_{em} = -f_{eh}$ (siendo f_{eh} la fuerza interna sentida por el operador debida a la interacción con el maestro), y m_{am} y u_{bm} son, respectivamente, la matriz de inercia y la fuerza debida a la gravedad y a la fuerza centrípeta/Coriolis del maestro. La dinámica deseada del maestro la definen como:

$$f_{ref} + f_{em} = m_{dm}\ddot{x}_m + b_{dm}\dot{x}_m \quad (2.29)$$

donde m_{dm} y b_{dm} son los parámetros de inercia y rozamiento viscoso deseados del maestro. A partir de esta dinámica se obtiene que la ley de control del maestro vendrá dada por:

$$f_{am} = -f_{em} + m_{am}m_{dm}^{-1}(f_{em} + f_{ref} - b_{dm}\dot{x}_m) + u_{bm} \quad (2.30)$$

El modelo dinámico del esclavo es representado como:

$$f_{as} + f_{es} = m_{as}\ddot{x}_s + u_{bs} \quad (2.31)$$

donde f_{as} es la fuerza del actuador del esclavo, f_{es} es la fuerza de interacción con el entorno, y m_{as} y u_{bs} son respectivamente, la matriz de inercia y la fuerza debida a la gravedad y a la fuerza centrípeta/Coriolis del esclavo. La dinámica deseada del esclavo es definida por:

$$b_{fs} \dot{f}_{es} + k_{fs} f_{es} = m_{ds} \ddot{x}_s + b_{ds} (\dot{x}_s - \dot{x}_{ds}) + k_{ds} (x_s - x_{ds}) \quad (2.32)$$

donde los parámetros b_{fs} , k_{fs} , m_{ds} , b_{ds} y k_{ds} son matrices diagonales definidas positivas, y x_s y x_{ds} representan, respectivamente, la posición actual y de referencia del esclavo. A partir de esta dinámica se calcula la ley de control del esclavo, que será:

$$f_{as} = -f_{es} + m_{as} m_{ds}^{-1} \{ b_{fs} \dot{f}_{es} + k_{fs} f_{es} - b_{ds} (\dot{x}_s - \dot{x}_{ds}) - k_{ds} (x_s - x_{ds}) \} + u_{bs} \quad (2.33)$$

Los autores realizaron diversas pruebas en simulación comparando el esquema de control propuesto con otros esquemas: control de rigidez del esclavo con reflexión de esfuerzos, control de impedancia del esclavo con reflexión de esfuerzos, y control de impedancia del esclavo con fuerza de telemonitorización. Los resultados obtenidos demuestran que el esquema propuesto se comporta mejor que el resto de esquemas tanto en seguimiento de fuerza como en seguimiento de posición. Asimismo se obtiene un mejor funcionamiento del sistema en comparación al esquema presentado por R. J. Anderson y M. W. Spong basado en el concepto de pasividad [Anderson-89]. Es interesante indicar que, debido a que en el esquema basado en pasividad no se tuvo en cuenta la dinámica del operador, no se puede garantizar la estabilidad cuando el retardo es superior a 1.2 s.

2.5.5 Control optimizado para transparencia

D. A. Lawrence presentó una arquitectura general de teleoperación para analizar y comparar diversos esquemas de teleoperación en términos de las propiedades de transparencia y estabilidad cuando existen retardos, proponiendo una nueva arquitectura optimizada para transparencia [Lawrence-93]. El autor analiza la estabilidad y transparencia del control bilateral posición – posición, del control fuerza – posición, y del control basado en pasividad [Anderson-89]. La transparencia es una propiedad que mide el acoplamiento del operador con el entorno, es decir, cuantifica de qué forma el operador siente que está interactuando con el entorno [Raju-89].

La arquitectura general que consideran para analizar los distintos sistemas teleoperados se muestra en la Figura 2.19, donde Z_m y Z_s es la impedancia del maestro y del esclavo, C_m y C_s es el controlador del maestro y del esclavo, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son parámetros de control, F_e y V_e es la fuerza y velocidad del esclavo, F_h es la fuerza del operador sobre el maestro, V_h es la velocidad del maestro, y F_e^* y F_h^* son las fuerzas externas.

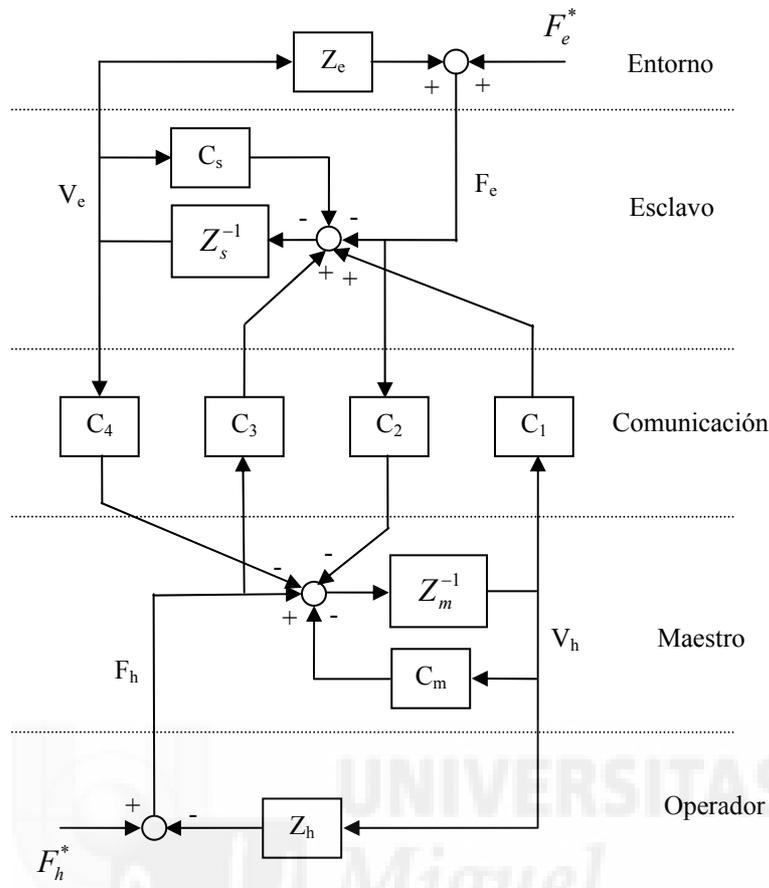


Figura 2.19. Esquema general del sistema teleoperado.

La ley de control que propone el autor para optimizar la transparencia del sistema viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$C_3 C_2 = I \quad (2.34)$$

$$C_4 = -(Z_m + C_m) \quad (2.35)$$

$$C_1 = (Z_s + C_s) \quad (2.36)$$

Además para garantizar que el canal de comunicación sea pasivo propone que se utilicen las siguientes ecuaciones de control:

$$C'_i = H_1(s) C_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.37)$$

$$C'_s = C_s + H_2(s)(C_4 + C_2 Z_e) \quad (2.38)$$

$$C'_m = C_m + H_2(s)(C_1 - C_3 Z_h) \quad (2.39)$$

donde $H_1(s)$ y $H_2(s)$ son filtros definidos por:

$$H_1(s) = \frac{2e^{-bT}}{1 + \frac{s/a}{e^{-2(s+b)T}}} \quad (2.40)$$

$$H_2(s) = \frac{1 - \frac{e^{-2(s+b)T}}{(1 + s/a)^2}}{1 + \frac{e^{-2(s+b)T}}{(1 + s/a)^2}} \quad (2.41)$$

siendo T el retardo de la comunicación (s), a el ancho de banda del filtro paso bajo (rad/s) y b determina la atenuación de la variable de onda [Niemeyer-91]. Las leyes originales de control C_m y C_s dependen del esquema de control cuya transparencia se desea optimizar, ver [Lawrence-93].

Del estudio realizado de estabilidad y transparencia de los distintos esquemas de control, el autor obtiene los siguientes resultados. El esquema posición – posición y el fuerza – posición proporcionan poca transparencia, incluso a bajas frecuencias, y con estabilidad escasa. El esquema basado en pasividad [Anderson-89] mejora la propiedad de estabilidad, pero no mejora la transparencia, de modo que si los retardos son elevados la teleoperación es impracticable. En el esquema propuesto optimizado para transparencia, a bajas frecuencias se consigue que el sistema reproduzca fielmente la rigidez de la tarea al operador. Además la pasividad introducida para contrarrestar los efectos del retardo no degrada la transparencia a bajas frecuencias. Sin embargo este esquema tiene el inconveniente que sólo admite retardos pequeños. Del estudio realizado analizando la transparencia y estabilidad de los distintos sistemas teleoperados, el autor indica que son objetivos que entran en conflicto en el diseño de un sistema teleoperado, de forma que es necesario llegar a un compromiso entre ambas. Si se desea una alta transparencia, puede utilizarse el esquema optimizado para transparencia, aunque los retardos en la comunicación deberán ser pequeños. Por el contrario, si se no se desea una transparencia alta, puede asegurarse la estabilidad para retardos importantes utilizando el esquema basado en pasividad [Anderson-89].

2.5.6 Control bilateral adaptativo de movimiento/fuerza garantizando estabilidad

W. H. Zhu y S. E. Salcudean desarrollaron un esquema de control bilateral adaptativo de movimiento/fuerza para sistemas teleoperados con retardos [Zhu-00]. El método que proponen puede ser aplicado tanto en control en posición como en control en velocidad. Consideran un modelo del entorno incorporado en la dinámica del esclavo, y un modelo del operador incluido en la dinámica del maestro. El maestro y el esclavo poseen controladores adaptativos de movimiento/fuerza independientes que asumen límites de incertidumbre en los parámetros. Los estados del maestro (esclavo) son enviados al esclavo (maestro) como comandos de movimiento/fuerza en lugar de acciones de control. Los autores demuestran que el esquema es \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_∞ estable [Khalil-96], y es

robusto frente a retardos en la comunicación. Con el esquema se consigue seguimiento de movimiento (posición/velocidad) y de fuerza con error nulo en estado estable.

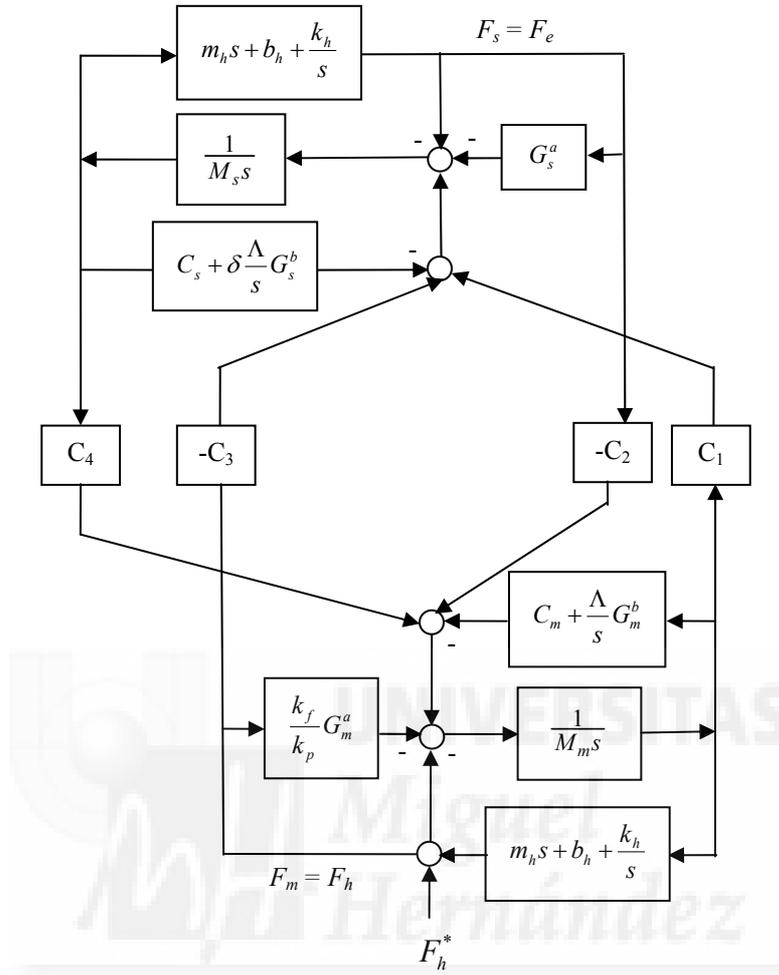


Figura 2.20. Diagrama de bloques de un sistema teleoperado de 1 GDL.

En la Figura 2.20 se muestra el esquema de control propuesto por los autores para un sistema teleoperado de un grado de libertad desde el punto de vista de la estructura general de un sistema teleoperado presentado por D. A. Lawrence [Lawrence-93], donde:

$$C_m = K_m + \frac{K_{ml}}{s} - \left(\hat{b}_h + \frac{\hat{k}_h}{s} \right) \quad (2.42)$$

$$G_m^b = \left(\hat{M}_m + \hat{m}_h \right) s + K_m + \frac{K_{ml}}{s} \quad (2.43)$$

$$G_m^a = \frac{AC}{s+C} G_m^b \quad (2.44)$$

$$C_s = K_s + \frac{K_{sl}}{s} - \left(\hat{b}_e + \frac{\hat{k}_e}{s} \right) \quad (2.45)$$

$$G_s^b = (\hat{M}_s + \hat{m}_e)s + K_s + \frac{K_{sl}}{s} \quad (2.46)$$

$$G_s^a = \frac{AC}{s+C} G_s^b \quad (2.47)$$

$$C_1 = \frac{(s+\Lambda)C}{s(s+C)} k_p G_s^b \quad (2.48)$$

$$C_2 = \frac{1}{k_p} G_m^a \quad (2.49)$$

$$C_3 = k_f G_s^a \quad (2.50)$$

$$C_4 = \frac{(s+\delta\Lambda)C}{s(s+C)} \frac{1}{k_p} G_m^b \quad (2.51)$$

siendo \hat{M}_m y \hat{m}_h las masas estimadas del maestro y del operador; \hat{M}_s y \hat{m}_e las masas estimadas del esclavo y del entorno; \hat{b}_h y \hat{k}_h el coeficiente viscoso estimado y la constante de rigidez estimada del operador; \hat{b}_e y \hat{k}_e el coeficiente viscoso estimado y la constante de rigidez estimada del operador; k_p es el factor de escalado de movimiento; k_f es el factor de escalado de fuerza; δ es un selector que permite elegir entre control fuerza – posición ($\delta = 1$) y control fuerza – velocidad ($\delta = 0$); A , C y Λ son parámetros de control; y K_m , K_{ml} , K_s y K_{sl} son ganancias.

El esquema propuesto permite un excelente seguimiento de movimiento (posición/velocidad) y fuerza, asegurando asimismo la estabilidad ante retardos. Esta capacidad de seguimiento no había sido conseguida anteriormente en diseños ideados para garantizar la estabilidad [Anderson-89]. Sin embargo experimentalmente los autores comprueban que, aunque la estabilidad se asegura para cualquier retardo, la capacidad de seguimiento de movimiento/fuerza se mantiene sólo para retardos de aproximadamente 100 ms, de forma que para retardos mayores la capacidad decrece rápidamente.

2.5.7 Otros esquemas de control

García *et al.* [García-00] propusieron una estructura de control para solucionar la problemática de los retardos basada en el predictor de Smith [Smith-58] [Aström-84]. El predictor de Smith es utilizado, por una parte en la zona local para anticipar la información retardada del esclavo, y por otra, en la zona remota para anticipar la información retardada del maestro. En [Arcara-02] se presenta una arquitectura donde

también se utiliza el predictor de Smith, aunque sólo en la parte del maestro para anticipar la información retardada del esclavo, implementando un simple controlador PD en el esclavo. S. Munir [Munir-01] utilizó el predictor de Smith en combinación con las variables de onda [Niemeyer-91] para mejorar el funcionamiento del sistema teleoperado, y al mismo tiempo, asegurar la pasividad del sistema.

S. Lee y H. S. Lee utilizando el concepto de fuerza de telemonitorización [Lee-93] en combinación con el predictor de Smith presentaron un sistema de control de teleoperación con retardos óptimo [Lee-94a]. Los autores primero diseñan un sistema de control de teleoperación óptimo sin retardos, considerando la dinámica del operador en el bucle de control y empleando el concepto de fuerza de telemonitorización. Aplicando el principio de Smith al sistema de control diseñado, obtienen un sistema de control de teleoperación con retardos óptimo. Mediante una serie de parámetros de ajuste del sistema es posible llegar a un compromiso entre funcionamiento y robustez.

S. Lee y K. Jeong [Lee-94b] diseñaron un sistema de control de teleoperación con retardos robusto aplicando la metodología H_∞ [Francis-87]. Los autores descomponen el sistema de control en dos fases: la fase de aproximación y la fase de contacto. Para la fase de aproximación utilizan el principio de Smith para diseñar un sistema de control óptimo. Sin embargo, para la fase de contacto, diseñan un sistema de control robusto a las incertidumbres del modelado basándose en la optimización H_∞ . En [Lee-94b] se muestran pruebas en simulación en las que se observa que el funcionamiento del sistema teleoperado con el sistema de control diseñado, es mejor que el comportamiento obtenido aplicando el principio de Smith y el concepto de telemonitorización.

G. M. H. Leung *et al.* [Leung-95] presentaron un método de diseño de sistemas de control bilateral de teleoperación con retardos en la transmisión basándose en las técnicas de control óptimo H_∞ [Francis-87] y en las técnicas de μ -síntesis [Balas-91]. Con el método propuesto se realiza el diseño del esquema de control para, al mismo tiempo, satisfacer las especificaciones de funcionamiento del sistema y asegurar la estabilidad para un determinado margen de tiempo de retardo.

Otsuka *et al.* [Otsuka-95] propusieron un sistema de control bilateral de teleoperación con retardos basado en el control de impedancia mediante modelos internos virtuales dirigidos por la suma de fuerzas detectadas en el maestro y en el esclavo. Los autores demuestran que el esquema es estable para cualquier retardo utilizando el teorema de la ganancia pequeña (*small gain theorem*) [Khalil-96]. Para asegurar la estabilidad, el error entre el maestro y el esclavo no es realimentado al maestro, de forma que se permite el error entre el maestro y el esclavo. Los autores presentan resultados experimentales que validan el sistema de control con retardos. Además, indican que se ha verificado experimentalmente que el sistema es estable incluso cuando el retardo no es constante. S. Manorotkul y H. Hashimoto [Manorotkul-96] ampliaron este esquema de control incorporándole una corrección del error de posición para convertir el sistema teleoperado en un sistema en bucle cerrado, y mejorar su respuesta reduciendo el error de posición entre el maestro y el esclavo. Los autores muestran a través de diversos resultados en simulación y experimentales la reducción del error de posición entre el maestro y el esclavo, aunque, a medida que aumenta el retardo en la comunicación, también lo hace el error de posición.

M. Yamakita *et al.* [Yamakita-95] presentaron un sistema de control bilateral maestro – esclavo con retardos en el que la impedancia del esclavo es ajustada por la fuerza ejercida por el operador. La estabilidad del sistema es demostrada basándose en la teoría de la pasividad. Mediante diversos experimentos se verifica el funcionamiento del esquema de control.

K. Kosuge *et al.* [Kosuge-96b] propusieron un sistema de control para sistemas teleoperados “escalados” con retardos en la transmisión. En el esquema de control, la relación de movimiento y fuerza entre el maestro y el esclavo puede ser especificada mediante dos factores de escalado. La estabilidad del sistema es demostrada mediante la teoría de pasividad. En el artículo se presentan resultados experimentales que prueban la validez del control propuesto.

S. Aiguo *et al.* [Aiguo-96] presentaron un esquema de control adaptativo y pasivo de sistemas teleoperados con retardos basado en una correspondencia de impedancia activa para garantizar la estabilidad y la transparencia. El término de impedancia es activo y se adapta a la impedancia del entorno. Para identificar los parámetros de impedancia del entorno utilizan un algoritmo genético [Holland-75]. Los autores presentan diversos resultados experimentales que muestran el funcionamiento del control.

A. Caiti *et al.* [Caiti-96] indicaron que mediante la utilización de un bucle de control de fuerza integral local en el esclavo en un sistema teleoperado con reflexión de esfuerzos, es posible mejorar la estabilidad ante la presencia de retardos en la comunicación.

A. Eusebi y C. Melchiorri [Eusebi-98] aplicaron al control acomodaticio compartido [Kim-92] una ley de control que es capaz de, para un determinado retardo, aumentar la ganancia de reflexión de fuerza para mejorar el funcionamiento del sistema y al mismo tiempo asegurar la estabilidad o, para una determinada ganancia de reflexión de fuerza, asegurar la estabilidad para retardos mayores. La ley de control se basa en una red de atraso de fase. Los autores muestran, mediante resultados de simulación y experimentales, la efectividad del control propuesto.

K. Yamada *et al.* [Yamada-00] diseñaron un sistema de control bilateral de teleoperación con retardos basándose en la utilización de controladores que estabilizan sistemas de fase mínima.

2.6 Esquemas de control bilateral de sistemas teleoperados con retardo variable

En los sistemas teleoperados tradicionales para efectuar la comunicación entre el maestro y el esclavo se utiliza un medio de transmisión privado, por ejemplo un satélite de comunicaciones, un cable de comunicación privado, un canal de radio privado,... En estos casos puede considerarse que existe un retardo en la comunicación constante [Kosuge-96a].

Actualmente el desarrollo de las redes de computadores, como por ejemplo Internet, ha potenciado su uso como medio de transmisión en los sistemas teleoperados. Los sistemas teleoperados que utilizan redes de computadores son más baratos y flexibles en

comparación a los que utilizan canales de comunicación privados. Sin embargo, en estos sistemas el retardo existente en la comunicación no es constante, sino que varía en función de la carga de la red. Los esquemas de control bilateral que se utilizan cuando el retardo en la comunicación es constante no son aplicables cuando el retardo es variable. En [Kosuge-96a] se muestran simulaciones donde se verifica que, el esquema basado en pasividad [Anderson-89], que es estable para cualquier retardo constante, se vuelve inestable en el caso de que el retardo sea variable.

En la literatura se pueden encontrar distintos esquemas de control propuestos para solucionar el problema del retardo variable en la comunicación. K. Kosuge *et al.* [Kosuge-96a] presentaron el método del retardo virtual para mantener el retardo en la comunicación constante, y lo aplicaron al esquema basado en pasividad [Anderson-89] para asegurar la estabilidad ante retardos variables. R. Oboe y P. Fiorini [Oboe-97] presentaron un entorno para el diseño, simulación y control de sistemas bilaterales teleoperados que utilizan Internet como medio de transmisión. Además, a partir de los parámetros identificados del retardo, diseñaron un controlador que incluía un estimador casi-óptimo (*quasi-optimal estimator*) para compensar pequeñas pérdidas de datos. K. Brady y T.-J. Tarn [Brady-98] realizaron una formulación de los sistemas teleoperados en el espacio de estados teniendo en cuenta la naturaleza variable del retardo, proponiendo una arquitectura de control supervisado. A. Sano *et al.* [Sano-98] diseñaron controladores para sistemas teleoperados basándose en la teoría de control óptimo H_∞ . J. Kikuchi *et al.* [Kikuchi-98] también utilizaron el método del retardo virtual para mantener el retardo constante, así como un visualizador predictivo para estimar el comportamiento del entorno remoto. G. Niemeyer and J.-J. E. Slotine [Niemeyer-98] demostraron que la estabilidad de sistemas bilaterales teleoperados con retardo en la comunicación variable puede ser preservada mediante el uso de filtros de variables de onda. Y. Yokokohji *et al.* [Yokokohji-99] indicaron que el uso de variables de onda (*wave variables*) [Niemeyer-91], al mantener la pasividad del sistema, degrada el funcionamiento del sistema, por lo que propusieron añadir al esquema basado en variables de onda un bloque de compensación en el maestro y en el esclavo para minimizar la degradación. Sin embargo este sistema de control puede potencialmente generar energía infinita en determinadas situaciones, de forma que la estabilidad no puede ser asegurada. Para solucionar este problema, Y. Yokokohji *et al.* [Yokokohji-00] introdujeron un mecanismo de monitorización de balance de energía para limitar la energía que el sistema puede generar, y de este modo, asegurar la pasividad del sistema. J.-H. Park and H.-C. Cho [Park-99] presentaron un sistema de control bilateral formado por un controlador modificado en modo deslizante (*sliding-mode controller*) en el esclavo [Buttolo-94], con el que se compensan los efectos del retardo variable, y un controlador de impedancia en el maestro. Lozano *et al.* [Lozano-02] insertaron en el esquema de variables de onda [Niemeyer-91] una ganancia variable para garantizar la pasividad con retardos variables y, además, un saturador de velocidad en el esclavo para mejorar la capacidad de seguimiento del sistema.

2.7 Conclusiones

Se ha mostrado en este capítulo como fue en el sector espacial donde se puso de manifiesto la influencia negativa en los sistemas teleoperados de la presencia de retardos en la comunicación. En general, cuando el retardo existente en la comunicación

es importante, como puede ocurrir en las aplicaciones espaciales o submarinas, únicamente parece factible utilizar visualizadores predictivos en los que se emplean modelos cinemáticos y/o dinámicos del entorno remoto simulados mediante un computador para eliminar el problema del retardo. En este caso, para que exista realimentación de fuerzas hacia el operador, es necesario disponer de algoritmos de detección de colisiones, así como de generación de fuerzas virtuales.

Sin embargo, en la mayoría de aplicaciones de teleoperación, los retardos que aparecen son debidos al procesamiento y acondicionamiento de señales, de forma que son pequeños (pocos segundos). Existen multitud de esquemas de control en tiempo real que disponen de un bucle de realimentación del esclavo hacia el maestro, pensados para solucionar la problemática de los retardos cuando éstos son pequeños.

Puesto que esta Tesis va a presentar un nuevo esquema de control bilateral que se enmarca dentro de los esquemas de control bilateral válidos para retardos de hasta pocos segundos, se ha aportado en este capítulo un completo estado del arte de estos esquemas. En este estado del arte se ha hecho especial énfasis en los esquemas ideados para trabajar cuando el retardo es constante, debido a que el sistema de control que se propone en la Tesis ha sido ideado para el caso en el que el retardo en la comunicación es constante. De hecho, como se indicará en el capítulo 7, donde se muestran los resultados experimentales obtenidos utilizando el sistema de control aportado en la Tesis, este nuevo sistema de control no es aplicable si el retardo existente en la comunicación es variable.

No obstante, puesto que el desarrollo actual de las redes de computadores, como por ejemplo Internet, ha propiciado su uso como medio de transmisión en los sistemas teleoperados, y este medio se caracteriza por generar retardos variables, también se ha resumido en este capítulo los principales esquemas de control bilateral existentes en la literatura para trabajar con retardos variables.

Capítulo 3

Modelado y diseño de un sistema de control de teleoperación con retardos en la transmisión por convergencia de estados

3.1 Introducción

En este capítulo se va a presentar un nuevo método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión. Este método parte de un modelado del sistema teleoperado en variables de estado en el dominio del tiempo, en el que se han contemplado todas las posibles interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – medio. El método de diseño se basa en la obtención y resolución de un conjunto de ecuaciones que consiguen la convergencia del estado del esclavo y del maestro, logrando de este modo que el esclavo siga al maestro, así como establecer la dinámica de dicha convergencia y del esclavo. En este método de diseño se ha utilizado la aproximación de Taylor para modelar el retardo existente en la transmisión, lo cual constituye una idea original en el modelado y diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos.

Es de destacar que tanto el modelado como el método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos que se presentan en este capítulo constituyen claras aportaciones de esta Tesis. La importancia y novedad del método de diseño que se presenta radica en la posibilidad de la obtención de un esquema de control para que la dinámica del esclavo, así como la dinámica de la convergencia de estados del maestro y del esclavo, tengan el comportamiento deseado, a partir del retardo existente en la comunicación, de la constante de reflexión de esfuerzos y de las características dinámicas del maestro, del esclavo y del entorno.

Este capítulo se va a estructurar tal como se indica a continuación. En primer lugar se va exponer el modelado en representación interna del sistema teleoperado con retardos en la transmisión. Para explicar el modelado y el método de diseño se considerará un sistema teleoperado de 1 GDL en el que el maestro y el esclavo están representados por ecuaciones diferenciales de segundo orden (posteriormente, en el capítulo 6, se generalizará el modelado y el método de diseño al caso en el que el maestro y el esclavo están representados por ecuaciones diferenciales de orden n). Dentro del apartado de modelado del sistema teleoperado, se hará especial énfasis en el modelado del entorno y en la utilización de la aproximación de Taylor para modelar el retardo. Una vez presentado el modelado, se presentará el método de diseño del sistema de control mediante convergencia de estados. Tras detallar el método de diseño, se explicará

porqué se ha realizado la simplificación en el modelado del sistema teleoperado de considerar la fuerza que ejerce el operador constante, así como porqué se ha utilizado la aproximación de Taylor de primer orden para modelar el retardo y no una aproximación de mayor orden. Por último se presentarán las conclusiones, donde se hará hincapié en las ideas novedosas aportadas a lo largo del capítulo.

3.2 Modelado del sistema teleoperado

El modelado del sistema teleoperado maestro – esclavo con retardos en la transmisión se ha realizado en representación interna considerando todas las posibles interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno. Este modelado se muestra en la Figura 3.1.

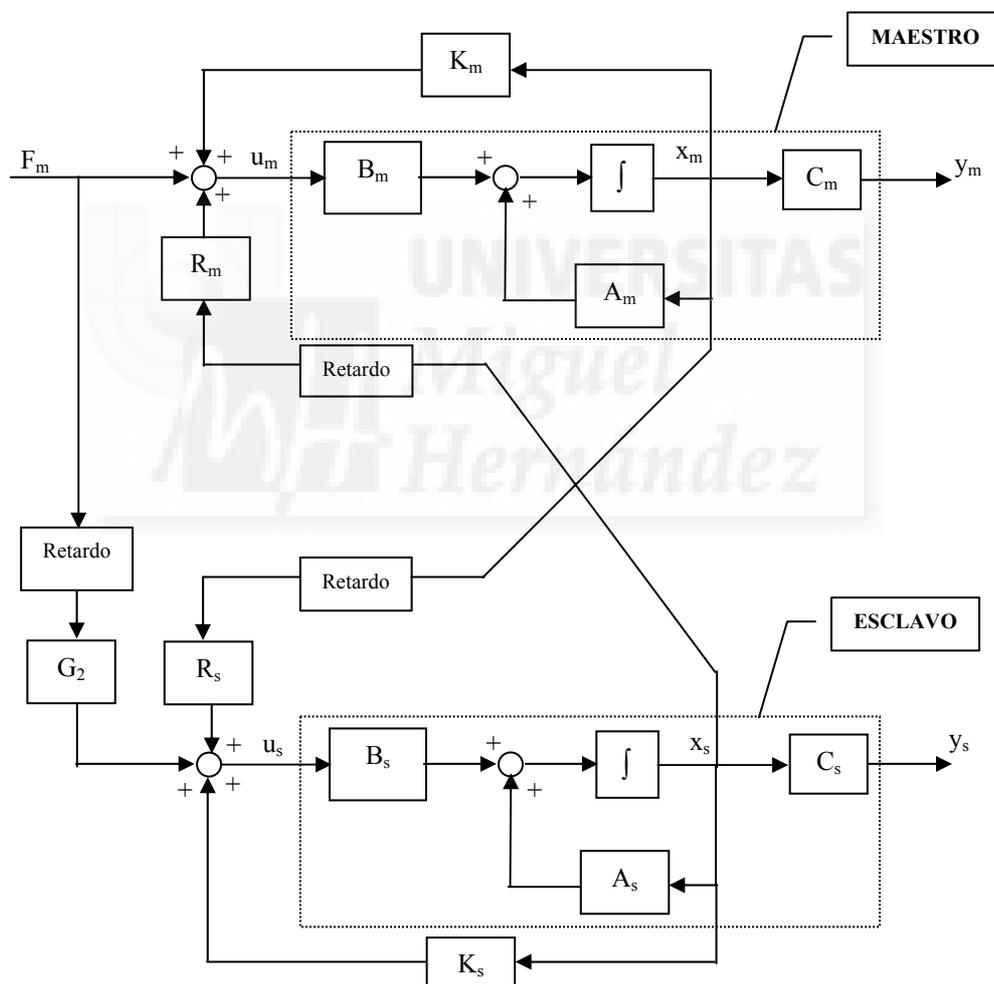


Figura 3.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.

El sistema maestro y esclavo, respectivamente, se representan en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde:

- x_m y x_s son las variables de estado,
- y_m y y_s representan las salidas,
- A_m y A_s son las matrices de estado,
- B_m y B_s son las matrices de entrada,
- y C_m y C_s son las matrices de salida.

Las señales que aparecen en el esquema son las siguientes:

- F_m : Fuerza aplicada por el operador en el maestro.
- u_m : Señal de control de entrada al maestro.
- u_s : Señal de control de entrada al esclavo.
- x_m : Vector de estados del maestro.
- x_s : Vector de estados del esclavo.
- y_m : Salida del maestro.
- y_s : Salida del esclavo.

Las matrices que aparecen en el modelo son las siguientes:

- G_2 : Define la influencia de la fuerza ejercida por el operador sobre el maestro en el esclavo.
- R_m : Define la interacción esclavo – maestro. Con los valores adecuados permite que el modelo contemple la reflexión de esfuerzos.
- R_s : Define la interacción maestro – esclavo.
- K_m : Matriz de realimentación de estado del maestro. Permite fijar la dinámica del maestro.
- K_s : Matriz de realimentación de estado del esclavo. Permite fijar la dinámica del esclavo.

Los bloques de retardo que aparecen en el modelo representan un retardo de T segundos, de forma que la señal a la salida de cada uno de estos bloques estará retardada T segundos.

Es de resaltar que la arquitectura de control de teleoperación que se muestra en Figura 3.1 en la que se consideran todas las posibles interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno, supone una idea novedosa que aporta la presente Tesis en el modelado de sistemas de control de robots teleoperados con retardos.

3.2.1 Análisis del modelo

Se va a realizar el análisis suponiendo que el maestro y el esclavo constan de un único grado de libertad, ver Figura 3.2. El modelo dinámico de un elemento de un único grado de libertad es el siguiente:

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = u(t) \quad (3.3)$$

donde $J = \frac{1}{3}ml^2$ es la inercia del elemento, b es el coeficiente de rozamiento viscoso, l es la longitud del elemento, g es la aceleración de la gravedad, m es la masa del elemento, $\theta(t)$ representa la posición (ángulo girado) en el instante t y $u(t)$ es el par de control aplicado en el instante t .

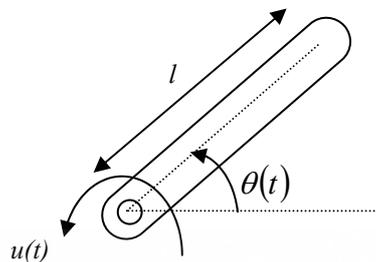


Figura 3.2. Modelo simplificado de un robot de 1 GDL.

Para efectuar el análisis, se va a considerar el modelo dinámico simplificado lineal:

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) = u(t) \quad (3.4)$$

Se va a expresar el modelo dinámico en el espacio de estados mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde el vector de estados es de la forma:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para modelar el sistema en el espacio de estados se van a elegir variables de estado con sentido físico. En concreto se van a considerar como variables de estado la posición y la velocidad del elemento.

Sea $x_1(t) = \theta(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t)$, es decir, el estado x_1 representa la posición del elemento, y el estado x_2 , la velocidad. A partir de la ecuación (3.4) se va a calcular la ecuación de estados:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{b}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{J}u(t) = -\frac{b}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t) \quad (3.8)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3.9)$$

Por tanto, el modelado en variables de estado con sentido físico del sistema es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

De esta forma, la representación en el espacio de estados del sistema maestro es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} u_m(t) \\ y_m(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La representación en el espacio de estados del sistema esclavo es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_s}{J_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_s} \end{bmatrix} u_s(t) \\ y_s(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

De forma simplificada se representará el sistema maestro y esclavo, respectivamente, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J_m \end{bmatrix} \quad C_m = [1 \quad 0] \quad x_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_s}{J_s} \end{bmatrix} \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J_s \end{bmatrix} \quad C_s = [1 \quad 0] \quad x_s(t) = \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La estructura del resto de matrices que aparecen en el modelo es la siguiente:

$$K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}] \quad (3.17)$$

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] \quad (3.18)$$

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2}] \quad (3.19)$$

$$R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}] \quad (3.20)$$

$$G_2 = g_2 \quad (3.21)$$

A partir del modelo puede observarse que la señal de control del maestro, $u_m(t)$, y del esclavo, $u_s(t)$, vienen dadas por:

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) \quad (3.22)$$

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (3.23)$$

Si se sustituye la señal de control del maestro y del esclavo en las ecuaciones de estado (3.13) y (3.14) por las expresiones (3.22) y (3.23) se obtienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m] x_m(t) + B_m R_m x_s(t-T) + B_m F_m(t) \quad (3.24)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s] x_s(t) + B_s R_s x_m(t-T) + B_s G_2 F_m(t-T) \quad (3.25)$$

3.2.2 Modelado del entorno

Un robot teleoperado en la realización de sus tareas suele interactuar de algún modo con el entorno, por ejemplo agarrando objetos o proyectando algún tipo de material. La dinámica de esta interacción debe considerarse en el diseño del sistema de control para contemplar las fuerzas de reacción que se generan. Por lo tanto es necesario contemplar un modelo del entorno.

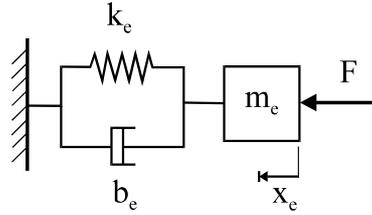


Figura 3.3. Modelo de entorno tipo Kelvin.

El modelo de entorno más utilizado en robótica es el modelo de entorno tipo Kelvin [Janabi-95]. Este entorno se representa como una rigidez en paralelo con un elemento de disipación viscoso, ver Figura 3.3. La ecuación que define su comportamiento ante una fuerza externa F es:

$$F = k_e x_e(t) + b_e \dot{x}_e(t) + m_e \ddot{x}_e(t) \quad (3.26)$$

donde k_e es la rigidez del entorno, b_e es el coeficiente de rozamiento viscoso, m_e es la masa equivalente, y $x_e(t)$ indica el desplazamiento del entorno.

En la presente Tesis se va modelar el entorno con el que interactúa el esclavo utilizando una simplificación del modelo de entorno tipo Kelvin. Esta simplificación consiste en considerar que el entorno es modelado únicamente por la constante de rigidez k_e y por el coeficiente de rozamiento viscoso b_e . De esta forma la fuerza de reacción actuante sobre el esclavo, que se denominará $f_s(t)$, vendrá dada por:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) + b_e \dot{\theta}_s(t) \quad (3.27)$$

donde se ha considerado que el desplazamiento del esclavo coincide con el desplazamiento del entorno.

Para incorporar en el modelo del sistema teleoperado mostrado en la Figura 3.1 la interacción del esclavo con el entorno, será necesario que la matriz K_s tenga la siguiente estructura:

$$K_s = \begin{bmatrix} k_{s1} & k_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{s1} - k_e & k'_{s2} - b_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} = K'_s - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

De este modo la señal que se obtiene al multiplicar el estado del esclavo por la matriz K_s será:

$$\begin{aligned} K_s x_s(t) &= \begin{bmatrix} k_{s1} & k_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} = (K'_s - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix}) x_s(t) = \\ &= K'_s x_s(t) - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} = K'_s x_s(t) - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s(t) \\ \dot{\theta}_s(t) \end{bmatrix} = \\ &= K'_s x_s(t) - (k_e \theta_s(t) + b_e \dot{\theta}_s(t)) = K'_s x_s(t) - f_s(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por lo tanto, la señal de control de entrada al esclavo será:

$$\begin{aligned} u_s(t) &= K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = \\ & K'_s x_s(t) - f_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como puede observarse en la expresión anterior, la fuerza de reacción $f_s(t)$ se opondrá a la señal de control de entrada al esclavo, modelando de esta forma que el esclavo está interaccionando con un entorno. De esta expresión también se deduce que cuando se lleve a cabo el control real del sistema teleoperado, la matriz que se utilizará para calcular la señal de control de entrada al esclavo será K'_s , y no la matriz K_s , ya que la matriz K_s incorpora el modelo del entorno.

Si se desea que exista reflexión de esfuerzos desde el esclavo hacia el maestro, es decir, realimentar hacia el maestro la fuerza de contacto del esclavo con el entorno, la estructura de la matriz R_m debe ser la siguiente:

$$R_m = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & k_f b_e \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

donde k_f es la constante de reflexión de esfuerzos considerada.

De esta forma la señal que se realimenta del esclavo hacia el maestro es:

$$\begin{aligned} R_m x_s(t-T) &= \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & k_f b_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s(t-T) \\ \dot{\theta}_s(t-T) \end{bmatrix} = \\ & k_f (k_e \theta_s(t-T) + \dot{b}_e \dot{\theta}_s(t-T)) = k_f f_s(t-T) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como puede comprobarse, con esta estructura de la matriz R_m se consigue realimentar la fuerza de contacto del esclavo con el entorno hacia el maestro.

Como se deduce de este epígrafe, será necesario conocer una estimación adecuada de la constante de rigidez k_e y del coeficiente de rozamiento viscoso b_e para que el modelo del entorno con el que interactúa el esclavo reproduzca lo más fielmente posible el entorno real y, de este modo, el sistema de control que se diseñe (según el procedimiento que se explique en el apartado 3.3), permita controlar de forma correcta el sistema teleoperado real.

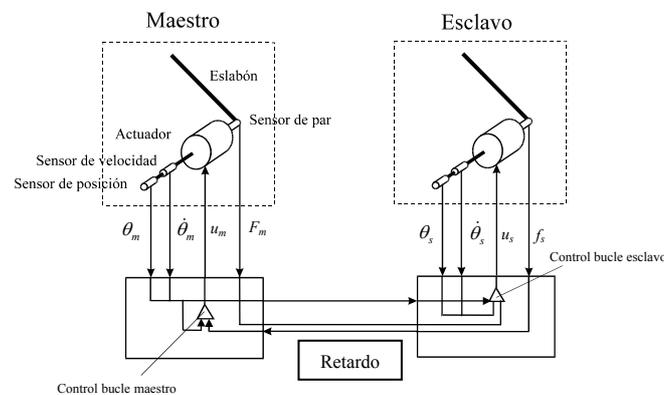


Figura 3.4. Esquema de control de un sistema teleoperado de 1 GDL.

De forma simplificada, considerando que el esclavo interactúa con un entorno y se realimenta la fuerza de interacción hacia el maestro, el esquema de control mostrado en la Figura 3.1 se podría representar, para el caso de un maestro y de un esclavo de 1 GDL, tal como se indica en la Figura 3.4. Como se puede observar se dispone de un sensor de par en el maestro y en el esclavo para obtener respectivamente la fuerza ejercida por el operador sobre el maestro (F_m) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (f_s). La fuerza ejercida por el operador sobre el maestro es enviada al bucle de control del esclavo, mientras que la fuerza de interacción del esclavo es suministrada al bucle de control del maestro. Tal como se indicó en el esquema de la Figura 3.1, la fuerza ejercida por el operador será multiplicada por la ganancia g_2 antes de ser suministrada al bucle de control del esclavo, y la fuerza de interacción de esclavo será multiplicada por la constante de reflexión de esfuerzos k_f antes de proporcionarse al bucle de control del maestro. Por otra parte, tanto el maestro como el esclavo disponen de sensores de posición y de velocidad. La posición y velocidad del maestro (θ_m y $\dot{\theta}_m$) es realimentada al propio bucle de control del maestro, y además es suministrada al bucle de control del esclavo. Como se muestra en la Figura 3.1, esta información será multiplicada por la matriz K_m cuando se realimente al propio bucle de control del maestro, mientras que será multiplicada por la matriz R_s cuando se proporcione al bucle de control del esclavo. En cuanto a la posición y velocidad del esclavo (θ_s y $\dot{\theta}_s$), puede apreciarse en la Figura 3.4 que esta información únicamente es realimentada al propio bucle de control del esclavo. Esta información será multiplicada por la matriz K'_s cuando sea realimentada, tal como se indica en la expresión (3.30). La posición y velocidad del esclavo no son proporcionadas al bucle de control del maestro. La única información que se realimenta del esclavo hacia el maestro es la fuerza de interacción con el entorno. Sin embargo, en el modelo presentado en la Figura 3.1, aparentemente sí existía realimentación de la posición y velocidad del esclavo hacia el maestro. Aunque aparentemente existía la realimentación de esta información, recordemos que se utilizó para, al multiplicarla por la matriz R_m , modelar la reflexión de esfuerzos del esclavo hacia el maestro, como se indicó en (3.31), por lo que realmente también se estaba realimentando la fuerza de interacción del esclavo, y no la posición y velocidad del esclavo.

3.2.3 Aproximación del retardo

Como se puede apreciar en las ecuaciones de estado (3.24) y (3.25), aparecen términos afectados por el retardo existente en la comunicación. En concreto en la ecuación (3.24) aparece el estado del esclavo retardado T segundos: $x_s(t-T)$; mientras que en la ecuación (3.25) aparecen el estado del maestro y la fuerza ejercida por el operador retardados T segundos: $x_m(t-T)$ y $F_m(t-T)$. Para eliminar el retardo de estas ecuaciones de estado, de forma que no aparezcan términos en función del tiempo retardado T segundos, se va a utilizar la aproximación de Taylor de primer orden. El empleo de la aproximación de Taylor para eliminar el retardo de las ecuaciones de estado del sistema teleoperado, y poder, de este modo, abordar el diseño del esquema de control utilizando las ecuaciones de estado sin la presencia de términos retardados, supone una idea original y por tanto una clara aportación de la presente Tesis.

Aproximación de Taylor de una función real $f(x)$: Si $f(x)$ y sus n derivadas son continuas en un intervalo que contiene a $x = a$, se puede aproximar el valor de la función en $x = a$ por:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (3.33)$$

Si se sustituye en la expresión (3.33) x por $t-T$ y a por t se obtiene que el valor de una función retardada T segundos puede aproximarse por:

$$f(t-T) = f(t) - Tf'(t) + \frac{T^2}{2!}f''(t) - \frac{T^3}{3!}f'''(t) + \dots \quad (3.34)$$

De esta forma, las señales retardadas T segundos del esquema de control se pueden modelar, utilizando la aproximación de Taylor de primer orden, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x_s(t-T) &= x_s(t) - T\dot{x}_s(t) \\ x_m(t-T) &= x_m(t) - T\dot{x}_m(t) \\ F_m(t-T) &= F_m(t) - TF_m'(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por lo tanto, si se sustituye las señales retardadas que aparecen en las ecuaciones de estado (3.24) y (3.25), por las expresiones mostradas en (3.35) se obtiene:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (3.36)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) - TB_s G_2 \dot{F}_m(t) \quad (3.37)$$

Si se considera que la fuerza que ejerce el operador es constante, entonces $\dot{F}_m(t) = 0$, por lo que las ecuaciones (3.36) y (3.37) se convierten en:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (3.38)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) \quad (3.39)$$

Es necesario destacar que, en el apartado 3.4, se ha abordado el modelado y el diseño del sistema de control de teleoperación considerando que la fuerza del operador no es constante. En dicho apartado se muestra como no ha sido posible deducir un método de diseño del sistema de control con tal suposición. Por esta razón se ha realizado la simplificación de asumir constante la fuerza que ejerce el operador. A pesar de efectuar esta simplificación, el esquema de control que se diseñe funcionará correctamente para fuerzas ejercidas por el operador no constantes, como se mostrará con las pruebas experimentales del capítulo 7.

Combinando las ecuaciones de estado (3.38) y (3.39), y expresándolas de forma matricial se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} F_m(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= (I - T^2 B_m R_m B_s R_s)^{-1} \\ S &= (I - T^2 B_s R_s B_m R_m)^{-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

La ecuación de estado (3.40) modela de forma completa el sistema teleoperado mostrado en la Figura 3.1. Para obtener dicha ecuación, como se ha indicado en este apartado, se ha utilizado la expansión de Taylor de primer orden para aproximar los términos retardados. En el apartado 3.5 se explica porqué se ha empleado la aproximación de Taylor de primer orden y no se ha utilizado una aproximación de mayor orden para obtener el modelo completo del sistema.

A partir de la ecuación (3.40) que modela de forma completa el sistema teleoperado, se va a abordar en el siguiente apartado el diseño del esquema de control. Es decir, se va a detallar el procedimiento a seguir para obtener el valor de las matrices de regulación, de forma que el esclavo sea capaz de seguir al maestro a pesar de la existencia de retardos, además de establecer las características dinámicas del sistema teleoperado.

3.3 Diseño del control del sistema teleoperado con retardos en la transmisión por convergencia de estados

En este apartado se va a diseñar el esquema de control del sistema teleoperado con retardos modelado en la Figura 3.1 y representado en el espacio de estados por la ecuación (3.40). El método de diseño que se presenta en este apartado permitirá que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos. Para ello el procedimiento de diseño conseguirá que el estado del maestro y el del esclavo converjan, es decir, que el error entre ambos se anule. Además de lograr la convergencia entre el estado del maestro y el estado del esclavo, el método de diseño que se expone será capaz de establecer la dinámica de dicha convergencia, además de fijar las características dinámicas del esclavo. Es de destacar que este apartado constituye una de las mayores aportaciones de la presente Tesis, pues presenta un método novedoso de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos.

Para efectuar el diseño del esquema de control del sistema teleoperado, se va a considerar, tal como se indicó en el epígrafe 3.2.2, que el esclavo interactúa con un entorno modelado únicamente por una constante de rigidez k_e y por un coeficiente de rozamiento viscoso b_e (modelo de entorno tipo Kelvin simplificado), y que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es realimentada al maestro. Con estas consideraciones los parámetros a calcular en el esquema de control serán:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] = [k'_{s1} - k_e \quad k'_{s2} - b_e]$

Por tanto existen siete parámetros a calcular en el esquema de control. Como puede apreciarse la matriz R_m no es una matriz a calcular, esto se debe a que esta matriz tiene unos valores impuestos para contemplar la reflexión de esfuerzos, como se indicó en la expresión (3.31). Puesto que existen siete parámetros a calcular en el esquema de control, será necesario plantear siete ecuaciones que permitan obtener el valor de estos parámetros. A continuación se va a describir de forma detallada el procedimiento mediante el cual se obtienen estas ecuaciones.

Se va a representar de forma simplificada la ecuación de estado (3.40) del siguiente modo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BF_m(t) \quad (3.42)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$B = \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

En primer lugar se va a realizar una transformación lineal en el espacio de estado para obtener la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro. Como es conocido de la teoría de control en el espacio de estado [Domínguez-02], si se aplica la siguiente transformación de estado sobre la ecuación (3.42):

$$x(t) = T_r \tilde{x}(t) \quad (3.46)$$

donde T_r es una matriz no singular de dimensión 4×4 , se obtiene una nueva representación en el espacio de estado que viene dada por la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T_r^{-1} A T_r \tilde{x}(t) + T_r^{-1} B F_m(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} F_m(t) \quad (3.47)$$

La transformación lineal que se va a realizar sobre (3.42) para obtener la ecuación de estado del error entre el maestro y el esclavo es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \tilde{x}(t) = T_r^{-1}x(t) \quad (3.48)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión 2×2 , y en este caso, la matriz T_r y su inversa coinciden.

Realizando esta transformación sobre (3.42) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_s(t) - \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \tilde{B}F_m(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} F_m(t) \quad (3.49)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) + S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & -S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Se va a denominar $x_e(t)$ al error entre el estado del esclavo $x_s(t)$ y el estado del maestro $x_m(t)$, es decir:

$$x_e(t) = x_s(t) - x_m(t) \quad (3.52)$$

De este modo la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro vendrá dada por:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{21}x_s(t) + \tilde{A}_{22}x_e(t) + \tilde{B}_{21}F_m(t) \quad (3.53)$$

donde:

$$\tilde{A}_{21} = S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \quad (3.54)$$

$$\tilde{A}_{22} = M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \quad (3.55)$$

$$\tilde{B}_{21} = S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \quad (3.56)$$

Si se consigue que en la ecuación (3.53) los términos \tilde{A}_{21} y \tilde{B}_{21} sean cero, el error evolucionará como un sistema autónomo, es decir la ecuación de estado (3.53) se convertirá en la ecuación homogénea:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{22}x_e(t) \quad (3.57)$$

La solución de esta ecuación homogénea viene dada por [Ogata-98]:

$$x_e(t) = e^{\tilde{A}_{22}t} x_e(0) \quad (3.58)$$

donde $x_e(0)$ representa el vector de estado del error inicial y $e^{\tilde{A}_{22}t}$ se denomina matriz exponencial de \tilde{A}_{22} .

La matriz \tilde{A}_{22} fija la dinámica del error, es decir, los valores propios de esta matriz corresponden a los polos del error, y por tanto, determinan la estabilidad y las características de respuesta transitoria del sistema (3.57). Como es conocido de la teoría de control [Ogata-98], si los polos de \tilde{A}_{22} se ubican en el semiplano izquierdo del plano s , entonces la matriz \tilde{A}_{22} será asintóticamente estable y para todos los $x_e(0) \neq 0$, $x_e(t)$ tenderá a 0 conforme t tienda a infinito.

Por tanto si se consigue que el error evolucione como un sistema autónomo y se ubican los polos del error en el semiplano izquierdo del plano s , se conseguirá que el error entre el maestro y el esclavo se anule, es decir, se logrará que el esclavo siga en todo momento al maestro, que es el objetivo del esquema de control de teleoperación.

Como se ha indicado anteriormente, para que el error ente el esclavo y el maestro evolucione como un sistema autónomo \tilde{A}_{21} y \tilde{B}_{21} deben ser cero, es decir deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{21} = S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\tilde{B}_{21} = S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) = 0 \quad (3.60)$$

Realizando cálculos en la ecuación (3.59), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$J_m k_{s1} - Tr_{m1} r_{s2} - J_s r_{m1} + Tr_{m2} k_{s1} + J_m r_{s1} - Tr_{s2} k_{m1} - J_s k_{m1} + Tr_{m2} r_{s1} = 0 \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) - Tr_{s2} r_{m2} - J_s r_{m2} + J_s Tr_{m1} + Tr_{m2} (k_{s2} - b_s) + \\ J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) - Tr_{s2} (k_{m2} - b_m) - T^2 r_{m2} r_{s1} - J_s (k_{m2} - b_m) + Tr_{m2} r_{s2} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Operando en la ecuación (3.60) se obtiene que debe cumplirse:

$$J_m g_2 - Tr_{s2} - J_s + T g_2 r_{m2} = 0 \quad (3.63)$$

Por tanto mediante las ecuaciones (3.61), (3.62) y (3.63) se conseguirá que el error evolucione como un sistema autónomo. De este modo ya se dispone de tres ecuaciones para fijar los parámetros del esquema de control. Sin embargo, como se indicó anteriormente, son necesarias siete ecuaciones para poder fijar los siete parámetros de control. A continuación se va a describir como se obtienen las cuatro ecuaciones que faltan.

Cuando el error evolucione como un sistema autónomo, la ecuación de estado del sistema completo vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_s(t) - \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) + & -S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - \\ 0 & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ 0 \end{bmatrix} F_m(t) \quad (3.64)$$

El polinomio característico del sistema completo vendrá dado por:

$$\det(sI - \tilde{A}) = 0 \quad (3.65)$$

Es decir, el polinomio característico del sistema será:

$$\det \begin{bmatrix} sI - S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & sI - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) + \\ 0 & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \end{bmatrix} = \det\{sI - [S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) + S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m))]\} \cdot \det\{sI - [M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m))]\} = 0 \quad (3.66)$$

Si se analiza la expresión (3.66) puede observarse que el primer determinante igualado a cero define la dinámica del esclavo, mientras que el segundo determinante igualado a cero define la dinámica del error esclavo – maestro.

Como se ha comentado anteriormente, los polos del error debe situarse en el semiplano izquierdo del plano s para que el error entre el maestro y el esclavo sea cero. Además, los polos que fijan la dinámica del esclavo también deben situarse en el semiplano izquierdo del plano s para asegurar la estabilidad del sistema completo y establecer las características dinámicas de la respuesta del esclavo.

Por tanto mediante los dos determinantes de la expresión (3.66), será posible ubicar los polos del error y del esclavo en el lugar deseado.

Si se realizan cálculos en el primer determinante de la expresión (3.66), se obtiene el siguiente polinomio característico del esclavo:

$$\det[sI - D_s] = 0 \quad (3.67)$$

donde:

$$D_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{J_m k_{s1} - Tr_{m1} r_{s2} + J_m r_{s1} - Tr_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} & \frac{T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) - Tr_{s2} r_{m2} + J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) - Tr_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Del mismo modo, si se realizan cálculos en el segundo determinante de la expresión (3.66), se obtiene el siguiente polinomio característico del error:

$$\det[sI - D_e] = 0 \quad (3.69)$$

donde:

$$D_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{J_s k_{m1} - Tr_{m2} r_{s1} - J_m r_{s1} + Tr_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} & \frac{T^2 r_{m2} r_{s1} + J_s (k_{m2} - b_m) - Tr_{m2} r_{s2} - J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) + Tr_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Por tanto si desea fijar la dinámica del esclavo de forma que el polinomio característico del esclavo sea $p(s) = s^2 + p_1 s + p_0$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{J_m k_{s1} - Tr_{m1} r_{s2} + J_m r_{s1} - Tr_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -p_0 \quad (3.71)$$

$$\frac{T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) - Tr_{s2} r_{m2} + J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) - Tr_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -p_1 \quad (3.72)$$

Y si se desea establecer la dinámica del error de forma que el polinomio característico del error sea $q(s) = s^2 + q_1 s + q_0$, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\frac{J_s k_{m1} - Tr_{m2} r_{s1} - J_m r_{s1} + Tr_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -q_0 \quad (3.73)$$

$$\frac{T^2 r_{m2} r_{s1} + J_s (k_{m2} - b_m) - Tr_{m2} r_{s2} - J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) + Tr_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -q_1 \quad (3.74)$$

De este modo mediante las ecuaciones (3.71), (3.72), (3.73) y (3.74) será posible fijar la dinámica deseada del esclavo y del error. Estas cuatro ecuaciones, junto con las tres ecuaciones (3.61), (3.62) y (3.63) que hacen que el error evolucione como un sistema autónomo, forman un sistema de siete ecuaciones que permiten calcular los siete parámetros del esquema de control. A continuación se muestran en conjunto las siete ecuaciones necesarias para el diseño del esquema de control:

➤ Ecuaciones que hacen que el error se comporte como un sistema autónomo:

$$J_m k_{s1} - Tr_{m1} r_{s2} - J_s r_{m1} + Tr_{m2} k_{s1} + J_m r_{s1} - Tr_{s2} k_{m1} - J_s k_{m1} + Tr_{m2} r_{s1} = 0 \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) - J_s r_{m2} + J_s T r_{m1} + T r_{m2} (k_{s2} - b_s) + \\ J_m (r_{s2} - T r_{s1}) - T r_{s2} (k_{m2} - b_m) - T^2 r_{m2} r_{s1} - J_s (k_{m2} - b_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$J_m g_2 - T r_{s2} - J_s + T g_2 r_{m2} = 0 \quad (3.77)$$

- Ecuaciones que fijan la dinámica del esclavo considerando que el polinomio característico deseado del esclavo es $p(s) = s^2 + p_1 s + p_0$:

$$\frac{J_m k_{s1} - T r_{m1} r_{s2} + J_m r_{s1} - T r_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -p_0 \quad (3.78)$$

$$\frac{T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) - T r_{s2} r_{m2} + J_m (r_{s2} - T r_{s1}) - T r_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -p_1 \quad (3.79)$$

- Ecuaciones que fijan la dinámica del error considerando que el polinomio característico deseado del error es $q(s) = s^2 + q_1 s + q_0$:

$$\frac{J_s k_{m1} - T r_{m2} r_{s1} - J_m r_{s1} + T r_{s2} k_{m1}}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -q_0 \quad (3.80)$$

$$\frac{T^2 r_{m2} r_{s1} + J_s (k_{m2} - b_m) - T r_{m2} r_{s2} - J_m (r_{s2} - T r_{s1}) + T r_{s2} (k_{m2} - b_m)}{J_s J_m - T^2 r_{s2} r_{m2}} = -q_1 \quad (3.81)$$

Solucionando este sistema de ecuaciones se conseguirá que el esclavo siga en todo momento al maestro a pesar de la existencia de retardos, así como establecer la dinámica deseada del esclavo y del error entre el maestro y el esclavo. Para solucionar el sistema de ecuaciones lógicamente será necesario conocer el modelo dinámico del maestro (inercia J_m y rozamiento viscoso b_m), el modelo dinámico del esclavo (inercia J_s y rozamiento viscoso b_s), el modelo dinámico del entorno (rigidez k_e y rozamiento viscoso b_e), la constante de reflexión de esfuerzos (k_f) y el retardo existente en la comunicación (T), además de indicar el polinomio característico deseado del esclavo y del error.

Con este procedimiento de diseño, el cálculo de los parámetros de control que aparecen en el esquema de la Figura 3.1 se reduce simplemente a la solución de un sistema de ecuaciones. Se ha convertido un problema de control, por tanto, en un mero problema algebraico de resolución de ecuaciones. Este método de diseño de sistemas de control de robots teleoperados es una gran aportación de la presente Tesis, estableciendo un procedimiento claro y conciso de cálculo de los parámetros de regulación. Es necesario resaltar la potencia del método de diseño presentado, puesto que, además de conseguir que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos, permite establecer las características dinámicas deseadas de la respuesta del esclavo, así como las características dinámicas deseadas de la convergencia entre el maestro y el esclavo.

3.4 Diseño del sistema de control de teleoperación con retardos considerando que la fuerza del operador no es constante

En el apartado 3.2.3 se presentaron las ecuaciones de estado que se obtenían al modelar el retardo utilizando la aproximación de Taylor de primer orden. Las ecuaciones que se obtuvieron fueron (3.36) y (3.37):

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (3.82)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) - TB_s G_2 \dot{F}_m(t) \quad (3.83)$$

En dicho apartado se consideró que la fuerza que ejercía el operador era constante, de forma que $\dot{F}_m(t) = 0$. En este apartado se va a efectuar el diseño del esquema de control del sistema teleoperado por convergencia de estados sin asumir que la fuerza del operador es constante.

Si se sustituye la expresión (3.83) en (3.82) y también se sustituye la expresión (3.82) en (3.83) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m [[A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) - TB_s G_2 \dot{F}_m(t)] + B_m F_m(t) \quad (3.84)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s [[A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_m(t) + B_m F_m(t)] + B_s G_2 F_m(t) - TB_s G_2 \dot{F}_m(t) \quad (3.85)$$

Agrupando términos en las ecuaciones (3.84) y (3.85) y expresándolas de forma matricial se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} F_m(t) + \begin{bmatrix} -STB_s G_2 \\ MT^2 B_m R_m B_s G_2 \end{bmatrix} \dot{F}_m(t) \quad (3.86)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= (I - T^2 B_m R_m B_s R_s)^{-1} \\ S &= (I - T^2 B_s R_s B_m R_m)^{-1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

De forma simplificada vamos a representar esta ecuación matricial como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 F_m(t) + B_0 \dot{F}_m(t) \quad (3.88)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -STB_s G_2 \\ MT^2 B_m R_m B_s G_2 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

A partir de esta ecuación se va a obtener una ecuación de estado donde no aparezca la derivada de la fuerza del operador, sino simplemente aparezca la fuerza del operador. De este modo se podrá aplicar al nuevo sistema (sin derivada de la fuerza del operador) el método para diseñar el esquema de control presentado en el apartado 3.3.

Para eliminar la derivada de la fuerza del operador en la ecuación (3.88) se va a realizar el siguiente cambio de variable tal como se indica en [Ogata-98]:

$$\hat{x}(t) = x(t) - B_o F_m(t) \quad (3.93)$$

Aplicando este cambio de variable a la ecuación (3.88) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + (B_1 + AB_0)F_m(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}F_m(t) \quad (3.94)$$

donde A no ha variado y coincide con (3.89), y \hat{B} tiene la siguiente expresión:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m)STB_s G_2 + \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m))MT^2 B_m R_m B_s G_2 \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s))STB_s G_2 + \\ M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s)MT^2 B_m R_m B_s G_2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

El significado de las nuevas variables de estado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) - B_o F_m(t) \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_s(t) \\ \hat{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -STB_s G_2 \\ MT^2 B_m R_m B_s G_2 \end{bmatrix} F_m(t) \\ \hat{x}_s(t) &= x_s(t) + STB_s G_2 F_m(t) \\ \hat{x}_m(t) &= x_m(t) - MT^2 B_m R_m B_s G_2 F_m(t) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Realizando cálculos se obtiene que el significado de las nuevas variables es:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{s1}(t) &= x_{s1}(t) \\ \hat{x}_{s2}(t) &= x_{s2}(t) + \frac{Tg_2}{1 - T^2 r_{s2} r_{m2}} F_m(t)\end{aligned}\quad (3.97)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{m1}(t) &= x_{m1}(t) \\ \hat{x}_{m2}(t) &= x_{m2}(t) - \frac{T^2 g_2 r_{m2}}{1 - T^2 r_{s2} r_{m2}} F_m(t)\end{aligned}\quad (3.98)$$

Tal como se efectuó en el apartado 3.3 se va a realizar la siguiente transformación de estado sobre la ecuación (3.94) para obtener la ecuación de estado del error entre las nuevas variables de estado del maestro y del esclavo:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_s(t) \\ \hat{x}_s(t) - \hat{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{x}(t) = T_r^{-1} x(t) \quad (3.99)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión 2×2 , y en este caso, la matriz T_r y su inversa coinciden.

Aplicando esta transformación se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_s(t) \\ \dot{\hat{x}}_s(t) - \dot{\hat{x}}_m(t) \end{bmatrix} &= \tilde{A} \begin{bmatrix} \hat{x}_s(t) \\ \hat{x}_s(t) - \hat{x}_m(t) \end{bmatrix} + \tilde{B} F_m(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_s(t) \\ \hat{x}_s(t) - \hat{x}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} F_m(t) \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde \tilde{A} coincide con la expresión (3.50):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - T B_s R_s B_m R_m) + & -S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) & \\ \\ S(A_s + B_s K_s - T B_s R_s B_m R_m) - & \\ M(B_m R_m - T B_m R_m (A_s + B_s K_s)) + & M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) - \\ S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) - & S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) & \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

y \tilde{B} tiene la siguiente expresión:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) STB_s G_2 + \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) MT^2 B_m R_m B_s G_2 \\ S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) STB_s G_2 + \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) MT^2 B_m R_m B_s G_2 - M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) + \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) STB_s G_2 - \\ M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) MT^2 B_m R_m B_s G_2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Se va a denominar $\hat{x}_e(t)$ al error entre el nuevo estado del esclavo $\hat{x}_s(t)$ y el nuevo estado del maestro $\hat{x}_m(t)$:

$$\hat{x}_e(t) = \hat{x}_s(t) - \hat{x}_m(t) \quad (3.103)$$

De este modo la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro vendrá dada por:

$$\dot{\hat{x}}_e(t) = \tilde{A}_{21} \hat{x}_s(t) + \tilde{A}_{22} \hat{x}_e(t) + \tilde{B}_{21} F_m(t) \quad (3.104)$$

Como ya fue comentado, si se consigue que en la ecuación (3.104) los términos \tilde{A}_{21} y \tilde{B}_{21} sean cero, el error evolucionará como un sistema autónomo, es decir la ecuación de estado (3.104) se convertirá en la ecuación homogénea:

$$\dot{\hat{x}}_e(t) = \tilde{A}_{22} \hat{x}_e(t) \quad (3.105)$$

Si los polos del error, que corresponden a los valores propios de la matriz \tilde{A}_{22} , se sitúan en el semiplano izquierdo del plano s , entonces el error entre el esclavo y el maestro se hará cero conforme t tienda a infinito.

Para que \tilde{A}_{21} y \tilde{B}_{21} sean cero deben satisfacerse respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{21} &= S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + \\ &S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) = 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{21} &= S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) - S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) STB_s G_2 + \\ &S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) MT^2 B_m R_m B_s G_2 - M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) + \\ &M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) STB_s G_2 - \\ &M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) MT^2 B_m R_m B_s G_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

La ecuaciones que se obtienen a partir de (3.106) ya fueron calculadas en el apartado 3.3. Si se efectúan los cálculos que se indican en la expresión (3.107) se obtiene:

$$\tilde{B}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{g_2 T (J_m + T r_{m2})}{-J_s J_m + T^2 r_{s2} r_{m2}} \\ \tilde{b}_{21_2} \\ -\frac{\tilde{b}_{21_2}}{(-J_s J_m + T^2 r_{s2} r_{m2})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{21_2} = & -g_2 J_m^2 J_s - g_2 J_m T^2 r_{s2} r_{m2} + T r_{s2} J_s J_m - T^3 r_{s2}^2 r_{m2} + g_2 J_m T^3 r_{s2} r_{m1} - \\ & g_2 J_m^2 T b_s + g_2 J_m^2 T k_{s2} + g_2 J_m T^3 r_{m2} r_{s1} - T^3 g_2 b_m r_{s2} r_{m2} + T^3 g_2 k_{m2} r_{s2} r_{m2} + \\ & J_s^2 J_m - J_s T^2 r_{s2} r_{m2} - 2T g_2 r_{m2} J_s J_m + g_2 T^2 r_{m1} J_s J_m - g_2 T^2 J_m r_{m2} b_s + \\ & g_2 T^2 J_m r_{m2} k_{s2} + T^4 g_2 r_{m2}^2 r_{s1} - T^2 g_2 r_{m2} k_{m2} J_s \end{aligned} \quad (3.109)$$

Para que la primera fila de \tilde{B}_{21} sea cero se debe cumplir:

$$g_2 T (J_m + T r_{m2}) = 0 \quad (3.110)$$

Hay dos opciones para que se cumpla la expresión (3.110): $g_2 = 0$ ó $J_m + T r_{m2} = 0$. A continuación se contempla de forma separada cada una de estas opciones.

3.4.1 Opción 1: $g_2 = 0$

Si se considera que $g_2 = 0$, entonces, tal como puede observarse en la Figura 3.1, no se proporciona la fuerza que ejerce el operador al esclavo. En este caso, las ecuaciones (3.82) y (3.83) quedan del siguiente modo:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m] x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - T B_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (3.111)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s] x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - T B_s R_s \dot{x}_m(t) \quad (3.112)$$

Por lo que si se expresan en forma matricial y se combinan se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - T B_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - T B_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -T B_s R_s B_m \\ M B_m \end{bmatrix} F_m(t) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Esta ecuación de estado no posee derivada de la fuerza de entrada del operador, por lo que puede plantearse la transformación de estado anteriormente citada para obtener la ecuación de estado del error. Si se aplica la transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_s(t) - \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \tilde{B} F_m(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} F_m(t) \quad (3.114)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) + & -S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & \\ \\ S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - & \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) & \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -STB_s R_s B_m \\ -STB_s R_s B_m - MB_m \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

La ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro será:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{21} x_s(t) + \tilde{A}_{22} x_e(t) + \tilde{B}_{21} F_m(t) \quad (3.117)$$

Si se plantean las ecuaciones que hacen que la ecuación del error se convierta en una ecuación homogénea, es decir que \tilde{A}_{21} y \tilde{B}_{21} sean cero, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) - M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) + S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) - M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) = 0 \quad (3.118)$$

$$-STB_s R_s B_m - MB_m = 0 \quad (3.119)$$

Realizando cálculos se obtiene que las ecuaciones que hacen que el error evolucione como un sistema autónomo son:

$$r_{s2} = \frac{-J_s}{T} \quad (3.120)$$

$$k_{s1} = -r_{s1} \quad (3.121)$$

$$k_{s2} = \frac{b_s (J_m + Tr_{m2}) + J_s r_{m2} + J_m \left(\frac{J_s}{T} + Tr_{s1} \right) + T^2 r_{m2} r_{s1}}{J_m + Tr_{m2}} \quad (3.122)$$

Como ya fue indicado en el apartado 3.3, cuando el error evoluciona como un sistema autónomo, es posible establecer los polos que fijan la dinámica del error así como los que fijan la dinámica del esclavo.

En este caso si se considera que el polinomio característico deseado del esclavo es $p(s) = s^2 + p_1s + p_0$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$k_{m1} = -p_0(J_m + Tr_{m2}) - r_{m1} \quad (3.123)$$

$$k_{m2} = -p_1(J_m + Tr_{m2}) - \frac{J_m}{J_s}(k_{s2} - b_s - Tr_{s1}) - (r_{m2} - Tr_{m1} - b_m) + \frac{J_m}{T} \quad (3.124)$$

Y considerando que el polinomio característico deseado del error es $q(s) = s^2 + q_1s + q_0$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$r_{s1} = q_0J_s \quad (3.125)$$

$$r_{m2} = \frac{-J_sJ_m\left(q_1 + \frac{1}{T}\right) - J_mTr_{s1}}{J_s + T^2r_{s1} + q_1J_sT} \quad (3.126)$$

Como puede observarse existen siete ecuaciones a resolver. Sin embargo no existen siete parámetros de control a calcular. Las matrices que aparecen en el esquema de control son:

- $R_s = \begin{bmatrix} r_{s1} & r_{s2} \end{bmatrix}$
- $R_m = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix}$
- $K_m = \begin{bmatrix} k_{m1} & k_{m2} \end{bmatrix}$
- $K_s = \begin{bmatrix} k_{s1} & k_{s2} \end{bmatrix}$

En el apartado 3.2.2 se utilizó la matriz R_m para modelar la reflexión de esfuerzos del esclavo hacia el maestro. Es decir, se consideró que la fuerza de reacción del esclavo con el entorno venía dada por:

$$f_s(t) = k_e\theta_s(t) + b_e\dot{\theta}_s(t) \quad (3.127)$$

donde k_e y b_e correspondían, respectivamente, a la rigidez y al coeficiente de rozamiento viscoso utilizados para modelar el entorno.

Para modelar la reflexión de esfuerzos del esclavo al maestro se consideró que la estructura de la matriz R_m era:

$$R_m = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & k_f b_e \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

donde k_f era la constante de reflexión de esfuerzos considerada.

Sin embargo, en este caso, si se utiliza R_m para modelar la reflexión de fuerzas, existirán 7 ecuaciones y 6 incógnitas, ya que g_2 se ha considerado cero, de manera que no será posible solucionar el sistema de ecuaciones. Además, si se observa las ecuaciones

anteriores, se puede apreciar que r_{m2} viene dado por la ecuación (3.126) en combinación con (3.125), por lo tanto R_m no puede ser utilizado de forma completa para modelar la reflexión de esfuerzos. Por esta razón se va a considerar que r_{m2} es un parámetro de control que se calcula según (3.126) y que r_{m1} se utiliza para modelar la reflexión de esfuerzos del esclavo. Es decir la estructura de la matriz R_m será:

$$R_m = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & r_{m2} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Este hecho puede interpretarse como que el entorno con el que interacciona el esclavo únicamente es modelado por la constante de rigidez k_e , de forma que la fuerza de reacción del esclavo con el entorno viene dada por:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) \quad (3.130)$$

Es necesario destacar que con la estructura de R_m considerada, no se está realimentando al maestro exactamente la fuerza de reacción del esclavo con el entorno, sino que se está realimentado la fuerza de reacción más un término que depende de r_{m2} y de la velocidad del esclavo $\dot{\theta}_s(t-T)$. Esto podría considerarse como una realimentación al maestro de una fuerza de reacción del esclavo con el entorno perturbada, tal como se puede apreciar en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R_m x_s(t-T) &= \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & r_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s(t-T) \\ \dot{\theta}_s(t-T) \end{bmatrix} = \\ k_f k_e \theta_s(t-T) + r_{m2} \dot{\theta}_s(t-T) &= k_f f_s(t-T) + r_{m2} \dot{\theta}_s(t-T) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Con esta suposición, si se sustituye la ecuación (3.125) en (3.126) se obtiene:

$$r_{m2} = -\frac{J_m}{T} \quad (3.132)$$

Por tanto:

$$J_m + T r_{m2} = 0 \quad (3.133)$$

Esto implica que la ecuación (3.122), en la que se calcula el valor de k_{s2} , no tiene solución, ya que su denominador es 0. Por tanto el sistema de siete ecuaciones no tiene solución, de forma que no es posible calcular los parámetros de control.

De este modo no tiene sentido considerar $g_2 = 0$, es decir, que no se proporciona la fuerza del operador al esclavo, ya que esta suposición conduce a un sistema de siete ecuaciones que no tiene solución, por lo que no puede establecerse un método de diseño de los parámetros de regulación.

3.4.2 Opción 2: $J_m + Tr_{m2} = 0$

Se va a considerar que en la ecuación (3.110) se satisface $J_m + Tr_{m2} = 0$. Es decir el valor de r_{m2} viene dado por:

$$r_{m2} = \frac{-J_m}{T} \quad (3.134)$$

Al igual que en el apartado anterior, no se va a poder utilizar la matriz R_m de forma completa para modelar la reflexión de la fuerza de contacto del esclavo con el entorno hacia el maestro, ya que r_{m2} viene dado por (3.134). Por lo tanto únicamente se utilizará el primer término de la matriz R_m (r_{m1}), para modelar la reflexión de esfuerzos, de forma que la estructura de la matriz R_m será la mostrada en (3.129). Como en el apartado anterior, realmente no se estará realimentando sólo la fuerza de reacción del esclavo, sino que se estará realimentando una fuerza de reacción perturbada, ver expresión (3.131).

Para que la segunda fila de \tilde{B}_{21} en (3.108) sea cero se debe cumplir:

$$\frac{\left(g_2 J_m^2 Tr_{s2} + g_2 J_m^2 J_s + J_s J_m (2Tr_{s2} + J_s + Tg_2 b_m - Tg_2 k_{m2}) + T^2 g_2 J_m r_{s2} (b_m - k_{m2}) + T^2 J_m r_{s2} (r_{s2} + Tg_2 r_{m1}) + T^2 g_2 J_m r_{m1} J_s \right)}{J_m^2 (J_s + Tr_{s2})^2} = 0 \quad (3.135)$$

Para que \tilde{A}_{21} en (3.106) sea cero deben satisfacerse las dos siguientes ecuaciones:

$$(-r_{m1} - k_{m1})(J_s + Tr_{s2}) = 0 \quad (3.136)$$

$$T^2 r_{s2} r_{m1} + \frac{J_s J_m}{T} + J_s Tr_{m1} + J_m (r_{s2} - Tr_{s1}) + (-J_s - Tr_{s2})(k_{m2} - b_m) + T J_m r_{s1} = 0 \quad (3.137)$$

Cuando el error evoluciona como un sistema autónomo, como se explicó en el apartado 3.3, es posible establecer los polos que fijan la dinámica del error y los que fijan la dinámica del esclavo.

En este caso, si se considera que el polinomio característico deseado del esclavo es $p(s) = s^2 + p_1 s + p_0$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$J_m (k_{s1} + r_{s1}) - Tr_{s2} (r_{m1} + k_{m1}) = -p_0 J_m (J_s + Tr_{s2}) \quad (3.138)$$

$$T^2 r_{s2} r_{m1} + J_m (k_{s2} - b_s) + 2J_m r_{s2} - J_m Tr_{s1} - Tr_{s2} (k_{m2} - b_m) = -p_1 J_m (J_s + Tr_{s2}) \quad (3.139)$$

Y considerando que el polinomio característico deseado del error es $q(s) = s^2 + q_1 s + q_0$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$k_{m1} = -q_0 J_m \quad (3.140)$$

$$k_{m2} = b_m - q_1 J_m \quad (3.141)$$

Por lo tanto existen 8 ecuaciones (3.134 – 3.141) y 8 parámetros a resolver en el esquema de control:

- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}]$
- $R_m = [r_{m1} \quad r_{m2}] = [k_f k_e \quad r_{m2}]$ En esta matriz, r_{m1} modela la reflexión de esfuerzos del esclavo hacia el maestro, de forma que el parámetro de control a calcular será r_{m2} .
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}]$
- g_2

Se va a resolver el sistema de ecuaciones (3.134 – 3.141). Puesto que r_{m1} modela la reflexión de esfuerzos del esclavo hacia el maestro y k_{m1} viene dado por (3.140), a partir de (3.136) se obtiene que r_{s2} viene dado por:

$$r_{s2} = \frac{-J_s}{T} \quad (3.142)$$

Este resultado conduce a que no es posible solucionar el sistema de ecuaciones, ya que por ejemplo el denominador de (3.135) es cero no pudiendo resolverse dicha ecuación, o si se sustituye r_{s2} en (3.137) se obtiene que $0 = 0$.

Por lo tanto tampoco tiene sentido considerar que $J_m + Tr_{m2} = 0$, ya que se obtiene un sistema de ocho ecuaciones que no puede solucionarse, por lo que no puede establecerse un procedimiento de diseño de los parámetros de control.

Tanto en este caso, en el que se ha considerado que $J_m + Tr_{m2} = 0$, como en el anterior, en el que se supuso $g_2 = 0$, no ha sido posible obtener un procedimiento de diseño de los parámetros de regulación del esquema de control mostrado en la Figura 3.1. Es decir, si se asume que la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro no es constante, no se logra obtener un conjunto de ecuaciones con solución que hagan que el error entre el maestro y el esclavo evolucione como un sistema autónomo y, además, permitan fijar el comportamiento dinámico deseado del error y del esclavo.

Hay que reseñar que no ha sido posible obtener el método de diseño con el cambio de variable indicado en (3.93) para eliminar la derivada de la fuerza del operador. Esto no quiere decir que no exista un cambio de variable con el que se elimine la derivada de la fuerza del operador y que permita obtener un conjunto de ecuaciones con solución para obtener los parámetros de regulación del sistema de control.

3.5 Diseño del sistema de control de teleoperación con retardos considerando mayor aproximación del retardo

En el apartado 3.2.3 se utilizó la aproximación de Taylor de primer orden para obtener el valor de las señales retardadas que aparecían en el esquema de control mostrado en la Figura 3.1. Mediante esta aproximación se plantearon unas ecuaciones de estado en las que no aparecían señales retardadas. Estas ecuaciones de estado permitieron en el apartado 3.3 diseñar el esquema de control del sistema teleoperado por convergencia de estados. Como es lógico, cuanto mayor sea el orden de la aproximación de Taylor utilizada para modelar el retardo, mejor será modelado el retardo existente en la comunicación, y por tanto, los resultados obtenidos se podrán aplicar con mayor fidelidad a la realidad. En este apartado se pretende emplear una aproximación de Taylor de mayor orden para modelar las señales retardadas que aparecen en el esquema de control y desarrollar el método de diseño descrito en el apartado 3.3 a partir de las ecuaciones de estado que se obtienen con la nueva aproximación del retardo, con la finalidad de obtener un conjunto de ecuaciones que permitan obtener el valor de los parámetros de regulación del esquema de control.

Como se indicó en el apartado 3.2.1, las ecuaciones de estado con retardo que se obtuvieron a partir del esquema de control mostrado en la Figura 3.1 fueron (3.24) y (3.25):

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m] x_m(t) + B_m R_m x_s(t-T) + B_m F_m(t) \quad (3.143)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s] x_s(t) + B_s R_s x_m(t-T) + B_s G_2 F_m(t-T) \quad (3.144)$$

donde el significado de las variables de estado era:

$$x_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \end{bmatrix} \quad x_s(t) = \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_s(t) \\ \dot{\theta}_s(t) \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Se va a considerar que se utiliza la aproximación de Taylor de segundo orden para modelar el retardo. De este modo, a partir de (3.34), el valor de una función retardada T segundos se aproximará por:

$$f(t-T) = f(t) - T f'(t) + \frac{T^2}{2!} f''(t) \quad (3.146)$$

Por tanto las señales retardadas T segundos que aparecen en (3.143) y (3.144) se pueden modelar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 x_s(t-T) &= x_s(t) - T\dot{x}_s(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}_s(t) \\
 x_m(t-T) &= x_m(t) - T\dot{x}_m(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}_m(t) \\
 F_m(t-T) &= F_m(t) - TF_m(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{F}_m(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.147}$$

Si se sustituye las señales retardadas que aparecen en las ecuaciones de estado (3.143) y (3.144), por las expresiones mostradas en (3.147) y además se considera que la fuerza que ejerce el operador es constante (al igual que se supuso en el apartado 3.2.3), se obtiene:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_s(t) + \frac{T^2}{2}B_m R_m \ddot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \tag{3.148}$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + \frac{T^2}{2}B_s R_s \ddot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) \tag{3.149}$$

Como puede observarse en estas ecuaciones, será necesario tomar nuevas variables de estado para poder plantear ecuaciones de estado, ya que se ha aumentado el orden de cada ecuación. Sin embargo, hay que destacar que las variables de estado que aparecen en las ecuaciones corresponden a vectores de variables de estado, como se ha indicado en (3.145). De este modo, por ejemplo, el segundo componente del vector $x_m(t)$, que sería la velocidad del maestro, coincide con el primer componente de $\dot{x}_m(t)$. Por lo tanto, para tomar nuevas variables de estado sería necesario en primer lugar obtener las ecuaciones escalares a partir de las ecuaciones matriciales (3.148) y (3.149). Esto se debe a que se ha utilizado la aproximación de Taylor de segundo orden sobre vectores de variables de estado, ver (3.147). Como se recordará, en el apartado 3.2.3 también se aplicó la aproximación de Taylor a vectores de variables de estado. Sin embargo utilizando la aproximación de primer orden no fue necesario añadir nuevas variables de estado. La razón de este hecho es la siguiente. Al aproximar el retardo de $x_s(t)$ y $x_m(t)$ mediante la expansión de Taylor de primer orden se introdujeron los términos $\dot{x}_s(t)$ y $\dot{x}_m(t)$, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 x_s(t-T) &= x_s(t) - T\dot{x}_s(t) \\
 x_m(t-T) &= x_m(t) - T\dot{x}_m(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.150}$$

Al sustituir estas aproximaciones del retardo en las ecuaciones de estado (3.143) y (3.144) y considerando que la fuerza del operador era constante se obtenían las siguientes expresiones:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - TB_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \tag{3.151}$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - TB_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) \tag{3.152}$$

Como puede observarse el término $\dot{x}_s(t)$ aparece en la ecuación de estado de $\dot{x}_m(t)$ (3.151), y el término $\dot{x}_m(t)$ aparece en la ecuación de estado de $\dot{x}_s(t)$ (3.152). De esta forma el término $\dot{x}_s(t)$ es eliminado de $\dot{x}_m(t)$ en (3.151) sustituyéndolo por la expresión (3.152). Del mismo modo el término $\dot{x}_m(t)$ es eliminado de $\dot{x}_s(t)$ en (3.152) sustituyéndolo por la expresión (3.151). Con estas sustituciones se consigue modelar el retardo sin tener que añadir nuevas variables de estado.

Como se ha explicado, al utilizar la aproximación de Taylor de segundo orden para modelar el retardo, es necesario tomar nuevas variables de estado para poder plantear ecuaciones de estado, pero para ello previamente es necesario obtener las ecuaciones escalares a partir de las ecuaciones matriciales. Para simplificar este proceso, en lugar de aplicar la aproximación de Taylor sobre los vectores de estado, para posteriormente tener que volver a tomar variables de estado, se va a aplicar la aproximación de Taylor sobre señales escalares, de forma que posteriormente se tomarán todas las variables de estado que sean necesarias. Es decir, se van a plantear primero las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema teleoperado, seguidamente se va a aplicar la aproximación de Taylor de segundo orden sobre las señales escalares retardadas, y por último, se tomarán las variables de estado que sean necesarias para obtener las ecuaciones de estado del sistema.

Como se indicó en el apartado 3.2.1, el modelo dinámico simplificado del maestro y del esclavo viene dado respectivamente por:

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) + b_m \dot{\theta}_m(t) = u_m(t) \quad (3.153)$$

$$J_s \ddot{\theta}_s(t) + b_s \dot{\theta}_s(t) = u_s(t) \quad (3.154)$$

A partir del esquema de control mostrado en la Figura 3.1, se pueden obtener las señales de control del maestro y del esclavo expresadas a partir de señales escalares, considerando que las variables de estado que se mostraban en principio en dicho esquema corresponden a las indicadas en (3.145) y que la estructura de las matrices es la mostrada en 3.2.1:

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) = k_{m1} \theta_m(t) + k_{m2} \dot{\theta}_m(t) + r_{m1} \theta_s(t-T) + r_{m2} \dot{\theta}_s(t-T) + F_m(t) \quad (3.155)$$

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = k_{s1} \theta_s(t) + k_{s2} \dot{\theta}_s(t) + r_{s1} \theta_m(t-T) + r_{s2} \dot{\theta}_m(t-T) + g_2 F_m(t-T) \quad (3.156)$$

Las señales retardadas que aparecen en las señales de control del maestro y del esclavo pueden modelarse utilizando la aproximación de Taylor de segundo orden del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 \theta_s(t-T) &= \theta_s(t) - T\dot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{\theta}_s(t) \\
 \dot{\theta}_s(t-T) &= \dot{\theta}_s(t) - T\ddot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_s(t) \\
 \theta_m(t-T) &= \theta_m(t) - T\dot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{\theta}_m(t) \\
 \dot{\theta}_m(t-T) &= \dot{\theta}_m(t) - T\ddot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_m(t) \\
 F_m(t-T) &= F_m(t) - TF_m(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{F}_m(t)
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

Al igual que en el apartado 3.2.3, se va a considerar que la fuerza que ejerce el operador es constante. Con esta consideración y aplicando las aproximaciones del retardo indicadas en (3.157) a la señal de control del maestro (3.155) y del esclavo (3.156) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= k_{m1}\theta_m(t) + k_{m2}\dot{\theta}_m(t) + r_{m1}\left[\theta_s(t) - T\dot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{\theta}_s(t)\right] + \\
 r_{m2}\left[\dot{\theta}_s(t) - T\ddot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_s(t)\right] + F_m(t) &= k_{m1}\theta_m(t) + k_{m2}\dot{\theta}_m(t) + r_{m1}\theta_s(t) + \\
 (-Tr_{m1} + r_{m2})\dot{\theta}_s(t) + \left(r_{m1}\frac{T^2}{2} - Tr_{m2}\right)\ddot{\theta}_s(t) + r_{m2}\frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_s(t) + F_m(t) &
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= k_{s1}\theta_s(t) + k_{s2}\dot{\theta}_s(t) + r_{s1}\left[\theta_m(t) - T\dot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2}\ddot{\theta}_m(t)\right] + \\
 r_{s2}\left[\dot{\theta}_m(t) - T\ddot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_m(t)\right] + g_2F_m(t) &= k_{s1}\theta_s(t) + k_{s2}\dot{\theta}_s(t) + r_{s1}\theta_m(t) + \\
 (-Tr_{s1} + r_{s2})\dot{\theta}_m(t) + \left(r_{s1}\frac{T^2}{2} - Tr_{s2}\right)\ddot{\theta}_m(t) + r_{s2}\frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_m(t) + g_2F_m(t) &
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

Se van a sustituir estas señales de control en las ecuaciones dinámicas del maestro (3.153) y del esclavo (3.154):

$$\begin{aligned}
 J_m\ddot{\theta}_m(t) + b_m\dot{\theta}_m(t) &= k_{m1}\theta_m(t) + k_{m2}\dot{\theta}_m(t) + r_{m1}\theta_s(t) + \\
 (-Tr_{m1} + r_{m2})\dot{\theta}_s(t) + \left(r_{m1}\frac{T^2}{2} - Tr_{m2}\right)\ddot{\theta}_s(t) + r_{m2}\frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_s(t) + F_m(t) &
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

$$\begin{aligned}
 J_s\ddot{\theta}_s(t) + b_s\dot{\theta}_s(t) &= k_{s1}\theta_s(t) + k_{s2}\dot{\theta}_s(t) + r_{s1}\theta_m(t) + \\
 (-Tr_{s1} + r_{s2})\dot{\theta}_m(t) + \left(r_{s1}\frac{T^2}{2} - Tr_{s2}\right)\ddot{\theta}_m(t) + r_{s2}\frac{T^2}{2}\dddot{\theta}_m(t) + g_2F_m(t) &
 \end{aligned} \tag{3.161}$$

Se van a modelar estas ecuaciones dinámicas en el espacio de estados. Puesto que los sistemas son de orden 3, serán necesarias tres variables de estado en cada sistema. Se van a tomar variables de estado con sentido físico. Las variables de estado que se van a considerar son:

$$\begin{aligned}x_{m1}(t) &= \theta_m(t) & x_{s1}(t) &= \theta_s(t) \\x_{m2}(t) &= \dot{\theta}_m(t) & x_{s2}(t) &= \dot{\theta}_s(t) \\x_{m3}(t) &= \ddot{\theta}_m(t) & x_{s3}(t) &= \ddot{\theta}_s(t)\end{aligned}\quad (3.162)$$

Considerando estas variables de estado, a partir de la ecuación (3.160) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{s3}(t) &= \frac{-k_{m1}}{T^2} x_{m1}(t) + \frac{b_m - k_{m2}}{T^2} x_{m2}(t) + \frac{-r_{m1}}{T^2} x_{s1}(t) + \frac{-r_{m2} + Tr_{m1}}{T^2} x_{s2}(t) + \\&\frac{J_m}{T^2} x_{m3}(t) + \frac{-r_{m1} \frac{T^2}{2} + Tr_{m2}}{T^2} x_{s3}(t) + \frac{-1}{T^2} F_m(t)\end{aligned}\quad (3.163)$$

Por otra parte existen estas dos ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{s1}(t) &= x_{s2}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) &= x_{s3}(t)\end{aligned}\quad (3.164)$$

A partir de la ecuación (3.161) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m3}(t) &= \frac{-k_{s1}}{T^2} x_{s1}(t) + \frac{b_s - k_{s2}}{T^2} x_{s2}(t) + \frac{J_s}{T^2} x_{s3}(t) + \frac{-r_{s1}}{T^2} x_{m1}(t) + \\&\frac{-r_{s2} + Tr_{s1}}{T^2} x_{m2}(t) + \frac{-r_{s1} \frac{T^2}{2} + Tr_{s2}}{T^2} x_{m3}(t) + \frac{-g_2}{T^2} F_m(t)\end{aligned}\quad (3.165)$$

Además existen estas dos ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m1}(t) &= x_{m2}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) &= x_{m3}(t)\end{aligned}\quad (3.166)$$

Si se expresan el conjunto de ecuaciones de estado (3.163 – 3.166) en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} F_m(t)\quad (3.167)$$

donde:

$$x_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ x_{m3}(t) \end{bmatrix} \quad x_s(t) = \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ x_{s3}(t) \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-r_{m1}}{T^2} & \frac{-r_{m2} + Tr_{m1}}{T^2} & \frac{-r_{m1} \frac{T^2}{2} + Tr_{m2}}{T^2} \\ \frac{2}{2} r_{m2} & \frac{2}{2} r_{m2} & \frac{2}{2} r_{m2} \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_{m1}}{T^2} & \frac{b_m - k_{m2}}{T^2} & \frac{J_m}{T^2} \\ \frac{2}{2} r_{m2} & \frac{2}{2} r_{m2} & \frac{2}{2} r_{m2} \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{s1}}{T^2} & \frac{b_s - k_{s2}}{T^2} & \frac{J_s}{T^2} \\ \frac{2}{2} r_{s2} & \frac{2}{2} r_{s2} & \frac{2}{2} r_{s2} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-r_{s1}}{T^2} & \frac{-r_{s2} + Tr_{s1}}{T^2} & \frac{-r_{s1} \frac{T^2}{2} + Tr_{s2}}{T^2} \\ \frac{2}{2} r_{s2} & \frac{2}{2} r_{s2} & \frac{2}{2} r_{s2} \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{T^2} \\ \frac{r_{m2}}{2} \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-g_2}{T^2} \\ \frac{r_{s2}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

Se va a aplicar a la ecuación de estado (3.167) la siguiente transformación de estado para obtener la ecuación de estado del error entre el maestro y el esclavo:

$$\begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \tilde{x}(t) = T_r^{-1} x(t) \quad (3.174)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión 3×3 , y en este caso, la matriz T_r y su inversa coinciden.

Realizando esta transformación se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}F_m(t) \quad (3.175)$$

donde:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} & -A_{12} \\ (A_{11} - A_{21}) + (A_{12} - A_{22}) & -(A_{12} - A_{22}) \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{11} - B_{21} \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

Denominando $x_e(t)$ al error entre el estado del esclavo $x_s(t)$ y el estado del maestro $x_m(t)$, la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro vendrá dada por:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{21}x_s(t) + \tilde{A}_{22}x_e(t) + \tilde{B}_{21}F_m(t) \quad (3.179)$$

Para que el error evolucione como un sistema autónomo se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{A}_{21} = 0 \rightarrow A_{11} - A_{21} + A_{12} - A_{22} = 0 \quad (3.180)$$

$$\tilde{B}_{21} = 0 \rightarrow B_{11} - B_{21} = 0 \quad (3.181)$$

A partir de la ecuación (3.181) se obtiene que:

$$g_2 = \frac{r_{s2}}{r_{m2}} \quad (3.182)$$

Por otra parte, de la ecuación (3.180) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$r_{m2}(k_{s1} + r_{s1}) = r_{s2}(k_{m1} + r_{m1}) \quad (3.183)$$

$$r_{m2}(r_{s2} - Tr_{s1} - b_s + k_{s2}) = r_{s2}(r_{m2} - Tr_{m1} - b_m + k_{m2}) \quad (3.184)$$

$$r_{m2}\left(J_s + Tr_{s2} - \frac{T^2}{2}r_{s1}\right) = r_{s2}\left(J_m + Tr_{m2} - \frac{T^2}{2}r_{m1}\right) \quad (3.185)$$

Si el error evoluciona como un sistema autónomo, la ecuación dinámica del sistema vendrá dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} & -A_{12} \\ 0 & -(A_{12} - A_{22}) \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

De esta forma el polinomio característico del sistema será:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det[sI - (A_{11} + A_{12})] \det[sI - (A_{22} - A_{12})] \quad (3.187)$$

El primer determinante de la expresión anterior corresponde al polinomio característico del esclavo, mientras que el segundo corresponde al polinomio característico del error esclavo – maestro. Tanto el polinomio característico del esclavo, como el del error, serán de tercer grado, ya que las matrices implicadas son de orden tres (se han escogido tres variables de estado para el maestro y tres variables de estado para el esclavo).

Si se desea fijar la dinámica del esclavo de forma que su polinomio característico sea $p(s) = s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$k_{m1} = p_0 \frac{T^2}{2} r_{m2} - r_{m1} \quad (3.188)$$

$$k_{m2} = \left(p_1 \frac{T^2}{2} - 1 \right) r_{m2} + b_m + Tr_{m1} \quad (3.189)$$

$$J_m + Tr_{m2} - \frac{T^2}{2} r_{m1} = -p_2 \frac{T^2}{2} r_{m2} \quad (3.190)$$

En la ecuación (3.190) r_{m1} y r_{m2} son constantes que se utilizan para modelar la reflexión de esfuerzos del esclavo hacia el maestro, como se indicó en 3.2.2, por lo tanto p_2 no es

un parámetro de diseño, sino que vendrá impuesto por los valores que aparecen en dicha ecuación. Por lo tanto sólo será posible fijar dos polos de la dinámica del esclavo.

Si se desea establecer la dinámica del error de forma que su polinomio característico sea $q(s) = s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$q_0 = q_1 = 0 \quad (3.191)$$

$$q_2 = \frac{J_m}{\frac{T^2}{2}r_{m2}} - \frac{-r_{s1}\frac{T^2}{2} + Tr_{s2}}{\frac{T^2}{2}r_{s2}} \quad (3.192)$$

En este caso sólo será posible fijar un polo del polinomio característico del error, ya que q_0 y q_1 son cero.

Por tanto existen siete ecuaciones para poder realizar el diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos: cuatro ecuaciones que hacen que el error se comporte como un sistema autónomo (3.182-3.185), dos ecuaciones que fijan dos polos de la dinámica del esclavo (3.188-3.189) y una ecuación que establece un polo de la dinámica del error (3.192).

Los parámetros a calcular en el esquema de control son siete:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] = [k'_{s1} - k_e \quad k'_{s2} - b_e]$

Como se ha indicado anteriormente R_m no es un parámetro a calcular ya que se utiliza para modelar la reflexión de la fuerza de contacto del esclavo con el entorno al maestro. Puesto que hay siete parámetros y existen siete ecuaciones, es posible calcular todos los parámetros de control solucionando el sistema de ecuaciones. Resolviendo dicho sistema de ecuaciones se obtiene que los parámetros de control se calcularán del siguiente modo:

$$k_{m1} = p_0 \frac{T^2}{2} r_{m2} - r_{m1} \quad (3.193)$$

$$k_{m2} = \left(p_1 \frac{T^2}{2} - 1 \right) r_{m2} + b_m + Tr_{m1} \quad (3.194)$$

$$r_{s2} = \frac{-J_s r_{m2}}{\frac{T^2}{2} r_{m1} - \left(T + q_2 \frac{T^2}{2} \right) r_{m2}} \quad (3.195)$$

$$r_{s1} = \frac{J_s r_{m2} - \left(J_m - \frac{T^2}{2} r_{m1} \right) r_{s2}}{\frac{T^2}{2} r_{m2}} \quad (3.196)$$

$$g_2 = \frac{r_{s2}}{r_{m2}} \quad (3.197)$$

$$k_{s1} = \frac{r_{s2}(k_{m1} + r_{m1}) - r_{m2} r_{s1}}{r_{m2}} \quad (3.198)$$

$$k_{s2} = \frac{r_{s2}(r_{m2} - Tr_{m1} - b_m + k_{m2}) - r_{m2}(r_{s2} - Tr_{s1} - b_s)}{r_{m2}} \quad (3.199)$$

Como ha sido comentado anteriormente, será posible fijar dos polos del polinomio característico del esclavo, pero el tercero no podrá establecerse, sino que vendrá impuesto, tal como se indicó en la ecuación (3.190). Si se considera que a y b son dos polos deseados de la dinámica del esclavo, el tercer polo c vendrá dado por:

$$c = -a - b - p_2 \quad (3.200)$$

donde:

$$p_2 = \frac{\frac{T^2}{2} r_{m1} - J_m - Tr_{m2}}{\frac{T^2}{2} r_{m2}} \quad (3.201)$$

Asimismo no podrán establecerse todos los polos del polinomio característico del error. Sólo podrá fijarse un polo, ya que los dos restantes se encontrarán en cero. El polo que podrá fijarse será:

$$s = -q_2 \quad (3.202)$$

Utilizando la aproximación de Taylor de segundo orden para modelar el retardo es posible obtener las ecuaciones que permiten realizar el diseño del esquema de control del sistema teleoperado para que el esclavo siga al maestro. Sin embargo utilizando esta aproximación de segundo orden del retardo aparecen dos graves inconvenientes en el método de diseño:

- En el polinomio característico del error aparecen dos polos en el origen, de forma que sólo es posible fijar un polo en la posición que se desee.
- Además en el polinomio característico del esclavo sólo es posible fijar dos polos. El tercero dependerá de estos dos polos, de la matriz que modela la reflexión de esfuerzos, del retardo y de la inercia del maestro. Por lo que es posible que el tercer polo se ubique en el semiplano derecho de s , convirtiéndose el sistema en inestable.

Por tanto utilizando la aproximación de Taylor de segundo orden no es posible fijar completamente la dinámica del error y del esclavo. Esto es debido a que no se obtiene el suficiente número de ecuaciones para fijar ambas dinámicas. Sin embargo sí se obtiene el número de ecuaciones necesarias para obtener todos los parámetros del sistema, ya que se han deducido siete ecuaciones para calcular los siete parámetros de los que consta el esquema de control. Para que el sistema evolucione como un sistema autónomo se han obtenido cuatro ecuaciones (3.182-3.185). Para poder fijar la dinámica del error y del esclavo serían necesarias tres ecuaciones para cada dinámica, ya que el polinomio característico en cada caso es de tercer orden. Sin embargo sólo se han obtenido dos ecuaciones para el esclavo (3.188-3.189) y una para el error (3.192). Por tanto serían necesarias tres ecuaciones más, pero para obtener tres ecuaciones más harían falta tres parámetros más en el esquema de control.

Se van a intentar obtener todas las ecuaciones necesarias del método de diseño, es decir, además de las ecuaciones que hacen que el error evolucione como un sistema autónomo, las ecuaciones que permitan establecer de forma completa tanto la dinámica del esclavo como la del error. Para ello se va a realizar un planteamiento distinto al efectuado. En la parte izquierda de la Figura 3.5 se muestra a modo de flujograma el planteamiento anteriormente realizado para la obtención de las ecuaciones del método de diseño, y en la parte derecha se muestra el planteamiento que va a efectuar para intentar obtener todas las ecuaciones necesarias del método de diseño. La diferencia radica en que, puesto que son necesarias tres ecuaciones de diseño más, harán falta tres parámetros de control más, por tanto se considera que las matrices del esquema de control son de orden 3 (a excepción de la matriz G_2 que es un escalar, y la matriz R_m que es de orden 2 para modelar la reflexión de esfuerzos), y por consiguiente, se considerará que inicialmente existen tres variables de estado para el maestro y para el esclavo.

Tal como se ha indicado, se va a considerar que las matrices a calcular en el modelo, a excepción de G_2 , son de orden 3:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2} \quad r_{s3}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2} \quad k_{m3}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2} \quad k_{s3}]$

De este modo hay tres nuevos parámetros en el modelo: k_{s3} , k_{m3} y r_{s3} ; de forma que los parámetros a calcular en el esquema de control serán diez. Como se ha indicado anteriormente R_m no es un parámetro a calcular ya que se utiliza para modelar la reflexión de la fuerza de contacto del esclavo con el entorno al maestro.

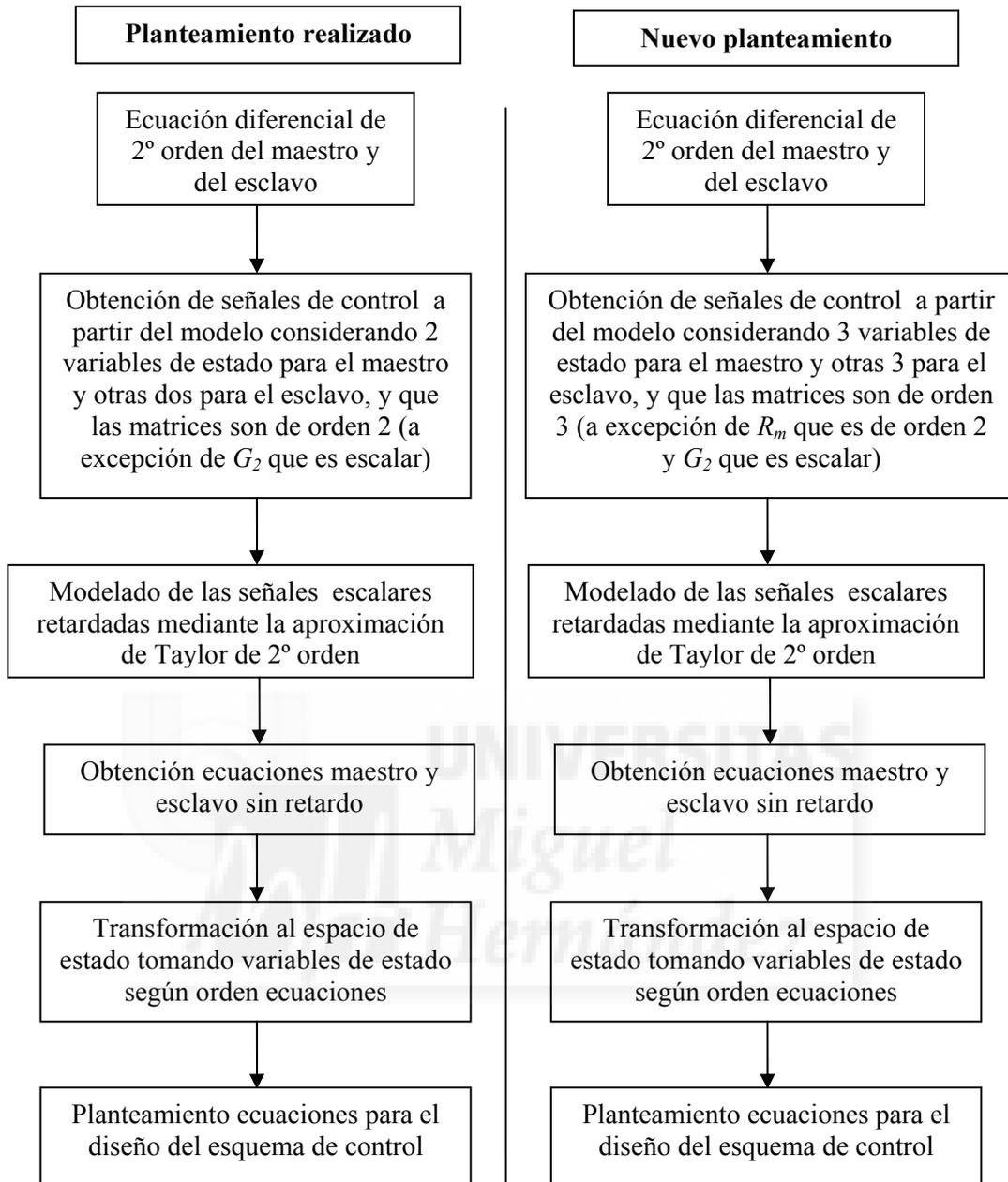


Figura 3.5. Planteamiento realizado en primer lugar para obtener las ecuaciones de diseño del esquema de control considerando la aproximación de Taylor de 2º orden (izquierda) y nuevo planteamiento para la obtención de las ecuaciones de diseño (derecha).

La ecuación dinámica del maestro (3.153) y del esclavo (3.154) es de segundo orden, por lo que es suficiente considerar dos variables de estado con sentido físico en cada ecuación (posición y velocidad). Supongamos que se elige una tercera variable de estado, la aceleración, obteniéndose por derivación de la velocidad. En este caso las variables de estado serían:

$$\begin{aligned}
 x_{m1}(t) &= \theta_m(t) & x_{s1}(t) &= \theta_s(t) \\
 x_{m2}(t) &= \dot{\theta}_m(t) & x_{s2}(t) &= \dot{\theta}_s(t) \\
 x_{m3}(t) &= \ddot{\theta}_m(t) & x_{s3}(t) &= \ddot{\theta}_s(t)
 \end{aligned} \tag{3.203}$$

Considerando estas variables de estado y la estructura de las matrices del modelo indicada anteriormente, la señal de control del maestro y del esclavo vendrá dada respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) = k_{m1} \theta_m(t) + k_{m2} \dot{\theta}_m(t) + k_{m3} \ddot{\theta}_m(t) + \\
 & r_{m1} \theta_s(t-T) + r_{m2} \dot{\theta}_s(t-T) + r_{m3} \ddot{\theta}_s(t-T) + F_m(t)
 \end{aligned} \tag{3.204}$$

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = k_{s1} \theta_s(t) + k_{s2} \dot{\theta}_s(t) + k_{s3} \ddot{\theta}_s(t) + \\
 & r_{s1} \theta_m(t-T) + r_{s2} \dot{\theta}_m(t-T) + r_{s3} \ddot{\theta}_m(t-T) + g_2 F_m(t-T)
 \end{aligned} \tag{3.205}$$

Utilizando la aproximación de Taylor de segundo orden para modelar el retardo y considerando que la fuerza que ejerce el operador es constante, se obtienen las siguientes señales de control:

$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= k_{m1} \theta_m(t) + k_{m2} \dot{\theta}_m(t) + k_{m3} \ddot{\theta}_m(t) + r_{m1} \left[\theta_s(t) - T \dot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_s(t) \right] + \\
 & r_{m2} \left[\dot{\theta}_s(t) - T \ddot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_s(t) \right] + r_{m3} \left[\ddot{\theta}_s(t) - T \ddot{\theta}_s(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_s(t) \right] + F_m(t)
 \end{aligned} \tag{3.206}$$

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= k_{s1} \theta_s(t) + k_{s2} \dot{\theta}_s(t) + k_{s3} \ddot{\theta}_s(t) + r_{s1} \left[\theta_m(t) - T \dot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_m(t) \right] + \\
 & r_{s2} \left[\dot{\theta}_m(t) - T \ddot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_m(t) \right] + r_{s3} \left[\ddot{\theta}_m(t) - T \ddot{\theta}_m(t) + \frac{T^2}{2} \ddot{\theta}_m(t) \right] + g_2 F_m(t)
 \end{aligned} \tag{3.207}$$

Si se sustituyen estas señales de control en las ecuaciones dinámicas del maestro y del esclavo se obtendrán ecuaciones de cuarto orden, ya que aparecen los términos $\theta_s^{(4)}(t)$ y $\theta_m^{(4)}(t)$. Por lo tanto para poder plantear una ecuación de estado habrá que elegir cuatro variables de estado para el maestro y cuatro para el esclavo, es decir, además de las indicadas en (3.203) habría que seleccionar $x_{s4}(t) = \ddot{\theta}_s(t)$ y $x_{m4}(t) = \ddot{\theta}_m(t)$. Si se añadieran estas nuevas variables de estado y se realizara una transformación de estado para obtener la ecuación de estado del error se obtendrían:

- 5 ecuaciones para que el error evolucionara como un sistema autónomo (4 ecuaciones para que \tilde{A}_{21} sea cero y 1 para que \tilde{B}_{21} sea cero).
- Por otra parte harían falta ocho ecuaciones para poder fijar todos los polos del sistema (4 para el error y 4 para el esclavo, ya que ahora cada polinomio característico será de cuarto orden). Sin embargo no será posible obtener estas

ocho ecuaciones, puesto que en total se obtendrían 13 ecuaciones y sólo hay 10 parámetros a calcular en el esquema de control.

Por tanto con el nuevo planteamiento realizado tampoco sería posible obtener todas las ecuaciones necesarias del método de diseño, ya que, aunque sería posible lograr que el error evolucionase como un sistema autónomo, no podrían plantearse las ecuaciones que permitieran fijar de forma completa la dinámica del esclavo y del error, al igual que ocurría con el planteamiento realizado en primer lugar en este apartado.

Se puede concluir, a la vista de los resultados obtenidos en este apartado, que el método de diseño de sistemas de control aportado con la presente Tesis, que logra que el esclavo siga al maestro, y además permite fijar de forma completa la dinámica del esclavo y la dinámica del error entre el maestro y el esclavo, se puede plantear satisfactoriamente en el caso de utilizar la aproximación de Taylor de primer orden para modelar el retardo. Sin embargo, como se ha mostrado, considerando una aproximación de Taylor de mayor orden, no ha sido posible plantear de forma satisfactoria el método de diseño, ya que, aunque se han obtenido ecuaciones que permiten que el esclavo siga al maestro, no ha sido posible obtener el número suficiente de ecuaciones que permitan fijar de forma completa la dinámica del esclavo y la dinámica del error entre el maestro y el esclavo.

Como se ha explicado, al utilizar la aproximación de Taylor de primer orden y sustituir los términos retardados en las ecuaciones de estado (3.143) y (3.144), se obtienen ecuaciones de estado en las que no es necesario introducir nuevas variables de estado, puesto que no aumenta el orden de las ecuaciones, como puede apreciarse en (3.151) y (3.152). De este modo, para plantear las nuevas ecuaciones de estado únicamente es necesario combinar ambas ecuaciones de estado.

Sin embargo, si se utiliza la aproximación de Taylor de segundo orden, es necesario añadir nuevas variables de estado para plantear la ecuación de estado del sistema. Con el sistema obtenido con las nuevas variables de estado, no es posible deducir las ecuaciones necesarias que permitan a la vez hacer que el error evolucione como un sistema autónomo, y fijar de forma completa la dinámica del esclavo y la dinámica del error. Las ecuaciones que se obtienen sólo permiten establecer que el error evolucione como un sistema autónomo y fijar dos polos de la dinámica del esclavo y un polo de la dinámica del error.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un nuevo método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión. Este método de diseño considera que el esclavo puede interaccionar un entorno dinámico, de manera que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es realimentada al maestro, y que el retardo existente en la comunicación es constante.

El método de diseño se ha obtenido a partir de un modelado del sistema teleoperado en variables de estado en el dominio del tiempo en el que se han considerado todas las posibles interacciones que pueden existir entre el operador, el maestro, el esclavo y el entorno. El método aportado por la presente Tesis proporciona un conjunto de

ecuaciones cuya resolución permite obtener los valores de los reguladores del esquema de control del sistema teleoperado para que el estado del maestro y el del esclavo converjan, consiguiendo de este modo que el esclavo siga al maestro. Además el método de diseño es capaz de fijar el comportamiento dinámico de la convergencia entre el maestro y el esclavo (comportamiento dinámico del error), así como el comportamiento dinámico del esclavo.

Para deducir el método de diseño ha sido necesario obtener una representación en el espacio de estados del sistema teleoperado en la que no existieran términos retardados en el tiempo. Esto se ha logrado utilizando la aproximación de Taylor de primer orden para modelar el retardo. Se ha comprobado que si se utiliza una aproximación de mayor orden no es posible obtener satisfactoriamente todas las ecuaciones del procedimiento de diseño, ya que, aunque se pueden obtener un conjunto de ecuaciones con solución, las ecuaciones no permiten fijar de forma completa la dinámica del error y del esclavo.

Asimismo se ha realizado la simplificación de considerar que la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro es constante para poder obtener las ecuaciones del método de diseño. En el caso de asumir que la fuerza del operador no es constante, no ha sido posible deducir un conjunto de ecuaciones con solución para obtener los parámetros de regulación del sistema. Aunque es de resaltar que esto no quiere decir que no exista algún procedimiento de obtención de dicho conjunto de ecuaciones.

A modo de resumen, las principales aportaciones realizadas en este capítulo son:

- Modelado de un sistema teleoperado con retardos en variables de estado contemplando todas las posibles interacciones que pueden existir entre el operador, el maestro, el esclavo y el entorno.
- Utilización de la aproximación de Taylor de primer orden para obtener un modelo de estado del sistema teleoperado sin la presencia de términos retardados en el tiempo.
- Método de diseño que logra la convergencia de estados entre el maestro y el esclavo, consiguiendo de este modo que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos, y además es capaz de fijar tanto la dinámica de la convergencia, como la del esclavo.
- Procedimiento de diseño claro y conciso del sistema de control de teleoperación con retardos. El método de diseño se reduce simplemente a la resolución de un sistema de ecuaciones para obtener los parámetros de regulación del esquema de control.

Capítulo 4

Análisis del comportamiento dinámico del sistema teleoperado con retardos

4.1 Introducción

En el capítulo 3 se presentó el método de diseño de sistemas de control teleoperados con retardos en la transmisión. Como se recordará, el método de diseño planteaba un conjunto de ecuaciones cuya resolución proporcionaba el valor de los reguladores para conseguir la convergencia del estado del esclavo y del maestro, logrando de este modo que el esclavo siga al maestro, así como establecer la dinámica de dicha convergencia y del esclavo. En dicho capítulo se explicó el procedimiento por el que se obtenían las ecuaciones de diseño, pero no se mostró el funcionamiento del método. En este capítulo se va a verificar el método de diseño en simulación sobre diversos sistemas teleoperados, considerando diferentes tipos de entornos con los que interacciona el esclavo así como distintos tiempos de retardo. No se pretende simplemente validar el método comprobando que el esclavo siga al maestro, sino además se pretende analizar como afecta a la respuesta del sistema y a las señales de control, la clase de sistema teleoperado considerado, el tipo de entorno y el retardo existente. En el capítulo 7 se mostrará en un entorno experimental real de teleoperación la validez del método de diseño.

Puesto que el método de diseño aportado en la presente Tesis permite establecer la dinámica del esclavo, así como la dinámica del error entre el maestro y el esclavo, se va a efectuar un estudio de cómo afecta la elección de la dinámica deseada del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado. Para ello se van a analizar diferentes parámetros que caracterizan la respuesta del maestro y del esclavo, así como a las señales de control, en función de la ubicación de polos deseada del esclavo y del error. Con este estudio se pretende proporcionar unas pautas al ingeniero de control para que sea capaz de decidir el polinomio característico del esclavo y del error que produzca el comportamiento deseado del sistema teleoperado.

Como se explicó en el capítulo 3, el método de diseño de sistemas de control teleoperado con retardos necesita conocer un modelo de diferentes parámetros del sistema teleoperado (retardo, entorno, maestro y esclavo) para poder solucionar el sistema de ecuaciones y obtener el valor de todos los reguladores. Para que al utilizar estos reguladores en un sistema teleoperado real, el comportamiento sea el esperado, es importante que los modelos empleados en el diseño sean lo más parecidos posibles a la realidad. Sin embargo, en la gran mayoría de ocasiones, los modelos diferirán ligeramente de la realidad. Por esta razón, se va a analizar la robustez del método de

control a ligeras variaciones en los parámetros de diseño. Es decir, se va a comprobar como influye en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado la variación de algún parámetro de diseño respecto al valor utilizado originalmente para calcular el valor de los reguladores.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En primer lugar se indicarán algunas consideraciones que es necesario remarcar en relación al funcionamiento de un sistema teleoperado real. Seguidamente se mostrarán diversas pruebas en simulación que verifican el funcionamiento del método de control presentado en la Tesis. A continuación se analizará la influencia de la dinámica elegida del esclavo así como del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado. Posteriormente se efectuará un estudio de la robustez del método de control a ligeras variaciones de los parámetros de diseño. Por último se mostrarán las principales conclusiones que se extraen del capítulo.

4.2 Consideraciones importantes

Como se explicó en el capítulo 3, el método de diseño por convergencia de estados se basaba en un modelado del sistema teleoperado con retardos en el que se contemplaban todas las posibles interacciones que podían aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno, Figura 4.1. Al igual que en dicho capítulo, se considerará en este capítulo que el maestro y el esclavo constan de un único grado de libertad. Asimismo se asumirá que el esclavo se encuentra interaccionando con el entorno, y que se realimenta la fuerza de interacción del esclavo con el entorno hacia el maestro.

En el modelo aparecen las siguientes señales:

- \mathbf{F}_m : Fuerza aplicada por el operador en el maestro.
- \mathbf{u}_m : Señal de control de entrada al maestro.
- \mathbf{u}_s : Señal de control de entrada al esclavo.
- $\mathbf{x}_m = [x_{m1} \ x_{m2}]$: Vector de estados del maestro, donde x_{m1} y x_{m2} son, respectivamente, la posición y velocidad del maestro.
- $\mathbf{x}_s = [x_{s1} \ x_{s2}]$: Vector de estados del esclavo, donde x_{s1} y x_{s2} son, respectivamente, la posición y velocidad del esclavo.
- \mathbf{y}_m : Salida del maestro (posición).
- \mathbf{y}_s : Salida del esclavo (posición).

Por otra parte, las matrices que aparecen en el modelo son las siguientes:

- $G_2 = g_2$: Define la influencia de la fuerza ejercida por el operador sobre el maestro en el esclavo.
- $R_m = [r_{m1} \ r_{m2}]$: Define la interacción esclavo – maestro. Permite que el modelo contemple la reflexión de esfuerzos.
- $R_s = [r_{s1} \ r_{s2}]$: Define la interacción maestro – esclavo.
- $K_m = [k_{m1} \ k_{m2}]$: Matriz de realimentación de estado del maestro.

- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}]$: Matriz de realimentación de estado del esclavo. Permite incorporar en el modelo la interacción del esclavo con el entorno.

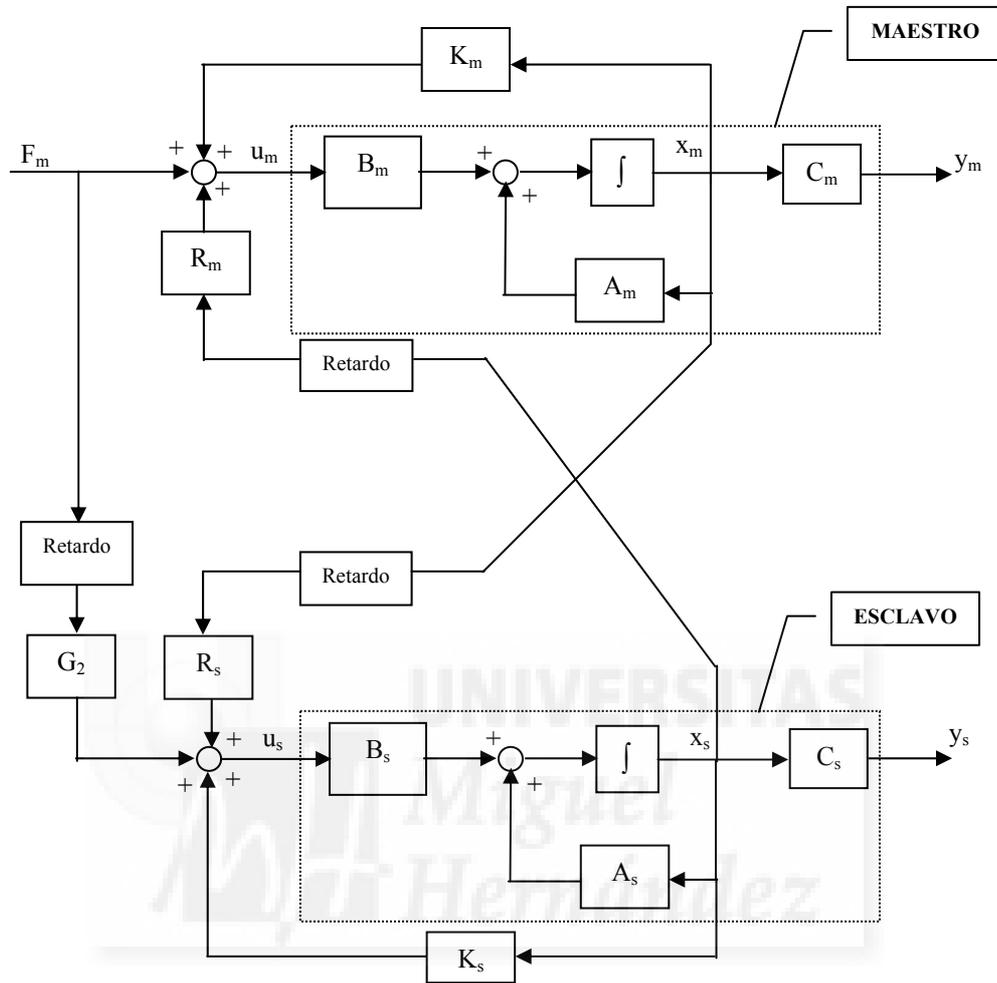


Figura 4.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.

La señal de control de entrada al maestro viene dada, tal como se indicó en el apartado 3.2.1 del capítulo 3 (ecuación (3.22)), por:

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) \quad (4.1)$$

En un sistema teleoperado real, cuando se alcanza una posición de equilibrio, el motor del maestro debe ejercer una fuerza/par igual y de sentido contrario a la fuerza que ejerce el operador para mantener esta posición de equilibrio y, además, para que el operador sienta la fuerza de reacción en este punto. Por este motivo, la señal de control de entrada al maestro en un sistema real vendrá dada por:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) \quad (4.2)$$

donde como puede comprobarse, se ha eliminado la fuerza que ejerce el operador, $F_m(t)$. De este modo la señal de control simplemente se calculará mediante la suma del término $K_m x_m(t)$, que representa la señal de realimentación del estado del maestro, y del término

$R_m x_s(t-T)$, que se utiliza para modelar la fuerza de reflexión del esclavo con el entorno, según se explicó en el apartado 3.2.2 del capítulo 3.

En el apartado 3.2.2 del capítulo 3, se explicó que la matriz K_s , además de ser un parámetro de regulación, permitía modelar la interacción del esclavo con el entorno. La fuerza de reacción actuante sobre el esclavo, $f_s(t)$, venía dada por:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) + b_e \dot{\theta}_s(t) = k_e x_{s1}(t) + b_e x_{s2}(t) \quad (4.3)$$

Para contemplar esta fuerza interacción, la estructura de la matriz K_s , tal como se indicó en (3.28), era:

$$K_s = \begin{bmatrix} k_{s1} & k_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{s1} - k_e & k'_{s2} - b_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} = K'_s - \begin{bmatrix} k_e & b_e \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Con esta estructura de K_s se logra que la señal de control $u_s(t)$ contemple la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, como se indicaba en (3.30):

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = K'_s x_s(t) - f_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (4.5)$$

En un sistema teleoperado real no debe utilizarse la matriz K_s indicada en (4.4) para calcular la señal de control del esclavo, ya que la fuerza de reacción del esclavo con el entorno se producirá realmente y no será necesario modelarla. De este modo, en lugar de emplear la matriz K_s , se utilizará la matriz $K'_s = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} \end{bmatrix}$ que puede obtenerse fácilmente a partir de (4.4). Por tanto, la señal de control de entrada al esclavo en un sistema real vendrá dada por:

$$\tilde{u}_s(t) = K'_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (4.6)$$

Cuando se alcance la posición de equilibrio, el motor del esclavo generará una fuerza/par igual a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno para mantener esta posición de equilibrio.

4.3 Pruebas en simulación del método de diseño

En este apartado se van a realizar diversas pruebas en simulación para verificar el correcto funcionamiento del método de diseño de sistemas de control teleoperados con retardos en la comunicación presentado en el apartado 3.3 del capítulo 3. Posteriormente, en el capítulo 7, se mostrará experimentalmente la validez del método sobre un sistema teleoperado real de un grado de libertad.

Se van a efectuar las simulaciones considerando tres sistemas teleoperados distintos. El primero corresponde a un sistema teleoperado típico en el que el maestro es menor que el esclavo (sistema teleoperado I). El segundo corresponde a un sistema en el que el maestro y el esclavo son idénticos (sistema teleoperado II), y por último, se ha considerado un sistema teleoperado en el que el esclavo es menor que el maestro

(sistema teleoperado III), utilizado para microteleoperación. Los parámetros del maestro y del esclavo, junto con la constante de reflexión de esfuerzos (k_f), considerados en cada sistema teleoperado se muestran en la Tabla 4.1.

	Sistema teleoperado I	Sistema teleoperado II	Sistema teleoperado III
Características	maestro < esclavo	maestro = esclavo	maestro > esclavo
Maestro	$J_m = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_m = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_m = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_m = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_m = 2 \text{ kg m}^2$ $b_m = 15 \text{ Nm/(rad/s)}$
Esclavo	$J_s = 2 \text{ kg m}^2$ $b_s = 15 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_s = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_s = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_s = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_s = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$
k_f	0.1	1	10

Tabla 4.1. Parámetros considerados de cada sistema teleoperado.

Se va a considerar que en la comunicación entre el maestro y el esclavo existen retardos de 0.1 s y 0.5 s. Asimismo se va a suponer que el esclavo interacciona con dos tipos de entornos: entorno suave y entorno rígido. Los parámetros considerados para modelar cada tipo de entorno se muestran en la Tabla 4.2.

Tipo de entorno	k_e [Nm/rad]	b_e [Nm/(rad/s)]
Suave	10	0.1
Rígido	100	1

Tabla 4.2. Parámetros utilizados para modelar los distintos tipos de entorno.

Tal como se explicó en el apartado 3.3, para poder diseñar el control de cada sistema teleoperado, es necesario indicar cual es la dinámica deseada del esclavo y cual es la dinámica deseada del error entre el maestro y el esclavo. Se va a considerar que en todos los casos se desea fijar tanto los polos del esclavo como del error en $s = -11$, es decir, se desea que el polinomio característico del esclavo y del error sea:

$$p(s) = q(s) = s^2 + 22s + 121 \quad (4.7)$$

La razón de ubicar los polos del esclavo y del error en $s = -11$ se debe a que los reguladores que se obtienen con estas dinámicas proporcionan un comportamiento satisfactorio de los tres sistemas teleoperados cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$). En el apartado 4.4 se estudiará como influye la elección que se realice de los polos del error y del esclavo, es decir, del polinomio característico del error y del esclavo, en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado con los reguladores obtenidos por el método de diseño.

Con los distintos parámetros considerados de maestro y esclavo, así como retardo existente y tipos de entornos, se pretende validar sobre un amplio abanico de configuraciones, el método de diseño aportado en la presente Tesis. Para todas las configuraciones se calculará el valor de los reguladores según el procedimiento de diseño y posteriormente se simulará el sistema teleoperado con los valores obtenidos. Tras cada simulación se analizará la respuesta del maestro y del esclavo, junto con sus señales de control.

Parámetros de diseño	Reguladores
$T = 0.1$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 1.331557$ $K_m = [-182.621 \ -21.932]$ $K_s = [-240.507323 \ -29.090545]$ $K'_s = [-230.507323 \ -28.990545]$ $R_m = [1 \ 0.01]$ $R_s = [-1.331557 \ -0.013315]$
$T = 0.1$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 1.315789$ $K_m = [-192.71 \ -21.32]$ $K_s = [-227.25 \ -29.894736]$ $K'_s = [-127.25 \ -28.894736]$ $R_m = [10 \ 0.1]$ $R_s = [-13.157894 \ -0.131578]$
$T = 0.5$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 1.324503$ $K_m = [-183.105 \ -21.620]$ $K_s = [-239.874172 \ -29.503311]$ $K'_s = [-229.874172 \ -29.403311]$ $R_m = [1 \ 0.01]$ $R_s = [-1.324503 \ -0.013245]$
$T = 0.5$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 1.25$ $K_m = [-197.55 \ -18.2]$ $K_s = [-221.9375 \ -33.75]$ $K'_s = [-121.9375 \ -32.75]$ $R_m = [10 \ 0.1]$ $R_s = [-12.5 \ -0.125]$

Tabla 4.3. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado I en función del retardo y el entorno considerado.

4.3.1 Sistema teleoperado I: maestro < esclavo

En la Tabla 4.3 se muestran los valores obtenidos de los reguladores que aparecen en el esquema de control resolviendo las ecuaciones planteadas en el apartado 3.3 del capítulo 3, según el retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno considerado. Para resolver el sistema de ecuaciones se ha utilizado el toolbox *Symbolic* de Matlab.

En la Figura 4.2 se muestra la simulación del sistema teleoperado, considerando que el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, cuando el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). Como puede observarse en (a) y en (b) la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

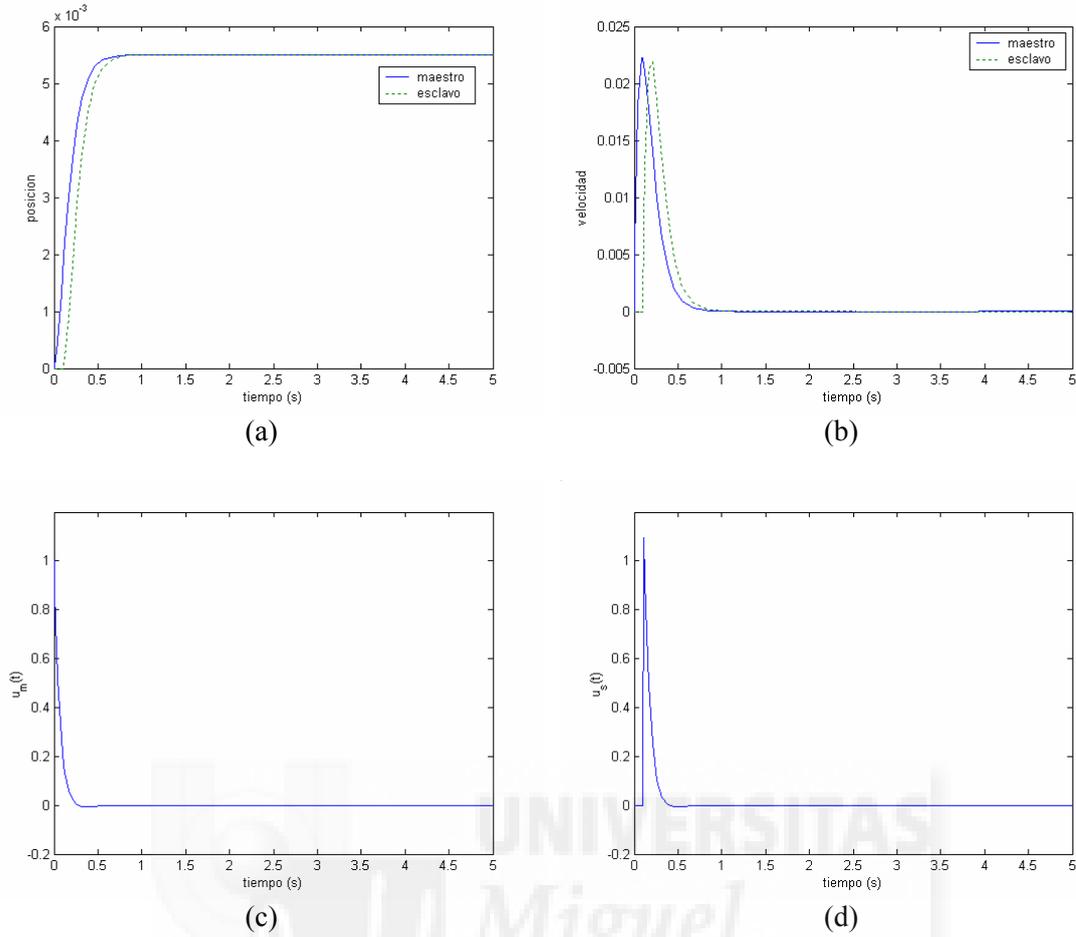


Figura 4.2. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control maestro ($u_m(t)$); (d) Señal de control esclavo ($u_s(t)$).

En la Figura 4.2(c) se puede observar la señal de control de entrada al maestro obtenida según se indicó en la ecuación (4.1), es decir, contemplando la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro ($F_m(t)$). Sin embargo, como se explicó en el apartado 4.2, en un sistema teleoperado real la señal de control del maestro vendrá dada únicamente por la suma de la señal de realimentación del estado del maestro, $K_m x_m(t)$, más la fuerza de realimentación del esclavo hacia el maestro, modelada por el término $R_m x_s(t-T)$, con la finalidad de que, en el punto de equilibrio, el motor del maestro genere una fuerza/par que se oponga a la fuerza ejercida por el operador. Es decir, como se mostró en (4.2), la señal de control real del maestro se calculará como:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) \quad (4.8)$$

En la Figura 4.3 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real de entrada al maestro ($\tilde{u}_m(t)$). En (a) se muestra la señal de realimentación del maestro ($K_m x_m(t)$), mientras que en (b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno que es realimentada al maestro ($R_m x_s(t-T)$). Como puede apreciarse, la fuerza que se realimenta del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro. De este modo, es la señal de realimentación del

estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interactuando con el entorno.

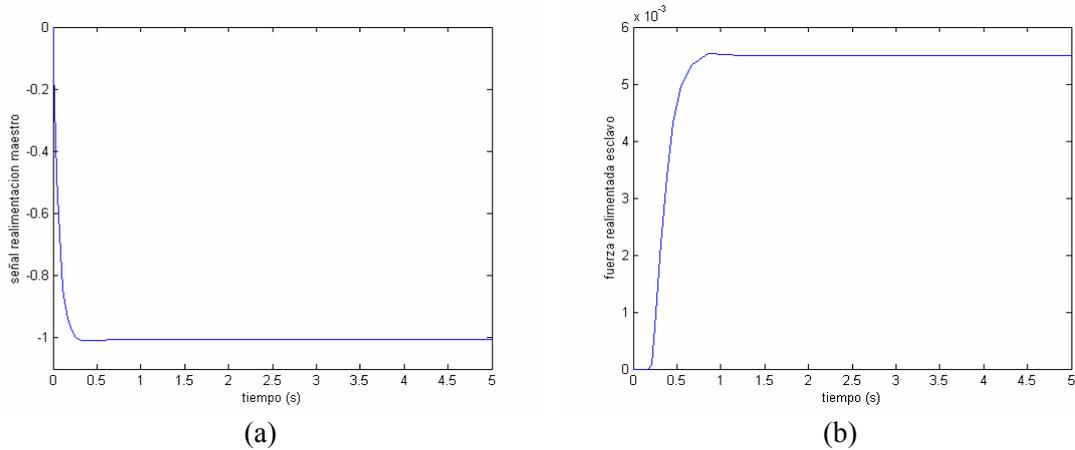


Figura 4.3. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

Por otra parte en la Figura 4.2(d) se ha mostrado la señal de control de entrada al esclavo obtenida utilizando la ecuación (4.5), es decir, considerando la fuerza de reacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Sin embargo, como se indicó en el apartado 4.2, en un sistema teleoperado real la señal de control del esclavo no contemplará la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de forma que en el punto de equilibrio el motor del esclavo generará una fuerza/par que se opondrá a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno. Es decir, la señal de control real del esclavo vendrá dada, como se mostró en (4.6), por:

$$\tilde{u}_s(t) = K_s' x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (4.9)$$

En la Figura 4.4(a) se muestra la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) y en la Figura 4.4(b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

Si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos en el caso de que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y el entorno con el que interactúa el esclavo es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.5. Como puede observarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro.

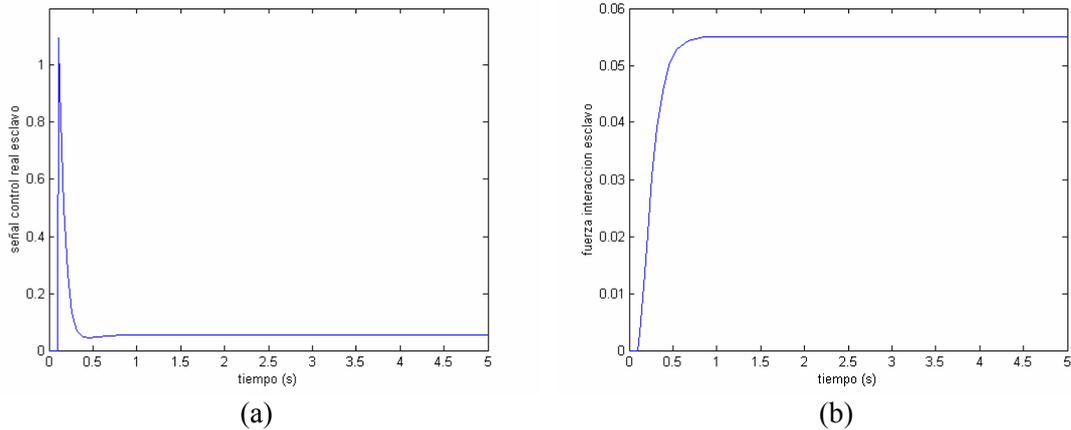


Figura 4.4. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

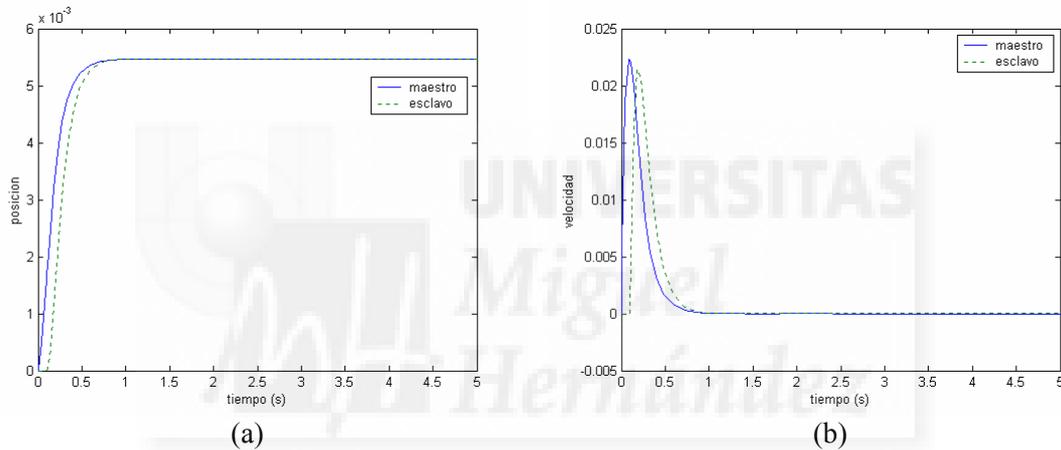


Figura 4.5. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.6 se muestran los términos que se contemplan en la realidad para calcular la señal de control de entrada al maestro. Como puede observarse, la fuerza que se realimenta del esclavo (b) es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). De este modo, al igual que en el caso del entorno suave, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno.

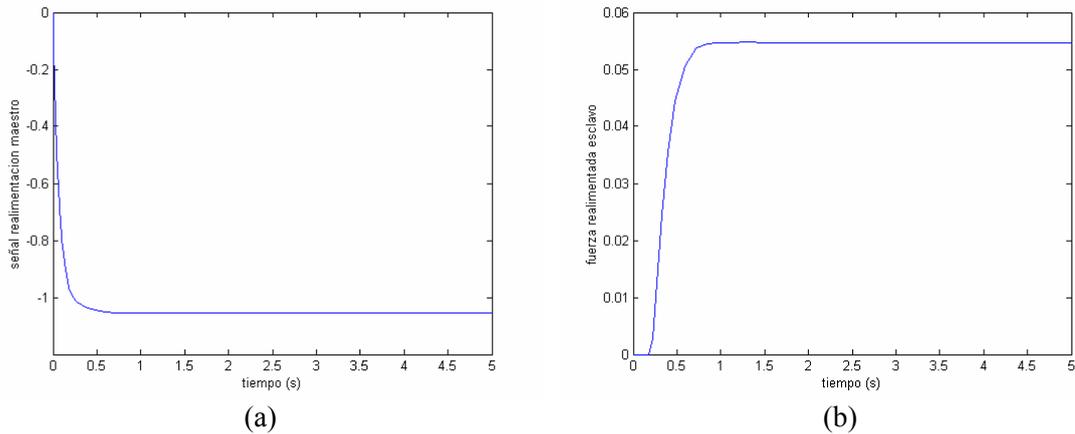


Figura 4.6. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.7 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

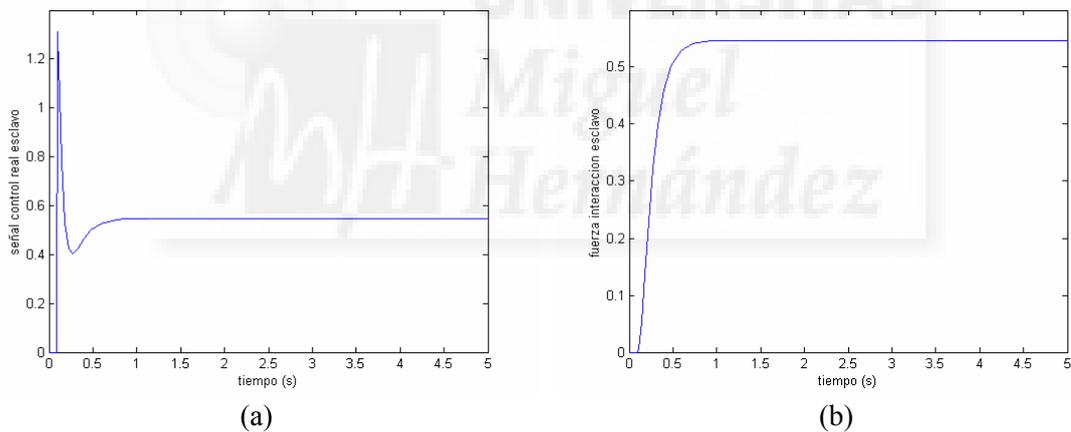


Figura 4.7. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Como ha podido comprobarse tanto en el caso de que el entorno es suave, como cuando es rígido, en ambos casos ha sido posible diseñar de forma satisfactoria el esquema de control. En estos dos casos se ha considerado que el retardo existente en la comunicación era de 0.1 segundos. A continuación se muestran los resultados obtenidos cuando el retardo es de 0.5 segundos.

Si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos en el caso de que el retardo existente en la comunicación es de 0.5 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.8. Como puede observarse, a pesar de la existencia del retardo, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro.

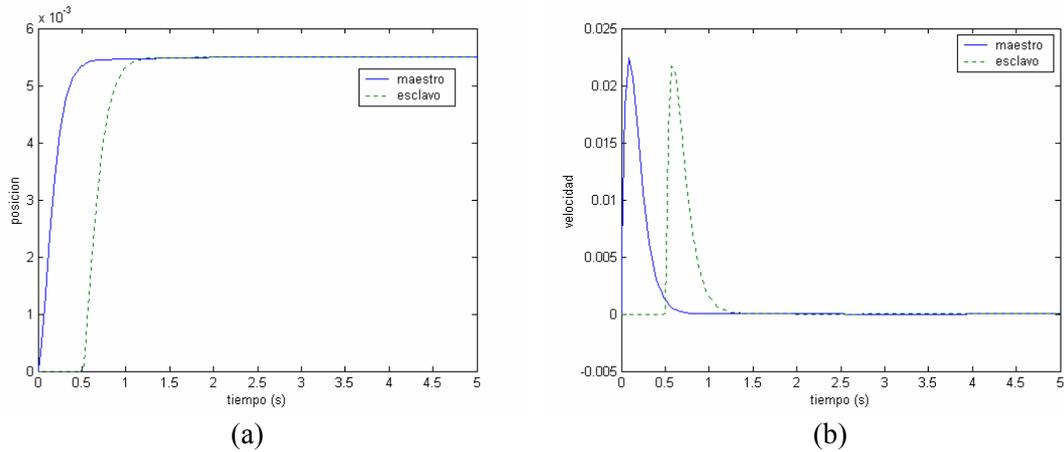


Figura 4.8. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.9 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real del maestro. Como puede observarse, la fuerza que se realimenta del esclavo (b) es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). De este modo, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno. Es interesante destacar como, a causa de la existencia de un retardo de 0.5 segundos en la transmisión de información del maestro al esclavo, y otro también de 0.5 segundos en la transmisión de datos en sentido inverso, la fuerza de realimentación proveniente del esclavo con el entorno tarda 1 segundo en llegar al maestro.

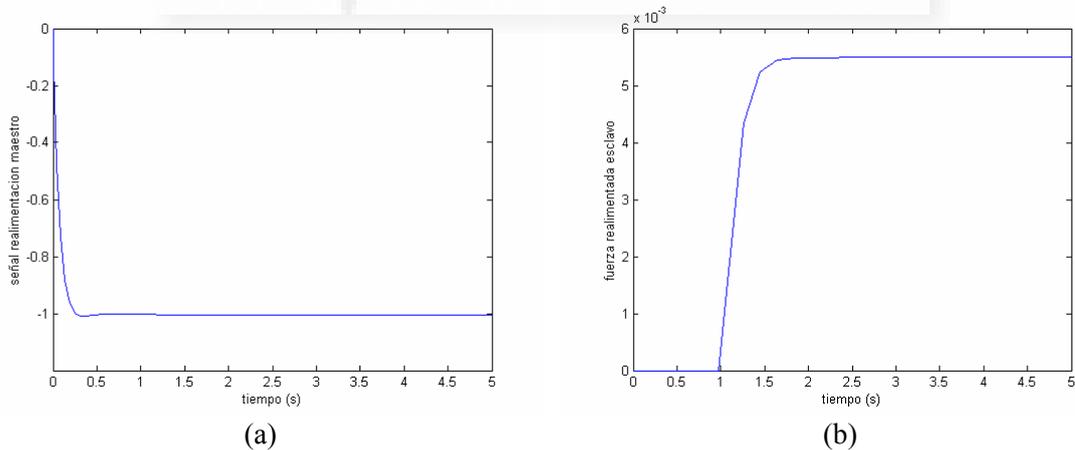


Figura 4.9. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.10 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

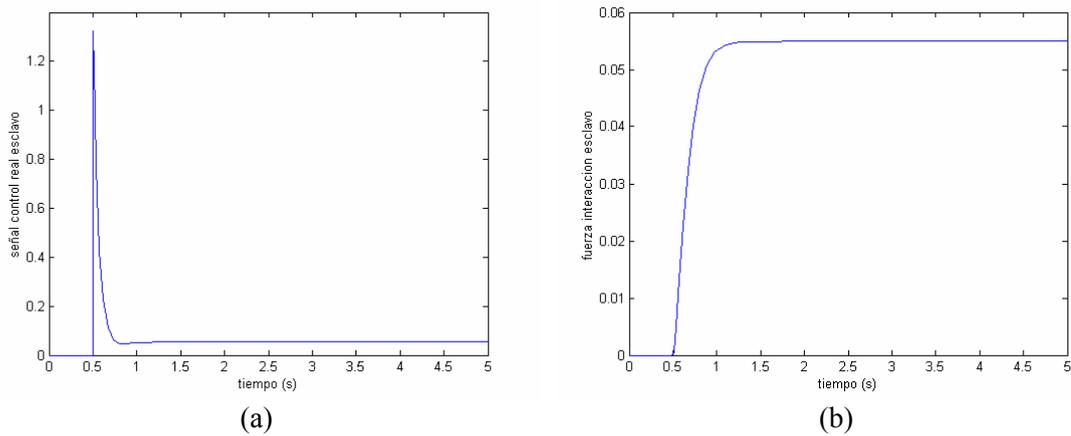


Figura 4.10. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Por último, si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos cuando el retardo es de 0.5 segundos y el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.11. Como puede observarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro, sin embargo, cuando el retardo era de 0.1 s, la posición y velocidad del maestro y del esclavo convergían en aproximadamente 0.75 s, ver Figura 4.5, mientras que ahora convergen mucho más tarde (≈ 1.75 s).

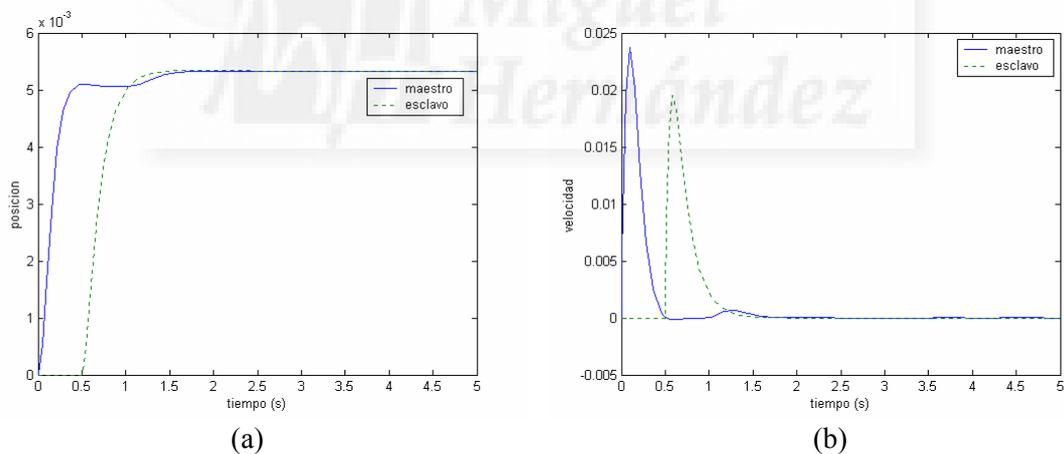


Figura 4.11. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.12 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real del maestro. Como puede observarse, la fuerza que se realimenta del esclavo (b) es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). De este modo, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno.

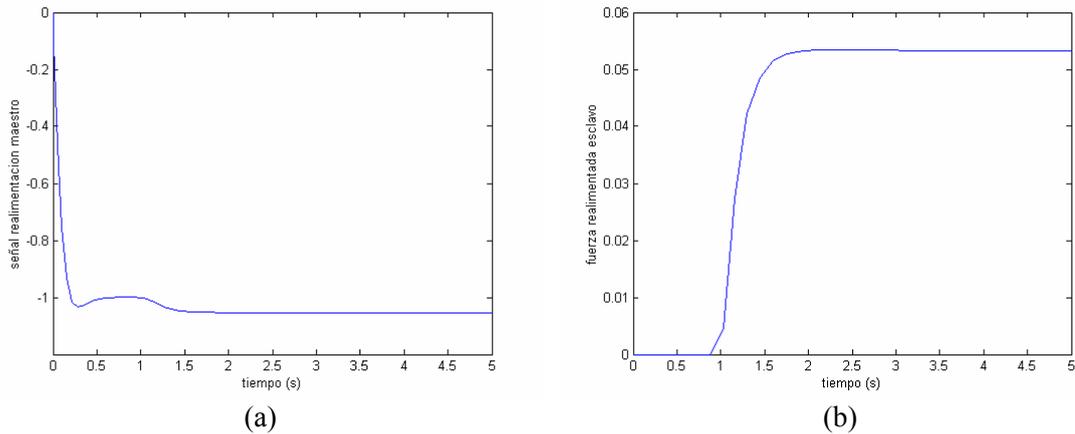


Figura 4.12. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.13 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

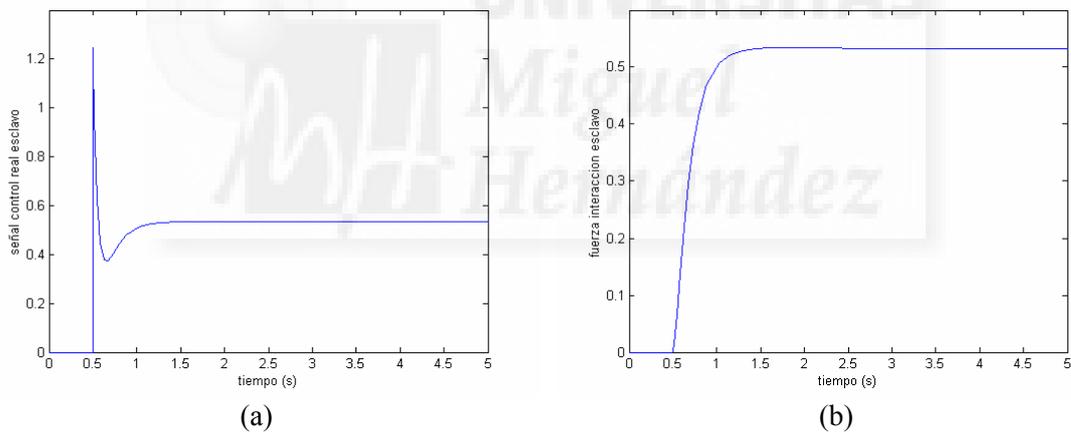


Figura 4.13. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Como ha podido comprobarse, en todos los casos ha sido posible diseñar el sistema de control para que el esclavo siga al maestro y, además, fijar los polos que determinan la dinámica del error y del esclavo en la ubicación deseada. Se ha podido verificar asimismo que es la propia señal de realimentación del estado del maestro la que se opone a la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro y consigue detener el avance del esclavo contra el entorno. Esto se debe a que en todos los casos la fuerza realimentada hacia el maestro del esclavo con el entorno es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro.

4.3.2 Sistema teleoperado II: maestro = esclavo

Se va a comprobar el método de diseño sobre el sistema teleoperado en el que el maestro y el esclavo son idénticos. En la Tabla 4.4 se muestran los valores obtenidos de los reguladores que aparecen en el esquema de control según el retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno considerado.

Parámetros de diseño	Reguladores
$T = 0.1$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.986842$ $K_m = [-192.71 \ -21.32]$ $K_s = [-170.4375 \ -22.671052]$ $K'_s = [-160.4375 \ -22.571052]$ $R_m = [10 \ 0.1]$ $R_s = [-9.868421 \ -0.098684]$
$T = 0.1$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.882352$ $K_m = [-293.6 \ -15.2]$ $K_s = [-82.588235 \ -28]$ $K'_s = [17.411765 \ -27]$ $R_m = [100 \ 1]$ $R_s = [-88.235294 \ -0.882352]$
$T = 0.5$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.9375$ $K_m = [-197.55 \ -18.2]$ $K_s = [-166.453125 \ -25.5625]$ $K'_s = [-156.453125 \ -25.4625]$ $R_m = [10 \ 0.1]$ $R_s = [-9.375 \ -0.09375]$
$T = 0.5$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.6$ $K_m = [-342 \ 16]$ $K_s = [-85.2 \ -44.8]$ $K'_s = [14.8 \ -43.8]$ $R_m = [100 \ 1]$ $R_s = [-60 \ -0.6]$

Tabla 4.4. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado II en función del retardo y el entorno considerado.

En la Figura 4.14 se muestra la simulación del sistema teleoperado, considerando que el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, cuando el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). Como puede observarse en (a) y en (b) la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

En la Figura 4.15 se muestran los términos que se suman para calcular la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$): (a) señal de realimentación del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) fuerza de interacción del esclavo con el entorno realimentada al maestro ($R_m x_s(t-T)$). Al igual que ocurría con el sistema teleoperado anterior, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm), debido a que la fuerza de realimentación del esclavo con el entorno es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro.

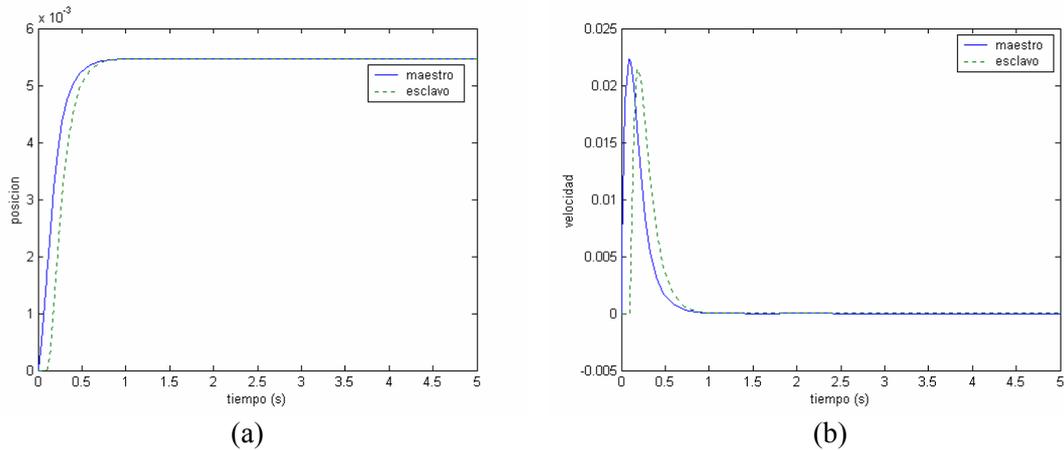


Figura 4.14. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

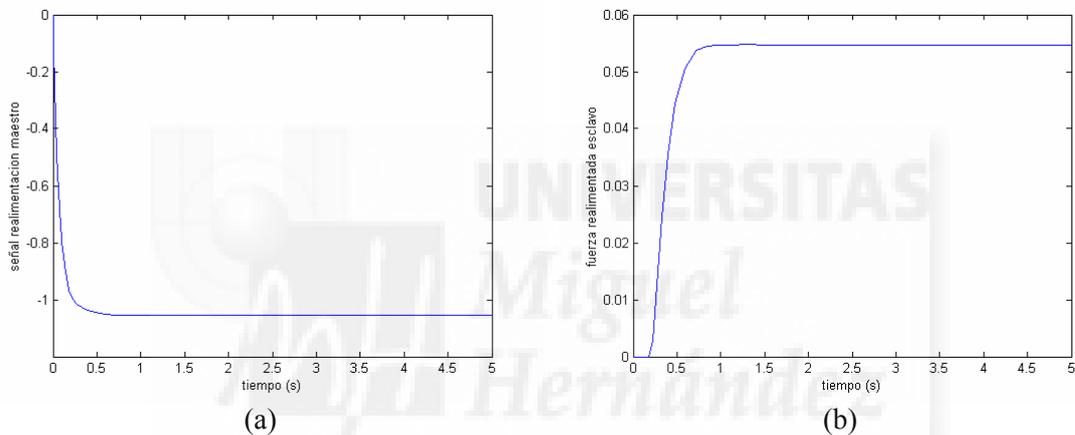


Figura 4.15. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.16(a) se muestra la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) y en la Figura 4.16(b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

Se va a considerar que ahora el entorno con el que interactúa el esclavo es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), de forma que el retardo existente en la comunicación sigue siendo de 0.1 segundos. Con estos supuestos, utilizando los reguladores obtenidos según el procedimiento de diseño, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.17. Como puede observarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro.

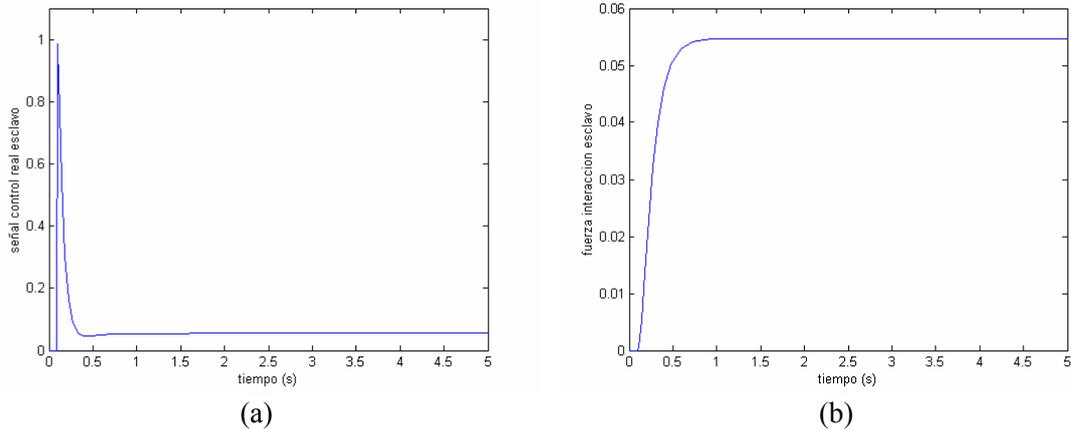


Figura 4.16. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

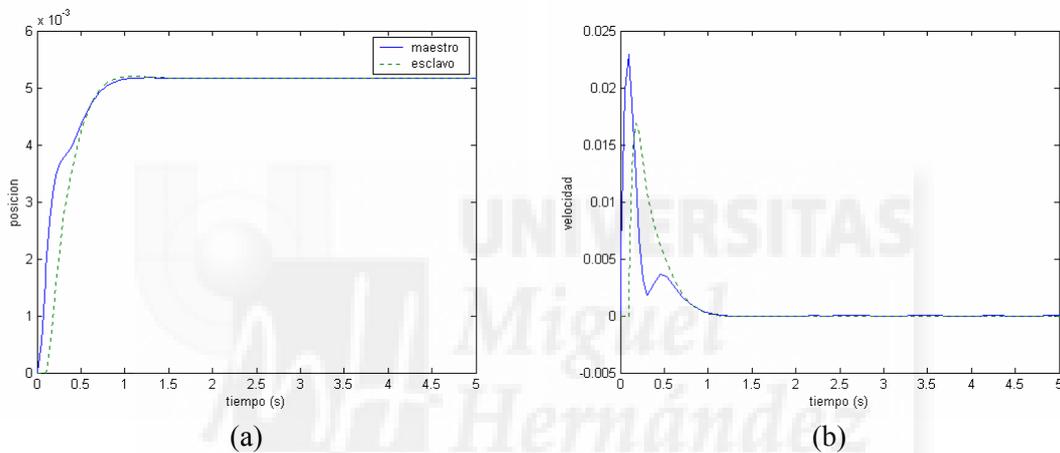


Figura 4.17. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.18 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real del maestro. En este caso la fuerza que se realimenta del esclavo (b) no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). Esto se debe a que, al aumentar la rigidez del entorno, la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es mayor, por lo que, como la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f) es 1, la fuerza que se realimenta al maestro posee el mismo valor que la fuerza de interacción y, por tanto, no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro. A medida que aumente la rigidez del entorno y/o la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f), aumentará la fuerza realimentada al maestro, de forma que cada vez tendrá una mayor influencia en el cálculo de la señal de control real del maestro. Mediante la suma de la fuerza que se realimenta del esclavo y de la señal de realimentación del estado del maestro, mostradas en la Figura 4.18, se consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno.

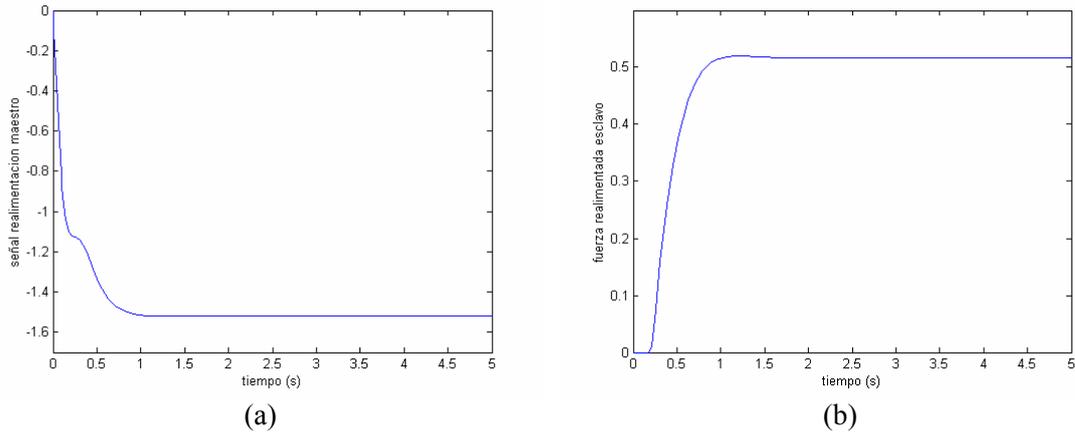


Figura 4.18. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.19 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

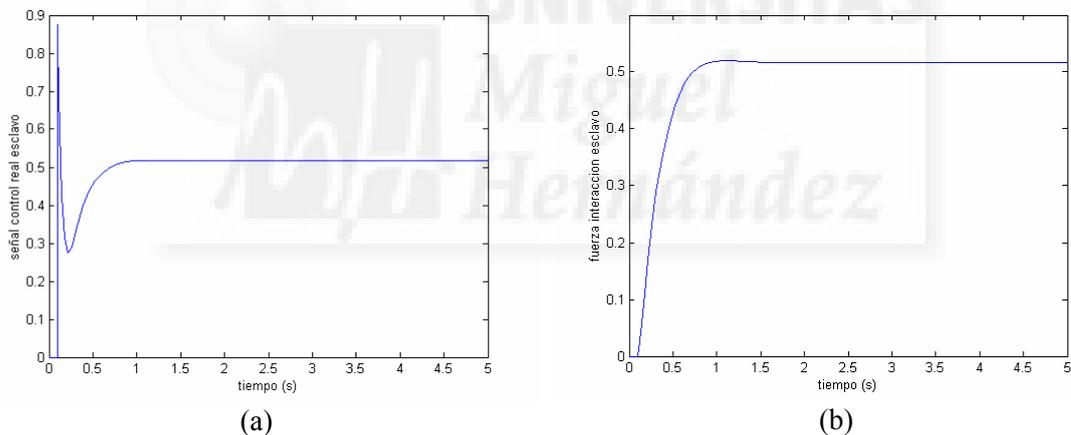


Figura 4.19. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Como ha podido comprobarse tanto en el caso de que el entorno es suave, como cuando es rígido, en ambos casos ha sido posible diseñar de forma satisfactoria el esquema de control considerando que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 segundos. A continuación se muestran los resultados obtenidos cuando el retardo existente en la comunicación es de 0.5 segundos.

Si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos en el caso de que el retardo existente en la comunicación es de 0.5 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.20. Como puede observarse, a pesar de la existencia del retardo, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro.

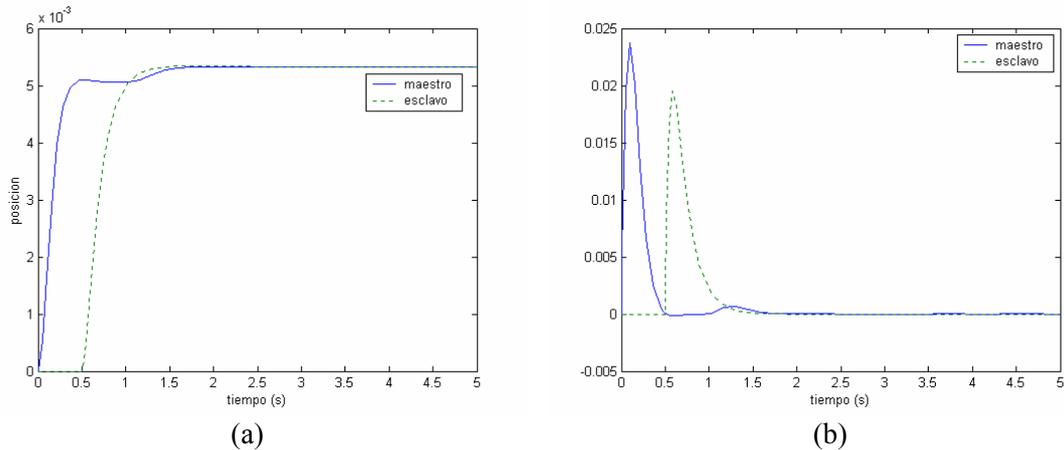


Figura 4.20. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.21 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real del maestro. Como puede observarse, la fuerza que se realimenta del esclavo (b) es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). De este modo, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno. Es interesante destacar como, a causa de la existencia de un retardo de 0.5 segundos en la transmisión de información del maestro al esclavo, y otro también de 0.5 segundos en la transmisión de datos en sentido inverso, la fuerza de realimentación proveniente del esclavo con el entorno tarda 1 segundo en llegar al maestro.

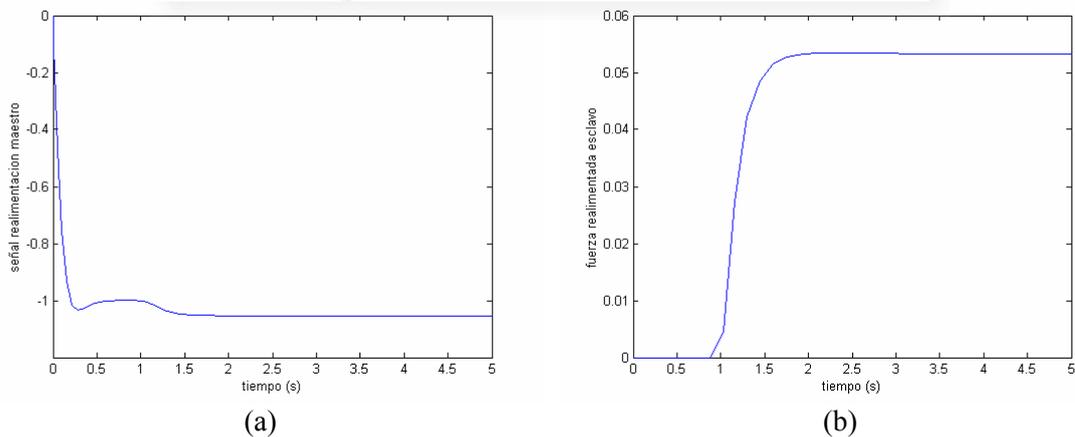


Figura 4.21. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.22 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

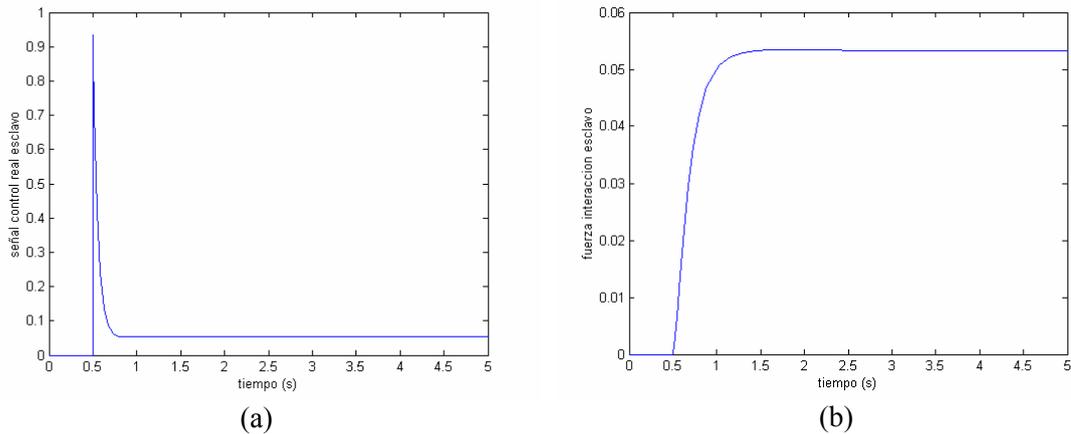


Figura 4.22. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Por último, si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos cuando el retardo es de 0.5 segundos y el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido ($k_e = 100 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 1 \text{ Nm/(rad/s)}$), se observa en la Figura 4.23 que el sistema teleoperado se vuelve inestable. Es decir, a pesar de diseñar el sistema teleoperado para que el esclavo siga al maestro y, además establecer sus polos en la parte izquierda del plano s , no se logra que el sistema sea estable. Este hecho se estudiará en el capítulo 5 de la presente Tesis, donde se mostrarán las herramientas a utilizar para analizar la estabilidad de un sistema teleoperado con retardos. Con estas herramientas será posible determinar si el sistema teleoperado es asintóticamente estable independientemente del retardo existente, o en caso contrario, indicar cual es el retardo máximo que puede soportar el sistema de manera que se asegure su estabilidad asintótica. Como se recordará, el sistema teleoperado diseñado con un retardo de 0.5 segundos, pero con un entorno suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$), no se desestabilizaba, ver Figura 4.20. Es decir, en el caso de que el entorno de contacto era más suave, ha sido posible diseñar el esquema de control de forma satisfactoria. En el capítulo 5 se mostrará que la estabilidad asintótica del sistema depende, de entre diversos factores, del tipo de entorno, de forma que un sistema puede ser estable con un determinado entorno, pero puede volverse inestable al aumentar la rigidez del entorno.

Como ha podido verificarse en este epígrafe, ha sido posible diseñar el esquema de control del sistema teleoperado en todos los casos, salvo en el último. Al aumentar la rigidez del entorno y el retardo en la comunicación, no ha sido posible diseñar el esquema de control de forma que se asegure la estabilidad del sistema teleoperado. Se ha podido comprobar asimismo que cuando el entorno es suave, es la propia señal de realimentación del estado del maestro la que se opone a la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro y consigue detener el avance del esclavo contra el entorno, ya que la fuerza realimentada del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro. Sin embargo, cuando el entorno es rígido, se consigue anular la fuerza que ejerce el operador mediante la suma de ambas señales, puesto que la fuerza realimentada del esclavo no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado.

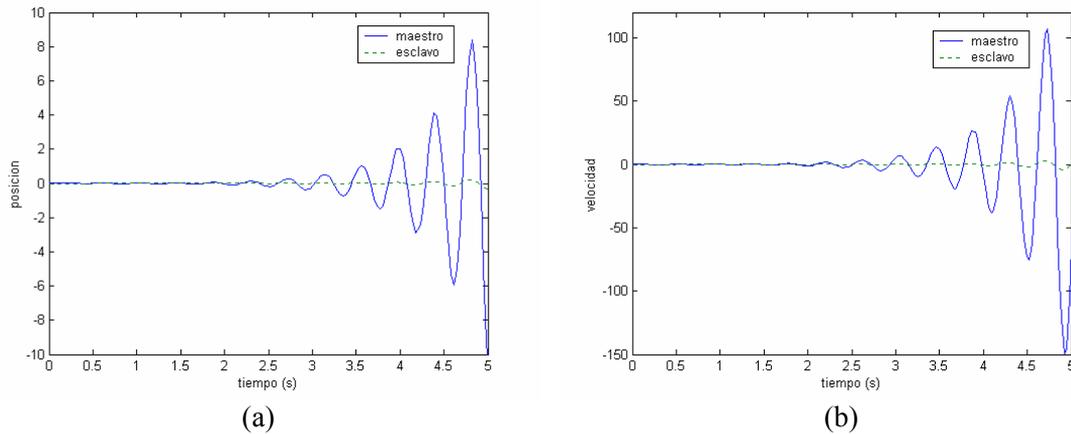


Figura 4.23. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

Parámetros de diseño	Reguladores
$T = 0.1$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.681818$ $K_m = [-354.1 \quad -22.2]$ $K_s = [-105.068181 \quad -26.636363]$ $K'_s = [-95.068181 \quad -26.536363]$ $R_m = [100 \quad 1]$ $R_s = [-68.181818 \quad -0.681818]$
$T = 0.1$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.375$ $K_m = [-1363 \quad 39]$ $K_s = [238.875 \quad -47.5]$ $K'_s = [338.875 \quad -46.5]$ $R_m = [1000 \quad 10]$ $R_s = [-375 \quad -3.75]$
$T = 0.5$ s Entorno suave: $k_e = 10$ Nm/rad $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.5$ $K_m = [-402.5 \quad 9]$ $K_s = [-101.25 \quad -41]$ $K'_s = [-91.25 \quad -40.9]$ $R_m = [100 \quad 1]$ $R_s = [-50 \quad -0.5]$
$T = 0.5$ s Entorno rígido: $k_e = 100$ Nm/rad $b_e = 1$ Nm/(rad/s)	$g_2 = 0.125$ $K_m = [-1847 \quad 351]$ $K_s = [19.125 \quad -69.5]$ $K'_s = [119.125 \quad -68.5]$ $R_m = [1000 \quad 10]$ $R_s = [-125 \quad -1.25]$

Tabla 4.5. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado III en función del retardo y el entorno considerado.

4.3.3 Sistema teleoperado III: maestro > esclavo

Se va a comprobar el método de diseño sobre el sistema teleoperado en el que el maestro es de dimensiones mayores que el esclavo, con el fin de validar el método sobre

sistemas de telemicrooperación. En la Tabla 4.5 se muestran los valores obtenidos de los reguladores que aparecen en el esquema de control según el retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno considerado.

En la Figura 4.24 se muestra la simulación del sistema teleoperado, considerando que el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, cuando el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). Como puede observarse en (a) y en (b), la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

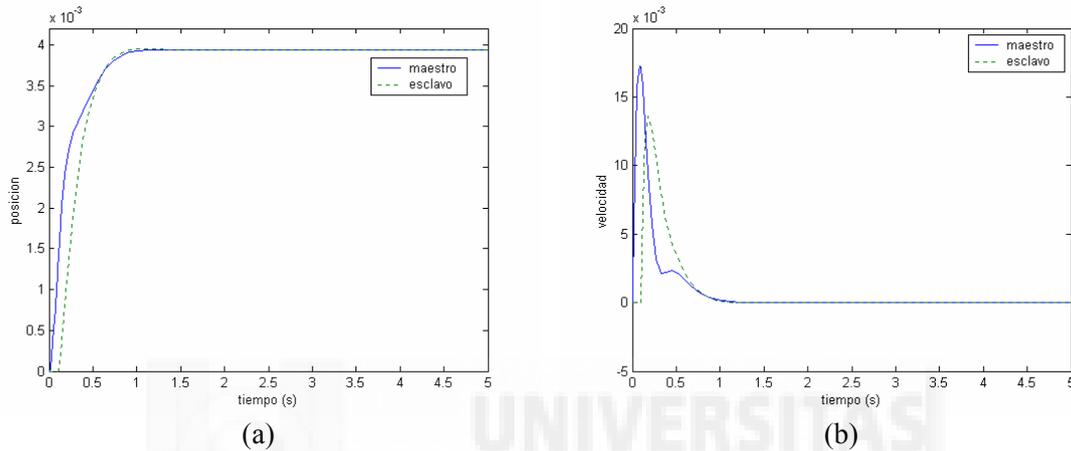


Figura 4.24. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.25 se muestran los términos que se suman para calcular la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$): (a) señal de realimentación del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) fuerza de interacción del esclavo con el entorno realimentada al maestro ($R_m x_s(t-T)$). Mediante la suma de ambas señales se consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm). Hay que destacar que, a pesar de que el entorno es suave, la fuerza de interacción del esclavo con el entorno realimentada al maestro no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro. Esto es debido a que se amplifica la fuerza de interacción del esclavo, al ser la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f) 10.

En la Figura 4.26(a) se muestra la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) y en la Figura 4.26(b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Como puede apreciarse en (a), la señal de control del esclavo toma el mismo valor final que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de este modo el esclavo no sigue su interacción con el entorno.

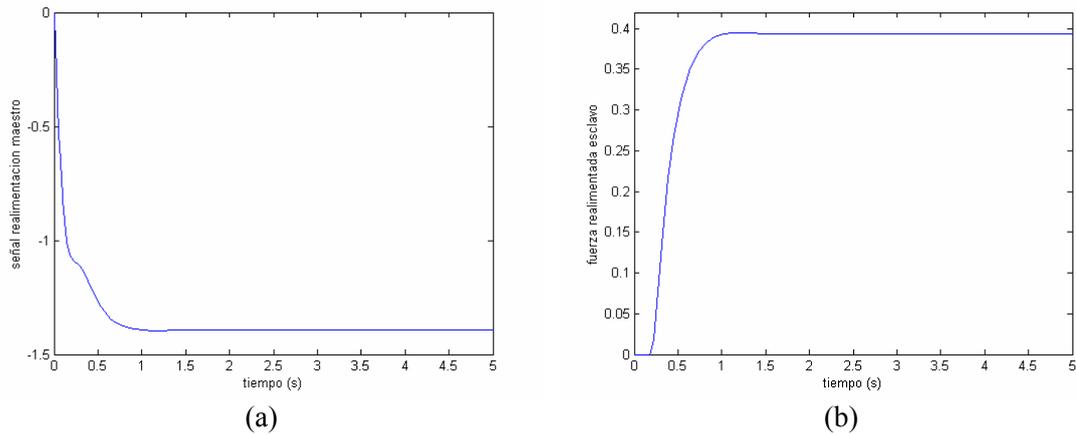


Figura 4.25. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

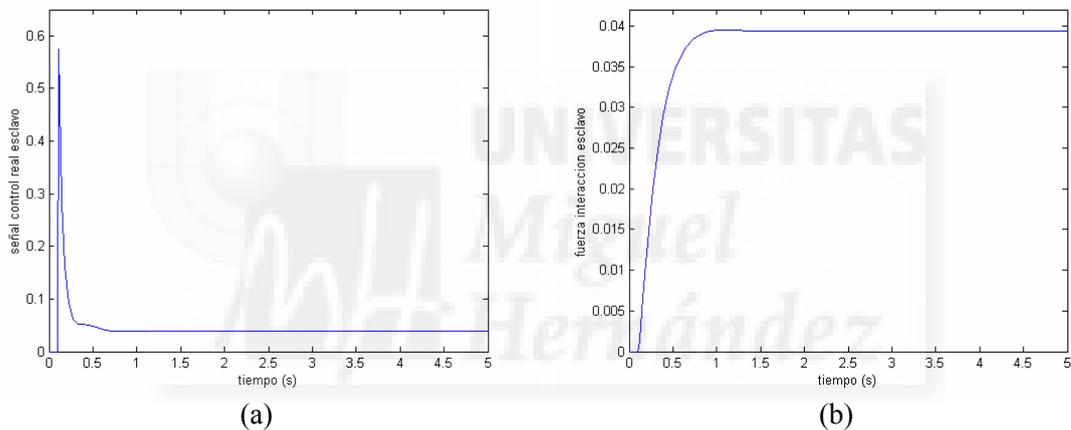


Figura 4.26. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Se va a considerar que ahora el entorno con el que interactúa el esclavo es rígido ($k_e = 100 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 1 \text{ Nm/(rad/s)}$), de forma que el retardo existente en la comunicación sigue siendo de 0.1 segundos. Con estos supuestos, utilizando los reguladores obtenidos según el procedimiento de diseño, se obtiene un comportamiento del sistema inestable, tal como se muestra en la Figura 4.27. Al igual que ocurría con el sistema teleoperado anterior, en el que el maestro y el esclavo eran idénticos, al aumentar la rigidez del entorno, el sistema se ha vuelto inestable. En este caso el sistema se desestabiliza a pesar de que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 segundos. Recordemos que el sistema teleoperado anterior se volvía inestable cuando el retardo era de 0.5 segundos.

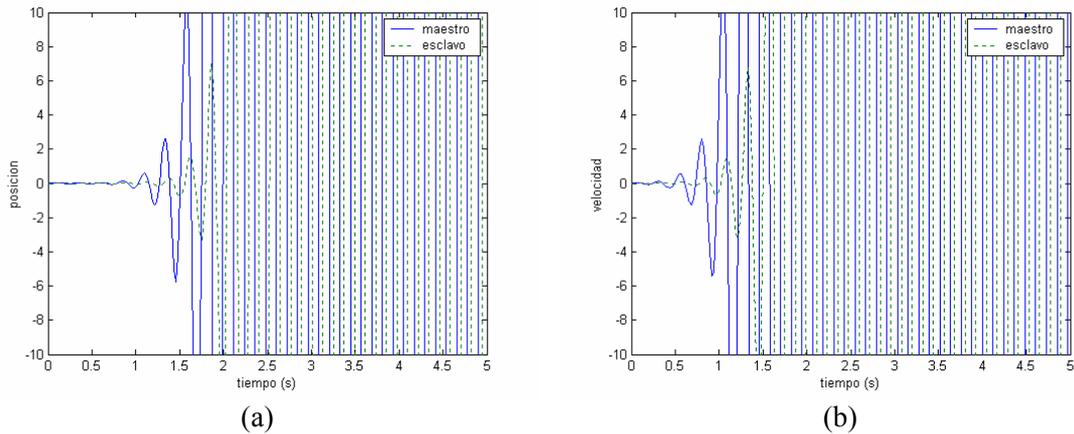


Figura 4.27. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

Si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos en el caso de que el retardo existente en la comunicación es de 0.5 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 4.28. Como puede observarse, la posición y la velocidad del maestro y del esclavo convergen, pero la convergencia tarda mucho más tiempo en producirse que con el sistema diseñado considerando un retardo en la comunicación de 0.1 s y entorno suave, ver Figura 4.24 (ahora el maestro y el esclavo convergen en aproximadamente 3 s, mientras que antes convergían en aproximadamente 1.25 s).

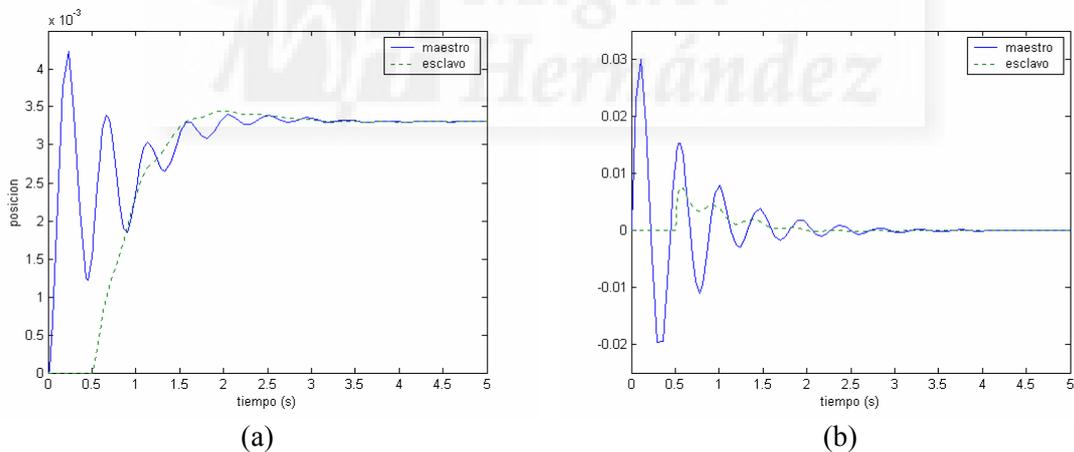


Figura 4.28. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 4.29 se muestran los términos que se contemplan para calcular la señal de control real del maestro. En este caso la fuerza que se realimenta del esclavo (b) no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro (a). Mediante la suma de estas dos señales se consigue anular la fuerza de entrada del operador (1 Nm) y lograr que el maestro se detenga, y por lo tanto, que el esclavo no siga avanzando e interaccionando con el entorno.

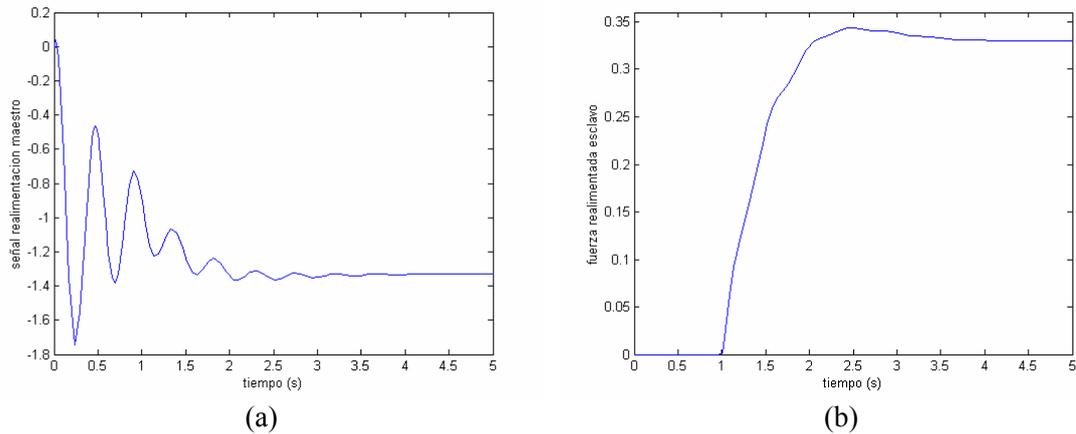


Figura 4.29. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$).

En la Figura 4.30 se muestra la señal de control real del esclavo (a) y la fuerza de interacción del esclavo con el entorno (b). Como puede apreciarse en (a), el valor final de la señal de control del esclavo coincide con el valor final de la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, consiguiendo de este modo que el esclavo no siga su interacción con el entorno.

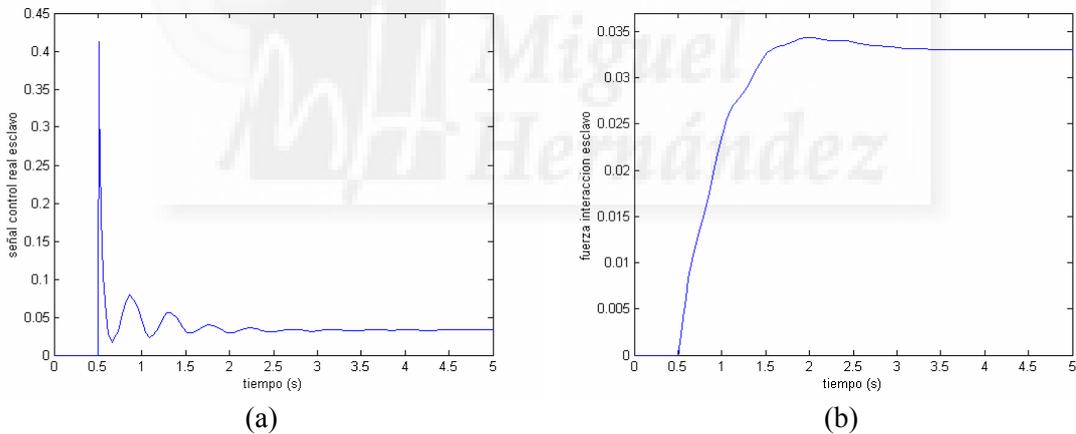


Figura 4.30. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Por último, si se simula el sistema teleoperado con los reguladores obtenidos cuando el retardo es de 0.5 segundos y el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido ($k_e = 100 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 1 \text{ Nm/(rad/s)}$), se observa en la Figura 4.31 que el sistema teleoperado se vuelve inestable. Esto era de prever, ya que cuando el retardo era de 0.5 segundos y el entorno era rígido, el sistema era inestable.

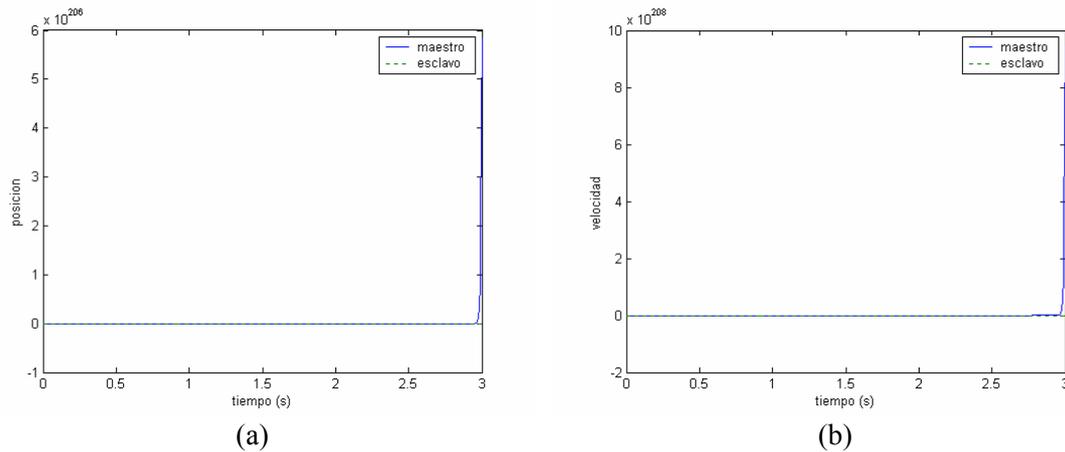


Figura 4.31. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).

Con este sistema teleoperado, en el que el maestro es de dimensión mayor que el esclavo, se ha podido diseñar el esquema de control de forma satisfactoria cuando el entorno con el que interactúa el esclavo es suave. Sin embargo, cuando el entorno es rígido, incluso en el caso de que el retardo existente en la comunicación sea de 0.1 segundos, se obtiene un esquema de control que desestabiliza al sistema teleoperado. Con el entorno suave, se ha obtenido un mejor comportamiento del sistema cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 segundos, ya que en este caso el maestro y el esclavo convergen en aproximadamente 1 segundo. Por el contrario, cuando el retardo en la comunicación es de 0.5 segundos, el maestro y el esclavo tardan en converger alrededor de 3 segundos, observándose además un comportamiento más degradado del maestro, ya que se vuelve más oscilante. Se ha observado asimismo que se consigue anular la fuerza que ejerce el operador mediante la suma de la señal de realimentación del estado del maestro y la fuerza realimentada del esclavo, puesto que la fuerza realimentada del esclavo no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado.

4.3.4 Conclusiones

En este apartado se ha podido verificar en simulación el método de diseño de esquemas de control de sistemas teleoperados con retardos presentado en el apartado 3.3 del capítulo 3. El método se ha validado sobre tres sistemas teleoperados diferentes en los que se ha considerado que el esclavo puede interactuar con dos tipos de entornos (entorno suave y entorno rígido) y en el que pueden existir dos retardos distintos en la comunicación ($T=0.1$ s y $T=0.5$ s). Como se ha podido comprobar, prácticamente en la mayoría de las configuraciones ha sido posible diseñar de forma satisfactoria el esquema de control, es decir, se han podido obtener el valor de los reguladores para que el esclavo siga al maestro (el estado del maestro y del esclavo converjan) y, además, se fije la dinámica deseada del esclavo así como la del error entre el maestro y el esclavo.

Para el sistema teleoperado I, que se caracterizaba por que el maestro es de dimensión inferior al esclavo, ha sido posible diseñar de forma satisfactoria el control en todas las

posibles configuraciones. Cuando el retardo es pequeño ($T=0.1s$) y el entorno es suave se consigue la convergencia entre el maestro y el esclavo de forma muy rápida (aproximadamente en 0.75 s). Sin embargo, al aumentar la rigidez del entorno y/o el tiempo de retardo, aumenta el tiempo en el que se produce la convergencia. Por ejemplo cuando el entorno es rígido y el retardo existente en la comunicación es de 0.5 s, el maestro y el esclavo convergen en alrededor de 1.75 s. Se ha comprobado en este sistema teleoperado que, en todas las configuraciones, es la señal de realimentación del estado del maestro la que se opone a la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro y consigue de este modo detener el avance del esclavo contra el entorno. Esto se debe a que en todos los casos la fuerza realimentada hacia el maestro del esclavo con el entorno es despreciable frente a la señal de realimentación del estado del maestro, ya que al ser la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f) 0.1, provoca que se divida por 10 la fuerza de interacción del esclavo al ser realimentada al maestro.

Si se observa el valor final alcanzado por la posición del maestro y del esclavo se puede apreciar que para un mismo retardo, al aumentar la rigidez del entorno disminuye ligeramente la posición final. Por otra parte para un mismo entorno, al aumentar el tiempo de retardo también disminuye ligeramente la posición final alcanzada. En la Tabla 4.6 se muestran los valores finales alcanzados en cada configuración.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$5.506 \cdot 10^{-3}$	$5.4913 \cdot 10^{-3}$
Entorno rígido	$5.473 \cdot 10^{-3}$	$5.332 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.6. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado I.

En la Tabla 4.7 se muestran los valores máximos en valor absoluto de la señal de control real del maestro y del esclavo para el sistema teleoperado I en función del retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno. En todos los casos puede observarse que la señal de control del esclavo tiene un valor mayor que la señal de control del maestro, aunque cuando el retardo es pequeño y el entorno es suave, la diferencia es muy pequeña.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.005525$	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.007672$
	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 1.096363$	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 1.322258$
Entorno rígido	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.003949$	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.034399$
	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 1.313373$	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 1.245114$

Tabla 4.7. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado I.

En el caso del sistema teleoperado II, en el que el maestro y el esclavo son idénticos, ha sido posible diseñar de forma exitosa el esquema de control en todas las configuraciones a excepción del caso en el que existe un retardo en la comunicación de 0.5 s y el entorno es rígido. En este caso se ha comprobado en simulación que el sistema se vuelve inestable al utilizar los reguladores obtenidos por el método de diseño. Al igual que ocurría en el sistema teleoperado anterior, al aumentar el tiempo de retardo y/o la rigidez del entorno, aumenta el tiempo en el que el maestro y el esclavo convergen.

Además se ha observado que, a causa de que la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f) es 1, cuando el entorno es suave, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza del operador, ya que la fuerza realimentada del esclavo es muy pequeña, mientras que cuando el entorno es rígido, se consigue anular la fuerza del operador mediante la suma de ambas señales, puesto que la fuerza realimentada del esclavo no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado.

Al igual que ocurría con el sistema teleoperado I, si se observa el valor final alcanzado por la posición del maestro y del esclavo en las distintas configuraciones del sistema teleoperado II, ver Tabla 4.8, se puede apreciar que para un mismo retardo, al aumentar la rigidez del entorno disminuye ligeramente la posición final. De igual modo, para un mismo entorno, al aumentar el tiempo de retardo también disminuye ligeramente la posición final alcanzada.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$5.473 \cdot 10^{-3}$	$5.332 \cdot 10^{-3}$
Entorno rígido	$5.165 \cdot 10^{-3}$	

Tabla 4.8. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado II.

En la Tabla 4.9 se muestran los valores máximos en valor absoluto de la señal de control real del maestro y del esclavo para el sistema teleoperado II en función del retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno. A diferencia de lo que ocurría en el sistema teleoperado I, puede observarse que en todos los casos la señal de control del esclavo tiene un valor menor que la señal de control del maestro.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.003949$	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.034399$
	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 0.984955$	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 0.933701$
Entorno rígido	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.110329$	
	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 0.87607$	

Tabla 4.9. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado II.

En el sistema teleoperado III, caracterizado por ser el esclavo de dimensión mayor al maestro, se ha podido diseñar el esquema de control satisfactoriamente sólo en el caso de que el entorno con el que interactúa el esclavo sea suave. Cuando el entorno es rígido el esquema de control hace al sistema teleoperado inestable incluso con un retardo en la comunicación de 0.1 s. Al igual que ocurría con los dos sistemas teleoperados anteriores, al aumentar el retardo, se incrementa el tiempo en el que el maestro y el esclavo en converger. Aunque en este sistema teleoperado, en comparación a los anteriores sistemas, se ha observado el mayor tiempo en converger el maestro y el esclavo cuando el retardo es de 0.5 s y el entorno es suave. En este caso el maestro y el esclavo tardan en converger alrededor de 3 segundos, observándose además un comportamiento degradado del maestro, ya que se vuelve inicialmente oscilante. También se ha comprobado en este sistema teleoperado que, al ser la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f) 10, la fuerza de interacción del esclavo con el entorno realimentada al maestro no es despreciable frente a la señal de realimentación del estado

del maestro, de forma que se logra anular la fuerza que ejerce el operador, y de este modo detener el avance del esclavo, mediante la suma de ambas señales.

Si se observa el valor final alcanzado por la posición del maestro y del esclavo en las distintas configuraciones, ver Tabla 4.10, de igual modo que en los dos sistemas teleoperados anteriores, se puede apreciar que para un mismo entorno, al aumentar el tiempo de retardo disminuye ligeramente la posición final alcanzada.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$3.935 \cdot 10^{-3}$	$3.305 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.10. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado III.

En la Tabla 4.11 se muestran los valores máximos en valor absoluto de la señal de control real del maestro y del esclavo para el sistema teleoperado III en función del retardo existente en la comunicación y el tipo de entorno. Al igual que ocurría en el sistema teleoperado II, puede observarse que en todos los casos la señal de control del esclavo tiene un valor menor que la señal de control del maestro. Además en este caso se obtienen los valores menores de la señal de control del esclavo. Esto puede deberse a que el esclavo es de dimensión inferior al maestro.

	T = 0.1 s	T = 0.5 s
Entorno suave	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.068907$	$ \tilde{u}_m(t) _{\max} = 1.74497$
	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 0.574891$	$ \tilde{u}_s(t) _{\max} = 0.412607$

Tabla 4.11. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado III.

Por último, si se analizan los valores de los reguladores obtenidos en función del retardo y del tipo de entorno con el que interacciona el esclavo de todos los sistemas teleoperados, se puede apreciar que para un mismo tipo de entorno, al cambiar el retardo en la comunicación, los valores de los reguladores varían ligeramente. Sin embargo, cuando, para un mismo retardo, cambia el tipo de entorno, los valores de los reguladores sufren una variación más acusada.

Para un mismo tipo de entorno, al aumentar el tiempo de retardo en la comunicación, los valores de los reguladores varían del siguiente modo:

- g_2, k_{m1} y k'_{s2} disminuyen.
- k_{m2} y R_s aumentan.
- k'_{s1} aumenta en general, pero para el sistema teleoperado II y III disminuye si el entorno es rígido.
- Como es natural R_m no varía si no cambia la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f), ya que se utiliza para modelar el entorno.

Para un mismo tiempo de retardo en la comunicación, al aumentar la rigidez del entorno, los valores de los reguladores varían del siguiente modo:

- g_2, k_{m1} y R_s disminuyen.

- k'_{s1} y k_{m2} aumentan.
- k'_{s2} disminuye en general, pero para el sistema teleoperado I aumenta cuando el retardo es de 0.1 s. Sin embargo para este sistema teleoperado, si se considera un entorno más rígido se puede comprobar que también disminuye.
- Lógicamente R_m aumenta si no cambia la ganancia de reflexión de esfuerzos (k_f), ya que se utiliza para modelar el entorno.

Además puede comprobarse que el valor de r_{s1} , en todos los casos, viene dado por:

$$r_{s1} = \frac{r_{m1}}{r_{m2}} r_{s2} \quad (4.10)$$

4.4 Influencia de la elección de los polos del error y del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Como se indicó en el apartado 3.3 del capítulo 3, donde se explicó el procedimiento de diseño del sistema de control teleoperado con retardos por convergencia de estados, es necesario establecer el comportamiento dinámico deseado del esclavo y del error entre el maestro y el esclavo, para poder plantear las ecuaciones de diseño. En ambos casos el comportamiento dinámico era especificado mediante un polinomio característico de segundo orden, estando cada polinomio característico determinado por dos polos.

En este apartado se va a estudiar de qué forma afecta la ubicación de polos elegida tanto en el polinomio característico del error como en el del esclavo, en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado con retardos.

Ante la dificultad de realizar un análisis algebraico que permita obtener una conclusión general sobre la dependencia del comportamiento de los sistemas teleoperados en función de los polos, se va a realizar un análisis numérico para un sistema teleoperado concreto, estudiando su comportamiento ante diferentes ubicaciones de polos. Para este estudio se va a considerar el sistema teleoperado I, ver Tabla 4.1, asumiendo que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y que interacciona con un entorno rígido, ver Tabla 4.2.

Como ha sido citado, tanto el polinomio característico del error como del esclavo son de segundo orden. Es conocido que, para analizar la respuesta transitoria de un sistema de 2º orden, es conveniente expresar la ecuación característica del sistema de la siguiente forma:

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4.11)$$

donde ω_n se denomina *frecuencia natural no amortiguada* y ζ es el *factor de amortiguamiento relativo* del sistema.

De la teoría de control [Ogata-98] es conocido que el comportamiento dinámico de un sistema de segundo orden puede describirse en términos de los parámetros ω_n y ζ . Si $0 <$

$\zeta < 1$, los polos son complejos conjugados y la respuesta transitoria es oscilatoria, denominándose al sistema subamortiguado. Si $\zeta = 1$, los polos son reales e iguales, y el sistema se denomina críticamente amortiguado. Si $\zeta > 1$, los polos son reales y diferentes, denominándose al sistema sobreamortiguado. La respuesta transitoria de los sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados no oscila. En el caso de que $\zeta = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua.

Para realizar el análisis de la influencia de los polos del esclavo y del error en el comportamiento del sistema teleoperado, se va a considerar que los polos se ubican en todos los casos de forma que el polinomio característico obtenido corresponde a un sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) o a un sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$), puesto que, como es lógico, no se desea que ni el esclavo ni el error tengan un comportamiento oscilante.

Se va a caracterizar el comportamiento dinámico del sistema teleoperado a través de la respuesta transitoria del maestro y del esclavo, así como mediante las señales de control implicadas. En concreto se van a analizar los siguientes parámetros de la respuesta del maestro y del esclavo, y de las señales de control:

- Respuesta final del sistema. Hace referencia al mismo tiempo a la respuesta del maestro ($y_m(t) = x_{m1}(t)$) y a la del esclavo ($y_s(t) = x_{s1}(t)$), ya que gracias al método de diseño presentado, ambas coincidirán en régimen permanente. Se analizará el valor final de la posición del maestro y del esclavo.
- Velocidad máxima del maestro y del esclavo en valor absoluto.
- Tiempo de establecimiento (t_s) del maestro y del esclavo: tiempo requerido para que la respuesta alcance un rango alrededor del valor final ($\pm 5\%$) y permanezca dentro de él.
- Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo: tiempo en el que el error entre ambas respuestas se anula, considerando que el error entre ambas respuestas se anula si la diferencia en valor absoluto entre ambas respuestas es inferior a 10^{-5} .
- Valor máximo absoluto de la señal de control del maestro. Se va a considerar la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$), ver ecuación (4.2), ya que, como se explicó en el apartado 4.2, en un sistema teleoperado real la señal de control del maestro vendrá dada únicamente por la suma de la señal de realimentación del estado del maestro, $K_m x_m(t)$, más la fuerza de realimentación del esclavo hacia el maestro, modelada por el término $R_m x_s(t-T)$, con la finalidad de que, en el punto de equilibrio, el motor del maestro genere una fuerza/par que se oponga a la fuerza ejercida por el operador.
- Valor máximo absoluto de la señal de control del esclavo. Al igual que en el caso anterior, y como se mostró en el apartado 4.2, se va a considerar la señal de control real de entrada al esclavo ($\tilde{u}_s(t)$), ver ecuación (4.6), ya que en un sistema teleoperado real la señal de control del esclavo no contemplará la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, de forma que en el punto de equilibrio el motor del esclavo generará una fuerza/par que se opondrá a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno.

4.4.1 Influencia de los polos del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Se va a analizar la influencia de los polos del esclavo en la respuesta del sistema teleoperado. Para ello se han fijado los polos del error en la posición -11 del plano s y se han ido variando los polos del esclavo desde la posición -1 hasta la posición -21 del plano s . Para cada configuración de polos se han diseñado los reguladores y se ha simulado el sistema teleoperado con retardos.

En la Figura 4.32(a) se muestra el valor final de la respuesta del sistema, es decir, la posición final del maestro y del esclavo, que coinciden, en función de la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n del polinomio característico del esclavo. Como se puede observar, la posición final del sistema decrece exponencialmente al aumentar la ω_n del esclavo. Es decir, conforme se alejan los polos del origen, el valor final de la posición cada vez es menor, ver Figura 4.32(b).

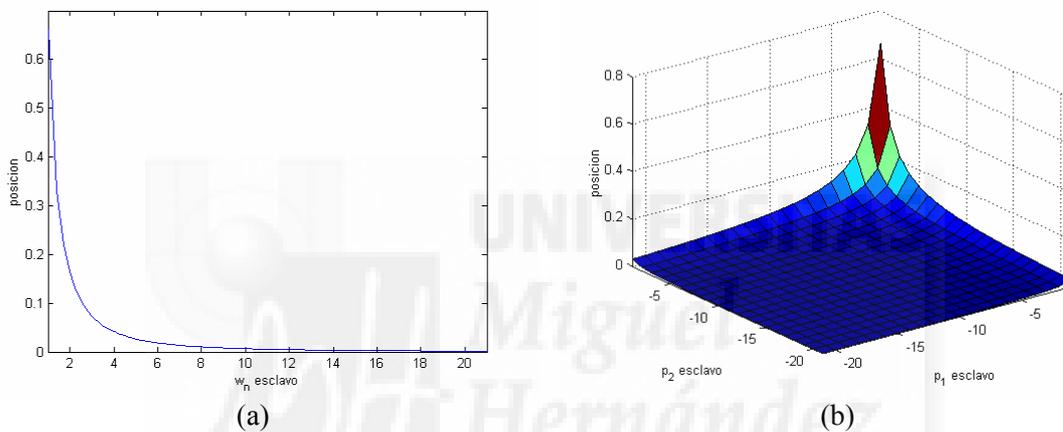


Figura 4.32. (a) Posición final del maestro y del esclavo en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del esclavo; (b) Posición final del maestro y del esclavo en función de la ubicación de los polos del esclavo.

En la Figura 4.33(a) puede apreciarse como la velocidad máxima del maestro (parte superior) y la velocidad máxima del esclavo (parte inferior) decrecen exponencialmente al aumentar la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n del polinomio característico del esclavo. Hay que resaltar que ambas gráficas muestran una tendencia de la velocidad máxima del maestro y del esclavo en función de la ω_n del esclavo, ya que, como puede observarse, existen casos en los que, a pesar de aumentar el valor de la ω_n del esclavo, no disminuye la velocidad máxima del maestro o la velocidad máxima del esclavo. En la Figura 4.33(b) puede comprobarse la disminución de la velocidad máxima del maestro conforme los polos del esclavo se alejan del origen.

Si se analiza el tiempo de establecimiento (t_s) de la respuesta del maestro y del esclavo, se puede comprobar, ver Figura 4.34(a), que el tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) disminuyen exponencialmente conforme aumenta la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n del polinomio característico del esclavo. Al igual que ocurría en las gráficas mostradas en la Figura 4.33, estas gráficas muestran una tendencia, en este caso, del t_s del maestro y del esclavo en función de la ω_n del esclavo, ya que, como puede apreciarse, en ocasiones, a pesar de aumentar el

valor de la ω_n del esclavo, no disminuye el t_s del maestro o el t_s del esclavo. Si se observa la evolución del tiempo de establecimiento del maestro en función de la ubicación de los polos del esclavo, Figura 4.34(b), puede observarse que a medida que se acercan los polos al origen t_s es cada vez mayor.

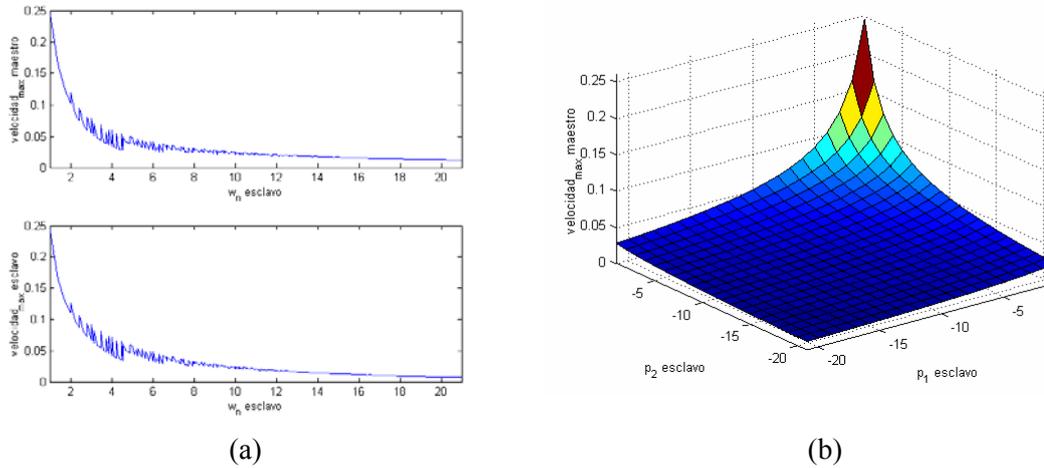


Figura 4.33. (a) Velocidad máxima del maestro (parte superior) y velocidad máxima del esclavo (parte inferior) en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del esclavo; (b) Velocidad máxima del maestro en función de la ubicación de los polos del esclavo.

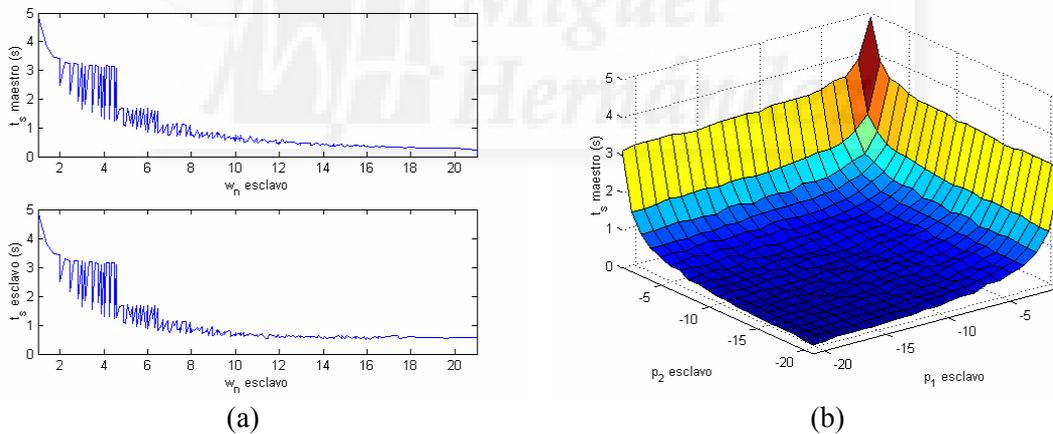


Figura 4.34. (a) Tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del esclavo; (b) Tiempo de establecimiento del maestro en función de la ubicación de los polos del esclavo.

Si se compara el tiempo de convergencia entre la respuesta del maestro y del esclavo, puede observarse en la Figura 4.35(a) que a medida que aumenta el valor de la ω_n del esclavo, disminuye el tiempo de convergencia. En la Figura 4.35(b) se puede observar la disminución del tiempo de convergencia conforme se alejan los polos del esclavo del origen.

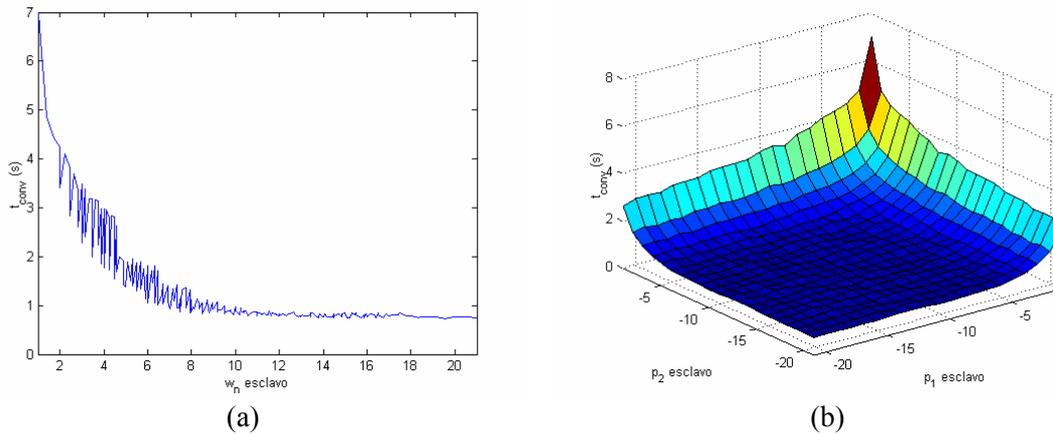


Figura 4.35. (a) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del esclavo; (b) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la ubicación de los polos del esclavo.

Se va a analizar la señal de control del maestro en función de la ubicación de los polos del polinomio característico del esclavo. En la Figura 4.36(a) se muestra el valor absoluto máximo de la señal de control del maestro en función de la frecuencia natural no amortiguada ω_n del polinomio característico del esclavo. Como puede observarse, el valor máximo de la señal de control se alcanza cuando ω_n es 1, es decir, cuando los dos polos del esclavo se sitúan en la posición -1. Este hecho se debe a que en ese caso la posición final que alcanza el maestro y el esclavo es la mayor de todos los casos, como puede observarse en la Figura 4.32(a), por lo que es lógico que se necesite la mayor señal de control. Para el resto de valores de ω_n se puede apreciar que el valor máximo de la señal de control permanece constante hasta $\omega_n = 11$. A partir de este valor, a medida que aumenta ω_n , el valor máximo de la señal de control se va incrementando. Esto se debe a que, como puede apreciarse en la Figura 4.34(a), al aumentar ω_n el sistema es cada vez más rápido, ya que disminuye el tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo, por lo que es necesario cada vez mayor señal de control. En la Figura 4.36(b) se muestra el valor máximo de la señal de control del maestro en función de la ubicación de polos del esclavo. En esta figura se puede observar que, a excepción del caso en el que los polos se sitúan en -1, el valor máximo de la señal de control es similar en todos los casos.

Se va a realizar un análisis de la señal de control del esclavo en función del polinomio característico del esclavo. En la Figura 4.37(a) se puede observar como a medida que aumenta el valor de la frecuencia natural no amortiguada ω_n del polinomio característico del esclavo, disminuye exponencialmente el valor absoluto máximo que alcanza la señal de control del esclavo. Es decir, a medida que los polos del esclavo se alejan del origen, disminuye el valor máximo de la señal de control, ver Figura 4.37(b). Si se compara la evolución de la señal de control máxima del esclavo en función de ω_n con la evolución de la posición final del maestro y del esclavo, Figura 4.32, se puede apreciar que en ambos casos la disminución conforme aumenta ω_n es exponencial, por lo que conforme mayor es ω_n , menor es la posición final alcanzada y por tanto menor es la señal de control del esclavo requerida para alcanzarla.

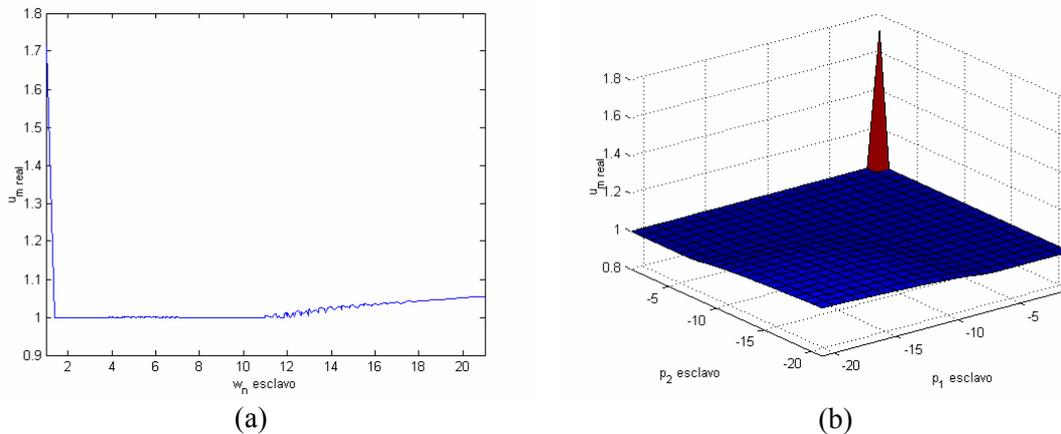


Figura 4.36. (a) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del esclavo; (b) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del esclavo.

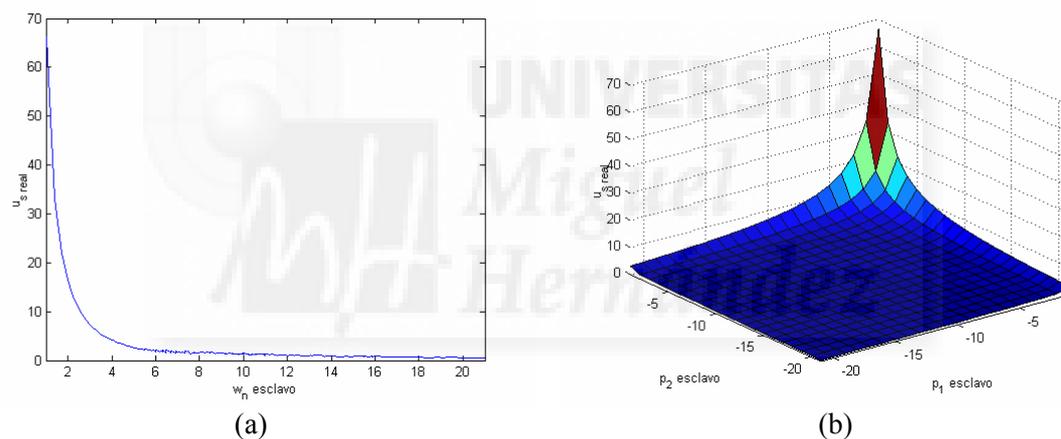


Figura 4.37. (a) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del esclavo; (b) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del esclavo.

Se va a mostrar el comportamiento dinámico del sistema teleoperado I para dos ubicaciones distintas de los polos del polinomio característico del esclavo. En la Figura 4.38 se muestra el comportamiento del sistema cuando se ubican los dos polos del esclavo en la posición -11 ($\omega_n=11$). En (a) y (b) puede observarse respectivamente la posición y la velocidad del maestro y del esclavo. Por otra parte en (c) y en (d) se representa la señal de control real de entrada al maestro y al esclavo respectivamente. Por otra parte en la Figura 4.39 se puede apreciar el comportamiento del sistema cuando se ubican los dos polos del esclavo en la posición -21 ($\omega_n=21$).

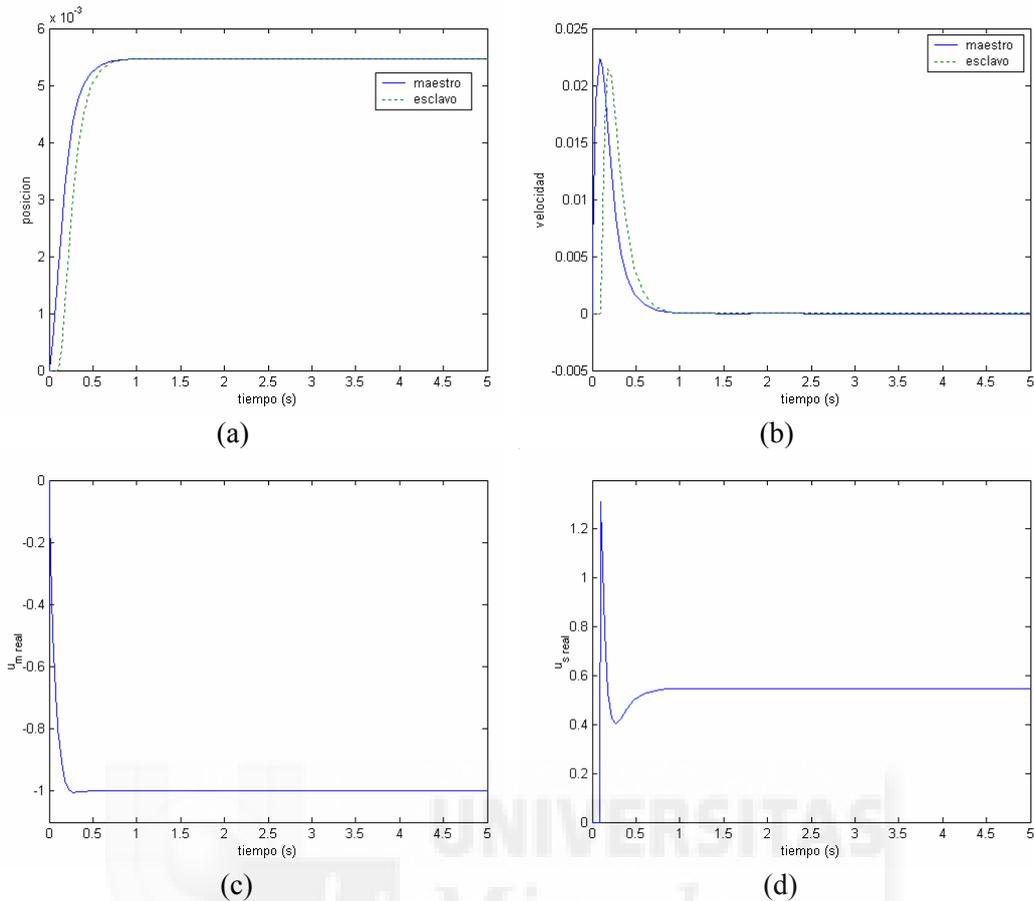


Figura 4.38. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo se sitúan en la posición -11. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($\dot{x}_{s1}(t)$) y del esclavo ($\dot{x}_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Si se comparan la Figura 4.38 y la Figura 4.39 se puede apreciar que cuando los polos se encuentran más alejados del origen, la posición del maestro y del esclavo final disminuye, así como la velocidad máxima alcanzada por el maestro y por el esclavo. Por otra parte, la señal de control máxima del maestro es superior cuando los polos se encuentran más alejados del origen, mientras que la señal de control del esclavo máxima es menor.

A partir de las distintas pruebas realizadas, se puede concluir que, en general, los polos del polinomio característico del esclavo afectan al comportamiento dinámico del sistema teleoperado del siguiente modo:

- La posición final del sistema decrece exponencialmente al aumentar la ω_n del esclavo, es decir, al alejar los polos del origen.
- La velocidad máxima del maestro y la del esclavo decrecen exponencialmente al aumentar la ω_n del esclavo, o sea conforme los polos del esclavo se alejan del origen.
- El tiempo de establecimiento (t_s) de la respuesta del maestro y del esclavo disminuyen exponencialmente conforme aumenta la ω_n del esclavo, es decir, a medida que se alejan los polos del origen.

- El tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo disminuye a medida que aumenta el valor de ω_n , es decir, al alejar los polos del origen.
- El valor absoluto máximo de la señal de control del maestro se incrementa a medida que aumenta ω_n , o sea, al alejar los polos del esclavo del origen.
- El valor absoluto máximo de la señal de control del esclavo disminuye exponencialmente conforme crece ω_n , es decir, conforme los polos se sitúan más alejados del origen.

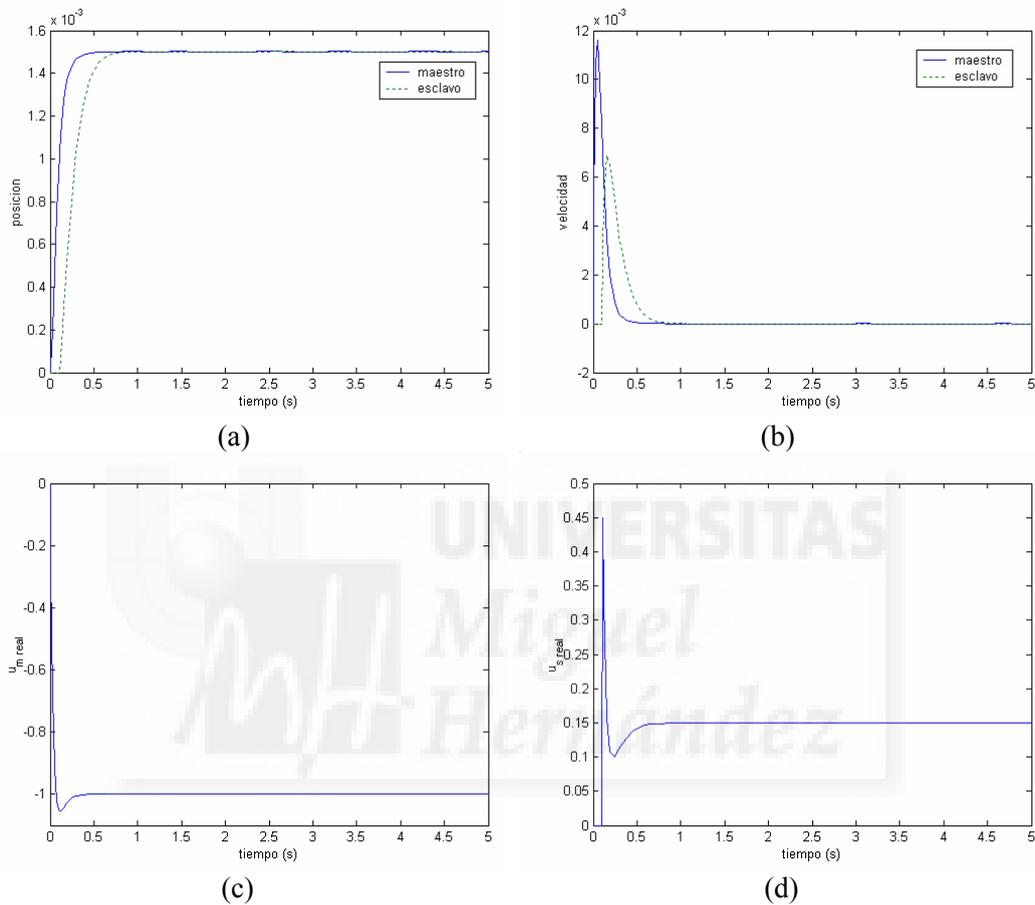


Figura 4.39. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo se sitúan en la posición -21 . (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{s1}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

4.4.2 Influencia de los polos del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Tras analizar la influencia de los polos del esclavo en la respuesta del sistema teleoperado, se va a estudiar en este epígrafe la dependencia del comportamiento del sistema teleoperado de la ubicación de los polos del error elegida. Para ello se han fijado, en este caso, los polos del esclavo en la posición -11 del plano s y se han ido variando los polos del error desde la posición -1 hasta la posición -21 del plano s . Para cada configuración de polos se han diseñado los reguladores y se ha simulado el sistema teleoperado con retardos.

El primer aspecto que hay que destacar del estudio efectuado es que para todas las ubicaciones de polos del error elegidas se ha obtenido la misma posición final del maestro y del esclavo: $5.473 \cdot 10^{-3}$. Es decir, la elección que se realice de polos del error no influye en el valor final de la respuesta del sistema teleoperado. Del mismo modo, tampoco depende el valor máximo de la velocidad del maestro del polinomio característico del error seleccionado, obteniendo para todas las combinaciones de polos del error el mismo valor: 0.022368. Sin embargo, la velocidad máxima del esclavo sí depende del polinomio característico del error elegido. En la Figura 4.40(a) puede apreciarse como la velocidad máxima del esclavo aumenta exponencialmente al aumentar la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n del polinomio característico del error. Es decir, conforme los polos del error se alejan del origen aumenta la velocidad máxima del esclavo, como puede observarse en Figura 4.40(b). Hay que indicar que, como ocurría en el epígrafe anterior, la gráfica de la Figura 4.40(a) muestra una tendencia de la velocidad máxima del esclavo, en este caso, en función de la ω_n del error, ya que, como puede observarse, en ocasiones, a pesar de aumentar el valor de la ω_n del error, no aumenta la velocidad máxima del esclavo.

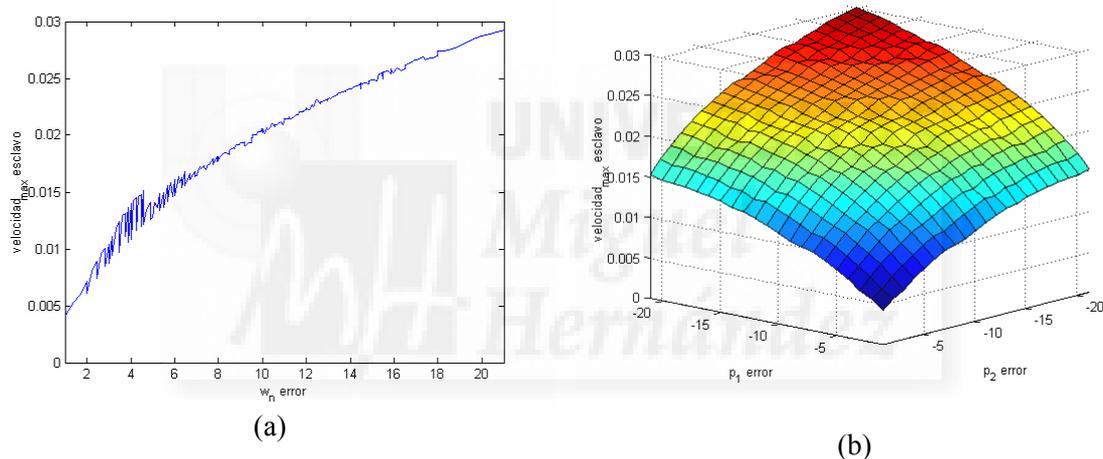


Figura 4.40. (a) Velocidad máxima del esclavo en función de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del error; (b) Velocidad máxima del esclavo en función de la ubicación de los polos del error.

Si se analiza el tiempo de establecimiento (t_s) de la respuesta del maestro y del esclavo, se puede comprobar, ver Figura 4.41(a), que el tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) disminuyen conforme aumenta la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n del polinomio característico del error. Se puede observar que la disminución del tiempo de establecimiento del maestro es lineal (sin considerar $\omega_n = 1$), mientras que para el esclavo la disminución es exponencial. Si se observa la evolución del tiempo de establecimiento del esclavo en función de la ubicación de los polos del error, Figura 4.41(b), puede observarse que a medida que se acercan los polos al origen t_s es cada vez mayor.

Si se compara el tiempo de convergencia entre la respuesta del maestro y del esclavo, puede observarse en la Figura 4.42(a) que el tiempo de convergencia disminuye exponencialmente a medida que aumenta el valor de ω_n del error. Es decir, como puede

comprobarse en la Figura 4.42(b), conforme se alejan los polos del origen, el tiempo de convergencia es menor.

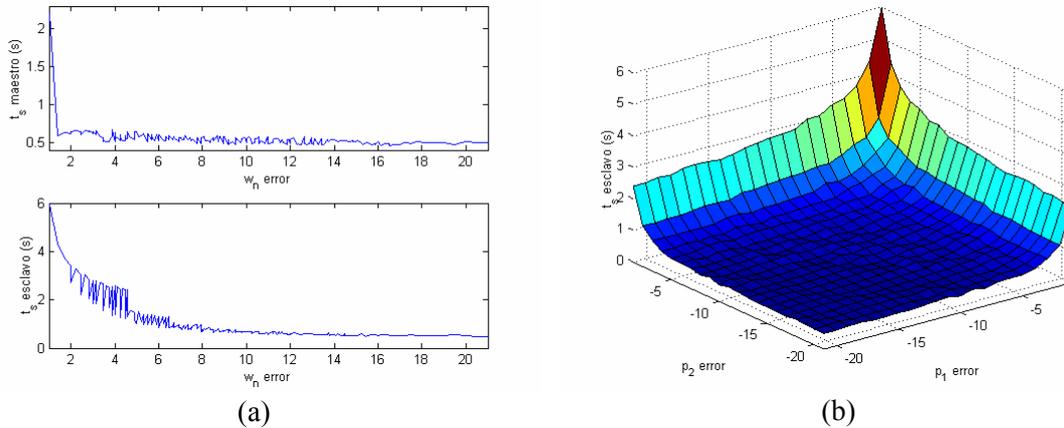


Figura 4.41. (a) Tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) Tiempo de establecimiento del esclavo en función de la ubicación de los polos del error.

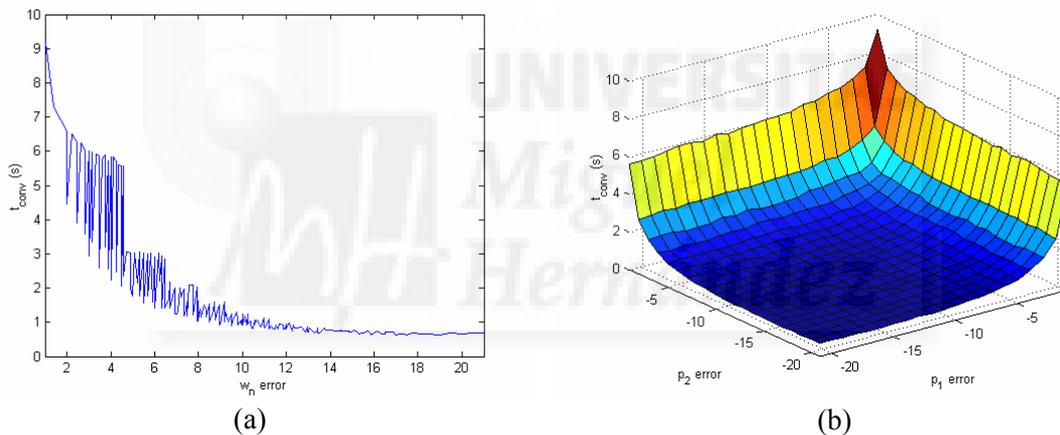


Figura 4.42. (a) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la ubicación de los polos del error.

Se va a analizar la señal de control real del maestro en función de la ubicación de los polos del polinomio característico del error. Puede observarse en la Figura 4.43(a) que el valor absoluto máximo de la señal de control del maestro disminuye ligeramente a medida que aumenta la frecuencia natural no amortiguada ω_n del polinomio característico del error. En la Figura 4.43 (b) se muestra el valor máximo de la señal de control del maestro en función de la ubicación de polos del error. Como puede comprobarse, dicho valor se reduce conforme se alejan los polos del error del origen.

Si se analiza la señal de control del esclavo en función del polinomio característico del error, puede observarse, Figura 4.44(a), como, a medida que aumenta el valor de la frecuencia natural no amortiguada ω_n del error, aumenta linealmente el valor absoluto máximo que alcanza la señal de control del esclavo. Es decir, a medida que los polos del

error se alejan del origen, se incrementa el valor máximo de la señal de control del esclavo, ver Figura 4.44(b).

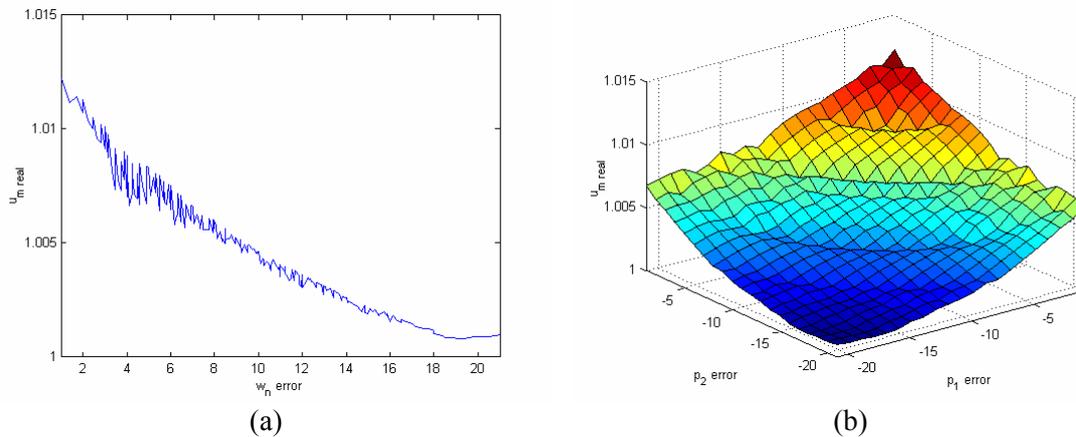


Figura 4.43. (a) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del error.

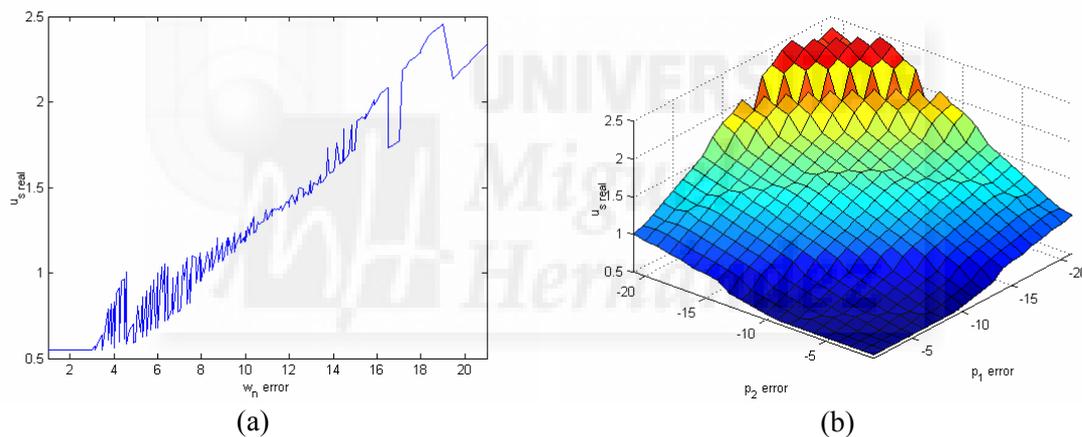


Figura 4.44. (a) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del error.

En la Figura 4.38 del epígrafe anterior se mostró el comportamiento del sistema teleoperado I cuando tanto los polos del error como los del esclavo se situaban en la posición -11 ($\omega_n=11$). A continuación se muestra, en la Figura 4.45 el comportamiento del sistema cuando los polos del error se ubican en la posición -21 ($\omega_n=21$). En (a) y (b) puede observarse respectivamente la posición y la velocidad del maestro y del esclavo. Por otra parte en (c) y en (d) se representa la señal de control real de entrada al maestro y al esclavo respectivamente. Si se comparan la Figura 4.38 y la Figura 4.45 se puede apreciar que en ambos casos la posición final del maestro y del esclavo es la misma, así como la velocidad máxima del maestro. Cuando los polos se encuentran más alejados del origen la velocidad máxima alcanzada por el esclavo es mayor, y el tiempo de convergencia y de establecimiento del esclavo es menor. El valor máximo de la señal de control del maestro es similar en ambos casos, así como el tiempo de establecimiento de la respuesta del maestro.

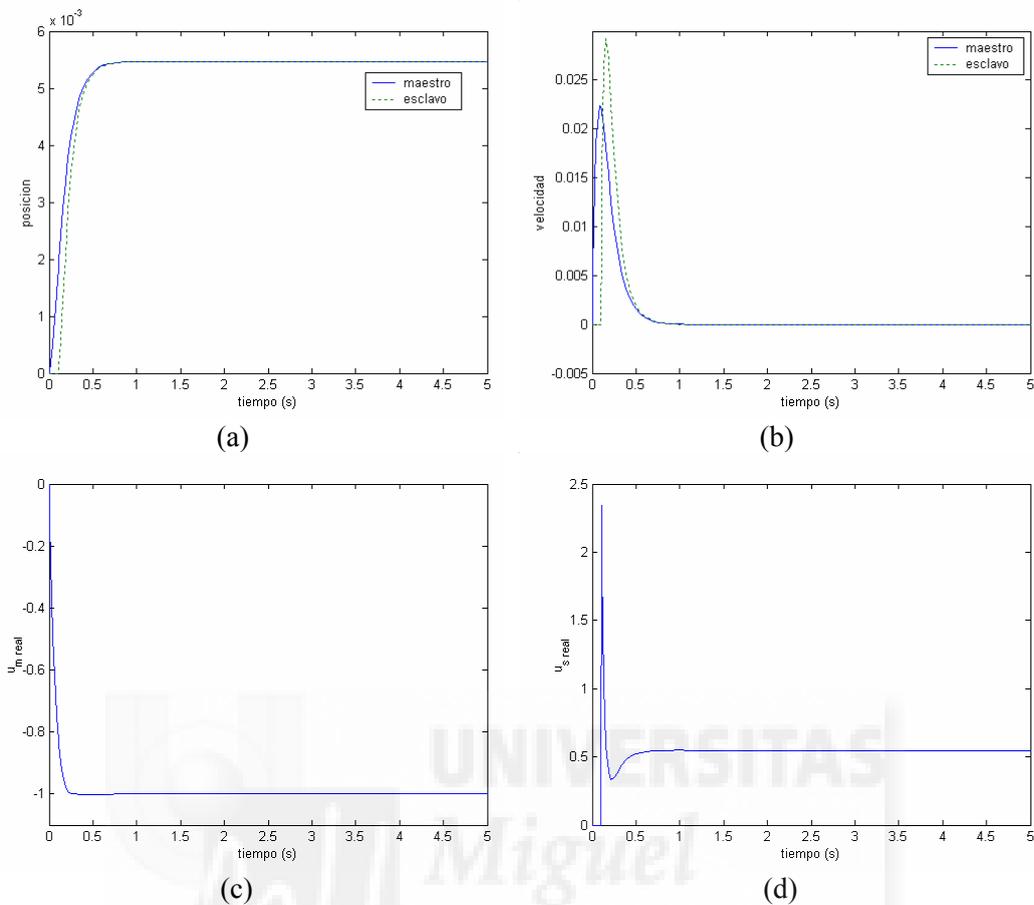


Figura 4.45. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del error se sitúan en la posición -21 . (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{s1}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Del análisis efectuado en este epígrafe, se puede concluir que, en general, los polos del polinomio característico del error influyen en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado del siguiente modo:

- La posición final del sistema y la velocidad máxima del maestro no depende de la ubicación de los polos del error.
- La velocidad máxima del esclavo se incrementa al aumentar la ω_n del error, o sea conforme los polos del error se alejan del origen.
- El tiempo de establecimiento (t_s) de la respuesta del maestro y del esclavo disminuyen conforme aumenta la ω_n del error, es decir, a medida que se alejan los polos del origen. La disminución del tiempo de establecimiento del maestro es lineal, mientras que para el esclavo la disminución es exponencial.
- El tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo disminuye exponencialmente a medida que aumenta el valor de ω_n , es decir, al alejar los polos del origen.

- El valor absoluto máximo de la señal de control del maestro disminuye ligeramente a medida que aumenta ω_n , o sea, al alejar los polos del esclavo del origen.
- El valor absoluto máximo de la señal de control del esclavo aumenta linealmente conforme crece ω_n , es decir, conforme los polos se sitúan más alejados del origen.

4.4.3 Influencia conjunta de los polos del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Se ha analizado por separado la dependencia del comportamiento dinámico del sistema teleoperado de la ubicación de polos del esclavo y del error elegida. En este epígrafe se va a indicar cuál es la influencia conjunta del polinomio característico del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado considerando los resultados presentados en los dos epígrafes anteriores.

En primer lugar se van a analizar cada uno de los parámetros estudiados anteriormente (posición final del sistema, velocidad máxima del maestro y del esclavo...) en función de la dinámica seleccionada del esclavo y del error:

- La posición final del sistema disminuye exponencialmente conforme aumenta la ω_n del esclavo, no influyendo la ubicación de los polos del error elegida.
- Al igual que la posición final del sistema, la velocidad máxima del maestro disminuye exponencialmente conforme aumenta la ω_n del esclavo, no influyendo la ubicación de los polos del error elegida.
- La velocidad máxima del esclavo disminuye exponencialmente al aumentar la ω_n del esclavo y se incrementa al aumentar ω_n del error.
- El tiempo de establecimiento (t_s) del maestro depende en mayor medida de la ω_n del esclavo, disminuyendo exponencialmente al alejar los polos del esclavo. Al aumentar la ω_n del error también disminuye, pero linealmente y en menor orden.
- El tiempo de establecimiento (t_s) del esclavo depende de igual modo del polinomio característico del esclavo y del error, disminuyendo exponencialmente en ambos casos al aumentar ω_n .
- El tiempo de convergencia disminuye exponencialmente, y de la misma forma, al aumentar el valor de la ω_n del esclavo y del error.
- El valor máximo de la señal de control del maestro no es influida en gran medida por la dinámica del esclavo y del error seleccionada. Al incrementar la ω_n del esclavo aumenta linealmente, mientras que si se incrementa la ω_n del error disminuye linealmente.
- El valor máximo de la señal de control del esclavo depende tanto de los polos del esclavo como de los polos del error, aunque en mayor grado es influenciado por la dinámica del esclavo. Disminuye exponencialmente al aumentar la ω_n del esclavo, mientras que aumenta linealmente conforme crece la ω_n del error.

Por lo tanto, el polinomio característico del esclavo influye en todos los parámetros del sistema, y el polinomio característico del error afecta a todos los parámetros, salvo a la posición del sistema y a la velocidad máxima del maestro. En la Tabla 4.12 se resume de forma cualitativa la influencia de la ω_n del esclavo y del error en cada uno de los parámetros que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema teleoperado. En

dicha tabla ‘↑’ representa un aumento lineal, ‘↓↓’ representa una disminución exponencial, ‘≈’ indica que el parámetro no es influido en gran medida, y ‘=’ indica que el parámetro no varía.

	pos _{final}	vel _{máx} maestro	vel _{máx} esclavo	t _s maestro	t _s esclavo	t _{converg}	$ \tilde{u}_m(t) _{\max}$	$ \tilde{u}_s(t) _{\max}$
ω_n esclavo ↑	↓↓	↓↓	↓↓	↓↓	↓↓	↓↓	≈	↓↓
ω_n error ↑	=	=	↑	≈	↓↓	↓↓	≈	↑

Tabla 4.12. Influencia de los polos del esclavo y del error en los parámetros que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.

A la hora de realizar el diseño del sistema teleoperado con retardos interesará alejar los polos del esclavo y del error del origen para que la respuesta del sistema sea lo más rápida posible y se produzca en menor tiempo la convergencia entre el maestro y el esclavo. Sin embargo, aunque al alejar los polos de esclavo disminuye el valor máximo de la señal de control del esclavo, es de destacar que, para una ubicación de polos del esclavo seleccionada, al alejar los polos del error, la señal de control del esclavo aumenta. Por lo tanto será necesario llegar a un compromiso entre tiempo de convergencia y valor máximo de la señal de control del esclavo a la hora de establecer la ubicación de los polos del error.

En la Figura 4.46 se muestra la posición y señal de control del esclavo del sistema teleoperado I cuando se sitúan todos los polos en la posición -5 del plano s , mientras que en la Figura 4.47 se muestra la posición y señal de control del esclavo del sistema teleoperado I cuando se ubican en la posición -18. Como puede observarse el maestro y el esclavo convergen más rápido cuando tanto los polos del error como los del esclavo se sitúan en -18, siendo además menor la señal de control del esclavo empleada.

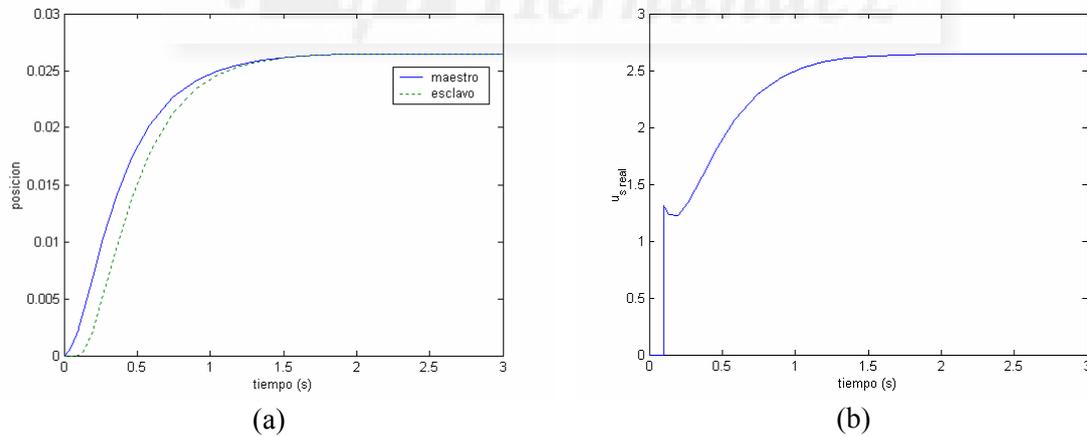


Figura 4.46. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -5. (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

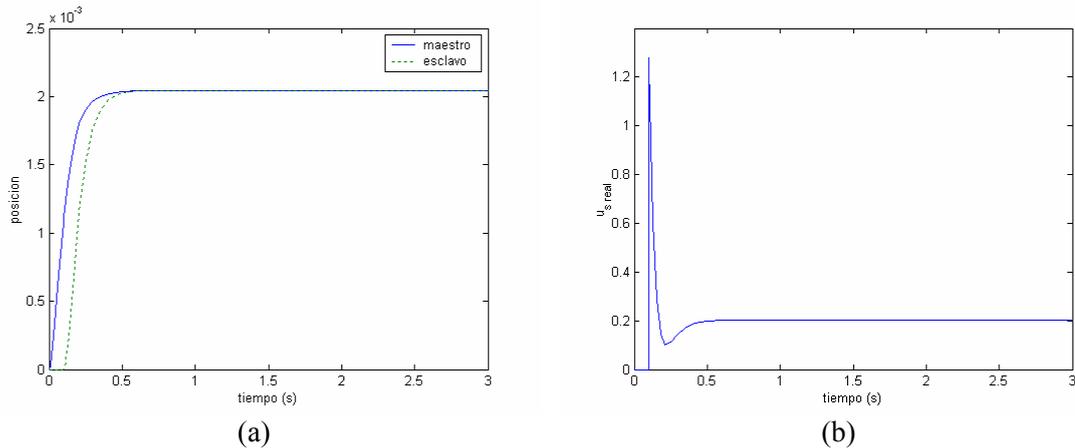


Figura 4.47. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -18 . (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

4.5 Robustez del método de control a variaciones de los parámetros de diseño del sistema teleoperado

Como se explicó en el apartado 3.3 del capítulo 3, el método de diseño de sistemas de control teleoperado con retardos, necesita conocer un modelo del maestro, del esclavo y del entorno con el que interacciona el esclavo, además del retardo existente en la comunicación, para solucionar el sistema de ecuaciones que permite obtener el valor de todos los reguladores. Los parámetros que utiliza, por tanto, el método de diseño son, sin considerar el polinomio deseado del esclavo y del error:

- Retardo en la comunicación: T .
- Modelo del entorno: k_e (rigidez) y b_e (rozamiento viscoso).
- Modelo del maestro: J_m (inercia) y b_m (rozamiento viscoso).
- Modelo del esclavo: J_s (inercia) y b_s (rozamiento viscoso).

A la hora de realizar el control de un sistema teleoperado real, como es natural, es necesario conocer estos parámetros de la forma más precisa para que, cuando se utilicen los reguladores obtenidos por el método de diseño, se obtenga un comportamiento satisfactorio en el sistema real. Sin embargo, en muchas ocasiones no es posible obtener parámetros totalmente equivalentes a los del sistema real. Por ejemplo, se puede realizar una estimación *a priori* del retardo existente en la comunicación entre el maestro y el esclavo, utilizar dicha aproximación para obtener los valores de los reguladores, y posteriormente al aplicar el control del sistema real, es posible que el retardo existente no corresponda al estimado.

En este apartado se va a analizar la robustez del método de diseño a ligeras variaciones de los parámetros de diseño. Es decir, se va a estudiar la dependencia del comportamiento del sistema teleoperado de los parámetros de diseño. Ante la dificultad de realizar un análisis algebraico que conduzca a un resultado genérico sobre la dependencia del comportamiento de los sistemas teleoperados de los parámetros, se va a efectuar un

análisis numérico para un sistema teleoperado concreto. El sistema que se va a utilizar para el estudio es el sistema teleoperado I, cuyos parámetros se mostraron en la Tabla 4.1, asumiendo que tanto los polos del esclavo como los del error se ubican en -11 .

4.5.1 Influencia del retardo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Para analizar la dependencia del comportamiento dinámico del sistema teleoperado del tiempo de retardo existente en la comunicación se va a diseñar el control del sistema teleoperado I considerando que el esclavo interacciona con un entorno rígido, ver Tabla 4.2, y que el retardo estimado en la comunicación es de 0.5 s. Utilizando los reguladores obtenidos mediante el procedimiento de diseño, ver Tabla 4.3, se va a estudiar el comportamiento del sistema teleoperado si el retardo varía ligeramente. Para ello se va a suponer que el retardo varía desde 0.1 s hasta 1 s, simulando el sistema teleoperado con retardos en cada caso.

El primer aspecto que se deriva es que, para todos los retardos considerados, la posición final del sistema (posición del maestro y del esclavo) es la misma, así como la velocidad máxima del maestro. La velocidad máxima del esclavo apenas sufre variación para los distintos retardos.

Si se analiza el tiempo de establecimiento (t_s) del maestro, Figura 4.48(a), puede observarse que para valores menores al utilizado en el diseño ($T=0.5$ s), varía sin seguir una tendencia establecida, mientras que para valores mayores de retardo, permanece constante. Por el contrario, el tiempo de establecimiento (t_s) del esclavo, Figura 4.48(b), aumenta conforme aumenta el retardo existente en la comunicación.

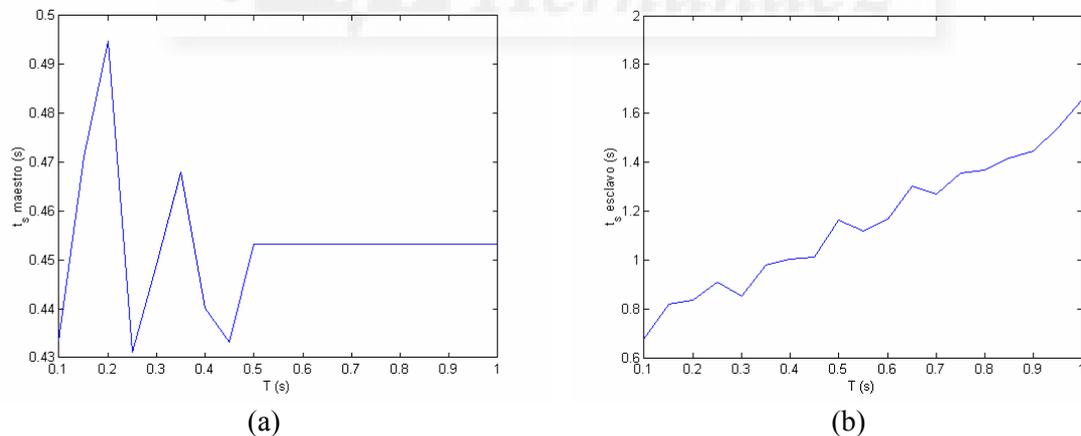


Figura 4.48. Tiempo de establecimiento del maestro (a) y del esclavo (b) en función del retardo existente en la comunicación.

En la Figura 4.49 se muestra la influencia del tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo del retardo existente en la comunicación. Como puede observarse en dicha figura, el retardo afecta de forma significativa al tiempo de convergencia, de forma que, para retardos superiores al utilizado para el diseño, se incrementa a medida que crece el retardo.

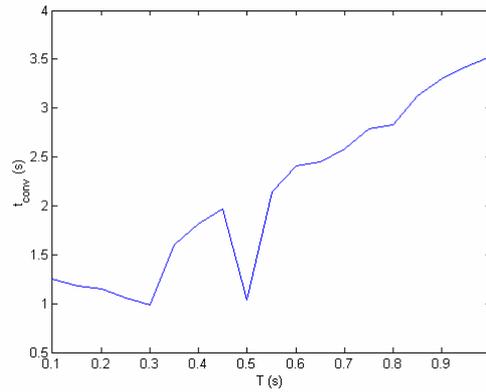


Figura 4.49. Tiempo de convergencia en función del retardo existente en la comunicación.

Estudiando las señales de control del sistema teleoperado, se puede comprobar que el valor máximo de la señal de control real del maestro permanece prácticamente constante para los distintos retardos considerados. Sin embargo, el valor máximo de la señal de control real del esclavo sí sufre una variación en función del retardo considerado, como puede apreciarse en la Figura 4.50.

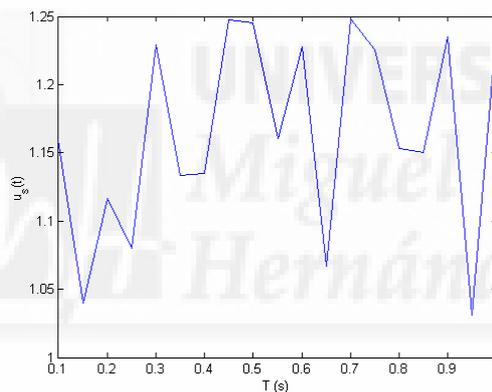


Figura 4.50. Valor máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función del retardo existente en la comunicación.

A la vista de los resultados obtenidos, se puede indicar que una variación en el retardo existente en la comunicación afecta en mayor grado al tiempo de establecimiento del esclavo y al tiempo de convergencia, así como al valor máximo de la señal de control del esclavo, pero en todos los casos, el esclavo sigue al maestro y ambos alcanzan la misma posición final. Por lo tanto se puede concluir que el método de diseño es robusto a ligeras variaciones del retardo existente en la comunicación.

A continuación se va a mostrar el comportamiento del sistema teleoperado I considerando dos retardos distintos en la comunicación. En la Figura 4.51 se muestra la posición final del sistema y la señal de control real del esclavo cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 s, mientras que en la Figura 4.52 se muestra la posición final y la señal de control real del esclavo si el retardo es de 1 s. Como puede observarse en ambas figuras, el esquema de control consigue que el esclavo siga al maestro. Cuando el retardo es menor, la convergencia entre el maestro y el esclavo se alcanza en aproximadamente 1.25 s, mientras que si el retardo es de 1 s, convergen en

aproximadamente 2.5 s. En ambos casos las señales de control del esclavo, como puede apreciarse, son similares.

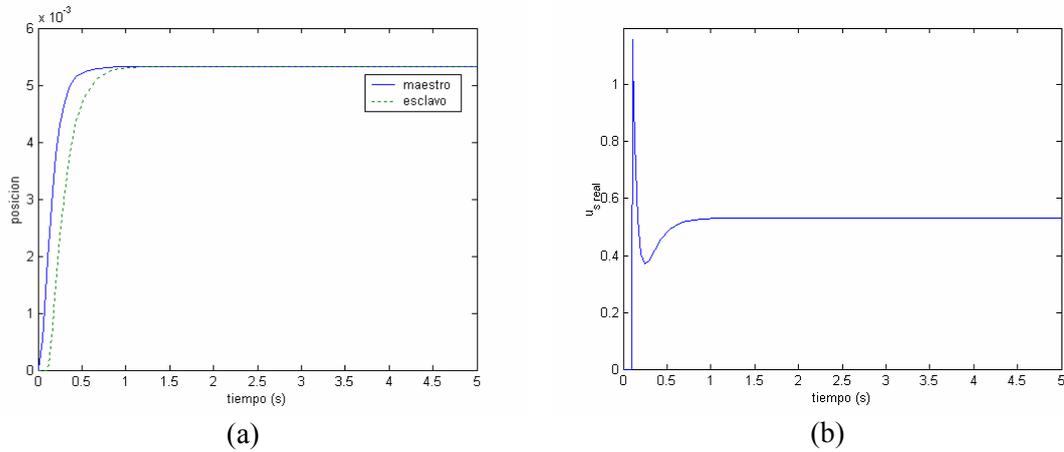


Figura 4.51. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

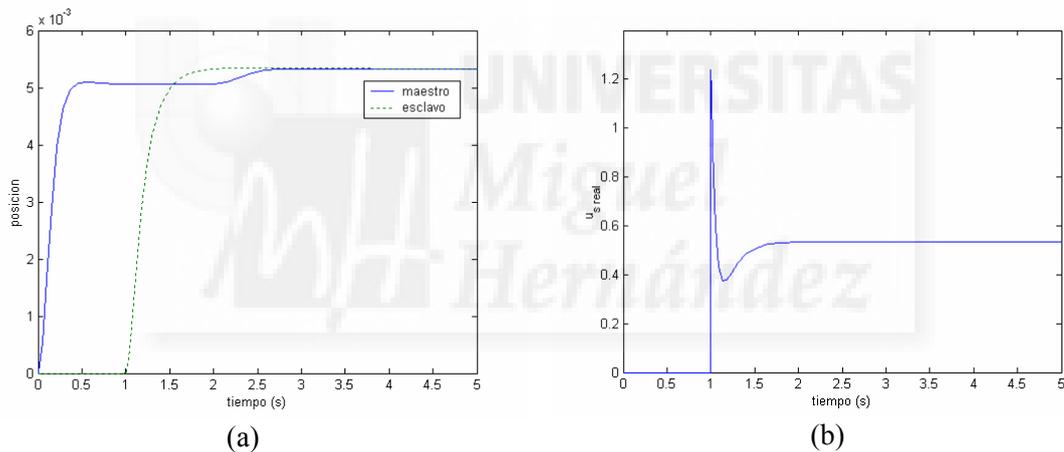


Figura 4.52. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando el retardo en la comunicación es de 1 s. (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

4.5.2 Influencia del entorno en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

En este epígrafe se va a analizar la dependencia del comportamiento del sistema teleoperado del entorno con el que interactúa el esclavo. Para efectuar este análisis se va a utilizar el sistema teleoperado I con los valores de los reguladores obtenidos considerando que el esclavo interactúa con un entorno rígido, y que el retardo estimado en la comunicación es de 0.1 s, ver Tabla 4.2. Los reguladores calculados se van a utilizar para distintas configuraciones de entorno. Como se explicó en el apartado 3.2.2 del capítulo 3, el entorno ha sido modelado mediante una constante de rigidez (k_e) y un coeficiente de rozamiento viscoso (b_e). Para efectuar el análisis de la dependencia del sistema teleoperado del entorno considerado, se va a realizar la simplificación de

estudiar únicamente la influencia del parámetro k_e . De este modo, se van a utilizar los reguladores obtenidos considerando $k_e = 100$ Nm/rad, para simular el sistema teleoperado con una rigidez desde $k_e = 80$ Nm/rad hasta $k_e = 120$ Nm/rad, con incrementos unitarios.

El primer aspecto que hay que destacar, es que, a diferencia del retardo, sólo con la configuración utilizada para obtener los valores de los reguladores, es decir, $k_e = 100$ Nm/rad, se consigue eliminar el error entre el maestro y el esclavo de forma completa. Para el resto de casos, a medida que el valor k_e se aleja del valor de diseño considerado, el error entre el maestro y el esclavo va creciendo, como puede observarse en la Figura 4.53(a). En la Figura 4.53(b) se muestra la posición final del maestro y del esclavo en función de la rigidez del entorno. Como puede apreciarse, a medida que aumenta la rigidez aumenta la posición del maestro y disminuye ligeramente la posición del esclavo. La disminución de la posición final del esclavo es lógica, ya que al ser cada vez más rígido el entorno, cada vez el esclavo puede avanzar menos. Para todos los valores de rigidez considerados se ha obtenido la misma velocidad máxima en el maestro (0.022368), así como en el esclavo (0.021464).

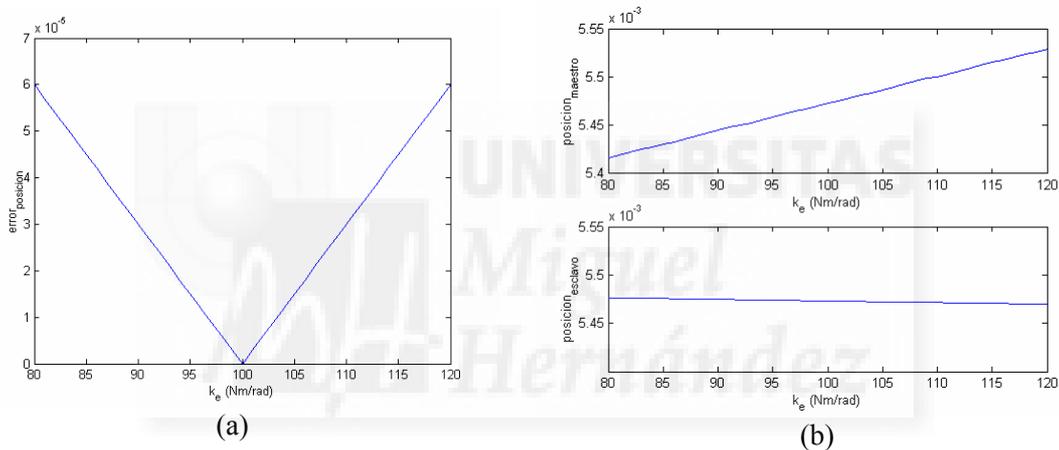


Figura 4.53. (a) Error de posición entre el maestro y el esclavo en función de la constante de rigidez del entorno (k_e); (b) posición del maestro (parte superior) y posición del esclavo (parte inferior).

En cuanto al tiempo de establecimiento (t_s) del maestro y del esclavo se ha comprobado que el tiempo de establecimiento del maestro permanece prácticamente constante para todos los valores de rigidez, a excepción de los valores más altos, en los que el tiempo de establecimiento sufre un aumento, como puede observarse en la Figura 4.54. Por el contrario el tiempo de establecimiento del esclavo apenas sufre variación para los distintos valores de rigidez considerados.

Analizando las señales de control real del maestro y del esclavo se ha comprobado que el valor máximo de la señal de control del maestro apenas sufre variación, mientras que el valor máximo de la señal de control del esclavo siempre es el mismo.

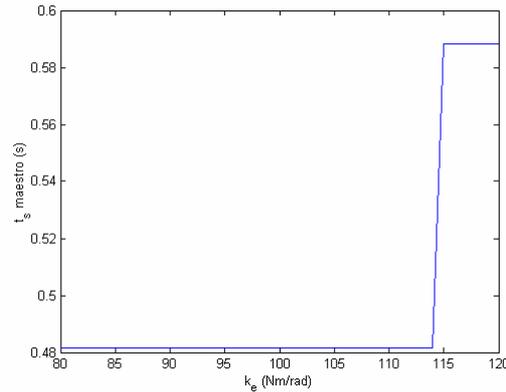


Figura 4.54. Tiempo de establecimiento del maestro en función de la constante de rigidez del entorno (k_e).

En la Figura 4.55 se muestra la posición del maestro y del esclavo para dos entornos de diferente rigidez. Como puede apreciarse, en ambos casos el error entre el maestro y el esclavo no se elimina, aunque se mantiene constante y es mínimo (del orden de 10^{-5}). Además puede observarse que cuando la rigidez es mayor la posición alcanzada por el esclavo es menor que la del maestro, mientras que cuando la rigidez es menor, la posición final del esclavo es mayor que la del maestro.

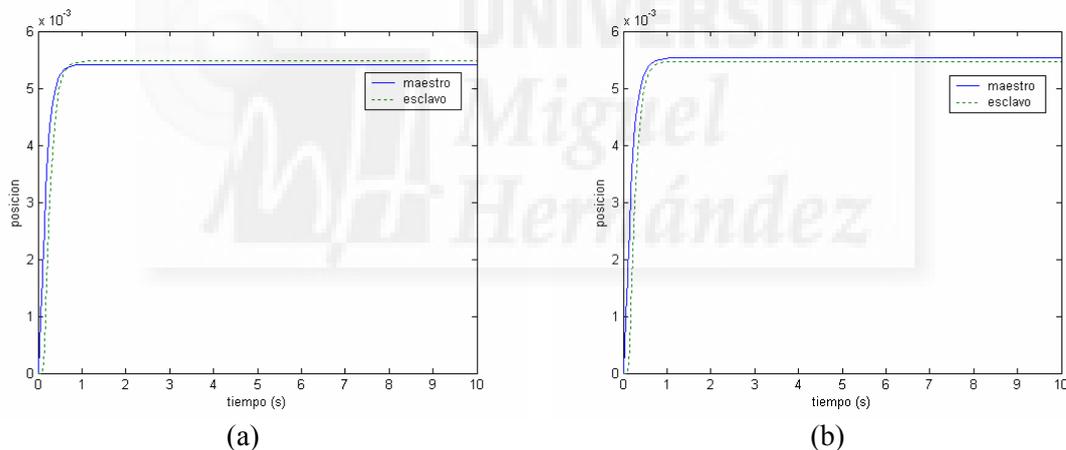


Figura 4.55. Posición del maestro ($x_{m_i}(t)$) y del esclavo ($x_{s_i}(t)$) considerando un entorno de rigidez (a) $k_e = 80$ Nm/rad; (b) $k_e = 120$ Nm/rad.

Por lo tanto, se puede concluir que, a pesar de que únicamente se elimina el error entre el maestro y el esclavo de forma completa cuando la rigidez del entorno coincide con la utilizada en el diseño de los reguladores, el método de diseño es robusto a ligeras variaciones en el entorno, puesto que para distintos valores de entorno, el error es mínimo (del orden de 10^{-5}) y permanece constante, sufriendo apenas variación las respuestas del maestro y del esclavo, así como las señales de control implicadas (el valor máximo de la señal de control real del maestro varía ligeramente, mientras que el valor máximo de la señal de control real del esclavo permanece constante).

4.5.3 Influencia del maestro en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Como se pudo comprobar en el método de diseño, los parámetros que modelan tanto al maestro como al esclavo son utilizados para el cálculo de los reguladores. En este epígrafe va a estudiarse la influencia del modelado del maestro en el comportamiento del sistema teleoperado, dejando para el epígrafe siguiente, la influencia del modelado del esclavo.

En el epígrafe 3.2.1 del capítulo 3 se indicó que el maestro era modelado mediante una inercia (J_m) y un coeficiente de rozamiento viscoso (b_m). Para simplificar el estudio de la influencia del modelo del maestro en el comportamiento del sistema teleoperado, únicamente va a efectuarse el análisis en función de la inercia del maestro. Para este estudio se va a utilizar el sistema teleoperado I, ver Tabla 4.1, considerando que el retardo en la comunicación es de 0.1 s y que el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido, ver Tabla 4.2. Los reguladores obtenidos, Tabla 4.3, se van a utilizar para distintas configuraciones de inercia del maestro. Se va a simular el sistema teleoperado considerando en cada configuración una inercia del maestro distinta. En concreto la inercia irá variando desde $J_m = 1 \text{ kg m}^2$ hasta $J_m = 2 \text{ kg m}^2$. A continuación se van a presentar las principales conclusiones del análisis efectuado.

En todos los casos se ha conseguido que el esclavo siga al maestro independientemente del valor de la inercia del maestro (J_m). Además el valor final de la posición del maestro y del esclavo es la misma, no variando al modificarse el valor de J_m .

En la Figura 4.56 se muestra la velocidad máxima del maestro y del esclavo. Como se puede observar en ambos casos la velocidad máxima sufre una variación. En el caso del maestro la velocidad máxima del maestro disminuye a medida que crece la inercia del maestro, mientras que en el esclavo la velocidad máxima varía, pero no sigue una tendencia definida.

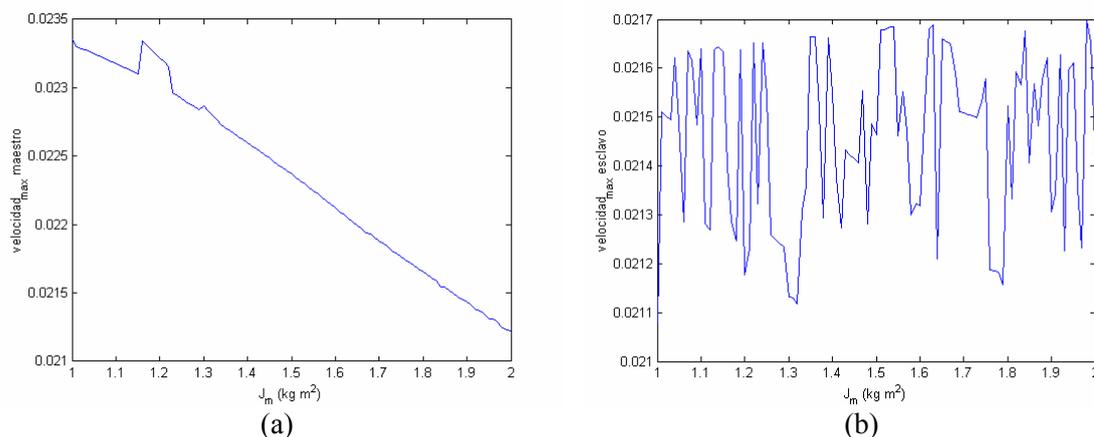


Figura 4.56. Velocidad máxima del maestro (a) y velocidad máxima del esclavo (b) en función de la inercia del maestro.

Si se analiza el tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del maestro (J_m), ver Figura 4.57(a), puede comprobarse que cambian ligeramente en función de J_m . En el caso del maestro puede apreciarse que, en general,

disminuye al aumentar J_m , mientras que el tiempo de establecimiento del esclavo varía de forma aleatoria. En la Figura 4.57(b) se muestra el tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo conforme varía la inercia del maestro. Como puede observarse, al aumentar J_m , se incrementa linealmente el tiempo de convergencia.

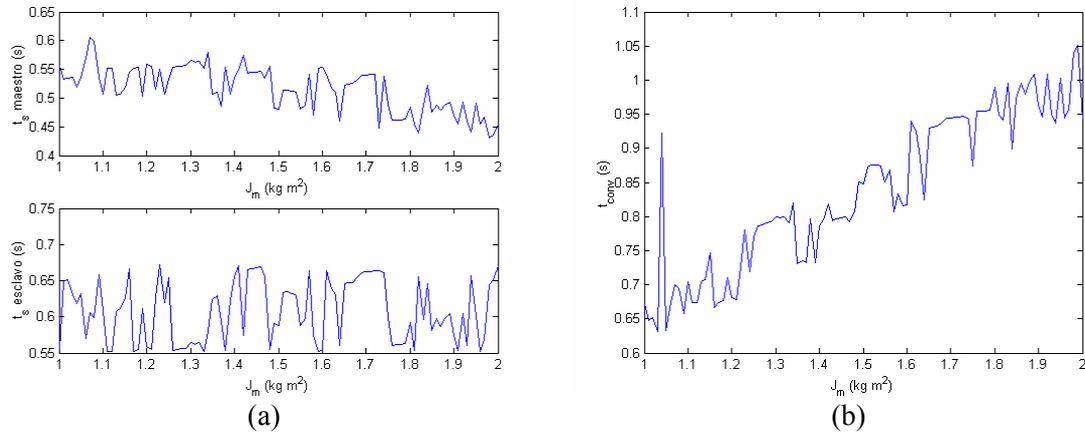


Figura 4.57. (a) Tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del maestro; (b) Tiempo de convergencia en función de la inercia del maestro.

Tanto el valor máximo de la señal de control real del maestro como la del esclavo sufren variación al cambiar la inercia del maestro. En la Figura 4.58(a) se muestra el valor máximo de la señal de control del maestro según J_m . Como puede apreciarse, para valores menores de la inercia considerada para el diseño (1.5 kg m^2), permanece constante, mientras que para valores mayores, crece ligeramente de forma lineal a medida que aumenta J_m . En cuanto al valor máximo de la señal de control del esclavo, Figura 4.58(b), varía al cambiar J_m , pero no sigue una tendencia definida.

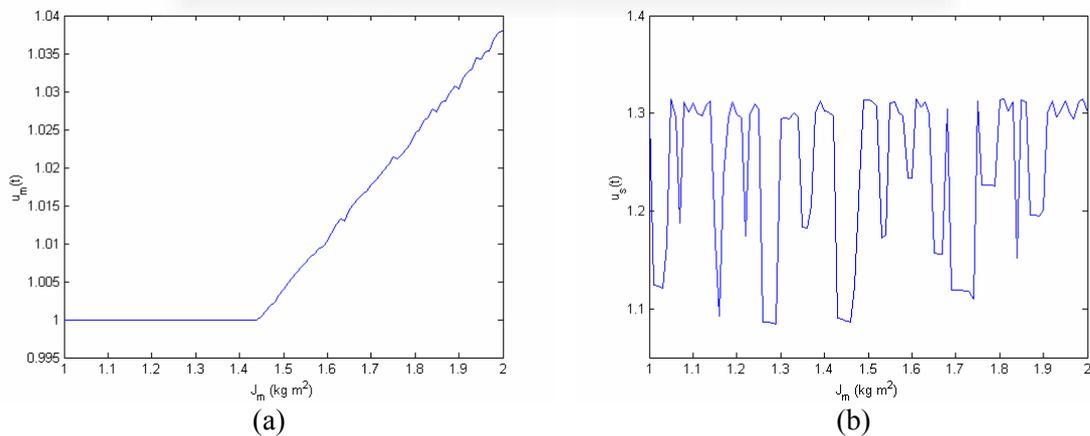


Figura 4.58. Valor máximo de la señal de control real del maestro (a) y del esclavo (b) en función de la inercia del maestro.

De los resultados obtenidos, por tanto, se puede concluir que el método de diseño es robusto a pequeñas variaciones en el modelo del maestro, puesto que, a pesar de que varíen ligeramente determinados parámetros de la respuesta del sistema y de las señales de control en función de la inercia del maestro, en todos los casos ha sido posible

eliminar el error entre el maestro y el esclavo, así como alcanzar siempre el mismo valor de posición final del maestro y del esclavo.

4.5.4 Influencia del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado

Tras estudiar en el epígrafe anterior, la influencia del maestro en el método de diseño de sistemas teleoperados con retardos, se va a analizar en este la dependencia del método, del modelo de esclavo utilizado. Al igual que en el maestro, el esclavo es modelado mediante una inercia (J_s) y un coeficiente de rozamiento viscoso (b_s), ver epígrafe 3.2.1 del capítulo 3. En lugar de estudiar la influencia de ambos parámetros del esclavo en el comportamiento del sistema teleoperado, para simplificar el análisis, sólo se va a considerar la dependencia respecto a la inercia del esclavo. Para efectuar este estudio se va a utilizar, al igual que en el epígrafe anterior, el sistema teleoperado I, ver Tabla 4.1, considerando que el retardo en la comunicación es de 0.1 s y que el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido, ver Tabla 4.2. Los reguladores obtenidos, Tabla 4.3, se van a utilizar para distintas configuraciones de inercia del esclavo. Se va a simular el sistema teleoperado considerando en cada configuración una inercia del esclavo distinta. En concreto la inercia irá variando desde $J_s = 1.5 \text{ kg m}^2$ hasta $J_s = 2.5 \text{ kg m}^2$. Seguidamente se muestran las principales conclusiones del análisis efectuado.

Como ocurría en el caso del maestro, se ha conseguido que el esclavo siga al maestro independientemente del valor de la inercia del maestro (J_s), siendo el valor final de la posición del maestro y del esclavo la misma, no variando al modificarse el valor de J_s . A diferencia del maestro, la velocidad máxima que alcanza el maestro es siempre la misma independientemente de J_s . Sin embargo, la velocidad máxima del esclavo depende de la inercia del esclavo, Figura 4.59, disminuyendo linealmente al aumentar el valor de J_s .

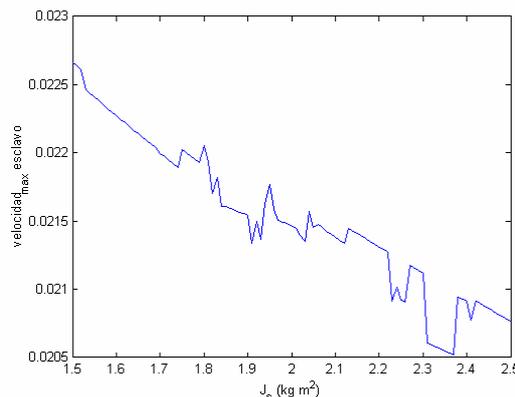


Figura 4.59. Velocidad máxima del esclavo en función de la inercia del esclavo.

En la Figura 4.60(a) se muestra el tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del esclavo (J_s). Como puede comprobarse ambos tiempos varían ligeramente en función de J_s , aunque sin seguir una tendencia definida. En el caso del maestro puede apreciarse que, en general, disminuye al aumentar J_s , mientras que el tiempo de establecimiento del esclavo varía de forma aleatoria. El tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo también varía en función de la inercia del

esclavo, Figura 4.60(b). Para valores menores de la inercia considerada para el diseño ($J_s = 2 \text{ kg m}^2$), puede observarse que se incrementa el tiempo conforme disminuye J_s , mientras que si aumenta J_s varía sin una tendencia clara.

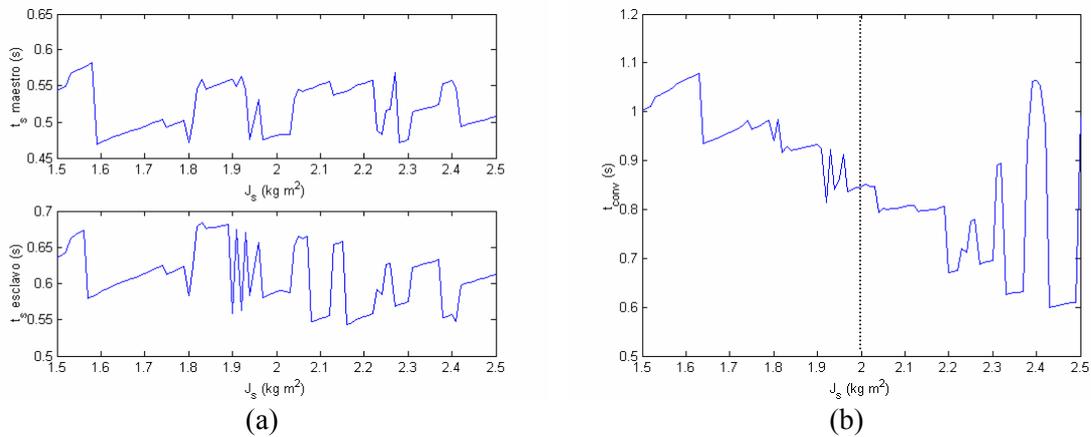


Figura 4.60. (a) Tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del esclavo; (b) Tiempo de convergencia en función de la inercia del esclavo.

Si se analiza la señal de control real del maestro y del esclavo, se puede apreciar que el valor máximo de ambas varía al cambiar la inercia del esclavo. En la Figura 4.61(a) se muestra el valor máximo de la señal de control del maestro según J_s . Como puede observarse, se incrementa ligeramente de forma lineal al aumentar J_s . En cuanto al valor máximo de la señal de control del esclavo, Figura 4.61 (b), sufre mayor variación al cambiar J_s , pero sin seguir una tendencia definida.

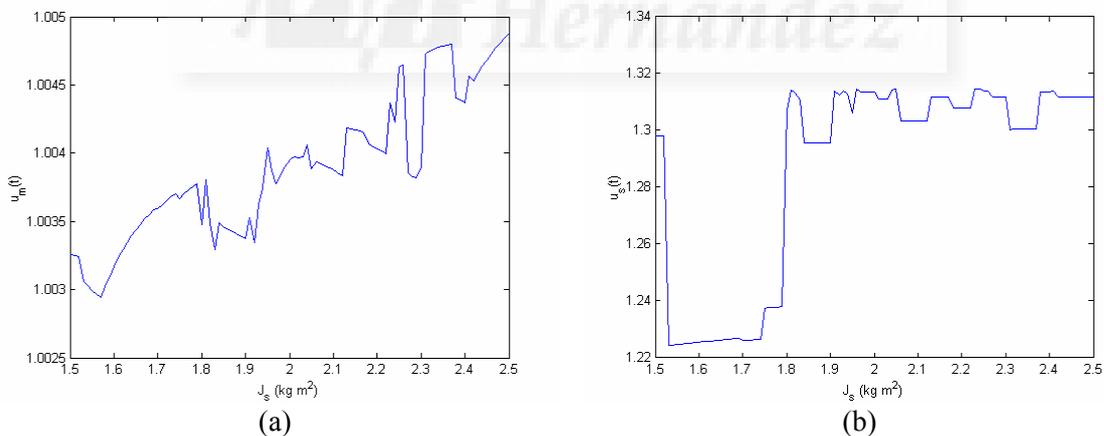


Figura 4.61. Valor máximo de la señal de control real del maestro (a) y del esclavo (b) en función de la inercia del esclavo.

A partir de estos resultados se puede concluir que el método de diseño es robusto a pequeñas variaciones en el modelo del esclavo, ya que, aunque varían determinados parámetros de la respuesta del sistema y de las señales de control en función de la inercia del esclavo, al igual que ocurría en el epígrafe anterior con el maestro, en todos los casos ha sido posible eliminar el error entre el maestro y el esclavo, así como alcanzar siempre el mismo valor de posición final del maestro y del esclavo.

4.5.5 Conclusiones

A lo largo de este apartado se ha estudiado la robustez del método de diseño a variaciones de los distintos parámetros de diseño. En concreto se ha efectuado un análisis de la respuesta y señales de control del sistema según se variaban los siguientes parámetros de diseño:

- Retardo en la comunicación: T .
- Rigidez del entorno: k_e .
- Inercia del maestro: J_m .
- Inercia del esclavo: J_s .

La principal conclusión que se obtiene del análisis efectuado es que el método de diseño es robusto a pequeñas variaciones de los parámetros de diseño. Para todas las variaciones de los parámetros de diseño se ha conseguido que el esclavo siga al maestro. Hay que indicar que en el caso de variar la rigidez del entorno, existía un mínimo error constante entre el maestro y el esclavo (del orden de 10^{-5}), sufriendo apenas variación las respuestas del maestro y del esclavo, por lo que se puede considerar que también el método es robusto en este caso.

De los resultados obtenidos al analizar la repuesta y señales de control al variar los parámetros de diseño, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La posición final del sistema, como se ha indicado, sólo varía ligeramente si cambia la rigidez del entorno, existiendo un pequeño error entre la posición del maestro y la del esclavo.
- La velocidad máxima del maestro sólo se modifica si varía la inercia del maestro (J_m), disminuyendo linealmente al aumentar J_m .
- La velocidad máxima del esclavo es influenciada en mayor medida tanto por la inercia del maestro (J_m) como por la del esclavo (J_s). Al aumentar J_s disminuye linealmente. En el caso de variar J_m no sigue una tendencia definida.
- El tiempo de establecimiento (t_s) del maestro depende de todos los parámetros de diseño en el mismo orden, aunque apenas sufre variación.
- El tiempo de establecimiento (t_s) del esclavo es influenciado en mayor proporción por el retardo (T), aumentando conforme el retardo es mayor, aunque también depende ligeramente de la inercia del maestro y del esclavo. Prácticamente permanece constante si varía la rigidez del entorno (k_e).
- El tiempo de convergencia es afectado en mayor orden por el tiempo de retardo (T), creciendo al aumentar el retardo, aunque también es influenciado por la inercia del maestro y del esclavo. Como ya ha sido comentado, no se produce la convergencia entre el maestro y el esclavo si se modifica la rigidez del entorno.
- El valor máximo de la señal de control real del maestro sólo varía ligeramente al cambiar la inercia del maestro o la del esclavo. Es influenciada en mayor medida por la inercia del maestro, aumentando conforme la inercia es mayor. Permanece casi constante si varía la rigidez del entorno (k_e).
- El valor máximo de la señal de control real del esclavo depende de todos los parámetros a excepción de la rigidez del entorno, aunque en ningún caso sigue una tendencia definida.

En la Tabla 4.13 se resume de forma cualitativa la influencia de cada parámetro de diseño en el comportamiento dinámico del sistema. En dicha tabla ‘↑’ representa un aumento lineal, ‘↓’ representa una disminución lineal, ‘↕’ indica que el parámetro no sigue una tendencia definida, ‘≈’ indica que el parámetro no es influido en gran medida, y ‘=’ indica que el parámetro no varía (o permanece prácticamente constante).

	pos _{final}	vel _{máx} maestro	vel _{máx} esclavo	t _s maestro	t _s esclavo	t _{converg}	$ \bar{u}_m(t) _{\max}$	$ \bar{u}_s(t) _{\max}$
T ↑	=	=	≈	≈	↑	↑	=	↕
k _e ↑	≈	=	=	≈	=		=	=
J _m ↑	=	↓	↕	≈	≈	↑	≈	↕
J _s ↑	=	=	↓	≈	≈	↕	≈	↕

Tabla 4.13. Influencia de los parámetros de diseño en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.

4.6 Conclusiones

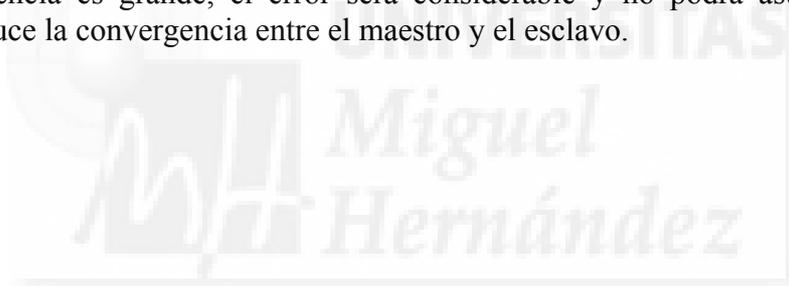
En el presente capítulo, en primer lugar, se ha verificado en simulación el método de diseño de sistemas de control teleoperados con retardos. Para ello se han considerado tres sistemas teleoperados diferentes en los que el esclavo puede interactuar con dos tipos de entorno y se ha supuesto la existencia de dos retardos distintos. Además se ha analizado la influencia del polinomio característico del esclavo y del error seleccionado en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado. Este análisis ha sido realizado estudiando la dependencia de diversos parámetros que caracterizan la respuesta del maestro y del esclavo, y las señales de control, a la ubicación de polos elegida del error y del esclavo. Por último se ha efectuado un estudio de la robustez del método de control a ligeras variaciones en los parámetros de diseño. En concreto se ha comprobado la validez del método de control cuando aparecen ligeras variaciones en el retardo, así como en el entorno, en el maestro y en el esclavo, respecto a los valores considerados para el diseño.

Las principales conclusiones que se extraen de este capítulo son las siguientes:

- El método de diseño funciona satisfactoriamente para prácticamente la mayoría de configuraciones consideradas. Para el sistema teleoperado en el que el maestro y el esclavo son idénticos (sistema teleoperado II) se ha obtenido un comportamiento inestable cuando el esclavo interactúa con un entorno rígido y el retardo existente en la comunicación es del orden de 0.5 s. También se ha obtenido un comportamiento inestable en el sistema teleoperado en el que el esclavo es de dimensión mayor que el maestro (sistema teleoperado III), cuando el entorno es rígido, aunque el retardo sea del orden de 0.1 s. En el capítulo 5, donde se presentarán las herramientas para analizar la estabilidad asintótica de un sistema teleoperado con retardos, se estudiará de qué parámetros depende la estabilidad asintótica.
- El polinomio característico del esclavo afecta de forma considerable tanto a la respuesta del maestro y del esclavo, como a las señales de control, aunque siempre se consigue que el esclavo siga al maestro. Principalmente afecta a la

posición final alcanzada, a la velocidad máxima del maestro y del esclavo, al tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo, al tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo, y al valor máximo de la señal de control del esclavo.

- El polinomio característico del error también afecta al comportamiento del sistema teleoperado. La gran diferencia respecto al polinomio característico del esclavo es que no afecta ni a la posición final del sistema ni a la velocidad máxima del maestro. Influye en mayor medida en el tiempo de establecimiento del esclavo, en el tiempo de convergencia y en el valor máximo de la señal de control del esclavo.
- El método de diseño es robusto a pequeñas variaciones de los parámetros de diseño: retardo, entorno, maestro y esclavo. Es decir, si en el sistema teleoperado varía ligeramente algún parámetro respecto al valor original utilizado en el método de diseño, el comportamiento del sistema va ser correcto, de forma que el esclavo seguirá al maestro. Para todos los parámetros considerados se ha conseguido que el esclavo siguiera al maestro. Únicamente en el caso de variar la rigidez del entorno, existía un mínimo error constante entre el maestro y el esclavo (del orden de 10^{-5}), sufriendo apenas modificación las respuestas del maestro y del esclavo, por lo que también se consideró que el método era robusto en este caso. Este error aumenta linealmente conforme la rigidez real difiere de la rigidez considerada en el diseño, de forma que si la diferencia es grande, el error será considerable y no podrá asumirse que se produce la convergencia entre el maestro y el esclavo.





Capítulo 5

Análisis de estabilidad del sistema de control de teleoperación con retardos

5.1 Introducción

En el capítulo 3 se presentó el modelado y diseño de un sistema de control de teleoperación con retardos. El comportamiento dinámico de este sistema de control fue estudiado en el capítulo 4. Sin embargo hasta el momento no se ha estudiado la estabilidad del esquema de control propuesto. En este capítulo se va a estudiar la estabilidad del sistema teleoperado con retardos, de forma que puedan establecerse bajo qué condiciones se vuelve inestable el sistema, o en el caso de que sea inestable, se indique como puede estabilizarse.

Como se recordará, en el apartado 3.2 del capítulo 3, se modeló el sistema teleoperado con retardos en el espacio de estados considerando todas las posibles interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno, ver Figura 5.1. Para obtener esta representación se empleó la expansión de Taylor de primer orden para aproximar las señales afectadas por el retardo. El modelo de estado del sistema teleoperado que se obtuvo fue el siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ M(B_m - TB_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} F_m(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para deducir el método de diseño se aplicó una transformación de estado sobre el sistema anterior para obtener la ecuación de estado del error entre el maestro y el esclavo. Logrando que el error entre el maestro y el esclavo evolucionara como un sistema autónomo y fijando la dinámica del esclavo y del error se obtenían las ecuaciones de diseño del sistema de control.

Cuando se calculen los reguladores del esquema de control solucionando las ecuaciones de diseño, la ecuación de estado del sistema, tal como se indicó en el apartado 3.3, tomará la siguiente forma al evolucionar el error como un sistema autónomo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_s(t) - \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) + & -S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) & M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) - \\ & 0 & S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - TB_s R_s B_m) \\ 0 \end{bmatrix} F_m(t) \quad (5.2)$$

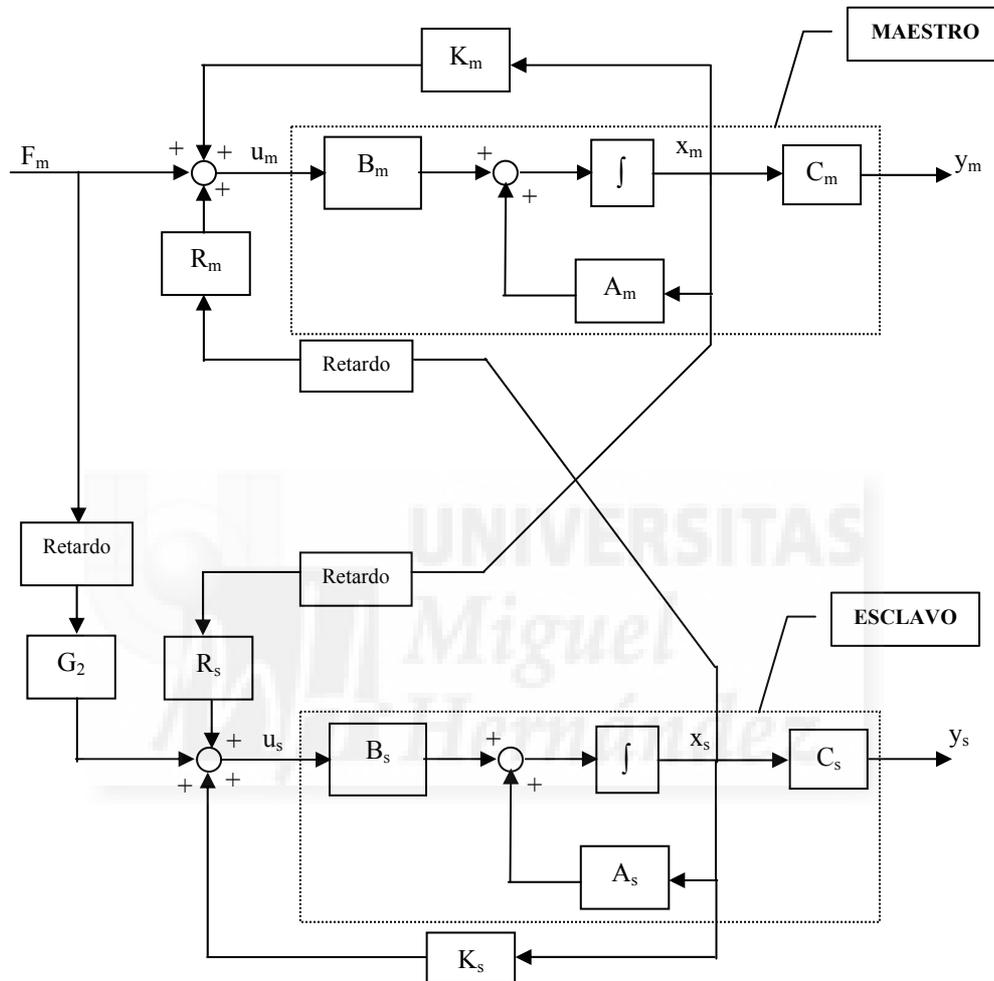


Figura 5.1. Modelado del sistema teleoperado con retardos en la transmisión.

Los polos del sistema (5.2) corresponden a los polos del esclavo y del error designados para efectuar el diseño del sistema de control. Por lo que, podría pensarse que el sistema es estable siempre que los polos se ubiquen en la parte izquierda del plano s . Sin embargo esto no es cierto, ya que sería estable el sistema lineal con la aproximación del retardo mediante la expansión de Taylor, pero no se puede afirmar que sea estable el sistema real con retardos. Es decir, la expansión de Taylor se utilizó para plantear las ecuaciones de diseño del sistema de control y poder obtener, solucionando estas ecuaciones, los reguladores del sistema. Pero, como es lógico, es necesario analizar la estabilidad del sistema real controlado por los reguladores calculados, no la estabilidad del sistema con la aproximación.

Por este motivo se va a considerar el modelo de estado del sistema teleoperado sin aproximar el retardo para analizar su estabilidad. Este modelo puede obtenerse a partir de las ecuaciones (3.24) y (3.25) mostradas en el apartado 3.2 del capítulo 3:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_s + B_s K_s & 0 \\ 0 & A_m + B_m K_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_s R_s \\ B_m R_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t-T) \\ x_m(t-T) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} F_m(t) + \begin{bmatrix} B_s G_2 \\ 0 \end{bmatrix} F_m(t-T) \end{aligned} \quad (5.3)$$

En este capítulo por tanto se va a analizar la estabilidad asintótica del sistema lineal con retardos anterior. Existen dos tipos de estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos: estabilidad independiente del retardo y estabilidad dependiente del retardo. En el primer caso se asegura la estabilidad asintótica independientemente del retardo existente en la comunicación, mientras que en el segundo sólo se asegura la estabilidad asintótica del sistema hasta un valor de retardo máximo. Ambos tipos de estabilidad serán analizados en el presente capítulo. Además, en este capítulo, se va a aportar un completo estudio de la influencia de los parámetros de diseño en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado. Con este estudio se mostrará como es posible asegurar, en determinados casos, la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos, variando los parámetros utilizados en la fase de diseño.

Este capítulo se va a estructurar de la siguiente forma. En primer lugar se van a resumir los principales métodos de análisis de estabilidad de sistemas lineales con retardos, diferenciando los métodos basados en el dominio del tiempo de los basados en el dominio frecuencial. A continuación se van a explicar los criterios que van a utilizarse para analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos. Estos criterios, basados en el dominio de la frecuencia, fueron propuestos por J.-H. Su *et al.* [Su-94] y permiten analizar la estabilidad asintótica independiente del retardo así como la dependiente del retardo. Seguidamente, utilizando estos criterios, se analizará la estabilidad asintótica de los sistemas teleoperados presentados en el capítulo 4. Posteriormente se estudiará la influencia en la estabilidad asintótica de los parámetros de diseño: polinomio característico del esclavo y del error, tiempo de retardo, entorno de interacción y constante de reflexión de esfuerzos. Por último se resumirán las conclusiones más importantes del capítulo.

5.2 Estabilidad de sistemas lineales con retardo

En este apartado se van a presentar las principales técnicas utilizadas para analizar la estabilidad de sistemas lineales con retardo [Niculescu-98]. En concreto se van a resumir los métodos utilizados para demostrar la estabilidad asintótica independientemente del retardo, así como las empleadas para asegurar la estabilidad hasta un retardo máximo (estabilidad dependiente del retardo).

Para presentar los diferentes métodos que pueden utilizarse para analizar la estabilidad asintótica de sistemas con retardos, se va a considerar que un sistema con retardos se modela mediante una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n_d} A_{di}x(t - \tau_i) \quad (5.4)$$

donde n_d representa el número de retardos existentes en el sistema, A representa la matriz del estado actual y A_{di} representa la matriz del estado anterior correspondiente al retardo τ_i .

Como puede observarse en la ecuación (5.4), los retardos son vistos como parámetros, de forma que se está interesado en analizar la estabilidad respecto a ellos. El objetivo es proporcionar caracterizaciones de las correspondientes regiones de estabilidad en términos de los retardos. En este sentido se determinará la estabilidad independiente del retardo y la estabilidad dependiente del retardo.

Cuando $n_d = 1$, sólo existe un retardo en el sistema. En este caso se está interesado en establecer la estabilidad en relación al retardo existente. En el caso de que existan múltiples retardos en el sistema, $n_d \geq 2$, habrá que considerar el espacio de parámetros de retardos y determinar cuales son las regiones de dicho espacio en las que el sistema es estable. Para sistemas con retardos múltiples, existe una configuración especial denominada *retardos conmensurables*, en el que existe un valor de retardo τ de forma que todos los τ_i son multiplicadores racionales de τ . También es posible que el retardo venga especificado por una función continua variable en el tiempo $\tau: \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}, \tau(t) \leq \bar{\tau} \quad \forall t \in \mathcal{R}^+$.

Existen dos tipos de estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos [Mori-85]:

- Estabilidad independiente del retardo: en este caso la estabilidad debe satisfacerse para todos los valores positivos y finitos del retardo.
- Estabilidad dependiente del retardo: en este caso la estabilidad sólo se cumple hasta un determinado valor máximo del retardo, de forma que para retardos mayores el sistema es inestable.

Los métodos para analizar la estabilidad asintótica de sistemas lineales con retardos requieren que se cumpla la condición de que el sistema sin retardo sea asintóticamente estable.

De esta forma, el analizar la estabilidad asintótica del sistema (5.4) consiste en determinar si el sistema cumpliendo la condición anterior es asintóticamente estable independientemente del retardo, o si no lo es, encontrar el retardo máximo que asegure la estabilidad asintótica.

5.2.1 Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia

A continuación se van a indicar los principales métodos utilizados para analizar la estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos en el dominio de la frecuencia.

Pruebas analíticas. En esta clase de pruebas se incluyen todos los criterios que generalizan el método de *Hurwitz* [Khalil-96] a los sistemas con retardos: Pontryagin, Cheboratev o Yesupovich-Svirskii [Stépán-89] [Kolmanovskii-86].

Métodos del lugar de las raíces. Corresponden a los métodos de \mathcal{D} -descomposición [Neimark-49] o τ -descomposición [Lee-69] y sus formas derivadas [Walton-87]. En estos métodos se considera que la ecuación característica puede ser escrita como $e^{s\tau} = D_0(s)$, donde D_0 es una relación de 2 polinomios. De esta forma para estudiar la estabilidad se analiza el comportamiento del contorno $D_0(j\omega)$ con respecto al círculo unidad $e^{j\omega\tau}$. En el caso de estabilidad independiente del retardo, $e^{j\omega\tau}$ y $j\omega$ son variables independientes, por lo que si no hay intersección, entonces la estabilidad es independiente del retardo.

Métodos del principio del argumento. Incluye el criterio de Nyquist [Nyquist-32], el diagrama de Satche [Satche-49] o el criterio de Michailov [Kolmanovskii-86]. Estos métodos pueden aplicarse a sistemas con retardo lineales, ya que el número de raíces inestables en el plano complejo es finito.

Criterios basados en el principio máximo

- *Teorema de la ganancia pequeña (small gain theorem).* Se va a considerar el problema de la estabilidad independiente del retardo (ver también [Chen-94a]). Suponiendo que la matriz A es *Hurwitz* [Khalil-96] (en el apartado 5.3 se explicará como puede comprobarse si una matriz es *Hurwitz*), se introduce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d u(t) \\ H_{xu}(s) &= (sI - A)^{-1} A_d \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si H_{xu} satisface:

$$\sup_{\omega \in R^+} \|H_{xu}(j\omega)\| < 1 \quad (5.6)$$

entonces se cumple que:

$$\sup_{s \in C^-} \|H_{xu}(s)e^{-s\tau}\| < 1, \forall \tau \in R^+ \quad (5.7)$$

Esta condición conduce a:

$$\det(I - (sI - A)^{-1} A_d e^{-s\tau}) \neq 0, \forall s \in C^+ \quad (5.8)$$

para todos los retardos positivos τ , lo cual permite asegurar la estabilidad independiente del retardo. Criterios relacionados pueden encontrarse en [Verriest-93].

Usando ideas similares combinadas con *medidas matriciales* [Mori-89], pueden obtenerse varias condiciones para obtener la estabilidad independiente del retardo o

la estabilidad dependiente del retardo [Chen-94a]. Por ejemplo, el principio de comparación, introducido por T. Mori *et al.* [Mori-81] en el que puede afirmarse que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo si satisface:

$$\mu(A) + \|A_d\| < 0 \quad (5.9)$$

donde $\mu(A)$ es la medida matricial de A (ver [Mori-89]).

- *Criterio de Mori y Kokame* [Mori-89]. Combina el principio máximo con la propiedad de que si existen raíces inestables de la ecuación característica, estarán localizadas en un dominio compacto en C^+ . De esta forma, el problema se reduce al cálculo de una determinada función sobre el límite de un compacto. Métodos que permiten restringir el compacto están propuestos por S.-S. Wang [Wang-92], J.-H. Su *et al.* [Su-94] y W. J. Wang y R. J. Wang [Wang-95]. El método presentado por J.-H. Su *et al.* [Su-94] será explicado con mayor profundidad posteriormente, ya que ha sido el método escogido para analizar la estabilidad del esquema de control bilateral del sistema teleoperado.

Criterios polinomiales

- *De una variable*: Incluye el criterio de Tsytkin [El'sgol'ts-73], el lema de Thowsen [Thowsen-81] con su condición derivada matricial [Su-95], y las técnicas de “matrix pencil” [Chen-94b] [Niculescu-97].
- *De dos variables* [Kamen-80] o *más* [Hale-85].

Clasificación	Métodos	Referencias	
Pruebas analíticas	Criterio de Pontryagin, Cheboratev o Yesupovich-Svirskii	[Stépán-89] [Kolmanovskii-86]	
Métodos del lugar de las raíces	\mathcal{D} -descomposición	[Neimark-49]	
	τ -descomposición	[Lee-69]	
	Formas derivadas	[Walton-87]	
Métodos del principio del argumento	Criterio de Nyquist	[Nyquist-32]	
	Diagrama de Satche	[Satche-49]	
	Criterio de Michailov	[Kolmanovskii-86]	
Criterios basados en el principio máximo	Teorema de la ganancia pequeña	[Chen-94a] [Verriest-93]	
	Principio de comparación	[Mori-81]	
	Criterio de Mori y Kokame	[Mori-89] [Wang-92] [Su-94] [Wang-95]	
Criterios polinomiales	De una variable	Criterio de Tsytkin	[El'sgol'ts-73]
		Lema de Thowsen	[Thowsen-81] [Su-95]
		Técnicas de “matrix pencil”	[Chen-94b] [Niculescu-97]
	De dos variables	[Kamen-80]	
	De más	[Hale-85]	

Tabla 5.1. Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia.

A modo de resumen se muestra en la Tabla 5.1 los métodos basados en el dominio de la frecuencia que pueden utilizarse para analizar la estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos, junto a las referencias bibliográficas que pueden ser consultadas para ampliar información.

5.2.2 Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio del tiempo

Una vez que se han presentado los métodos que pueden utilizarse para analizar la estabilidad en el dominio frecuencial, se van a describir a continuación las técnicas que se emplean para llevar a cabo el análisis de estabilidad en el dominio del tiempo.

Técnicas basadas en el segundo método de Lyapunov

Existen dos formas de desarrollar el método de Lyapunov: *funcionales de Lyapunov-Krasovskii* y *funciones de Lyapunov-Razumikhin*. La idea principal de estabilidad en cada caso puede resumirse del siguiente modo. En el caso de un funcional de Lyapunov-Krasovskii, V , una condición suficiente para estabilidad, es que la derivada, \dot{V} , del funcional candidato sea negativo a lo largo de todas las trayectorias del sistema. En la aproximación basada en Razumikhin, la negatividad de la derivada de la función $V: R^n \rightarrow R$ sólo es requerida para las trayectorias que abandonan en t^+ un determinado conjunto, definido por la evolución del sistema sobre el intervalo $[t-\tau, t]$.

- *Aproximación de Lyapunov-Krasovskii* [Niculescu-97]
 - *Criterios de estabilidad independiente del retardo*. El funcional clásico de Lyapunov-Krasovskii usado para este análisis de estabilidad es [Hale-93] [Niculescu-97]:

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{-r}^0 x(t+\theta)^T S x(t+\theta) d\theta \quad (5.10)$$

El sistema (5.4) en el caso de un único retardo constante es asintóticamente estable independientemente del retardo si existen matrices P y S definidas positivas satisfaciendo la inecuación de *Riccati*:

$$A^T P + PA + PA_d S^{-1} A_d^T P + S < 0 \quad (5.11)$$

Más detalles se pueden encontrar en [Verriest-93]. Usando el complemento de *Schur* [Boyd-94], la inecuación (5.11) puede transformarse en:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (5.12)$$

De esta forma el problema de estabilidad se reduce a la viabilidad de una inecuación lineal matricial (*Linear Matrix Inequality, LMI*): encontrar si existe P y S definidos positivos que satisfacen la restricción (5.12).

- *Criterios de estabilidad dependientes del retardo.* Generalmente se considera la siguiente transformación del modelo, en el caso de que en el sistema exista un único retardo constante:

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) + A_d \int_{t-\tau}^t [Ax(\theta) + A_d x(\theta - \tau)] d\theta \quad (5.13)$$

obtenida usando la fórmula de *Leibniz-Newton*. El funcional de Lyapunov-Krasovskii es:

$$\begin{cases} V(x_t) = \sup_{\theta \in [-2\tau, 0]} e^{\delta\theta} x(t + \theta) P x(t + \theta) \\ P > 0, \delta = \frac{1}{\tau} \log(1 + \gamma), \gamma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.14)$$

- *Aproximación de Lyapunov-Razumikhin* [Niculescu-97] [Li-95]

- *Criterios de estabilidad independiente del retardo.* El sistema (5.4) es asintóticamente estable independientemente del retardo existente (para cualquier r , $\tau(t) \leq r$), si existe $S > 0$, P y $\beta \in \mathbb{R}^+$ satisfaciendo $S \leq P$ y:

$$A^T P + PA + \beta^{-1} P A_d S^{-1} A_d^T P + \beta P < 0 \quad (5.15)$$

- *Criterios de estabilidad dependientes del retardo.* El sistema (5.4) es asintóticamente estable para cualquier $\tau(t) \leq \tau^*$, si existe Q , S_1 , $S_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ satisfaciendo $\beta_i^{-1} Q \leq S_i, i = 1, 2$ y:

$$Q(A + A_d)^T + (A + A_d)Q + \tau^*(\beta_1 + \beta_2)Q + \tau^* A_d (A S_1 A^T + A_d S_2 A_d^T) A_d^T < 0 \quad (5.16)$$

Principio de comparación

La idea de este principio es encontrar una ecuación diferencial ordinaria (*Ordinary Differential Equation*, ODE), o una ecuación funcional diferencial (*Functional Differential Equation*, FDE), llamada B , con un comportamiento conocido, tal que su estabilidad (asintótica) implica la estabilidad (asintótica) para el sistema inicial con retardo, denominado A . En este caso B es llamado un *sistema de comparación* de A .

Los primeros principios de comparación fueron establecidos por A. Halanay [Halanay-66], V. Lakshmikantham y S. Leela [Lakshmikantham-69] y R. D. Driver [Driver-62]. La herramienta que mejor se adapta son las *funciones de Lyapunov vectoriales* [Bellman-62].

Existen métodos de análisis que combinan el principio de comparación con técnicas matriciales: *medidas matriciales* [Mori-81] y *M-matrices* [Dambrine-93].

Al igual que en el epígrafe anterior, se muestra a modo de resumen, en la Tabla 5.2, los métodos basados en el dominio del tiempo que pueden utilizarse para analizar la

estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos, junto a las referencias que pueden ser consultadas.

Clasificación	Métodos	Referencias
Técnicas basadas en el segundo método de Lyapunov	Aproximación de Lyapunov-Krasovskii	[Hale-93] [Niculescu-97] [Verriest-93]
	Aproximación de Lyapunov-Razumikhin	[Niculescu-97] [Li-95]
Principio de comparación	Primeros principios	[Halanay-66] [Lakshmikantam-69] [Driver-62]
	Funciones de Lyapunov vectoriales	[Bellman-62]
	Combinación con medidas matriciales	[Mori-81]
	Combinación con M-matrices	[Dambrine-93]

Tabla 5.2. Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio del tiempo.

5.3 Análisis de estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos

Como se indicó en la introducción, se va a analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado considerando el modelo lineal sin aproximar el retardo mediante la expansión de Taylor. De manera que el sistema que va a considerarse en el análisis es el siguiente, (5.3):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_s + B_s K_s & 0 \\ 0 & A_m + B_m K_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_s R_s \\ B_m R_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t-T) \\ x_m(t-T) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} F_m(t) + \begin{bmatrix} B_s G_2 \\ 0 \end{bmatrix} F_m(t-T) \end{aligned} \quad (5.17)$$

De forma simplificada se representará el sistema teleoperado modelado por la ecuación (5.17) del siguiente modo:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-T) + B_0 u(t) + B_1 u(t-T) \quad (5.18)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_s + B_s K_s & 0 \\ 0 & A_m + B_m K_m \end{bmatrix} & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & B_s R_s \\ B_m R_m & 0 \end{bmatrix} \\ B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} B_s G_2 \\ 0 \end{bmatrix} & x(t) &= \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como se ha indicado en el apartado anterior, existen multitud de métodos que permiten analizar la estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos. Además, como también ha sido citado, existen dos tipos de estabilidad asintótica de un sistema con retardos:

- Estabilidad independiente del retardo: en este caso se garantiza la estabilidad del sistema independientemente del retardo existente.
- Estabilidad dependiente del retardo: en este caso sólo se garantiza la estabilidad del sistema hasta un valor de retardo máximo.

Para efectuar el análisis de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado se van a emplear los criterios propuestos por J.-H. Su *et al.* [Su-94] y utilizados en sistemas teleoperados por A. Eusebi y C. Melchiorri [Eusebi-98]. Estos criterios permiten analizar en el dominio frecuencial la estabilidad asintótica de un sistema lineal representado mediante un modelo en el espacio de estados. J.-H. Su *et al.* presentan dos teoremas que permiten determinar si el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo y, si no lo es, establecer cual es el retardo máximo con el que el sistema mantiene su estabilidad asintótica. Estos teoremas mejoran los resultados aportados por el criterio de Mori y Kokame [Mori-89] en el que se basan.

A continuación se muestran los criterios presentados por J.-H. Su *et al.* para analizar la estabilidad asintótica de un sistema lineal con retardos particularizado al modelo del sistema teleoperado mostrado en (5.18). Para ver la demostración de estos teoremas consultar [Su-94].

Lema 1. *El sistema lineal (5.18) es asintóticamente estable si y sólo si las soluciones de su ecuación característica,*

$$\Delta(s, e^{-Ts}) = \det[sI_n - (A_0 + A_1 e^{-Ts})] = 0 \quad (5.20)$$

están en la parte izquierda del plano complejo [Mori-89].

Teorema 1. *Sea:*

$$\begin{aligned} A_0^s &= A_0 + A_0^T \\ A_0^a &= A_0^T - A_0 \\ A_1^s &= A_1 + A_1^T \\ A_1^a &= A_1^T - A_1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\sigma_1 = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_M (A_0^s + A_1^s \cos \theta + jA_1^a \sin \theta) \right\} \quad (5.22)$$

$$\omega_1 = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_M (jA_0^a + jA_1^a \cos \theta - A_1^s \sin \theta) \right\} \quad (5.23)$$

$$\sigma_{\max} = \max \left\{ \frac{1}{2} \lambda_M(A_0^s), \sigma_1 \right\} \quad (5.24)$$

$$\omega_{\max} = \max \left\{ \frac{1}{2} \lambda_M(jA_0^a), \omega_1 \right\} \quad (5.25)$$

donde $\lambda_M(X)$ es el mayor valor propio de la matriz X .

Todas las soluciones inestables de (5.20), si existen, se encuentran localizadas en la región Ω del plano complejo definido como:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}\{s\} \leq \sigma_{\max}, |\operatorname{Im}\{s\}| \leq \omega_{\max}\} \quad (5.26)$$

Teorema 2. *Considérese que el sistema dinámico descrito por (5.18) es asintóticamente estable cuando no existe retardo. Sea:*

$$\psi(\theta) = \det \left[(A_0 + A_1 e^{-j\theta}) \otimes I_n + I_n \otimes (A_0 + A_1 e^{j\theta}) \right] \quad (5.27)$$

donde \otimes es el producto de Kronecker.

Si $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$, entonces el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo. Si no, el sistema es asintóticamente estable si:

$$T < \hat{T} = \begin{cases} \hat{\theta} / \omega_{\max} & \omega_{\max} \neq 0 \\ \infty & \omega_{\max} = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

donde $\hat{\theta}$ es el menor número positivo real en $[0, \pi]$ tal que $\psi(\hat{\theta}) = 0$.

Tal como se indica en [Su-94], para calcular $\hat{\theta}$, la raíz positiva más pequeña de $\psi(\hat{\theta})$, en lugar de utilizar el determinante en el cálculo de la función $\psi(\hat{\theta})$, recomienda reemplazarlo por el valor singular más pequeño, con la finalidad de mejorar la estabilidad numérica.

Estos teoremas suponen que el sistema sin retardo es asintóticamente estable, es decir, que la matriz $A = A_0 + A_1$ es *Hurwitz*. Para comprobar si la matriz A es *Hurwitz* puede procederse de dos formas [Khalil-96]:

- A es *Hurwitz* si todos sus valores propios λ_i satisfacen que tienen la parte real negativa, es decir $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.
- A es *Hurwitz* si para cualquier matriz simétrica definida positiva dada Q , existe una matriz simétrica definida positiva P que satisface la ecuación de *Lyapunov*: $PA + A^T P = -Q$.

5.4 Estudio de estabilidad asintótica de sistemas teleoperados con retardos

Ante la imposibilidad de realizar el análisis de estabilidad del sistema teleoperado de forma simbólica utilizando los teoremas mostrados en la sección precedente, con la finalidad de extraer conclusiones generales relativas a la estabilidad asintótica del esquema de control presentado en la Tesis, se ha optado por analizar la estabilidad de sistemas teleoperados concretos e intentar extraer conclusiones a partir de los resultados obtenidos. Se van a considerar para este análisis los sistemas teleoperados que se utilizaron en el capítulo 4. Los parámetros que caracterizaban a cada uno de estos sistemas teleoperados son mostrados en la Tabla 5.3. En cada sistema teleoperado se va a suponer la existencia de retardos en la comunicación entre el maestro y el esclavo de 0.1 s y 0.5 s, y que el esclavo puede interactuar con dos tipos de entornos: entorno suave y entorno rígido, Tabla 5.4. Con el análisis de estabilidad que se va a efectuar, se pretende determinar si el sistema teleoperado es asintóticamente estable independientemente del retardo, o en caso contrario, establecer el máximo retardo que asegura la estabilidad asintótica del mismo.

	Sistema teleoperado I	Sistema teleoperado II	Sistema teleoperado III
Características	maestro < esclavo	maestro = esclavo	maestro > esclavo
Maestro	$J_m = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_m = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_m = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_m = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_m = 2 \text{ kg m}^2$ $b_m = 15 \text{ Nm/(rad/s)}$
Esclavo	$J_s = 2 \text{ kg m}^2$ $b_s = 15 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_s = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_s = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$	$J_s = 1.5 \text{ kg m}^2$ $b_s = 11 \text{ Nm/(rad/s)}$
k_f	0.1	1	10

Tabla 5.3. Parámetros considerados de cada sistema teleoperado.

Tipo de entorno	k_e [Nm/rad]	b_e [Nm/(rad/s)]
Suave	10	0.1
Rígido	100	1

Tabla 5.4. Parámetros utilizados para modelar los distintos tipos de entorno.

Para poder analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, previamente será necesario obtener el valor de los reguladores que aparecen en el esquema de control solucionando las ecuaciones de diseño presentadas en el capítulo 3. Tal como se indicó en dicho capítulo, para poder resolver estas ecuaciones es necesario establecer la dinámica deseada del esclavo así como la dinámica deseada del error entre el maestro y el esclavo. En este apartado se va a considerar que en todos los sistemas teleoperados se desea fijar tanto los polos del esclavo como del error en $s = -11$, es decir, se desea que el polinomio característico del esclavo y del error sea:

$$p(s) = q(s) = s^2 + 22s + 121 \quad (5.29)$$

Para analizar la estabilidad asintótica de cada sistema teleoperado en cada posible configuración de retardo y entorno, en primer lugar se obtendrá el valor de los reguladores del sistema de control. Una vez obtenidos estos reguladores se estudiará la estabilidad asintótica. Para ello se ha creado un *script* en Matlab que, en primer lugar,

determina si el sistema es asintóticamente estable cuando no existe retardo (comprobando que todos los valores propios de la matriz A tengan la parte real negativa). Seguidamente, en el caso de que el sistema sea asintóticamente estable sin retardo, calcula la función $\psi(\theta)$ para verificar si el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo, y en el caso de que no lo sea, determina el valor máximo del retardo \hat{T} que asegura la estabilidad asintótica.

5.4.1 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado I: maestro < esclavo

Se va analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I, caracterizado por ser el maestro de dimensiones menores que el esclavo, Tabla 5.3. Los valores de los reguladores del sistema teleoperado para cada configuración de entorno y tiempo de retardo fueron calculados en el epígrafe 4.3.1 del capítulo 4, ver Tabla 4.3.

Si se analiza la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I cuando el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s y el entorno con el que interacciona el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) se obtiene la función $\psi(\theta)$ mostrada en Figura 5.2. Como puede comprobarse, el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo, ya que $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$. Por lo tanto el sistema será estable a pesar de que el retardo en la comunicación sea mayor que el considerado para realizar el diseño del sistema de control.

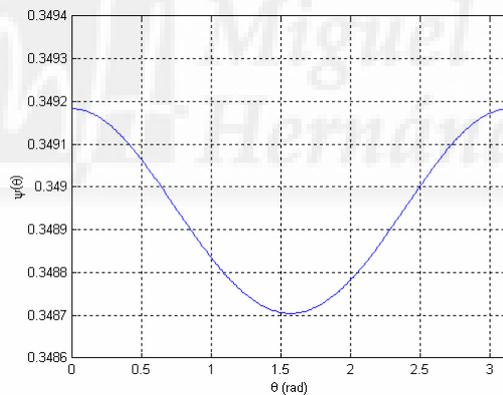


Figura 5.2. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)).

En la Figura 5.3 se muestra el comportamiento del sistema teleoperado I si se utilizan los reguladores obtenidos considerando un retardo de diseño de 0.1 s y un entorno suave, para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 2 s y la fuerza que ejerce el operador es de 1 Nm. Como puede observarse en (a), a pesar de que el retardo real difiere del considerado para el diseño y es mucho mayor, la posición del esclavo ($x_{sI}(t)$) sigue a la del maestro ($x_{mI}(t)$). En (b) se presenta la señal de control real del maestro $\tilde{u}_m(t)$ y del esclavo $\tilde{u}_s(t)$. Tal como se explicó en el apartado 4.2 del capítulo 4, se considera la señal de control real del maestro $\tilde{u}_m(t)$ y del esclavo $\tilde{u}_s(t)$, en lugar de la señal de control del maestro $u_m(t)$ y del esclavo $u_s(t)$ indicada en el esquema de control de la Figura 5.1.

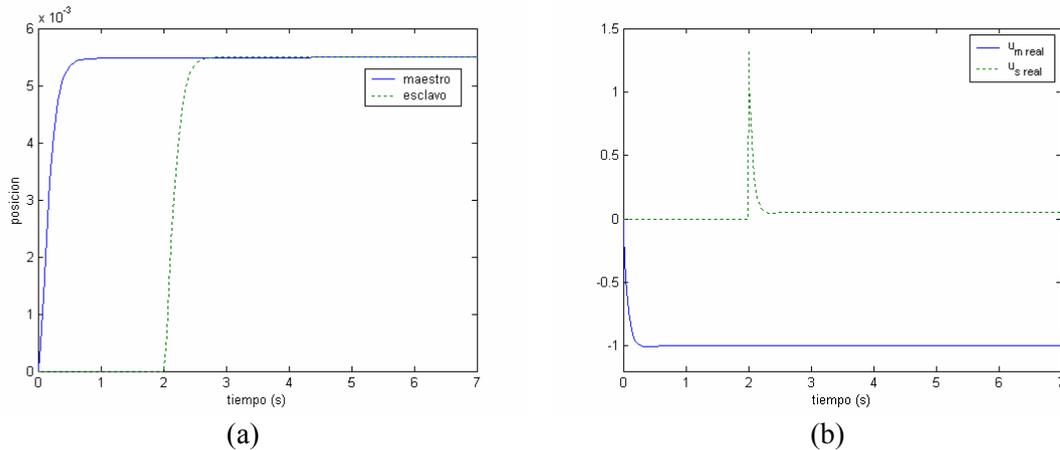


Figura 5.3. Comportamiento del sistema teleoperado I en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 2 s. (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Si considerando el mismo retardo de diseño que en el caso anterior ($T = 0.1$ s), se aumenta la rigidez del entorno ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), el sistema sigue siendo asintóticamente estable, ya que $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$, como puede apreciarse en la Figura 5.4.

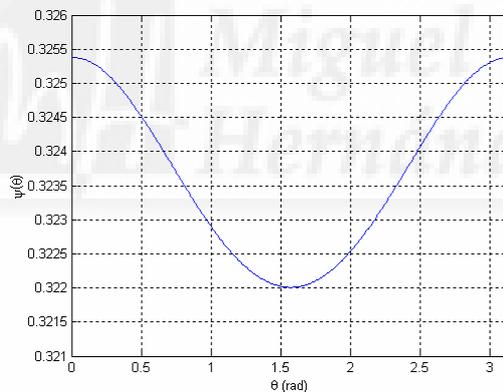


Figura 5.4. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)).

Si se analiza la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I cuando el retardo de diseño es de 0.5 s, se puede comprobar que tanto en el caso del entorno suave como en el rígido, el sistema es asintóticamente estable, ya que en ambos casos $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$, como puede observarse en la Figura 5.5(a), entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)), y en la Figura 5.5(b), entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)).

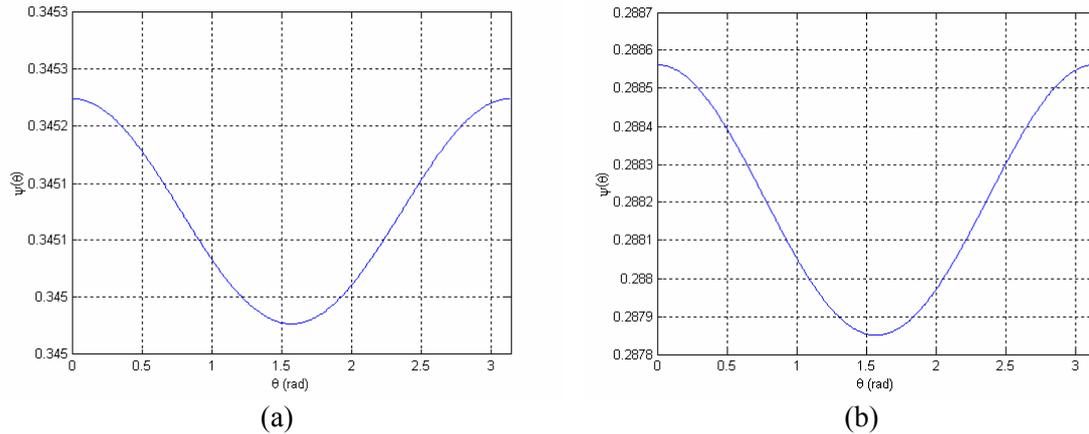


Figura 5.5. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.5 s. (a) Entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)); (b) Entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)).

Por lo tanto para todas las configuraciones de retardo y entorno consideradas en el sistema teleoperado I, se ha diseñado un control que hace al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo. Puede comprobarse que, sin embargo, si el esclavo interactúa con un entorno muy rígido ($k_e = 2000$ Nm/rad, $b_e = 20$ Nm/(rad/s)) y el retardo de diseño es de 0.1 s, el sistema no es asintóticamente estable independientemente del retardo, sino que es asintóticamente estable sólo hasta un retardo máximo de 0.0047829 s, ya que, como puede observarse en la Figura 5.6, $\psi(\hat{\theta}) = 0$ si $\hat{\theta} = 0.76$ rad. Hay que indicar que en esta gráfica se ha mostrado la función $\psi(\theta)$ calculada según (5.27), es decir, utilizando el determinante en lugar del valor singular más pequeño, con la finalidad de que se aprecie con mayor claridad el cruce de la función por cero.

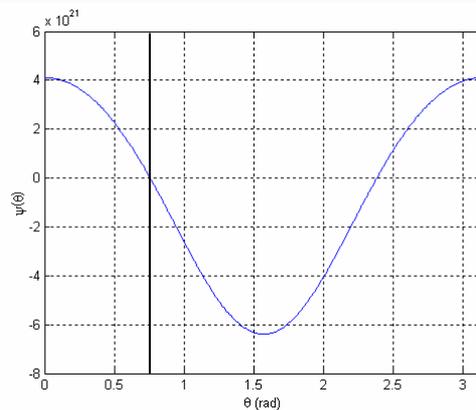


Figura 5.6. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es muy rígido ($k_e = 2000$ Nm/rad, $b_e = 20$ Nm/(rad/s)).

5.4.2 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado II: maestro = esclavo

En este epígrafe se va a estudiar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II, en el que el maestro y el esclavo son idénticos, Tabla 5.3. Los valores de los reguladores de

este sistema teleoperado para cada configuración de entorno y tiempo de retardo fueron calculados en el epígrafe 4.3.2 del capítulo 4, ver Tabla 4.4.

En primer lugar se va a estudiar la estabilidad asintótica del sistema en el caso de que el retardo existente en la comunicación sea de 0.1 s. Con este retardo, se ha comprobado que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo tanto cuando el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) como cuando es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). En la Figura 5.7 se muestra que en ambos casos se satisface $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$.

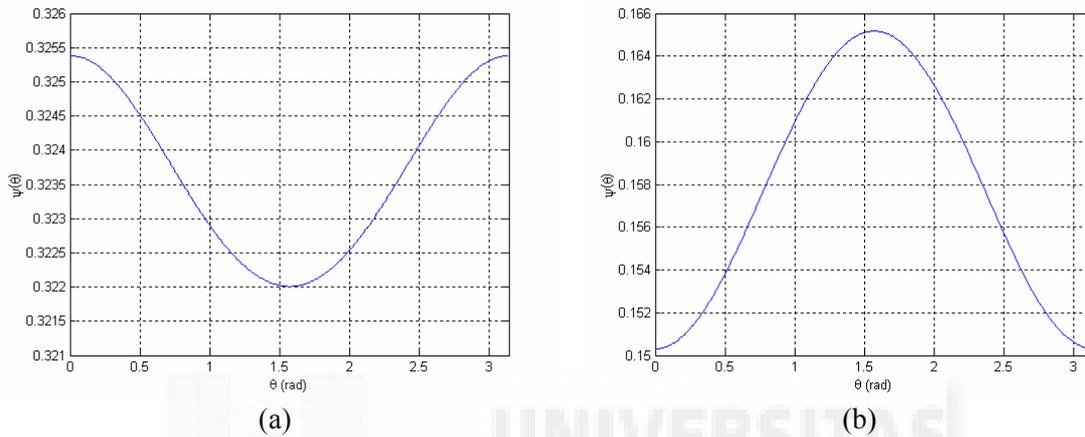


Figura 5.7. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado II cuando el retardo es de 0.1 s. (a) Entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)); (b) Entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)).

Si se simula el comportamiento del sistema teleoperado II cuando el retardo real en la comunicación es de 3 s, el entorno de interacción es suave, la fuerza que ejerce el operador es de 1 Nm, y se utilizan los reguladores obtenidos asumiendo un retardo de diseño de 0.1 s, puede comprobarse que, a pesar de la diferencia del retardo real existente respecto al considerado para el diseño, la posición del esclavo sigue a la del maestro, ver Figura 5.8.

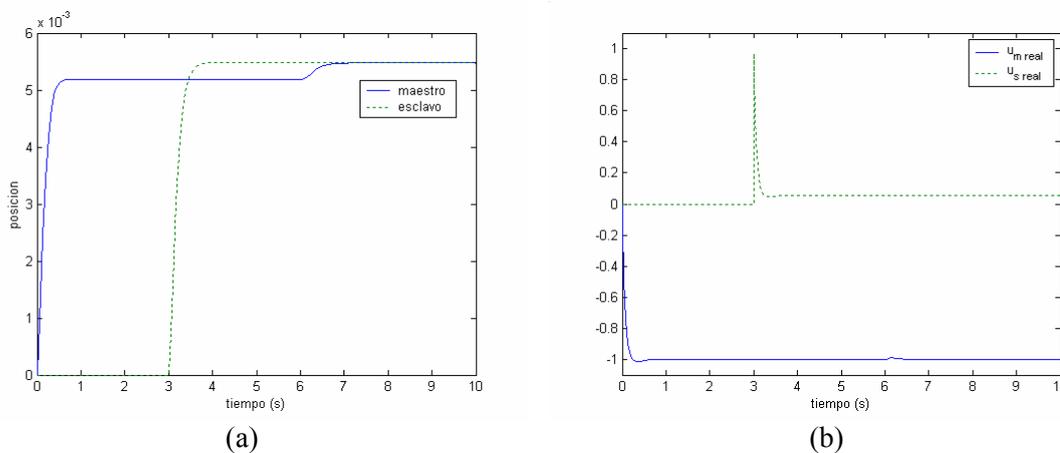


Figura 5.8. Comportamiento del sistema teleoperado II en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 3 s. (a) Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Si se analiza la estabilidad del sistema teleoperado en el caso de que el retardo de diseño sea de 0.5 s y el entorno sea suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)), el sistema sigue siendo asintóticamente estable, ya que $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$, como puede observarse en la Figura 5.9.

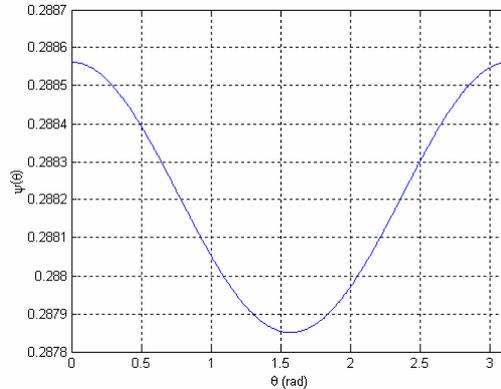


Figura 5.9. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado II cuando el retardo es de 0.5 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)).

Sin embargo, si se analiza la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II con un retardo de 0.5 s y con un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), se obtiene que ni siquiera el sistema es asintóticamente estable cuando no existe retardo. Es decir, la matriz $A = A_0 + A_1$ de la ecuación de estado no es *Hurwitz*, ya que posee valores propios con parte real positiva:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -35.58452120975537 \\ \lambda_{2,3} &= 1.81652154980819 \pm 15.02843671575056i \\ \lambda_4 &= -1.91518855652772 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Puesto que, siendo el retardo de diseño de 0.5 s, el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo cuando el entorno es suave, mientras que no es asintóticamente estable ni siquiera cuando no existe retardo, en el caso de que el entorno sea rígido, se puede apreciar que el tipo de entorno es un parámetro de diseño que afecta de forma importante a la estabilidad del sistema. En el apartado 5.7, donde se estudiará la influencia del tipo de entorno en la estabilidad del sistema, se mostrará que los sistemas teleoperados si interaccionan con entornos suaves tienen mayor probabilidad de ser estables que si interaccionan con entornos rígidos. Por otra parte, puesto que, considerando un entorno rígido, el sistema era asintóticamente estable independientemente del retardo cuando el retardo de diseño era de 0.1 s, mientras que si el retardo de diseño es de 0.5 s, el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera cuando no existe retardo, también puede deducirse, como es lógico, que el retardo de diseño es un parámetro crítico en la estabilidad del sistema teleoperado. En el apartado 5.6 se analizará en profundidad la dependencia de la estabilidad asintótica de un sistema teleoperado respecto al tiempo de retardo considerado en el diseño.

Si se simula el sistema teleoperado II con los reguladores obtenidos mediante el método de diseño en el caso de que el entorno es rígido y el retardo es de 0.5 s, se puede comprobar el comportamiento inestable del sistema, ver Figura 5.10(a). Sin embargo, se ha comprobado que utilizando un retardo de diseño de 0.1 s en un entorno rígido, se obtienen reguladores que hacen que el sistema sea asintóticamente estable independientemente del retardo. Por lo tanto, se pueden utilizar estos reguladores para controlar el sistema teleoperado cuando el entorno es rígido y el retardo es de 0.5 s. En la Figura 5.10(b) se muestra el sistema teleoperado II utilizando tales reguladores con un entorno rígido y un retardo de 0.5 s. Como puede observarse, utilizando los reguladores obtenidos con un retardo de diseño de 0.1 s, el sistema tiene un comportamiento estable, de forma que la posición del esclavo sigue a la posición del maestro.

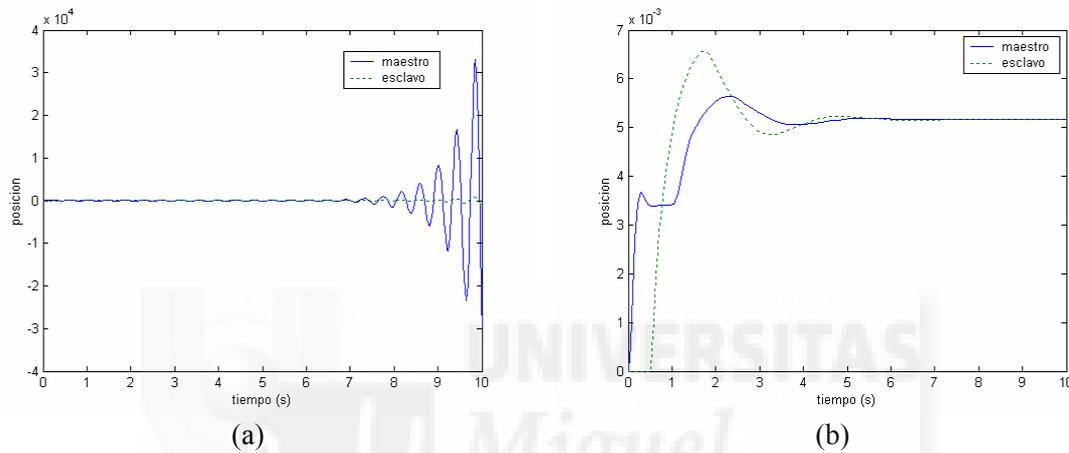


Figura 5.10. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) con un retardo de diseño de 0.5 s y un retardo real de 0.5 s; (b) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) con un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.5 s.

Para este sistema teleoperado utilizando el método de diseño se obtienen valores de los reguladores que hacen al sistema asintóticamente estable para todas las configuraciones de entorno y retardo de diseño, excepto en el caso de que el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.5 s. En este caso, el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera sin retardo. Sin embargo, puesto que considerando el mismo tipo de entorno pero con un retardo de diseño de 0.1 s, el método de diseño proporciona unos reguladores que hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo, pueden utilizarse tales reguladores para controlar el sistema cuando el retardo es de 0.5 s, asegurando su estabilidad. Como se indicó en el apartado 4.5.1, el método de control es robusto a variaciones en el tiempo de retardo, de forma que el esclavo seguirá al maestro, alcanzando ambos la misma posición final, a pesar de que el retardo de diseño difiera del real. Aunque esta divergencia entre retardos afectará al tiempo de establecimiento del esclavo y al tiempo de convergencia, así como al valor máximo de la señal de control del esclavo.

Por lo tanto, para el sistema teleoperado II es posible diseñar para todas las configuraciones el control que consigue que el esclavo siga al maestro asegurando además la estabilidad asintótica del sistema. Hay que resaltar como al disminuir el tiempo de diseño cuando el entorno es rígido, se obtienen unos reguladores que hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo. Como se ha comentado

anteriormente, la influencia del retardo de diseño en la estabilidad del sistema será estudiada posteriormente en el apartado 5.6.

5.4.3 Análisis de estabilidad del sistema teleoperado III: maestro > esclavo

Se va a efectuar el análisis de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III, en el que el maestro era de dimensiones superiores al esclavo, ver Tabla 5.3. Para llevar a cabo este análisis se van a utilizar los valores de los reguladores que se obtuvieron para cada configuración de entorno y tiempo de retardo en el epígrafe 4.3.3 del capítulo 4, ver Tabla 4.5.

Al analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III cuando el retardo de diseño es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$) se obtiene la función $\psi(\theta)$ que se muestra en la Figura 5.11. Como puede observarse el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo, ya que $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$.

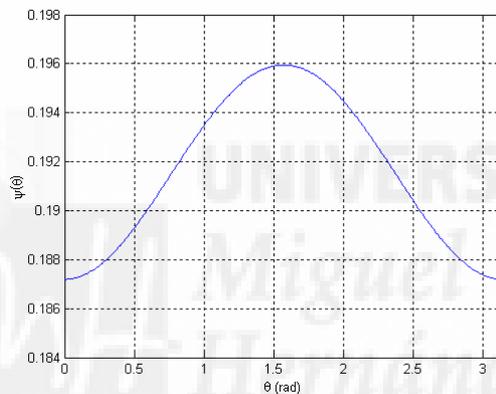


Figura 5.11. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado III cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$).

En la Figura 5.12 se muestra el comportamiento del sistema teleoperado III utilizando los reguladores obtenidos considerando un entorno suave y un retardo de diseño de 0.1 s, para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 1 s y la fuerza que ejerce el operador es de 1 Nm. Como puede observarse, la posición del esclavo sigue a la del maestro, a pesar de la diferencia del retardo real existente respecto al considerado para el diseño.

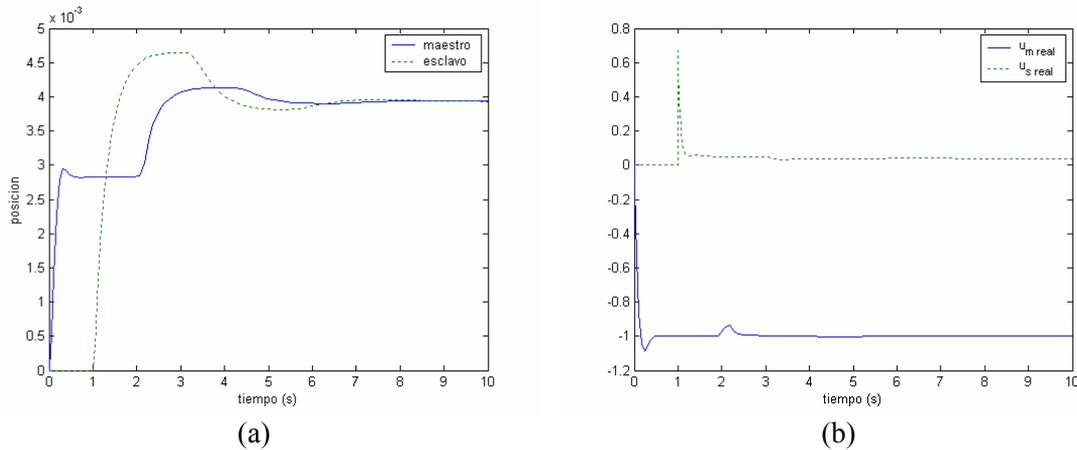


Figura 5.12. Comportamiento del sistema teleoperado III en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Sin embargo si se analiza la estabilidad asintótica del sistema teleoperado cuando el retardo de diseño sigue siendo 0.1 s, pero el entorno es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)), se obtiene que el sistema no es estable aún considerando que no existe retardo en la comunicación. Con los reguladores obtenidos mediante el método de diseño, la matriz $A = A_0 + A_1$ de la ecuación de estado no es *Hurwitz*, ya que posee valores propios con parte real positiva:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 7.97947781199506 \pm 25.80866865412731i \\ \lambda_3 &= -0.53198764084512 \\ \lambda_4 &= -42.42696798314504 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Se va a analizar la estabilidad asintótica del sistema considerando que el retardo de diseño es de 0.5 s y que el entorno con el que interactúa el esclavo es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). Como puede observarse en la Figura 5.13, el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo, ya que $\psi(\theta) \neq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$.

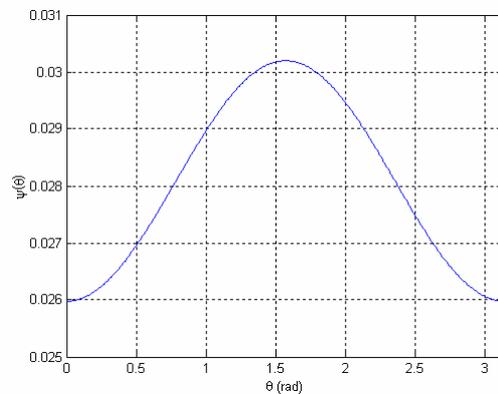


Figura 5.13. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado III cuando el retardo es de 0.5 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)).

Si se analiza la estabilidad asintótica del sistema teleoperado considerando que el retardo de diseño es de 0.5 s y que el entorno es rígido, se obtiene que el sistema no es asintóticamente estable incluso sin considerar la existencia de retardo, lo cual es lógico, ya que cuando el retardo de diseño era de 0.1 s ocurría lo mismo. Es decir, la matriz $A = A_0 + A_1$ de la ecuación de estado no es *Hurwitz*, ya que posee valores propios con parte real positiva:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 162.258017565600 \\ \lambda_2 &= -0.526544271995 \\ \lambda_3 &= 6.492356193053 \\ \lambda_4 &= -53.890496153324\end{aligned}\tag{5.32}$$

Por lo tanto, para este sistema teleoperado solamente es posible diseñar el control asegurando la estabilidad asintótica independiente del retardo cuando el entorno es suave. Con un entorno suave, tanto considerando que el retardo es de 0.1 s como si es de 0.5 s, se ha comprobado que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo. Sin embargo, si el entorno con el que interacciona el esclavo es rígido, no ha sido posible obtener con ninguno de los dos tiempos de retardo de diseño, unos reguladores que consigan la estabilidad asintótica del sistema, ya que en ambos casos, el sistema no es asintóticamente estable incluso sin considerar la existencia de retardo en la comunicación.

Como ya se había comprobado en el sistema teleoperado II, en este sistema también se puede apreciar que el tipo de entorno afecta de forma importante a la estabilidad del sistema. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, en este caso no ha sido posible conseguir la estabilidad ni siquiera considerando un retardo de diseño de 0.1 s si el entorno es rígido. Esto puede explicarse por el hecho de que, en el sistema teleoperado II la ganancia de reflexión de esfuerzos era 1, mientras que ahora vale 10, de forma que, como ocurre en los esquemas de control bilateral sin retardos [Peñín-97], la constante de reflexión de esfuerzos también es un parámetro crítico en la estabilidad del sistema. Valores elevados de la constante de reflexión de esfuerzos tenderán a inestabilizar el sistema teleoperado. En el apartado 5.8 se estudiará la influencia del valor de la ganancia de reflexión de esfuerzos en la estabilidad asintótica del sistema.

5.4.4 Conclusiones

Se ha analizado la estabilidad asintótica de los sistemas teleoperados con los valores de los reguladores obtenidos mediante el método de diseño según el tiempo de retardo y entorno considerados.

Al analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I (maestro < esclavo) se ha comprobado que, para todas las configuraciones de retardo y entorno, los valores que proporciona el método de diseño hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo (a excepción del caso en el que se considerara un entorno muy rígido). De este modo, es posible utilizar los reguladores obtenidos asumiendo un determinado tiempo de retardo, para controlar el sistema cuando el tiempo de retardo en la comunicación es mayor, ya que el sistema seguirá siendo asintóticamente estable y, como se indicó en el epígrafe 4.5.1 del capítulo 4, el método

de control es robusto a variaciones en el tiempo de retardo, de forma que el esclavo seguirá al maestro, alcanzando ambos la misma posición final, a pesar de que el retardo de diseño difiera del real.

Para el sistema teleoperado II (maestro = esclavo) se ha obtenido que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo cuando se asume un retardo de diseño de 0.1 s, tanto si el entorno es suave como si es rígido. Sin embargo, si se considera que el retardo de diseño es de 0.5 s, cuando el entorno es suave, el sistema sigue siendo asintóticamente estable independientemente del retardo, pero si es rígido, no se consigue la estabilidad asintótica ni siquiera considerando que no existe retardo en la comunicación. No obstante, gracias a la robustez del método de diseño, pueden utilizarse los reguladores obtenidos asumiendo un retardo de diseño de 0.1 s con un entorno rígido, para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s, asegurando la estabilidad asintótica, puesto que tales reguladores lograban la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo.

Al analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III (maestro > esclavo), se ha comprobado que, asumiendo un retardo de diseño de 0.1 s ó 0.5 s, si el entorno es suave, el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo en ambos casos. Sin embargo, si el entorno es rígido, tanto considerando un retardo de diseño de 0.1 s como de 0.5 s, no se consigue la estabilidad asintótica ni siquiera cuando no existe retardo.

Del análisis de estabilidad asintótica efectuado se ha deducido que existe una serie de parámetros de diseño que afectan de forma crítica a la estabilidad asintótica del sistema:

- Tiempo de retardo. El sistema teleoperado II en un entorno rígido es asintóticamente estable independientemente del retardo cuando el retardo de diseño es de 0.1 s, sin embargo, considerando un retardo de diseño de 0.5 s, el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera cuando no existe retardo. En general, cuanto mayor sea el tiempo de retardo de diseño, más tendencia tendrá el sistema teleoperado a no ser estable. La dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado respecto al tiempo de retardo será estudiada en el apartado 5.6.
- Tipo de entorno. El sistema teleoperado II, considerando un retardo de diseño de 0.5 s, es asintóticamente estable independientemente del retardo si el entorno es suave, mientras que si el entorno es rígido no es asintóticamente estable ni siquiera cuando no existe retardo. En el apartado 5.7 se estudiará como afecta el tipo de entorno en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, mostrando que los sistemas teleoperados que interaccionan con entornos rígidos tienen mayor probabilidad de no ser estables.
- Constante de reflexión de esfuerzos (k_f). En el sistema teleoperado II, donde k_f es 1, si el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s, se consigue que el sistema sea asintóticamente estable independientemente del retardo. Sin embargo, en el sistema teleoperado III, donde k_f es 10, si el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s, no se consigue la estabilidad asintótica incluso cuando no existe retardo. En el apartado 5.8 se estudiará la influencia de la constante de reflexión de esfuerzos en la estabilidad

asintótica del sistema teleoperado. En general, valores elevados de la constante de reflexión de esfuerzos tienden a inestabilizar el sistema.

Por último, hay que indicar que se ha realizado el análisis de la estabilidad asintótica de sistemas teleoperados concretos para extraer conclusiones relativas a la estabilidad, debido a la imposibilidad de efectuar un análisis simbólico del sistema teleoperado mostrado en la Figura 5.1 con los reguladores que se obtienen al solucionar las ecuaciones de diseño presentadas en el capítulo 3 de la presente Tesis.

5.5 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del polinomio característico del esclavo y del error

En el capítulo 3, al presentar el novedoso método de diseño de sistemas de control teleoperados con retardos, se indicó que era necesario establecer la dinámica deseada del esclavo y del error maestro – esclavo para poder plantear las ecuaciones de diseño. Por lo tanto, merece la pena analizar la influencia de la ubicación elegida para los polos del esclavo y del error, en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos. Debido a la imposibilidad de efectuar un análisis simbólico de la estabilidad en función de los polos del esclavo y del error, se va a estudiar la influencia de los polos del esclavo y del error en los tres sistemas teleoperados analizados en el apartado anterior, ver Tabla 5.3, con la finalidad de poder extraer conclusiones a partir de los resultados que se obtengan. Para cada sistema teleoperado, considerando un determinado retardo de diseño y un entorno, se va a ir variando la ubicación de los polos del polinomio característico del esclavo y la de los polos del polinomio característico del error. Utilizando la ubicación de polos del esclavo y del error se calculará el valor de los reguladores mediante el método de diseño y seguidamente, se analizará la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con los reguladores obtenidos.

Como se indicó en el apartado 4.4 del capítulo 4, es conveniente expresar la ecuación característica tanto del esclavo como del error de la siguiente forma:

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (5.33)$$

donde ω_n se denomina *frecuencia natural no amortiguada* y ζ es el *factor de amortiguamiento relativo* del sistema.

Para estudiar la influencia de los polos del esclavo y del error en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, como se explicó en el capítulo 4, se considerará que los polos se ubican en todos los casos de forma que el polinomio característico obtenido corresponde a un sistema críticamente amortiguado ($\zeta=1$) o a un sistema sobreamortiguado ($\zeta>1$).

5.5.1 Influencia de los polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado

Se va a analizar la estabilidad asintótica de los tres sistemas teleoperados considerados en el apartado anterior en función de la ubicación de los polos del esclavo. Para ello, considerando una determinada ubicación de polos del error, se irán seleccionando distintas ubicaciones de los polos del esclavo. Como se ha comentado anteriormente, para cada configuración de polos se calcularán los reguladores según el método de diseño y, seguidamente, se analizará la estabilidad asintótica del sistema. Se ha asumido que los polos del error se sitúan en la posición -11 del plano s , y que los polos del esclavo se van variando desde la posición -1 hasta la posición -21 del plano s .

En primer lugar se va a estudiar como afecta la ubicación de polos del esclavo a la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I (maestro $<$ esclavo). Para efectuar este estudio se va a considerar que el entorno con el que interactúa el esclavo es rígido y que el retardo de diseño es 0.5 s. En este sistema teleoperado se ha comprobado que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo para todas las ubicaciones de polos del esclavo, exceptuando los dos casos en los que los polos se encuentran en la posición más cercana al origen: $(-1, -1)$ y $(-1, -2)$. Para estas disposiciones de los polos del esclavo, el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo en la comunicación.

Se va a analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II (maestro = esclavo), al igual que en el sistema teleoperado I, considerando un retardo de diseño de 0.5 s y un entorno de interacción rígido. Como se indicó en el apartado anterior, si los dos polos del esclavo se ubican en la posición -11 , los reguladores obtenidos hacen que el sistema no sea asintóticamente estable ni siquiera considerando que no existe retardo. Del análisis de estabilidad efectuado se ha comprobado que la ubicación media de los polos del esclavo determina la estabilidad asintótica del sistema teleoperado. La estabilidad asintótica depende de esta posición media de la siguiente manera:

- Si la ubicación de los polos es tal que la media es mayor o igual a -12 , el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera considerando que no existe retardo.
- Si los polos se alejan de forma que la media es menor a -12 , el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo existente.

Por tanto, cuando los polos se encuentran cerca del origen, el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera cuando no hay retardo, y si se alejan lo suficiente los polos, se obtiene un sistema que es asintóticamente estable independientemente del retardo.

Por último se va a estudiar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III (maestro $>$ esclavo) cuando el entorno de interacción es rígido. Como se mostró en el apartado anterior, cuando el entorno con el que interaccionaba el esclavo era rígido y el retardo de diseño era 0.1 s ó 0.5 s, no era posible obtener reguladores que aseguraran la estabilidad asintótica del sistema teleoperado para ningún retardo. Al analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado considerando que el retardo de diseño es de 0.5 s, se ha comprobado que para ninguna ubicación de polos del esclavo, se ha conseguido que el sistema sea asintóticamente estable ni siquiera considerando que no existe retardo. Sin embargo, si se considera que el retardo de diseño es 0.1 s, es posible

encontrar ubicaciones de los polos del esclavo que aseguren la estabilidad asintótica del sistema hasta un determinado tiempo de retardo máximo. Del estudio realizado cuando el retardo es de 0.1 s se desprende:

- Si los polos se ubican de forma que la media es mayor o igual a -16, el sistema no es asintóticamente estable ni siquiera considerando que no existe retardo.
- Si los polos se alejan de manera que la media es menor a -16, el sistema es asintóticamente estable sólo hasta un determinado tiempo de retardo máximo. En la Figura 5.14(a) se muestra el retardo máximo admisible en función de la ubicación media de polos del esclavo. Como puede observarse, conforme la media es menor (más alejados se encuentran los polos del esclavo), mayor es el tiempo de retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica. Hay que resaltar que la gráfica de esta figura muestra una tendencia del tiempo de retardo máximo que asegura la estabilidad en función de la media de los polos del esclavo, ya que, como puede observarse, existen casos en los que, a pesar de disminuir la media, no aumenta el tiempo de retardo máximo admisible. En la Figura 5.14(b) puede comprobarse como a medida que los polos del esclavo se alejan del origen, aumenta el tiempo de retardo admisible.

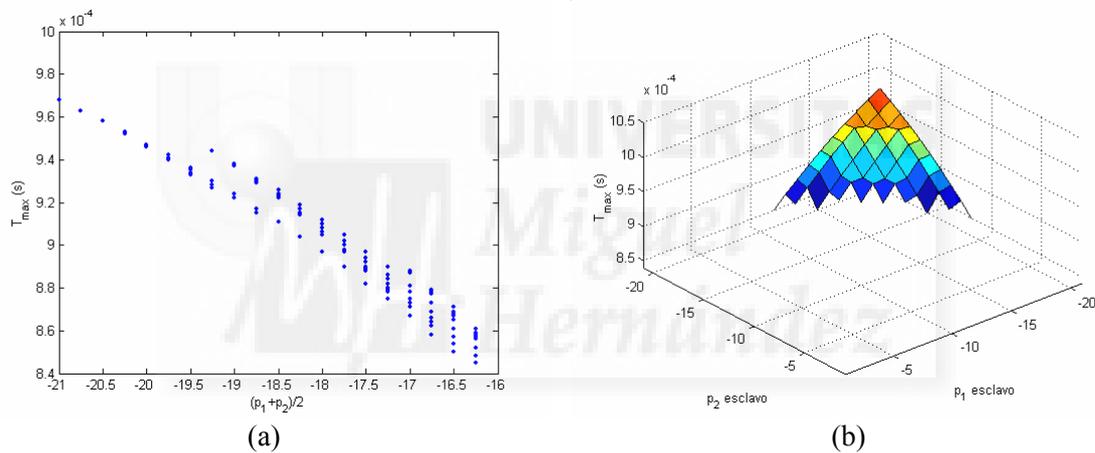


Figura 5.14. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema en función de: (a) la ubicación media de los polos del esclavo; (b) la ubicación de los polos del esclavo.

Al igual que en el sistema teleoperado II, en el sistema teleoperado III cuando los polos se encuentran cerca del origen, el sistema no es asintóticamente estable incluso si no existe retardo, y si se alejan lo suficiente los polos, se obtiene un sistema que es asintóticamente estable, aunque en este caso, para un determinado tiempo de retardo máximo (en el sistema teleoperado II se lograba la estabilidad asintótica independientemente del retardo).

Del estudio efectuado de la influencia de los polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, se puede concluir que si los polos se encuentran cerca del origen, el sistema no será asintóticamente estable aunque no exista retardo. Alejando los polos del origen se conseguirá que el sistema sea asintóticamente estable para retardos cada vez mayores (mayor tiempo de retardo admisible cuanto más alejados se encuentren los polos). Si los polos del esclavo se encuentran lo suficientemente alejados del origen, podrá conseguirse incluso la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, como se

explicó en el epígrafe 4.4.1 del capítulo 4, donde se analizó la influencia de los polos del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado, si se alejan los polos del esclavo, disminuirá la posición final del maestro y del esclavo, y se incrementará el valor absoluto máximo de la señal de control del maestro. Por lo tanto al realizar el diseño del sistema teleoperado y seleccionar la ubicación de polos del esclavo, será necesario alcanzar un compromiso entre comportamiento dinámico y estabilidad asintótica.

5.5.2 Influencia de los polos del error en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado

Tras comprobar en el epígrafe anterior la influencia de la ubicación de los polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema, se va a estudiar en este epígrafe la estabilidad asintótica en función de los polos del error, siguiendo un procedimiento de análisis similar al previo. Es decir, se van a utilizar los mismos sistemas teleoperados que en el epígrafe anterior, sin embargo ahora, en cada sistema, se fijarán los polos del esclavo en la posición -11 del plano s , y se irán variando los polos del error desde la posición -1 hasta la posición -21 del plano s .

Se va a analizar primeramente la estabilidad asintótica del sistema teleoperado I (maestro < esclavo) considerando que el esclavo interactúa con un entorno rígido y que el retardo de diseño es 0.5 s. Para este sistema teleoperado se ha conseguido la estabilidad asintótica independientemente del retardo para todas las ubicaciones de polos del error.

Al estudiar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II (maestro = esclavo), asumiendo un retardo de diseño de 0.5 s y un entorno de interacción rígido, se ha comprobado que el sistema no consigue la estabilidad asintótica incluso si no existe retardo, independiente de la ubicación de polos del error. Sin embargo, si se considera que el retardo de diseño es 0.1 s, se ha verificado que la estabilidad asintótica del sistema dependerá de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del polinomio característico del error. Es interesante indicar que, aunque la estabilidad asintótica es influenciada por la ubicación media de los polos del esclavo, como se mostró en el epígrafe anterior, sin embargo no depende de la ubicación media de los polos del error, sino que depende de la ω_n del polinomio característico del error. Del estudio realizado se ha obtenido que la ω_n del error afecta del siguiente modo a la estabilidad asintótica del sistema teleoperado:

- Si la ω_n del error es inferior o igual a 8.717798 (polos del error cercanos al origen) el sistema es asintóticamente estable sólo hasta un tiempo de retardo máximo. Conforme ω_n es mayor, mayor es el tiempo de retardo admisible, tal como se muestra en Figura 5.15(a). Es decir, conforme se alejan los polos del origen, mayor es el tiempo de retardo máximo admisible por el sistema, Figura 5.15(b). Hay que indicar que, como ocurría en el epígrafe anterior, la gráfica de la Figura 5.15(a) muestra una tendencia del retardo máximo que asegura la estabilidad, en este caso, en función de la ω_n del error, ya que, como puede observarse, en ocasiones, a pesar de aumentar el valor de la ω_n del error, no aumenta el retardo máximo admisible.

- Si los polos del error se ubican de forma que la ω_n es mayor a 8.774964, el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo, excepto para las ubicaciones (-5,-16), (-4,-20), (-4,-21) y (-5,-17), en los que el sistema es asintóticamente estable sólo hasta un determinado retardo máximo.

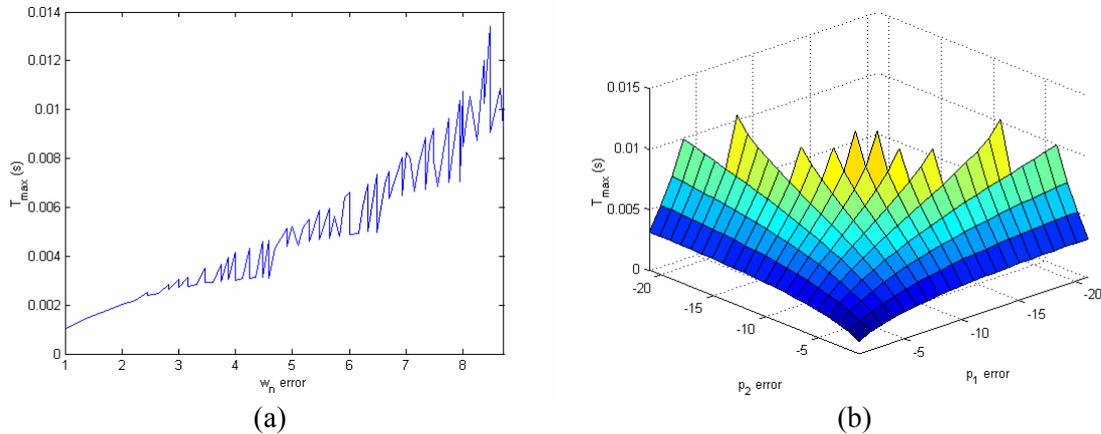


Figura 5.15. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II en función de: (a) la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) la ubicación de los polos del error.

Por último, al analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III (maestro > esclavo), considerando tanto que el retardo de diseño es de 0.5 s como de 0.1 s, se ha comprobado que, con ninguna de las ubicaciones de polos del error elegidas se consigue que el sistema sea asintóticamente estable ni siquiera considerando que no hay retardo.

Del análisis de estabilidad efectuado se puede concluir que:

- En el sistema teleoperado I cuando el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.5 s, la ubicación de polos del error no afecta a la estabilidad asintótica del sistema, pues siempre se consigue la estabilidad asintótica independientemente del retardo.
- Por otra parte, en el sistema teleoperado III, cuando el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s ó 0.5 s, la ubicación de polos del error tampoco afecta a la estabilidad asintótica, pues nunca se consigue la estabilidad del sistema incluso cuando no existe retardo.
- Sin embargo, en el sistema teleoperado II, si el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s, la ubicación de polos del error sí influye en la estabilidad asintótica. Para valores pequeños de ω_n se consigue la estabilidad asintótica sólo hasta un tiempo de retardo máximo. Conforme ω_n es mayor (se alejan los polos del origen) el retardo máximo admisible es mayor. A partir de un valor de ω_n se consigue la estabilidad asintótica independientemente del retardo.

Por tanto, en determinados casos, será posible conseguir la estabilidad asintótica del sistema, incluso independientemente del retardo, si se alejan los polos del error lo suficiente del origen. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que, como se explicó en el epígrafe 4.4.2 del capítulo 4, donde se analizó la influencia de los polos del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado, si se alejan los polos del error, se incrementará el valor absoluto máximo de la señal de control del esclavo. En

consecuencia, al seleccionar la ubicación de polos del error para efectuar el diseño del sistema teleoperado, será necesario llegar a un compromiso entre comportamiento dinámico y estabilidad asintótica.

5.5.3 Influencia conjunta de los polos del esclavo y del error

A partir del estudio de la influencia por separado de los polos del esclavo y del error en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La estabilidad asintótica es influenciada en mayor medida por la ubicación de polos del esclavo que por el emplazamiento de los polos del error. Por ejemplo en el sistema teleoperado III si el entorno era rígido y el retardo de diseño era de 0.1 s, es posible encontrar ubicaciones de los polos del esclavo que hagan al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo. Sin embargo, modificando la posición de los polos del error no ha sido posible obtener ni siquiera la estabilidad asintótica sin retardo.
- La estabilidad asintótica del sistema teleoperado es afectada por la ubicación media de los polos del esclavo. Si la ubicación media de los polos se encuentra cerca del origen, puede que el sistema no sea asintóticamente estable incluso sin retardo. Si se alejan lo suficiente los polos, se puede obtener un sistema asintóticamente estable hasta un determinado valor de retardo máximo. Además, a partir de un determinado valor medio de ubicación de los polos, se logrará la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo.
- La ubicación de polos del error afecta también a la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, como se ha podido comprobar en el sistema teleoperado III cuando el entorno era rígido y el retardo de diseño era de 0.1 s. No obstante, influye en mucho menor grado que la ubicación de polos del esclavo.
- La estabilidad asintótica del sistema depende de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del polinomio característico del error. En general conforme ω_n sea mayor (se alejen los polos del origen) el retardo máximo admisible que asegure la estabilidad asintótica será mayor. A partir de un valor determinado de ω_n se conseguirá la estabilidad asintótica independientemente del retardo.

Por lo tanto a la hora de realizar el diseño del control del sistema teleoperado será conveniente alejar del origen tanto los polos del esclavo como los del error para asegurar la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo o incrementar en la medida de lo posible el tiempo máximo de retardo que asegure la estabilidad asintótica. Sin embargo, es necesario tener en cuenta la influencia de los polos del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado antes de seleccionar su ubicación.

En el epígrafe 4.4.3 del capítulo 4 se analizó la influencia conjunta de los polos del esclavo y del error en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado. En este análisis se indicó que al alejar los polos del esclavo y del error, se conseguía que la respuesta del sistema fuera más rápida y se produjera en menor tiempo la convergencia entre el maestro y el esclavo. Sin embargo, para una determinada ubicación de polos del esclavo seleccionada, al alejar los polos del error, se mostró que la señal de control del esclavo aumentaba, por lo que era necesario llegar a un compromiso entre tiempo de

convergencia y valor máximo de la señal de control del esclavo a la hora de establecer la ubicación de polos del error. Puesto que se ha mostrado que es conveniente alejar los polos del error para asegurar la estabilidad asintótica independiente del retardo, será necesario seleccionar los polos del error alcanzando un compromiso no sólo entre tiempo de convergencia y valor máximo de la señal de control del esclavo, sino también contemplando la estabilidad asintótica.

5.6 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del tiempo de retardo de diseño

Como se comprobó en el apartado 5.4 la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II depende del tiempo de retardo considerado para el diseño, de forma que si el retardo es de 0.1 s se obtienen reguladores que hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo, mientras que si se considera un retardo de 0.5 s, los reguladores calculados no logran la estabilidad asintótica del sistema incluso asumiendo que no existe retardo. En este apartado se va a estudiar de qué forma afecta el retardo de diseño en la estabilidad asintótica. Para ello se analizará la estabilidad de los tres sistemas teleoperados utilizados a lo largo del capítulo en función de distintos tiempos de retardo de diseño. Se va a ir modificando en cada sistema teleoperado el tiempo de retardo de diseño desde 0.05 s hasta 2 s. Para cada retardo, se calcularán los reguladores utilizando el método de diseño y, seguidamente, se analizará la estabilidad asintótica del sistema. En todos los casos se considerará que los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -11 del plano s .

De las distintas pruebas realizadas se han obtenido los siguientes resultados:

- En el sistema teleoperado I (maestro < esclavo) tanto cuando el entorno es suave como cuando es rígido, para todos los retardos de diseño considerados se consigue la estabilidad asintótica independiente del retardo.
- En el sistema teleoperado II (maestro = esclavo), si el entorno es suave, siempre se consigue la estabilidad asintótica independiente del retardo. Sin embargo, si el entorno es rígido, la estabilidad asintótica independiente del retardo sólo se consigue para retardos de diseño menor o iguales a 0.4 s. Para valores mayores el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo.
- En el sistema teleoperado III (maestro > esclavo) si el entorno es suave se logra la estabilidad asintótica independiente del retardo siempre que el retardo de diseño sea inferior o igual a 0.55 s. Para retardos mayores no se consigue la estabilidad asintótica aunque no exista retardo. Por otra parte, si el entorno es rígido, para retardos inferiores a 0.055 s se consigue la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo máximo. En la Figura 5.16 se puede observar como conforme crece el retardo de diseño, aumenta el tiempo de retardo máximo que puede admitir el sistema asegurando la estabilidad asintótica. Para retardos mayores a 0.055 s el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo.

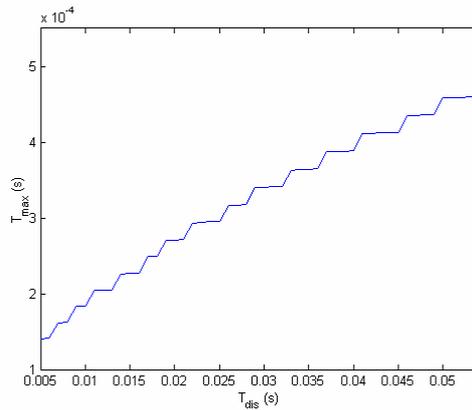


Figura 5.16. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III en función del retardo de diseño.

Del estudio efectuado se puede concluir que, en general, el retardo de diseño afecta a la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del siguiente modo:

- Para valores pequeños puede lograrse la estabilidad asintótica independiente del retardo.
- De igual modo para valores pequeños del retardo de diseño puede conseguirse que el sistema sea asintóticamente estable hasta un determinado valor de retardo máximo. A medida que aumente el retardo de diseño, será mayor el valor de retardo máximo admisible.
- A partir de un determinado retardo de diseño el sistema no será asintóticamente estable incluso considerando que no existe retardo.

Por lo tanto, si al diseñar el sistema teleoperado asumiendo un determinado tiempo de retardo se obtiene que el sistema no es asintóticamente estable, podrá disminuirse el tiempo de retardo de diseño para asegurar la estabilidad asintótica del sistema. Además, como se mostró en el epígrafe 4.5.1 del capítulo 4, el método de diseño es robusto a variaciones en el retardo de diseño, por lo que se podrá disminuir el retardo de diseño para conseguir la estabilidad asintótica del sistema, asegurando además un funcionamiento adecuado del sistema teleoperado, de forma que el esclavo siga al maestro. No obstante, si el tiempo de retardo utilizado en la fase de diseño difiere del retardo real en la comunicación, los polos del esclavo y del error del sistema teleoperado controlado no corresponderán a los polos del esclavo y del error fijados en la fase de diseño, de manera que el comportamiento dinámico del sistema teleoperado variará ligeramente respecto del comportamiento deseado establecido en la etapa de diseño.

Hay que indicar que también existe una relación entre el retardo de diseño y la ubicación de polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema. Se ha comprobado que, a medida que disminuye el tiempo de retardo de diseño, se puede asegurar la estabilidad asintótica del sistema para valores de los polos del esclavo cada vez más cercanos al origen. Es decir, conforme aumenta el retardo de diseño es necesario ubicar los polos del esclavo más alejados del origen para asegurar la estabilidad asintótica del sistema. En la Tabla 5.5 se muestra la relación entre el retardo de diseño y la ubicación media de los polos del esclavo en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II (maestro = esclavo), cuando el esclavo interacciona con un

entorno rígido y los polos del error se fijan en la posición -11 del plano s . En la primera columna de dicha tabla se muestran los retardos de diseño considerados. En la segunda columna se indica, para cada retardo, el intervalo del valor medio de ubicación de polos que asegura la estabilidad asintótica independiente del retardo. Como se puede apreciar, a medida que aumenta el retardo de diseño, es necesario ubicar los polos del esclavo más alejados del origen para asegurar la estabilidad asintótica independiente del retardo. En la tercera columna se muestra el intervalo del valor medio de ubicación de polos con el que el sistema es asintóticamente estable sólo hasta un determinado tiempo de retardo máximo. Por último, en la cuarta columna aparece el intervalo del valor medio de los polos del esclavo con el que el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo. En esta columna se puede observar que, conforme aumenta el retardo de diseño, el sistema no es asintóticamente estable para polos cada vez más alejados del origen.

Retardo diseño	Estab. asintót. independ. del retardo	Estab. asintót. depend. del retardo	No estab. asintót. sin retardo
0.05s	$(-\infty, -4]$	$(-4, -1)$	$[-1, +\infty)$
0.1s	$(-\infty, -7.5]$	$(-7.5, -3)$	$[-3, +\infty)$
0.15s	$(-\infty, -8.5]$	$(-8.5, -4.5)$	$[-4.5, +\infty)$
0.2s	$(-\infty, -9.5]$	$(-9.5, -6)$	$[-6, +\infty)$
0.25s	$(-\infty, -10.5]$	$(-10.5, -7)$	$[-7, +\infty)$
0.3s	$(-\infty, -11]$	$(-11, -8)$	$[-8, +\infty)$
0.35s	$(-\infty, -11]$	$(-11, -9)$	$[-9, +\infty)$
0.4s	$(-\infty, -11]$	$(-11, -10)$	$[-10, +\infty)$

Tabla 5.5. Dependencia de la ubicación media de los polos del esclavo del retardo de diseño en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II cuando el entorno es rígido.

5.7 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado del entorno de interacción

En este apartado se va a estudiar la influencia del entorno con el que interacciona el esclavo en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado. Para efectuar este estudio se van a utilizar los tres sistemas teleoperados que se vienen considerando a lo largo del capítulo, modificando el entorno con el que interacciona el esclavo. Como se indicó en la Tabla 5.4, los medios con los que podía interaccionar el esclavo eran un entorno suave ($k_e = 10 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 0.1 \text{ Nm/(rad/s)}$) y un entorno rígido ($k_e = 100 \text{ Nm/rad}$, $b_e = 1 \text{ Nm/(rad/s)}$). Se va ir variando en cada sistema teleoperado la constante de rigidez del entorno (k_e) entre 10 Nm/rad y 100 Nm/rad , así como el coeficiente de rozamiento viscoso (b_e) entre 0.1 Nm/(rad/s) y 1 Nm/(rad/s) . Para cada entorno se calculará el valor de los reguladores según el método de diseño. A partir de los reguladores obtenidos se analizará la estabilidad del sistema teleoperado. En todos los casos se considerará que los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -11 del plano s .

Como se mostró en el apartado 5.4, el sistema teleoperado I (maestro < esclavo) era asintóticamente estable independiente del retardo, tanto para el entorno suave como para el rígido, considerando retardos de diseño de 0.1 s ó 0.5 s .

Asimismo en el sistema teleoperado II (maestro = esclavo) si el retardo de diseño es de 0.1 s , el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo cuando el

entorno es suave y cuando es rígido. Sin embargo no ocurre lo mismo si el retardo de diseño es de 0.5 s. En este caso, a partir de las pruebas realizadas, se ha obtenido que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo para entornos modelados por valores comprendidos entre $k_e = 10$ Nm/rad y $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s), y $k_e = 80$ Nm/rad y $b_e = 1$ Nm/(rad/s). Para entornos más rígidos, no se consigue la estabilidad asintótica incluso considerando que no hay retardos.

Por otra parte en el sistema teleoperado III (maestro > esclavo), si el retardo de diseño es de 0.1s, se ha comprobado que en el caso de que el entorno sea modelado por $k_e = 10$ Nm/rad y $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s), el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo. Si es modelado por valores comprendidos entre $k_e = 20$ Nm/rad y $b_e = 0.2$ Nm/(rad/s), y $k_e = 50$ Nm/rad y $b_e = 0.5$ Nm/(rad/s), es asintóticamente estable hasta un tiempo de retardo máximo. Para valores mayores (entorno más rígidos) no se logra la estabilidad asintótica incluso sin retardos. Hay que indicar que cuando el sistema es asintóticamente estable hasta un retardo máximo admisible, dicho retardo disminuye conforme crece la rigidez del entorno, como puede observarse en la Tabla 5.6. Si se considera un retardo de diseño de 0.5 s, únicamente el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo en el caso de que el entorno sea modelado por $k_e = 10$ Nm/rad y $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s), de forma que para valores mayores no se logra la estabilidad asintótica incluso sin retardo.

Constante de rigidez (k_e)	Rozamiento viscoso (b_e)	\hat{T}
20 Nm/rad	0.2 Nm/(rad/s)	0.008837 s
30 Nm/rad	0.3 Nm/(rad/s)	0.003898 s
40 Nm/rad	0.4 Nm/(rad/s)	0.002401 s
50 Nm/rad	0.5 Nm/(rad/s)	0.001702 s

Tabla 5.6. Retardo máximo admisible por el sistema teleoperado III asegurando la estabilidad asintótica en función del tipo de entorno.

Por lo tanto, del estudio realizado de la influencia del entorno en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, se puede concluir en general que:

- Si el entorno es lo suficientemente suave, el sistema será asintóticamente estable independientemente del retardo.
- Si aumenta la rigidez del entorno, el sistema será asintóticamente estable hasta un retardo máximo admisible. Conforme aumente la rigidez del entorno, menor será el máximo retardo admisible.
- A partir de un valor de rigidez del entorno el sistema no será asintóticamente estable incluso sin retardo.

5.8 Dependencia de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado de la constante de reflexión de esfuerzos

En un sistema de control bilateral clásico fuerza – posición, ver epígrafe 2.3.2 del capítulo 2, la constante de reflexión de esfuerzos (k_f) indica en qué grado se realimenta la fuerza de reacción del esclavo con el entorno hacia el maestro, de forma que esta

constante determina la sensación que tiene el operador de las fuerzas que se ejercen en la zona remota.

En general, interesa que k_f tenga un valor próximo a uno para que el operador tenga constancia de la fuerza real que ejerce el esclavo contra el entorno. Sin embargo, en sistemas de macroteleoperación, donde el esclavo es de dimensiones mayores al maestro, la constante de reflexión de esfuerzos debe ser menor a la unidad para que el operador pueda efectuar la tarea de forma cómoda. Por el contrario, en sistemas de microteleoperación, donde el esclavo es de dimensiones inferiores al maestro, es interesante que k_f sea superior a la unidad para que se amplifique la fuerza que ejerce el esclavo y tenga una mayor repercusión sobre el operador, de forma que se facilite la realización de la tarea. Como se indica en [Peñín-98], esta constante afecta críticamente a la estabilidad de los sistemas teleoperados, de manera que valores elevados de k_f tienden a inestabilizar al sistema.

En el apartado 5.4 se comprobó que la constante de reflexión de esfuerzos (k_f) también es un factor crítico en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos presentado en esta Tesis. En dicho apartado se mostró que, en el sistema teleoperado II, donde k_f es 1, si el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s, se consigue la estabilidad asintótica independientemente del retardo. Sin embargo, en el sistema teleoperado III, donde k_f es 10, si el entorno es rígido y el retardo de diseño es de 0.1 s, no se consigue la estabilidad asintótica incluso cuando no existe retardo.

En este apartado va a estudiarse en profundidad la influencia de la constante de reflexión de esfuerzos en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos. Para efectuar este estudio va a analizarse la estabilidad asintótica de los tres sistemas teleoperados considerados a lo largo del capítulo en función de la constante de reflexión de esfuerzos. En el sistema teleoperado I (maestro < esclavo) se modificará k_f desde 0.01 hasta 1, en el sistema teleoperado II (maestro = esclavo) se variará k_f desde 0.1 hasta 10, y por último, en el sistema teleoperado III (maestro > esclavo) se modificará k_f desde 1 hasta 100. Para cada valor de k_f se calcularán los reguladores utilizando el método de diseño y, seguidamente, se analizará la estabilidad asintótica del sistema. En todos los casos se considerará que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 s, y que los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -11 del plano s .

En el sistema teleoperado I (maestro < esclavo), tanto cuando el entorno es suave como cuando es rígido, para todos los valores de k_f considerados se consigue la estabilidad asintótica independiente del retardo.

En el sistema teleoperado II (maestro = esclavo), si el entorno es suave siempre se consigue la estabilidad asintótica independiente del retardo. Sin embargo, si el entorno es rígido, sólo se asegura la estabilidad asintótica del sistema independiente del retardo para valores de k_f inferiores a 1.5. Para valores de k_f pertenecientes al intervalo [1.5, 4.2] se consigue la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo máximo. Conforme aumente el valor de k_f , menor será el retardo máximo admisible que asegure la estabilidad asintótica del sistema, ver Figura 5.17. Para valores de k_f mayores a 4.2 el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo.

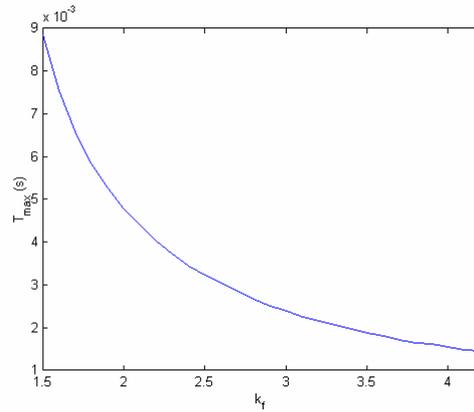


Figura 5.17. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II en función de la constante de reflexión de esfuerzos (k_f).

En el sistema teleoperado III (maestro > esclavo), si el entorno es suave se consigue la estabilidad asintótica del sistema independiente del retardo para valores de k_f inferiores a 19. Para valores de k_f dentro del intervalo [19, 56] se asegura la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo máximo. A medida que aumente el valor de k_f , menor será el retardo máximo admisible que asegure la estabilidad asintótica del sistema, ver Figura 5.18(a). Para valores de k_f superiores a 56 el sistema no es asintóticamente estable aunque no exista retardo. En el caso de que el entorno sea rígido, sólo se asegura la estabilidad asintótica independiente del retardo si el valor de k_f es uno. Para valores de k_f pertenecientes al intervalo [2, 5] se consigue la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo máximo. Conforme aumente el valor de k_f , menor será el retardo máximo admisible que asegure la estabilidad asintótica, ver Figura 5.18(b). Si el valor de k_f es superior a 5 el sistema no es asintóticamente estable incluso sin retardo.

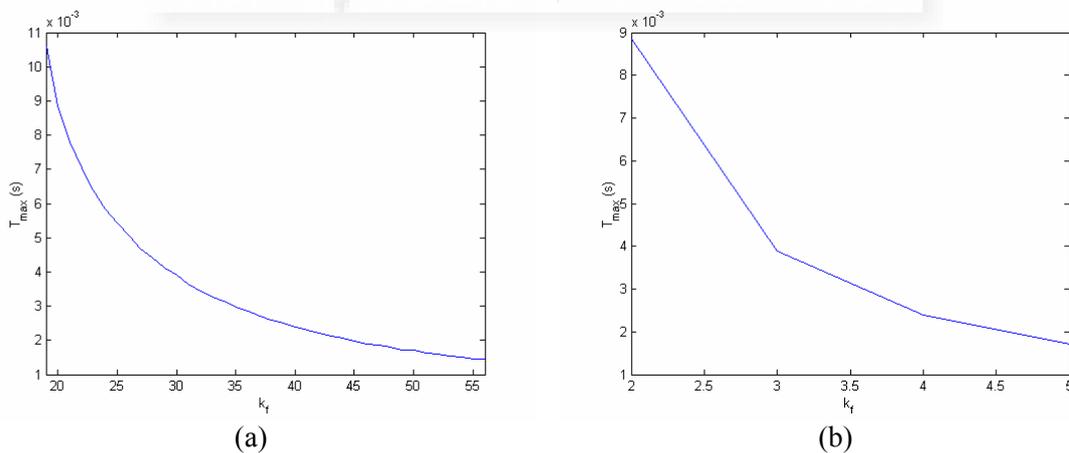


Figura 5.18. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III en función de la constante de reflexión de esfuerzos (k_f). (a) Entorno suave; (b) Entorno rígido.

A partir de los resultados obtenidos se puede concluir que la constante de reflexión de esfuerzos (k_f) afecta a la estabilidad asintótica del sistema teleoperado de la siguiente manera:

- Para valores pequeños puede conseguirse la estabilidad asintótica independiente del retardo.
- Al aumentar el valor de k_f puede asegurarse la estabilidad asintótica hasta un determinado retardo máximo.
- A partir de un cierto valor de k_f el sistema no será asintóticamente estable incluso considerando que no existe retardo.
- El mayor valor que puede tomar k_f de forma que se asegure la estabilidad asintótica del sistema independiente del retardo o hasta un determinado retardo máximo, depende de la rigidez del entorno. Conforme aumente la rigidez del entorno, menor será el valor de k_f admisible.

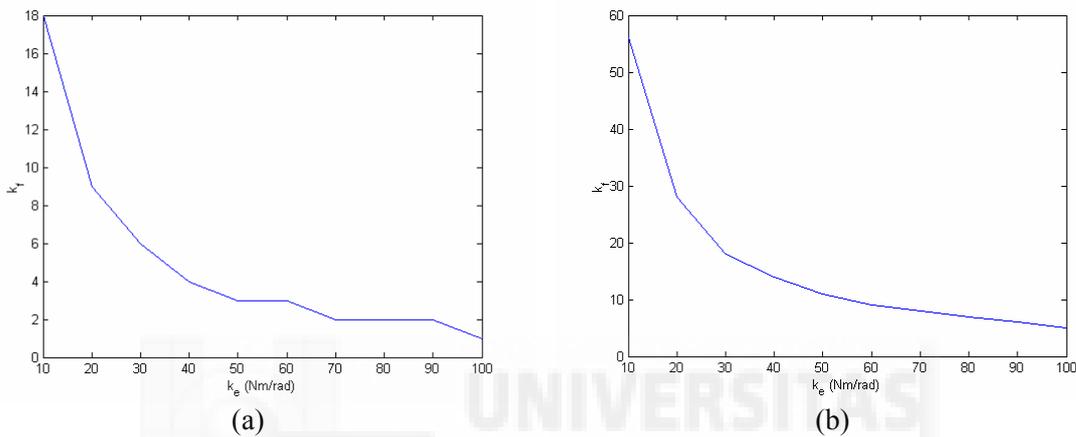


Figura 5.19. (a) Máximo valor de k_f que asegura la estabilidad asintótica independiente del retardo en función de la rigidez del entorno; (b) Máximo valor de k_f que asegura la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo en función de la rigidez del entorno.

Como se ha comentado, el valor máximo admisible de k_f asegurando la estabilidad asintótica del sistema, independiente del retardo o hasta un determinado tiempo de retardo, depende de la rigidez del entorno. Se va a representar para el sistema teleoperado III el valor máximo de k_f que asegura la estabilidad asintótica independiente del retardo, así como el valor máximo de k_f que asegura la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo, en función de la rigidez del entorno. Para ello se va ir modificando tanto el entorno como k_f . Se va a ir variando la constante de rigidez del entorno (k_e) entre 10 Nm/rad y 100 Nm/rad, y el coeficiente de rozamiento viscoso (b_e) entre 0.1 Nm/(rad/s) y 1 Nm/(rad/s). Para cada entorno se modificará asimismo k_f entre 1 y 100. A partir de cada configuración de entorno y k_f se calcularán los reguladores utilizando el método de diseño y, seguidamente, se analizará la estabilidad asintótica del sistema. A la curva que representa el valor máximo que puede tomar k_f en función de la rigidez del entorno de forma que el sistema no se inestabilice, se le conoce como curva de estabilidad crítica [Peñín-98]. En la Figura 5.19(a) se muestra el valor máximo que puede tomar k_f en función de la rigidez del entorno de manera que el sistema sea asintóticamente estable independientemente del retardo. Como puede apreciarse, conforme aumenta la rigidez del entorno, disminuye el valor de k_f . Por otra parte, en la Figura 5.19(b) puede observarse el valor máximo de k_f en función de la rigidez del entorno de forma que se asegure la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo. En este caso también se puede apreciar que, a medida que aumenta la rigidez del entorno, disminuye el máximo valor admisible de k_f . Si se comparan ambas gráficas,

puede observarse, como se había indicado anteriormente, que para un determinado entorno, el valor máximo que puede tomar k_f asegurando la estabilidad asintótica independiente del retardo, es inferior al valor que puede tomar para conseguir la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo. Hay que aclarar que en sendas gráficas se ha representado k_f frente a la constante de rigidez del entorno (k_e), aunque el entorno ha sido modelado a través de la constante de rigidez (k_e) y el coeficiente de rozamiento viscoso (b_e).

5.9 Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos diseñado según el procedimiento presentado en el capítulo 3. Para analizar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado se ha considerado el modelo de estado lineal obtenido sin aproximar el retardo existente en la comunicación.

Existen dos tipos de estabilidad asintótica de un sistema con retardos: estabilidad independiente del retardo y estabilidad dependiente del retardo. En la estabilidad asintótica independiente del retardo se asegura la estabilidad independientemente del retardo, mientras que en la dependiente del retardo sólo se asegura la estabilidad asintótica hasta un valor de retardo máximo. Existen multitud de criterios que permiten analizar la estabilidad asintótica de un sistema con retardos, tal como se ha mostrado al inicio del capítulo. En esta Tesis se ha optado por elegir los criterios propuestos por J.-H. Su *et al.* basados en el dominio frecuencial [Su-94]. Tales criterios han sido utilizados para analizar la estabilidad asintótica de diferentes sistemas teleoperados con retardos. Asimismo han sido empleados para estudiar la influencia en la estabilidad asintótica de diversos parámetros de diseño.

Las principales conclusiones que se han obtenido en este capítulo son las siguientes:

- La estabilidad asintótica de un sistema teleoperado depende del tipo de entorno con el que interacciona el esclavo, de la constante de reflexión de esfuerzos, del retardo considerado en el diseño, así como de la ubicación de polos del esclavo y del error elegida.
- La estabilidad asintótica es influenciada en mayor medida por los polos del esclavo que por los polos del error.
- La estabilidad asintótica depende de la ubicación media de los polos del esclavo. Alejando lo suficiente los polos del origen se puede lograr la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo. Sin embargo, hay que tener en cuenta la influencia de los polos del esclavo en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado, ya que, en el capítulo 4 se comprobó que al alejar los polos del esclavo, disminuía la posición final del maestro y del esclavo, y se incrementaba el valor absoluto máximo de la señal de control del maestro. Por lo tanto será necesario llegar a un compromiso entre el comportamiento dinámico y la estabilidad asintótica del sistema a la hora de seleccionar la ubicación de los polos del esclavo.
- La estabilidad asintótica del sistema depende de la *frecuencia natural no amortiguada* (ω_n) del polinomio característico del error. A partir de un determinado valor de ω_n (alejando los polos del error del origen) se puede

conseguir la estabilidad asintótica independientemente del retardo. No obstante, al igual que ocurría en el caso de los polos del esclavo, es necesario considerar la influencia de los polos del error en el comportamiento dinámico del sistema, puesto que en el capítulo 4 se mostró como al alejar los polos del error del origen se incrementaba el valor absoluto máximo de la señal de control del esclavo. Por tanto, habrá que alcanzar un compromiso entre el comportamiento dinámico y la estabilidad asintótica cuando se decida la ubicación de los polos del error.

- Si el retardo de diseño es lo suficientemente pequeño puede que el sistema sea asintóticamente estable independientemente del retardo. A partir de un valor de retardo el sistema no será asintóticamente estable incluso sin retardo. Puesto que en el capítulo 4 se mostró que el método de diseño era robusto a ligeras variaciones en el tiempo de retardo, si un sistema teleoperado no es asintóticamente estable con un determinado retardo, podrá disminuirse el retardo de diseño para conseguir la estabilidad asintótica, y asegurar al mismo tiempo un funcionamiento adecuado del sistema teleoperado con el retardo real, de forma que el esclavo siga al maestro. No obstante, es importante tener en consideración que si el tiempo de retardo de diseño difiere del retardo real, los polos del esclavo y del error del sistema controlado no corresponderán a los polos fijados en la fase de diseño, de manera que el comportamiento dinámico del sistema variará ligeramente respecto del comportamiento deseado establecido en el diseño.
- Si el entorno es muy suave es probable que el sistema sea asintóticamente estable independientemente del retardo, mientras que si el entorno es muy rígido puede que el sistema no sea asintóticamente estable aunque no exista retardo.
- La constante de reflexión de esfuerzos del sistema (k_f) afecta críticamente a la estabilidad asintótica del sistema. Valores elevados de k_f tienden a inestabilizar el sistema teleoperado. El valor máximo que puede tomar k_f de forma que no se inestabilice el sistema depende de la rigidez del entorno. Conforme mayor sea la rigidez del entorno, menor será el valor de k_f admisible por el sistema sin que se inestabilice.

Por lo tanto las condiciones más favorables para que un sistema teleoperado sea asintóticamente estable independientemente del retardo serán: polos del esclavo y del error alejados del origen, tiempo de retardo pequeño, entorno suave y constante de reflexión de esfuerzos pequeña. Si los polos del esclavo y del error se acercan al origen, el retardo es muy grande, el entorno de interacción del esclavo es muy rígido y la constante de reflexión de esfuerzos es elevada, con mucha probabilidad el sistema no será estable incluso considerando la no existencia de retardo.

Hay que indicar que, debido a la imposibilidad de efectuar un análisis simbólico de la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos controlado por los reguladores obtenidos a partir de las ecuaciones de diseño presentadas en el capítulo 3, se ha optado por analizar la estabilidad asintótica sobre sistemas teleoperados concretos, extrayendo conclusiones a partir de los distintos resultados obtenidos.



Capítulo 6

Generalización del método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión

6.1 Introducción

En el capítulo 3 se presentó un método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos en la transmisión por convergencia de estados. Este método se basaba en un modelado del sistema teleoperado en variables de estado, en el que se consideraban todas las posibles interacciones que podían aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – medio. El método de diseño expuesto planteaba un conjunto de ecuaciones cuya resolución permitía calcular el valor de los reguladores del sistema para que se lograra la convergencia entre el esclavo y el maestro, consiguiendo de esta forma que el esclavo siguiera al maestro, y al mismo tiempo se estableciera la dinámica deseada de dicha convergencia y del esclavo.

Cuando se explicó el método de diseño por convergencia de estados, se consideró que el maestro y el esclavo eran representados por ecuaciones diferenciales de segundo orden, de forma que para realizar su modelado en representación interna se eligieron como variables de estado la posición y velocidad. En este capítulo se va a generalizar el método de diseño al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n . Para realizar esta generalización del método se distinguirá el caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones que no contienen ceros, del caso en que sí contienen ceros.

Esta generalización del método constituye una importante aportación original de la Tesis. La importancia de la generalización del método que se presenta en este capítulo radica en la posibilidad de efectuar el diseño del sistema teleoperado ante retardos para cualquier maestro y esclavo. Es decir, a partir de las ecuaciones diferenciales que modelan el maestro y el esclavo, será posible establecer un conjunto de ecuaciones cuya resolución permitirá determinar los parámetros de control que aseguren la convergencia entre el esclavo y el maestro, consiguiendo que el esclavo siga al maestro, y además, fijen la dinámica deseada de la convergencia y del esclavo.

El modelado del sistema teleoperado con retardos que se planteó en el capítulo 3, y que va a seguir considerándose en este capítulo, es el que se muestra en la Figura 6.1. En dicho esquema el sistema maestro y esclavo, respectivamente, se representan en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde:

- x_m y x_s son las variables de estado,
- y_m y y_s representa las salidas,
- A_m y A_s son las matrices de estado,
- B_m y B_s son las matrices de entrada,
- y C_m y C_s son las matrices de salida.

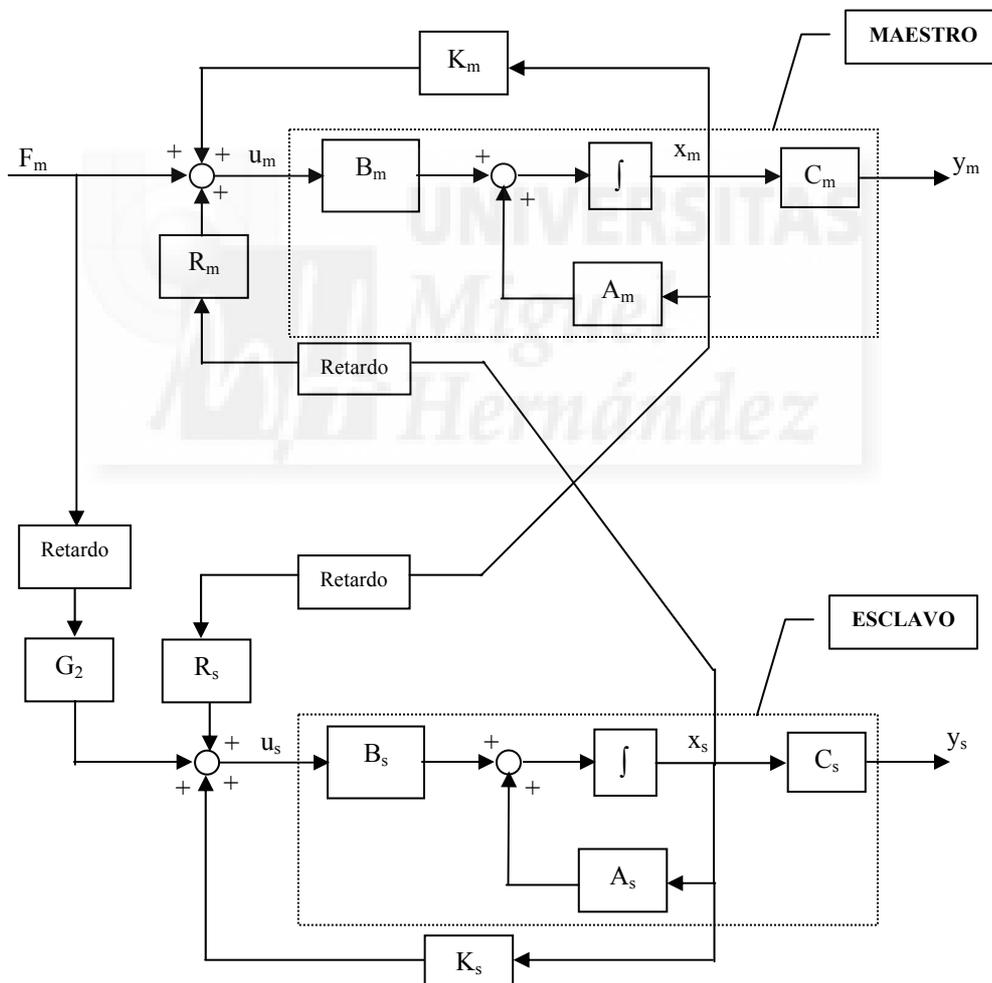


Figura 6.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.

Las señales que aparecen en el esquema son las siguientes:

- F_m : Fuerza aplicada por el operador en el maestro.

- \mathbf{u}_m : Señal de control de entrada al maestro.
- \mathbf{u}_s : Señal de control de entrada al esclavo.
- \mathbf{x}_m : Vector de estados del maestro.
- \mathbf{x}_s : Vector de estados del esclavo.
- \mathbf{y}_m : Salida del maestro.
- \mathbf{y}_s : Salida del esclavo.

Las matrices que aparecen en el modelo son las siguientes:

- \mathbf{G}_2 : Define la interacción de la entrada independiente del maestro sobre el esclavo.
- \mathbf{R}_m : Define la interacción esclavo – maestro. Con los valores adecuados permite que el modelo contemple la reflexión de esfuerzos.
- \mathbf{R}_s : Define la interacción maestro – esclavo.
- \mathbf{K}_m : Matriz de realimentación de estado del maestro. Permite fijar la dinámica del maestro.
- \mathbf{K}_s : Matriz de realimentación de estado del esclavo. Permite fijar la dinámica del esclavo.

Este capítulo se va a estructurar del siguiente modo. En primer lugar se va a generalizar el método de diseño por convergencia de estados al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que no contienen ceros. Seguidamente se generalizará el método al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que sí contienen ceros. En ambos casos se explicará tanto el modelado del sistema teleoperado como el método de diseño por convergencia de estados. Por último se mostrarán las conclusiones, resumiendo las aportaciones de la Tesis presentadas a lo largo del capítulo.

6.2 Sistema teleoperado modelado por ecuaciones diferenciales que no contienen ceros

6.2.1. Modelado del sistema teleoperado

Se va a considerar que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales que no contienen ceros. De este modo el maestro y el esclavo serán modelados respectivamente por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^n y_m(t)}{dt^n} + a_{mn-1} \frac{d^{n-1} y_m(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{m1} \frac{dy_m(t)}{dt} + a_{m0} y_m(t) = b_{m0} u_m(t) \quad (6.3)$$

$$\frac{d^n y_s(t)}{dt^n} + a_{sn-1} \frac{d^{n-1} y_s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{s1} \frac{dy_s(t)}{dt} + a_{s0} y_s(t) = b_{s0} u_s(t) \quad (6.4)$$

donde $y_m(t)$ es la salida del maestro, $y_s(t)$ es la salida del esclavo, $u_m(t)$ es la entrada del maestro, y $u_s(t)$ es la entrada del esclavo.

Se va a obtener en primer lugar la representación en variables de estado del maestro. Para ello se van a seleccionar como variables de estado, tal como se indica en [Ogata-98], la salida y sus $n-1$ primeras derivadas, es decir:

$$\begin{aligned} x_{m1}(t) &= y_m(t) \\ x_{m2}(t) &= \frac{dy_m(t)}{dt} \\ &\vdots \\ x_{mn}(t) &= \frac{d^{n-1}y_m(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Considerando estas variables de estado, se obtienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m1}(t) &= x_{m2}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) &= x_{m3}(t) \\ &\dots \\ \dot{x}_{m,n-1}(t) &= x_{mn}(t) \\ \dot{x}_{mn}(t) &= -a_{m0}x_{m1}(t) - a_{m1}x_{m2}(t) - \dots - a_{m,n-1}x_{mn}(t) + b_{m0}u_m(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

De esta forma, la representación en el espacio de estados del sistema maestro es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m,n-1}(t) \\ \dot{x}_{mn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{m0} & -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{m,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{m,n-1}(t) \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{m0} \end{bmatrix} u_m(t) \quad (6.7)$$

$$y_m(t) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{m,n-1}(t) \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

Procediendo de forma idéntica en el esclavo, se obtendría la siguiente representación en el espacio de estados para el sistema esclavo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{sn-1}(t) \\ \dot{x}_{sn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{s0} & -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn-1}(t) \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{s0} \end{bmatrix} u_s(t) \quad (6.8)$$

$$y_s(t) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn-1}(t) \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix}$$

De forma simplificada se representará el sistema maestro y esclavo, respectivamente, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

La estructura del resto de matrices que aparecen en el esquema de control de la Figura 6.1 es la siguiente:

$$K_m = [k_{m1} \quad k_{m2} \quad \cdots \quad k_{mn}] \quad (6.11)$$

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2} \quad \cdots \quad k_{sn}] \quad (6.12)$$

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2} \quad \cdots \quad r_{mn}] \quad (6.13)$$

$$R_s = [r_{s1} \quad r_{s2} \quad \cdots \quad r_{sn}] \quad (6.14)$$

$$G_2 = g_2 \quad (6.15)$$

A partir del esquema de control de la Figura 6.1 puede observarse que la señal de control del maestro, $u_m(t)$, y del esclavo, $u_s(t)$, vienen dadas por:

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) \quad (6.16)$$

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (6.17)$$

Si se sustituye la señal de control del maestro y del esclavo en las ecuaciones de estado (6.9) y (6.10) por las expresiones (6.16) y (6.17) se obtienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t-T) + B_m F_m(t) \quad (6.18)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t-T) + B_s G_2 F_m(t-T) \quad (6.19)$$

Modelado del entorno

Como se indicó en el capítulo 3, mediante la matriz K_s es posible contemplar en el modelo la fuerza de contacto del esclavo con el entorno, y con la matriz R_m es posible realimentar dicha fuerza de contacto hacia el maestro.

Si, por ejemplo, se considera que el entorno únicamente es modelado durante el contacto como una rigidez de valor k_e , la fuerza de reacción actuante sobre el esclavo vendrá dada por:

$$f_s(t) = k_e y_s(t) = k_e C_s x_s(t) = k_e [1 \ 0 \ \dots \ 0]x_s(t) = k_e x_{s1}(t) \quad (6.20)$$

En este caso, para incorporar en el modelo del sistema teleoperado la interacción del esclavo con el entorno, la matriz K_s tendrá la siguiente estructura:

$$K_s = [k_{s1} \ k_{s2} \ \dots \ k_{sn}] = [k'_{s1} - k_e \ k_{s2} \ \dots \ k_{sn}] \quad (6.21)$$

De este modo la señal que se obtiene al multiplicar el estado del esclavo por la matriz K_s es:

$$K_s x_s(t) = [k_{s1} \ k_{s2} \ \dots \ k_{sn}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} = [k'_{s1} - k_e \ k_{s2} \ \dots \ k_{sn}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - f_s(t) \quad (6.22)$$

Por lo tanto, la señal de control de entrada al esclavo será:

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = [k'_{s1} \ k_{s2} \ \dots \ k_{sn}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - f_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (6.23)$$

Como puede observarse en la expresión anterior, la fuerza de reacción $f_s(t)$ se opondrá a la señal de control de entrada al esclavo, modelando de esta forma que el esclavo está interaccionando con un entorno.

Si se desea que exista reflexión de esfuerzos desde el esclavo hacia el maestro, es decir, realimentar hacia el maestro la fuerza de contacto del esclavo con el entorno, la estructura de la matriz R_m , considerando que el entorno es modelado mediante una rigidez de valor k_e , debe ser la siguiente:

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2} \quad \cdots \quad r_{mn}] = [k_f k_e \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (6.24)$$

donde k_f es la constante de reflexión de esfuerzos considerada.

De esta forma la señal que se realimenta del esclavo hacia el maestro es:

$$R_m x_s(t-T) = [r_{m1} \quad r_{m2} \quad \cdots \quad r_{mn}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \\ \vdots \\ x_{sn}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \\ \vdots \\ x_{sn}(t-T) \end{bmatrix} = k_f k_e x_{s1}(t-T) = k_f f_s(t-T) \quad (6.25)$$

Como puede comprobarse, con esta estructura de la matriz R_m se consigue realimentar la fuerza de contacto del esclavo con el entorno hacia el maestro.

Aproximación del retardo

Para eliminar el retardo de las ecuaciones de estado (6.18) y (6.19) se va a utilizar la aproximación de Taylor de primer orden. De esta forma, las señales retardadas T segundos del esquema de control utilizando la aproximación de Taylor de primer orden tendrán los siguientes valores:

$$\begin{aligned} x_s(t-T) &= x_s(t) - T\dot{x}_s(t) \\ x_m(t-T) &= x_m(t) - T\dot{x}_m(t) \\ F_m(t-T) &= F_m(t) - T\dot{F}_m(t) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Utilizando la aproximación del retardo (6.26) en las ecuaciones de estado (6.18) y (6.19) se obtiene:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m] x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - T B_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (6.27)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s] x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - T B_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) - T B_s G_2 \dot{F}_m(t) \quad (6.28)$$

Si se considera que la fuerza que ejerce el operador es constante, entonces $\dot{F}_m(t) = 0$, por lo que las ecuaciones (6.27) y (6.28) se convierten en:

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m]x_m(t) + B_m R_m x_s(t) - T B_m R_m \dot{x}_s(t) + B_m F_m(t) \quad (6.29)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s]x_s(t) + B_s R_s x_m(t) - T B_s R_s \dot{x}_m(t) + B_s G_2 F_m(t) \quad (6.30)$$

Combinando las ecuaciones de estado anteriores y expresándolas de forma matricial se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - T B_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - T B_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - T B_s R_s B_m) \\ M(B_m - T B_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} F_m(t) \quad (6.31)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= (I - T^2 B_m R_m B_s R_s)^{-1} \\ S &= (I - T^2 B_s R_s B_m R_m)^{-1} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Si se realizan operaciones en (6.32) se obtiene que la matriz M viene dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n-1} & m_n \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

donde:

$$m_1 = -\frac{T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.34)$$

$$m_2 = -\frac{T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s2}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.35)$$

...

$$m_{n-1} = -\frac{T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn-1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.36)$$

$$m_n = -\frac{1}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.37)$$

Del mismo modo, efectuando cálculos en (6.32) se obtiene que la matriz S viene dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

donde:

$$s_1 = -\frac{T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.39)$$

$$s_2 = -\frac{T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m2}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.40)$$

...

$$s_{n-1} = -\frac{T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn-1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.41)$$

$$s_n = -\frac{1}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.42)$$

6.2.2 Diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos por convergencia de estados

Se va diseñar el esquema de control del sistema teleoperado con retardos para que el esclavo siga en todo momento al maestro. En este diseño se considerará que el esclavo interacciona con un entorno y que existe reflexión de esfuerzos del esclavo hacia al maestro. De este modo, los parámetros a calcular en el esquema de control serán los siguientes:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2} \quad \cdots \quad r_{sn}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2} \quad \cdots \quad k_{mn}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2} \quad \cdots \quad k_{sn}]$

Como puede apreciarse la matriz R_m no es una matriz a calcular, esto se debe a que esta matriz tiene unos valores impuestos para contemplar la reflexión de esfuerzos. Existen $3n+1$ parámetros a calcular en el esquema de control, por tanto será necesario plantear $3n+1$ ecuaciones que permitan obtener el valor de estos parámetros. A continuación se va a describir como se obtienen estas ecuaciones.

En primer lugar se va a realizar una transformación de estado para obtener la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro. Se va a expresar la ecuación de estado (6.31) de forma simplificada como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BF_m(t) \quad (6.43)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} F_m(t) \quad (6.44)$$

donde:

$$A_{11} = S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11n-1} & a_{11n} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

siendo:

$$a_{111} = \frac{a_{s0} - b_{s0} k_{s1} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.46)$$

$$a_{112} = \frac{-T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1} + a_{s1} - b_{s0} k_{s2} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m2}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.47)$$

...

$$a_{11n} = \frac{-T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn-1} + a_{sn-1} - b_{s0} k_{sn} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.48)$$

$$A_{12} = S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{121} & a_{122} & \dots & a_{12n} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

siendo:

$$a_{121} = -\frac{b_{s0} (r_{s1} + T r_{sn} a_{m0} - T r_{sn} b_{m0} k_{m1})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.50)$$

$$a_{122} = -\frac{b_{s0}(r_{s2} - Tr_{s1} + Tr_{sn} a_{m1} - Tr_{sn} b_{m0} k_{m2})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.51)$$

...

$$a_{12n} = -\frac{b_{s0}(r_{sn} - Tr_{sn-1} + Tr_{sn} a_{mn-1} - Tr_{sn} b_{m0} k_{mn})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.52)$$

$$A_{21} = M(B_m R_m - T B_m R_m (A_s + B_s K_s)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21n} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

siendo:

$$a_{211} = -\frac{b_{m0}(r_{m1} + Tr_{mn} a_{s0} - Tr_{mn} b_{s0} k_{s1})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.54)$$

$$a_{212} = -\frac{b_{m0}(r_{m2} - Tr_{m1} + Tr_{mn} a_{s1} - Tr_{mn} b_{s0} k_{s2})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.55)$$

...

$$a_{21n} = -\frac{b_{m0}(r_{mn} - Tr_{mn-1} + Tr_{mn} a_{sn-1} - Tr_{mn} b_{s0} k_{sn})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.56)$$

$$A_{22} = M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{221} & a_{222} & \dots & a_{22n-1} & a_{22n} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

siendo:

$$a_{221} = \frac{a_{m0} - b_{m0} k_{m1} + T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.58)$$

$$a_{222} = \frac{-T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s1} + a_{m1} - b_{m0} k_{m2} + T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s2}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.59)$$

...

$$a_{22n} = \frac{-T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn-1} + a_{mn-1} - b_{m0} k_{mn} + T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.60)$$

$$B_{11} = S(B_s G_2 - T B_s R_s B_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-b_{s0}(g_2 - T r_{sn} b_{m0})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

$$B_{21} = M(B_m - T B_m R_m B_s G_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_{m0}(-1 + T g_2 r_{mn} b_{s0})}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Se va a aplicar a la ecuación de estado (6.43) la siguiente transformación de estado para obtener la ecuación de estado del error entre el maestro y el esclavo:

$$\begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \tilde{x}(t) = T_r^{-1} x(t) \quad (6.63)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión $n \times n$, y en este caso, la matriz T_r y su inversa coinciden.

Realizando esta transformación sobre (6.43) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} F_m(t) \quad (6.64)$$

donde:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_s(t) - x_m(t) \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} & -A_{12} \\ (A_{11} - A_{21}) + (A_{12} - A_{22}) & -(A_{12} - A_{22}) \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{11} - B_{21} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Denominando $x_e(t)$ al error entre el esclavo $x_s(t)$ y el maestro $x_m(t)$, la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro vendrá dada por:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{21} x_s(t) + \tilde{A}_{22} x_e(t) + \tilde{B}_{21} F_m(t) \quad (6.68)$$

Para que el error evolucione como un sistema autónomo se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{A}_{21} = 0 \rightarrow A_{11} - A_{21} + A_{12} - A_{22} = 0 \quad (6.69)$$

$$\tilde{B}_{21} = 0 \rightarrow B_{11} - B_{21} = 0 \quad (6.70)$$

A partir de la ecuación (6.70) se obtiene que:

$$\tilde{B}_{21} = B_{11} - B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{g_2 b_{s0} - T b_{s0} r_{sn} b_{m0} - b_{m0} + T g_2 b_{m0} r_{mn} b_{s0}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.71)$$

Por otra parte, de la ecuación (6.69) se obtiene:

$$\tilde{A}_{21} = A_{11} - A_{21} + A_{12} - A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{211} & \tilde{a}_{212} & \dots & \tilde{a}_{21n-1} & \tilde{a}_{21n} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.72)$$

donde:

$$\tilde{a}_{211} = \frac{a_{s0} - b_{s0} k_{s1} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1} + b_{m0} r_{m1} + b_{m0} T r_{mn} a_{s0} - b_{m0} T r_{mn} b_{s0} k_{s1} - b_{s0} r_{s1} - b_{s0} T r_{sn} a_{m0} + b_{s0} T r_{sn} b_{m0} k_{m1} - a_{m0} + b_{m0} k_{m1} - T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.73)$$

$$\tilde{a}_{212} = \frac{-T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1} + a_{s1} - b_{s0} k_{s2} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m2} + b_{m0} r_{m2} - b_{m0} T r_{m1} + b_{m0} T r_{mn} a_{s1} - b_{m0} T r_{mn} b_{s0} k_{s2} - b_{s0} r_{s2} + b_{s0} T r_{s1} - b_{s0} T r_{sn} a_{m1} + b_{s0} T r_{sn} b_{m0} k_{m2} + T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s1} - a_{m1} + b_{m0} k_{m2} - T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{s2}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.74)$$

...

$$\tilde{a}_{21n-1} = \frac{-T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn-2} + a_{sn-2} - b_{s0} k_{sn-1} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn-1} + b_{m0} r_{mn-1} - b_{m0} T r_{mn-2} + b_{m0} T r_{mn} a_{sn-2} - b_{m0} T r_{mn} b_{s0} k_{sn-1} - b_{s0} r_{sn-1} + b_{s0} T r_{sn-2} - b_{s0} T r_{sn} a_{mn-2} + b_{s0} T r_{sn} b_{m0} k_{mn-1} + T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn-2} - a_{mn-2} + b_{m0} k_{mn-1} - T b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn-1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.75)$$

$$\tilde{a}_{21n} = \frac{-T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn-1} + a_{sn-1} - b_{s0} k_{sn} + b_{m0} r_{mn} - b_{m0} Tr_{mn-1} + b_{m0} Tr_{mn} a_{sn-1} - b_{m0} Tr_{mn} b_{s0} k_{sn} - b_{s0} r_{sn} + b_{s0} Tr_{sn-1} - b_{s0} Tr_{sn} a_{mn-1} + b_{s0} Tr_{sn} b_{m0} k_{mn} + T^2 b_{m0} r_{mn} b_{s0} r_{sn-1} - a_{mn-1} + b_{m0} k_{mn}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.76)$$

Por lo tanto, para que el error evolucione como un sistema autónomo, se deben cumplir $n+1$ ecuaciones: la ecuación expresada en (6.71) y las n ecuaciones correspondientes a la última fila de la matriz indicada en (6.72).

Si el error evoluciona como un sistema autónomo, la ecuación dinámica del sistema vendrá dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} & -A_{12} \\ 0 & -(A_{12} - A_{22}) \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

De esta forma el polinomio característico del sistema será:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det[sI - (A_{11} + A_{12})] \det[sI - (A_{22} - A_{12})] = 0 \quad (6.78)$$

El primer determinante de la expresión anterior igualado a cero define la dinámica del esclavo, mientras que el segundo determinante igualado a cero define la dinámica del error esclavo – maestro. Ambas dinámicas se corresponderán con polinomios característicos de orden n .

Si se realizan cálculos en el primer determinante de la expresión (6.78), se obtiene el siguiente polinomio característico del esclavo:

$$\det[sI - D_s] = 0 \quad (6.79)$$

donde:

$$D_s = A_{11} + A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ d_{s1} & d_{s2} & \cdots & d_{sn-1} & d_{sn} \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

siendo:

$$d_{s1} = \frac{a_{s0} - b_{s0} k_{s1} + T b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{m1} - b_{s0} r_{s1} - b_{s0} Tr_{sn} a_{m0} + b_{s0} Tr_{sn} b_{m0} k_{m1}}{-1 + T^2 b_{s0} r_{sn} b_{m0} r_{mn}} \quad (6.81)$$

$$d_{s_2} = \frac{-T^2 b_{s_0} r_{s_1} b_{m_0} r_{m_1} + a_{s_1} - b_{s_0} k_{s_2} + T b_{s_0} r_{s_1} b_{m_0} r_{m_2} - b_{s_0} r_{s_2} + b_{s_0} T r_{s_1} - b_{s_0} T r_{s_1} a_{m_1} + b_{s_0} T r_{s_1} b_{m_0} k_{m_2}}{-1 + T^2 b_{s_0} r_{s_1} b_{m_0} r_{m_1}} \quad (6.82)$$

...

$$d_{s_n} = \frac{-T^2 b_{s_0} r_{s_{n-1}} b_{m_0} r_{m_{n-1}} + a_{s_{n-1}} - b_{s_0} k_{s_n} + T b_{s_0} r_{s_{n-1}} b_{m_0} r_{m_n} - b_{s_0} r_{s_n} + b_{s_0} T r_{s_{n-1}} - b_{s_0} T r_{s_{n-1}} a_{m_{n-1}} + b_{s_0} T r_{s_{n-1}} b_{m_0} k_{m_n}}{-1 + T^2 b_{s_0} r_{s_{n-1}} b_{m_0} r_{m_{n-1}}} \quad (6.83)$$

Del mismo modo, si se realizan cálculos en el segundo determinante de la expresión (6.78), se obtiene el siguiente polinomio característico del error:

$$\det[sI - D_e] = 0 \quad (6.84)$$

donde:

$$D_e = A_{22} - A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ d_{e1} & d_{e2} & \cdots & d_{en-1} & d_{en} \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

siendo:

$$d_{e1} = \frac{a_{m_0} - b_{m_0} k_{m_1} + T b_{m_0} r_{m_1} b_{s_0} r_{s_1} + b_{s_0} r_{s_1} + b_{s_0} T r_{s_1} a_{m_0} - b_{s_0} T r_{s_1} b_{m_0} k_{m_1}}{-1 + T^2 b_{s_0} r_{s_1} b_{m_0} r_{m_1}} \quad (6.86)$$

$$d_{e2} = \frac{-T^2 b_{m_0} r_{m_1} b_{s_0} r_{s_1} + a_{m_1} - b_{m_0} k_{m_2} + T b_{m_0} r_{m_1} b_{s_0} r_{s_2} + b_{s_0} r_{s_2} - b_{s_0} T r_{s_1} + b_{s_0} T r_{s_1} a_{m_1} - b_{s_0} T r_{s_1} b_{m_0} k_{m_2}}{-1 + T^2 b_{s_0} r_{s_1} b_{m_0} r_{m_1}} \quad (6.87)$$

...

$$d_{en} = \frac{-T^2 b_{m_0} r_{m_{n-1}} b_{s_0} r_{s_{n-1}} + a_{m_{n-1}} - b_{m_0} k_{m_n} + T b_{m_0} r_{m_{n-1}} b_{s_0} r_{s_n} + b_{s_0} r_{s_n} - b_{s_0} T r_{s_{n-1}} + b_{s_0} T r_{s_{n-1}} a_{m_{n-1}} - b_{s_0} T r_{s_{n-1}} b_{m_0} k_{m_n}}{-1 + T^2 b_{s_0} r_{s_{n-1}} b_{m_0} r_{m_{n-1}}} \quad (6.88)$$

Por tanto, si se desea que el polinomio característico del esclavo sea $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0$ se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 d_{s1} &= -p_0 \\
 d_{s2} &= -p_1 \\
 &\vdots \\
 d_{sn} &= -p_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{6.89}$$

Del mismo modo, si se desea que el polinomio característico del error sea $q(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_1s + q_0$ se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 d_{e1} &= -q_0 \\
 d_{e2} &= -q_1 \\
 &\vdots \\
 d_{en} &= -q_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{6.90}$$

Por lo tanto mediante las ecuaciones (6.89) y (6.90) es posible fijar la dinámica del esclavo y del error del sistema teleoperado. Estas $2n$ ecuaciones más las $n+1$ ecuaciones que hacen que el error evolucione como un sistema autónomo, ecuación expresada en (6.71) y las n ecuaciones correspondientes a la última fila de la matriz indicada en (6.72), forman un sistema de $3n+1$ ecuaciones cuya resolución permitirá calcular los $3n+1$ parámetros de control del sistema teleoperado. Para solucionar el sistema de ecuaciones será necesario conocer las ecuaciones diferenciales que modelan al maestro y al esclavo, el modelo del entorno, la constante de reflexión de esfuerzos y el retardo existente en la comunicación, además de indicar la dinámica deseada del esclavo y del error. Con los parámetros de control calculados se conseguirá que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardo, así como establecer la dinámica deseada del esclavo y del error.

Este método generalizado de diseño de sistemas teleoperados, en el que el maestro y esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales de orden n que no contienen ceros, representa una aportación original de la Tesis. Es de destacar la importancia del método de diseño, pues el cálculo de los reguladores del sistema de control se simplifica únicamente a la resolución de un conjunto de ecuaciones.

6.3 Sistema teleoperado modelado por ecuaciones diferenciales que contienen ceros

Tras haber generalizado en el apartado anterior el método de diseño de sistemas de control por convergencia de estados en el caso de que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales de orden n que no contienen ceros, se va a generalizar en este apartado el método de diseño al caso en el que las ecuaciones diferenciales que modelan el maestro y el esclavo sí contienen ceros.

6.3.1. Modelado del sistema teleoperado

Como se ha indicado, se va a considerar que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales que sí contienen ceros, a diferencia del apartado 6.2, en el que se asumió que las ecuaciones diferenciales que modelaban el maestro y el esclavo no contenían ceros. De este modo el maestro y el esclavo serán modelados respectivamente por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y_m(t)}{dt^n} + a_{mn-1} \frac{d^{n-1} y_m(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{m1} \frac{dy_m(t)}{dt} + a_{m0} y_m(t) = \\ b_{mn-1} \frac{d^{n-1} u_m(t)}{dt^{n-1}} + b_{mn-2} \frac{d^{n-2} u_m(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_{m1} \frac{du_m(t)}{dt} + b_{m0} u_m(t) \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n y_s(t)}{dt^n} + a_{sn-1} \frac{d^{n-1} y_s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{s1} \frac{dy_s(t)}{dt} + a_{s0} y_s(t) = \\ b_{sn-1} \frac{d^{n-1} u_s(t)}{dt^{n-1}} + b_{sn-2} \frac{d^{n-2} u_s(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_{s1} \frac{du_s(t)}{dt} + b_{s0} u_s(t) \end{aligned} \quad (6.92)$$

donde $y_m(t)$ es la salida del maestro, $y_s(t)$ es la salida del esclavo, $u_m(t)$ es la entrada del maestro, y $u_s(t)$ es la entrada del esclavo.

Si se aplica la transformada de Laplace a las dos ecuaciones diferenciales anteriores, se obtiene que las funciones de transferencia del maestro y del esclavo son, respectivamente:

$$G_m(s) = \frac{b_{mn-1}s^{n-1} + \dots + b_{m1}s + b_{m0}}{s^n + a_{mn-1}s^{n-1} + \dots + a_{m1}s + a_{m0}} \quad (6.93)$$

$$G_s(s) = \frac{b_{sn-1}s^{n-1} + \dots + b_{s1}s + b_{s0}}{s^n + a_{sn-1}s^{n-1} + \dots + a_{s1}s + a_{s0}} \quad (6.94)$$

Por lo tanto, como puede observarse en las dos funciones de transferencia anteriores, se está modelando un maestro y un esclavo con un número cualquiera de polos y ceros, a diferencia del apartado 6.2, en el que las ecuaciones diferenciales consideradas modelaban a un maestro y un esclavo que poseían un número cualquiera de polos, pero no contenían ceros.

Se va a obtener la representación en variables de estado del maestro y del esclavo. Para ello se va a utilizar la representación en forma canónica controlable [Gajić-96]. La representación en el espacio de estados del sistema maestro en forma canónica controlable es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m_{n-1}}(t) \\ \dot{x}_{mn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{m0} & -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{m_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{m_{n-1}}(t) \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_m(t) \quad (6.95)$$

$$y_m(t) = [b_{m0} \quad b_{m1} \quad \cdots \quad b_{m_{n-2}} \quad b_{m_{n-1}}] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{m_{n-1}}(t) \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

La representación en el espacio de estados del sistema esclavo en forma canónica controlable es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{s_{n-1}}(t) \\ \dot{x}_{sn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{s0} & -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{s_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{s_{n-1}}(t) \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_s(t) \quad (6.96)$$

$$y_s(t) = [b_{s0} \quad b_{s1} \quad \cdots \quad b_{s_{n-2}} \quad b_{s_{n-1}}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{s_{n-1}}(t) \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix}$$

Como es lógico la representación simplificada del maestro y del esclavo coincidirá, respectivamente, con la utilizada en (6.9) y en (6.10), y la estructura del resto de matrices que aparecen en el esquema de control de la Figura 6.1 será la misma que la indicada en las ecuaciones (6.11) – (6.15).

Además, la señal de control del maestro, $u_m(t)$, y del esclavo, $u_s(t)$, será idéntica a la expresada respectivamente en (6.16) y (6.17), de forma que la estructura de las ecuaciones de estado del sistema será la misma que la mostrada en (6.18) y (6.19):

$$\dot{x}_m(t) = [A_m + B_m K_m] x_m(t) + B_m R_m x_s(t-T) + B_m F_m(t) \quad (6.97)$$

$$\dot{x}_s(t) = [A_s + B_s K_s] x_s(t) + B_s R_s x_m(t-T) + B_s G_2 F_m(t-T) \quad (6.98)$$

Hay que destacar que las ecuaciones de estado (6.97) y (6.98) poseen la misma estructura que las ecuaciones (6.18) y (6.19), pero no son idénticas a ellas, puesto que en este caso las matrices que modelan el maestro (A_m y B_m) y el esclavo (A_s y B_s) son diferentes, así como las matrices que permiten contemplar en el modelo la existencia de fuerzas de interacción con el entorno (K_s y R_m), tal como será mostrado a continuación.

Modelado del entorno

Si, por ejemplo, al igual que en el apartado 6.2, se considera que el entorno únicamente es modelado durante el contacto como una rigidez de valor k_e , la fuerza de reacción actuante sobre el esclavo vendrá dada, a diferencia de la expresión (6.20), por:

$$f_s(t) = k_e y_s(t) = k_e C_s x_s(t) = [k_e b_{s0} \quad k_e b_{s1} \quad \cdots \quad k_e b_{s_{n-2}} \quad k_e b_{s_{n-1}}] x_s(t) \quad (6.99)$$

Es decir, mientras que en (6.20) la fuerza de reacción sólo dependía de la primera componente del vector de estado del esclavo, en este caso depende de todas las componentes del vector de estado.

Por lo tanto, la matriz K_s que permite incorporar en el modelo del sistema teleoperado la interacción del esclavo con el entorno, tendrá una estructura diferente a la mostrada en (6.21). En este caso la estructura de K_s será:

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2} \quad \cdots \quad k_{sn}] = [k'_{s1} - k_e b_{s0} \quad k'_{s2} - k_e b_{s1} \quad \cdots \quad k'_{sn} - k_e b_{s_{n-1}}] \quad (6.100)$$

La diferencia de esta estructura de la matriz K_s respecto a la indicada en (6.21) es que, mientras que en (6.21) sólo se veía afectado el primer término de la matriz por la constante de rigidez del entorno, en este caso se ven afectados todos los términos.

Con la estructura mostrada en (6.100) la señal que se obtiene al multiplicar el estado del esclavo por la matriz K_s será:

$$K_s x_s(t) = [k'_{s1} - k_e b_{s0} \quad k'_{s2} - k_e b_{s1} \quad \cdots \quad k'_{sn} - k_e b_{s_{n-1}}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} & \cdots & k'_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - [k_e b_{s0} \quad k_e b_{s1} \quad \cdots \quad k_e b_{s_{n-1}}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} = \quad (6.101)$$

$$\begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} & \cdots & k'_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - f_s(t)$$

Por lo tanto, la fuerza de reacción $f_s(t)$ se opondrá a la señal de control de entrada al esclavo, modelando de esta forma que el esclavo está colisionando con un entorno, tal como se muestra a continuación:

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} & \cdots & k'_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - f_s(t) \quad (6.102)$$

$$+ R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T)$$

Por otra parte, la estructura de la matriz R_m que permite modelar la realimentación hacia el maestro de la fuerza de contacto del esclavo con el entorno, considerando que el entorno es modelado mediante una rigidez de valor k_e , también será diferente de la mostrada en (6.24). En este caso la estructura de la matriz R_m será la siguiente:

$$R_m = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e b_{s0} & k_f k_e b_{s1} & \cdots & k_f k_e b_{sn-1} \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

donde k_f es la constante de reflexión de esfuerzos considerada. Si se compara con la estructura de R_m mostrada en (6.24), se puede observar que en (6.24) sólo el primer término de la matriz era utilizado para modelar la reflexión de esfuerzos, de forma que el resto de términos eran nulos, mientras que en este caso todos los componentes de R_m son utilizados para modelar la reflexión de esfuerzos.

Con la estructura de la matriz R_m expresada en (6.103) se consigue realimentar la fuerza de contacto del esclavo con el entorno hacia el maestro, tal como se puede observar analizando la señal que se realimenta del esclavo hacia el maestro:

$$R_m x_s(t-T) = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \\ \vdots \\ x_{sn}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e b_{s0} & k_f k_e b_{s1} & \cdots & k_f k_e b_{sn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \\ \vdots \\ x_{sn}(t-T) \end{bmatrix} = k_f k_e C_s x_s(t-T) = k_f f_s(t-T) \quad (6.104)$$

Aproximación del retardo

Utilizando, al igual que en el apartado 6.2, la aproximación de Taylor de primer orden para eliminar el retardo de las ecuaciones de estado (6.97) y (6.98), y considerando que la fuerza que ejerce el operador es constante, se obtiene la siguiente ecuación de estado del sistema teleoperado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(A_s + B_s K_s - T B_s R_s B_m R_m) & S(B_s R_s - T B_s R_s (A_m + B_m K_m)) \\ M(B_m R_m - T B_m R_m (A_s + B_s K_s)) & M(A_m + B_m K_m - T B_m R_m B_s R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(B_s G_2 - T B_s R_s B_m) \\ M(B_m - T B_m R_m B_s G_2) \end{bmatrix} F_m(t) \quad (6.105)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= (I - T^2 B_m R_m B_s R_s)^{-1} \\ S &= (I - T^2 B_s R_s B_m R_m)^{-1} \end{aligned} \quad (6.106)$$

Si se compara esta ecuación de estado con la obtenida en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, ecuación (6.31), puede comprobarse que poseen la misma estructura, aunque, como ha sido comentado anteriormente, las ecuaciones no serán idénticas, al diferir las matrices que las forman.

Realizando operaciones en (6.106) se obtiene que la matriz M viene dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n-1} & m_n \end{bmatrix} \quad (6.107)$$

donde:

$$m_1 = -\frac{T^2 r_{mn} r_{s1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.108)$$

$$m_2 = -\frac{T^2 r_{mn} r_{s2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.109)$$

...

$$m_{n-1} = -\frac{T^2 r_{mn} r_{sn-1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.110)$$

$$m_n = -\frac{1}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.111)$$

Del mismo modo, efectuando cálculos en (6.106) se obtiene que la matriz S viene dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{bmatrix} \quad (6.112)$$

donde:

$$s_1 = -\frac{T^2 r_{sn} r_{m1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.113)$$

$$s_2 = -\frac{T^2 r_{sn} r_{m2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.114)$$

...

$$s_{n-1} = -\frac{T^2 r_{sn} r_{m_{n-1}}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.115)$$

$$s_n = -\frac{1}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.116)$$

Si se comparan las matrices M y S indicadas en (6.107) y en (6.112) con las obtenidas en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.33) y (6.38), puede observarse que la estructura es idéntica, difiriendo ligeramente los términos m_i y s_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ya que en este caso, en m_i y s_i no aparecen los términos b_{m0} y b_{s0} de la ecuación diferencial del maestro y del esclavo.

6.3.2. Diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos por convergencia de estados

Se va diseñar el esquema de control del sistema teleoperado para que el esclavo siga en todo momento al maestro. Al igual que en el epígrafe 6.2.2, se va a considerar que el esclavo interacciona con un entorno y que existe reflexión de esfuerzos del esclavo hacia al maestro. Del mismo modo que en aquel epígrafe, existirán $3n+1$ parámetros a calcular en el esquema de control, que serán los mismos que los citados en dicho epígrafe:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2} \quad \dots \quad r_{sn}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2} \quad \dots \quad k_{mn}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2} \quad \dots \quad k_{sn}]$

Para encontrar los parámetros de control será necesario plantear $3n+1$ ecuaciones. El proceso de obtención de estas ecuaciones será idéntico al ya explicado en el epígrafe 6.2.2, aunque como se observará, las ecuaciones que se obtengan serán diferentes. A continuación se va a describir como se obtienen estas ecuaciones.

En primer lugar se va a realizar una transformación de estado para obtener la ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro. Se va a expresar la ecuación de estado (6.105) de forma simplificada como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BF_m(t) \quad (6.117)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} F_m(t) \quad (6.118)$$

donde:

$$A_{11} = S(A_s + B_s K_s - TB_s R_s B_m R_m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11n-1} & a_{11n} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

siendo:

$$a_{111} = \frac{a_{s0} - k_{s1} + Tr_{sn} r_{m1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.120)$$

$$a_{112} = \frac{-T^2 r_{sn} r_{m1} + a_{s1} - k_{s2} + Tr_{sn} r_{m2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.121)$$

...

$$a_{11n} = \frac{-T^2 r_{sn} r_{mn-1} + a_{sn-1} - k_{sn} + Tr_{sn} r_{mn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.122)$$

$$A_{12} = S(B_s R_s - TB_s R_s (A_m + B_m K_m)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{121} & a_{122} & \cdots & a_{12n} \end{bmatrix} \quad (6.123)$$

siendo:

$$a_{121} = -\frac{r_{s1} + Tr_{sn} a_{m0} - Tr_{sn} k_{m1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.124)$$

$$a_{122} = -\frac{r_{s2} - Tr_{s1} + Tr_{sn} a_{m1} - Tr_{sn} k_{m2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.125)$$

...

$$a_{12n} = -\frac{r_{sn} - Tr_{sn-1} + Tr_{sn} a_{mn-1} - Tr_{sn} k_{mn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.126)$$

$$A_{21} = M(B_m R_m - TB_m R_m (A_s + B_s K_s)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{211} & a_{212} & \cdots & a_{21n} \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

siendo:

$$a_{211} = -\frac{r_{m1} + Tr_{mn} a_{s0} - Tr_{mn} k_{s1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.128)$$

$$a_{212} = -\frac{r_{m2} - Tr_{m1} + Tr_{mn} a_{s1} - Tr_{mn} k_{s2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.129)$$

...

$$a_{21n} = -\frac{r_{mn} - Tr_{mn-1} + Tr_{mn} a_{sn-1} - Tr_{mn} k_{sn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.130)$$

$$A_{22} = M(A_m + B_m K_m - TB_m R_m B_s R_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n-1} & a_{22n} \end{bmatrix} \quad (6.131)$$

siendo:

$$a_{221} = \frac{a_{m0} - k_{m1} + Tr_{mn} r_{s1}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.132)$$

$$a_{222} = \frac{-T^2 r_{mn} r_{s1} + a_{m1} - k_{m2} + Tr_{mn} r_{s2}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.133)$$

...

$$a_{22n} = \frac{-T^2 r_{mn} r_{sn-1} + a_{mn-1} - k_{mn} + Tr_{mn} r_{sn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \quad (6.134)$$

$$B_{11} = S(B_s G_2 - T B_s R_s B_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-g_2 + T r_{sn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.135)$$

$$B_{21} = M(B_m - T B_m R_m B_s G_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-1 + T g_2 r_{mn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.136)$$

Si se comparan las submatrices de la ecuación de estado (6.118), es decir, (6.119) – (6.136), con las obtenidas en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.45) – (6.62), puede observarse que la estructura es idéntica, difiriendo únicamente en que, ahora, los términos b_{m0} y b_{s0} de la ecuación diferencial del maestro y del esclavo no aparecen en las distintas submatrices, mientras que en el caso anterior sí aparecían.

Como se ha comentado anteriormente, se va a realizar una transformación de estado sobre la ecuación (6.117). El objetivo de esta transformación de estado es obtener una ecuación de estado del error entre el maestro y el esclavo, de forma que si se anula el error entre el maestro y el esclavo, se consiga que la salida del esclavo siga a la del maestro. Para lograr esta ecuación de estado del error, se van a utilizar en la transformación de estado unas matrices H_s y H_m , que, como se explicará seguidamente, deberán ser elegidas convenientemente. La transformación de estado que va a efectuarse es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_s(t) \\ H_s x_s(t) - H_m x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ H_s & -H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \tilde{x}(t) = T_r^{-1} x(t) \quad (6.137)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión $n \times n$, y las matrices H_s y H_m tienen la siguiente estructura:

$$H_s = \begin{bmatrix} h_{s1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{s2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{sn} \end{bmatrix} \quad (6.138)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{m1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{m2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.139)$$

Por lo tanto, la matriz de transformación T_r será:

$$T_r = \begin{bmatrix} I & 0 \\ H_{sm} & -H_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.140)$$

donde:

$$H_{sm} = \begin{bmatrix} \frac{h_{s1}}{h_{m1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_{s2}}{h_{m2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{h_{sn}}{h_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.141)$$

$$H_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{m1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{m2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_{mn}} \end{bmatrix} \quad (6.142)$$

Como se ha indicado, eligiendo convenientemente las matrices H_s y H_m se puede lograr que la salida del esclavo siga a la del maestro. A continuación se va a mostrar como debe realizarse esta elección. La salida del esclavo y del maestro vienen dadas, respectivamente, por (6.96) y (6.95):

$$y_s(t) = C_s x_s(t) = \begin{bmatrix} b_{s0} & b_{s1} & \dots & b_{s_{n-2}} & b_{s_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{s_{n-1}}(t) \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} \quad (6.143)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) = \begin{bmatrix} b_{m0} & b_{m1} & \dots & b_{m_{n-2}} & b_{m_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{m_{n-1}}(t) \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (6.144)$$

Se va a considerar que H_s y H_m poseen en la diagonal principal, respectivamente, los elementos de las matrices C_s y C_m . Es decir:

$$H_s = \begin{bmatrix} b_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{s1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{sn-1} \end{bmatrix} \quad (6.145)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} b_{m0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mn-1} \end{bmatrix} \quad (6.146)$$

Se va a definir el error $x_e(t)$ entre el esclavo $x_s(t)$ y el maestro $x_m(t)$ del siguiente modo:

$$x_e(t) = H_s x_s(t) - H_m x_m(t) \quad (6.147)$$

Se va a comprobar que con la elección de las matrices H_s y H_m indicada en (6.145) y (6.146) se conseguirá que si el error converge a cero, entonces la salida del esclavo siga a la del maestro. Si se consigue que el error entre el maestro y el esclavo converja a cero:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= H_s x_s(t) - H_m x_m(t) = 0 \\ \begin{bmatrix} b_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{s1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{sn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{m0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (6.148)$$

$$\begin{bmatrix} b_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{s1}x_{s2}(t) - b_{m1}x_{m2}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{sn-1}x_{sn}(t) - b_{mn-1}x_{mn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la salida del esclavo seguirá a la del maestro, ya que:

$$\begin{aligned} y_s(t) - y_m(t) &= C_s x_s(t) - C_m x_m(t) = \\ [b_{s0} \quad b_{s1} \quad \cdots \quad b_{sn-1}] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} - [b_{m0} \quad b_{m1} \quad \cdots \quad b_{mn-1}] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ \vdots \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix} &= \\ (b_{s0}x_{s1}(t) + b_{s1}x_{s2}(t) + \cdots + b_{sn-1}x_{sn}(t)) - (b_{m0}x_{m1}(t) + b_{m1}x_{m2}(t) + \cdots + b_{mn-1}x_{mn}(t)) &= \\ (b_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t)) + (b_{s1}x_{s2}(t) - b_{m1}x_{m2}(t)) + \cdots + (b_{sn-1}x_{sn}(t) - b_{mn-1}x_{mn}(t)) &= \\ 0 + 0 + \cdots + 0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.149)$$

En el caso de que algún término de C_s ó C_m sea cero, se pondrá el valor de uno en lugar del valor de cero en la expresión (6.145) ó (6.146).

Como se ha comprobado, con la transformación de estado indicada en (6.137) se conseguirá que si el error entre el maestro y el esclavo se anula, la salida del esclavo siga a la salida del maestro. Realizando esta transformación sobre la ecuación de estado (6.117) se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}F_m(t) \quad (6.150)$$

donde:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ H_s x_s(t) - H_m x_m(t) \end{bmatrix} \quad (6.151)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}H_{sm} & -A_{12}H_m^{-1} \\ (H_s A_{11} - H_m A_{21}) + (H_s A_{12} - H_m A_{22})H_{sm} & -(H_s A_{12} - H_m A_{22})H_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.152)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ H_s B_{11} - H_m B_{21} \end{bmatrix} \quad (6.153)$$

La ecuación de estado del error entre el esclavo y el maestro vendrá dada por:

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{A}_{21}x_s(t) + \tilde{A}_{22}x_e(t) + \tilde{B}_{21}F_m(t) \quad (6.154)$$

Para que el error evolucione como un sistema autónomo se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{A}_{21} = 0 \rightarrow (H_s A_{11} - H_m A_{21}) + (H_s A_{12} - H_m A_{22})H_{sm} = 0 \quad (6.155)$$

$$\tilde{B}_{21} = 0 \rightarrow H_s B_{11} - H_m B_{21} = 0 \quad (6.156)$$

A partir de la ecuación (6.156) se obtiene que:

$$\tilde{B}_{21} = H_s B_{11} - H_m B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-g_2 h_{sn} + T h_{sn} r_{sn} + h_{mn} - T g_2 h_{mn} r_{mn}}{-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.157)$$

Por otra parte, de la ecuación (6.155) se obtiene:

$$\tilde{A}_{21} = (H_s A_{11} - H_m A_{21}) + (H_s A_{12} - H_m A_{22}) H_{sm} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{h_{s1} h_{m2} - h_{m1} h_{s2}}{h_{m2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_{s2} h_{m3} - h_{m2} h_{s3}}{h_{m3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h_{sn-1} h_{mn} - h_{mn-1} h_{sn}}{h_{mn}} \\ \tilde{a}_{211} & \tilde{a}_{212} & \dots & \tilde{a}_{21n-1} & \tilde{a}_{21n} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.158)$$

donde:

$$\tilde{a}_{211} = \frac{h_{sn} h_{m1} (a_{s0} - k_{s1} + Tr_{sn} r_{m1}) + h_{mn} h_{m1} (r_{m1} + Tr_{mn} a_{s0} - Tr_{mn} k_{s1}) + h_{sn} h_{s1} (-r_{s1} - Tr_{sn} a_{m0} + Tr_{sn} k_{m1}) + h_{mn} h_{s1} (-a_{m0} + k_{m1} - Tr_{mn} r_{s1})}{(-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}) h_{m1}} \quad (6.159)$$

$$\tilde{a}_{212} = \frac{-h_{sn} h_{m2} T^2 r_{sn} r_{m1} + h_{sn} h_{m2} (a_{s1} - k_{s2} + Tr_{sn} r_{m2}) + h_{mn} h_{m2} (r_{m2} - Tr_{m1} + Tr_{mn} a_{s1} - Tr_{mn} k_{s2}) + h_{sn} h_{s2} (-r_{s2} + Tr_{s1} - Tr_{sn} a_{m1} + Tr_{sn} k_{m2}) + h_{mn} h_{s2} (T^2 r_{mn} r_{s1} - a_{m1} + k_{m2} - Tr_{mn} r_{s2})}{(-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}) h_{m2}} \quad (6.160)$$

$$\tilde{a}_{21n-1} = \frac{-h_{sn} h_{mn-1} T^2 r_{sn} r_{mn-2} + h_{sn} h_{mn-1} (a_{sn-2} - k_{sn-1} + Tr_{sn} r_{mn-1}) + h_{mn} h_{mn-1} (r_{mn-1} - Tr_{mn-2} + Tr_{mn} a_{sn-2} - Tr_{mn} k_{sn-1}) + h_{sn} h_{sn-1} (-r_{sn-1} + Tr_{sn-2} - Tr_{sn} a_{mn-2} + Tr_{sn} k_{mn-1}) + h_{mn} h_{sn-1} (T^2 r_{mn} r_{sn-2} - a_{mn-2} + k_{mn-1} - Tr_{mn} r_{sn-1})}{(-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}) h_{mn-1}} \quad (6.161)$$

$$\tilde{a}_{21n} = \frac{-h_{sn} h_{mn} T^2 r_{sn} r_{mn-1} + h_{sn} h_{mn} (a_{sn-1} - k_{sn} + T^2 r_{mn} r_{sn-1} - a_{mn-1} + k_{mn}) + h_{mn}^2 (r_{mn} - Tr_{mn-1} + Tr_{mn} a_{sn-1} - Tr_{mn} k_{sn}) + h_{sn}^2 (-r_{sn} + Tr_{sn-1} - Tr_{sn} a_{mn-1} + Tr_{sn} k_{mn})}{(-1 + T^2 r_{sn} r_{mn}) h_{mn}} \quad (6.162)$$

Si se comparan estas ecuaciones, (6.157) y (6.158), con las obtenidas en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.71) y (6.72), puede observarse que la estructura de (6.71) y (6.157) es idéntica, difiriendo únicamente en que, ahora, los términos b_{m0} y b_{s0} de la ecuación diferencial del maestro y del esclavo no aparecen, y aparecen los términos h_{sn} y h_{mn} . Por el contrario, la estructura de (6.72) y (6.158) no es idéntica, ya que ahora aparecen términos por encima de la diagonal principal que antes no aparecían. El resto de

términos es similar, con la salvedad de que ahora, los términos b_{m0} y b_{s0} no aparecen, y aparecen los términos h_{si} y h_{mi} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Al igual que ocurría en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, para que el error evolucione como un sistema autónomo se deben cumplir $n+1$ ecuaciones: la ecuación expresada en (6.157) y las n ecuaciones correspondientes a la última fila de la matriz indicada en (6.158). Sin embargo, como se ha comentado, si se observa la matriz de (6.158) se puede apreciar que existen una serie de términos por encima de la diagonal principal que pueden ser no nulos. Para que esos términos sean cero se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \frac{h_{s1}h_{m2} - h_{m1}h_{s2}}{h_{m2}} &= 0 \\ \frac{h_{s2}h_{m3} - h_{m2}h_{s3}}{h_{m3}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{h_{sn-1}h_{mn} - h_{mn-1}h_{sn}}{h_{mn}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.163)$$

No obstante, para que la salida del esclavo siga a la salida del maestro, los valores de H_s y H_m vienen impuestos respectivamente por los valores de C_s y C_m , tal como se indicó en (6.145) y (6.146). Por lo tanto para que se cumplan las expresiones de (6.163) y además la salida del esclavo siga a la del maestro deben satisfacerse una de las siguientes condiciones:

- 1) $C_s = C_m$, lo que quiere decir que el maestro y el esclavo poseen los mismos ceros, pudiendo diferir únicamente en sus polos.
- 2) La relación entre la matriz C_m y la matriz C_s debe ser:

$$\begin{aligned} \frac{h_{s1}h_{m2} - h_{m1}h_{s2}}{h_{m2}} = 0 &\rightarrow h_{s1} = \frac{h_{m1}}{h_{m2}} h_{s2} \rightarrow b_{s0} = \frac{b_{m0}}{b_{m1}} b_{s1} \\ \frac{h_{s2}h_{m3} - h_{m2}h_{s3}}{h_{m3}} = 0 &\rightarrow h_{s2} = \frac{h_{m2}}{h_{m3}} h_{s3} \rightarrow b_{s1} = \frac{b_{m1}}{b_{m2}} b_{s2} \\ &\vdots \\ \frac{h_{sn-1}h_{mn} - h_{mn-1}h_{sn}}{h_{mn}} = 0 &\rightarrow h_{sn-1} = \frac{h_{mn-1}}{h_{mn}} h_{sn} \rightarrow b_{sn-2} = \frac{b_{mn-2}}{b_{mn-1}} b_{sn-1} \end{aligned} \quad (6.164)$$

Si no se cumple alguna de las condiciones anteriores, existirá un error entre la salida del esclavo y la del maestro. Para clarificar este hecho se muestra a continuación un ejemplo de un maestro y un esclavo modelados por ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el que se va a comprobar que, si no se cumple alguna de las condiciones previas, existirá un error entre la salida del esclavo y la de salida del maestro.

Ejemplo: Supongamos que la ecuación diferencial del maestro y del esclavo es de segundo orden, de forma que la salida del esclavo y del maestro vienen dadas respectivamente por:

$$y_s(t) = C_s x_s(t) = [b_{s0} \quad b_{s1}] x_s(t) \quad (6.165)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) = [b_{m0} \quad b_{m1}] x_m(t) \quad (6.166)$$

En este caso la estructura de las matrices H_s y H_m será:

$$H_s = \begin{bmatrix} h_{s1} & 0 \\ 0 & h_{s2} \end{bmatrix} \quad (6.167)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{m1} & 0 \\ 0 & h_{m2} \end{bmatrix} \quad (6.168)$$

Considerando que C_s y C_m son distintas, y que la relación entre ambas no satisface las ecuaciones indicadas en (6.164), se deberá cumplir, según se mostró en (6.163):

$$\frac{h_{s1} h_{m2} - h_{m1} h_{s2}}{h_{m2}} = 0 \rightarrow h_{s1} = \frac{h_{m1}}{h_{m2}} h_{s2} \quad (6.169)$$

El resto de valores de las matrices H_s y H_m , corresponderán, como se indicó en (6.145) y (6.146), a los términos de C_s y C_m , es decir:

$$H_s = \begin{bmatrix} h_{s1} & 0 \\ 0 & b_{s1} \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} b_{m0} & 0 \\ 0 & b_{m1} \end{bmatrix} \quad (6.171)$$

Para mostrar que con esta elección de las matrices H_s y H_m existe un error constante entre la salida del esclavo y la del maestro, se va a expresar h_{s1} del siguiente modo:

$$h_{s1} = k b_{s0} \quad (6.172)$$

donde:

$$k = \frac{b_{m0} b_{s1}}{b_{m1} b_{s0}} \quad (6.173)$$

Cuando el error entre el esclavo y el maestro converja a cero, se cumplirá:

$$\begin{aligned}
 x_e(t) &= H_s x_s(t) - H_m x_m(t) = 0 \\
 \begin{bmatrix} kb_{s0} & 0 \\ 0 & b_{s1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{m0} & 0 \\ 0 & b_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} kb_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t) & 0 \\ 0 & b_{s1}x_{s2}(t) - b_{m1}x_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.174}$$

Por lo tanto, la diferencia entre la salida del esclavo y la del maestro será:

$$\begin{aligned}
 y_s(t) - y_m(t) &= C_s x_s(t) - C_m x_m(t) = \\
 \begin{bmatrix} b_{s0} & b_{s1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{m0} & b_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} &= (b_{s0}x_{s1}(t) + b_{s1}x_{s2}(t)) - (b_{m0}x_{m1}(t) + b_{m1}x_{m2}(t)) = \\
 (b_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t)) + (b_{s1}x_{s2}(t) - b_{m1}x_{m2}(t)) &= (b_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t)) + 0 = \\
 (b_{s0} - kb_{s0})x_{s1}(t) + (kb_{s0}x_{s1}(t) - b_{m0}x_{m1}(t)) &= (b_{s0} - kb_{s0})x_{s1}(t) + 0 = (b_{s0} - kb_{s0})x_{s1}(t)
 \end{aligned} \tag{6.175}$$

Como puede observarse en la expresión anterior, la salida del esclavo no seguirá exactamente a la salida del maestro, ya que la diferencia entre ambas no es nula, existiendo por tanto un error. Por consiguiente se considerará que se cumple la condición 1) o la condición 2) citadas anteriormente para asegurar que la salida del esclavo sigue a la salida del maestro sin que exista error entre ambas.

De aquí en adelante se supondrá que se cumple una de las dos condiciones indicadas anteriormente para que la salida del esclavo siga exactamente a la del maestro. Si el error evoluciona como un sistema autónomo, la ecuación dinámica del sistema vendrá dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}H_{sm} & -A_{12}H_m^{-1} \\ 0 & -(H_s A_{12} - H_m A_{22})H_m^{-1} \end{bmatrix} \tag{6.176}$$

De esta forma el polinomio característico del sistema será:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det[sI - (A_{11} + A_{12}H_{sm})] \det[sI - (H_m A_{22} - H_s A_{12})H_m^{-1}] = 0 \tag{6.177}$$

El primer determinante de la expresión anterior igualado a cero define la dinámica del esclavo, mientras que el segundo determinante igualado a cero define la dinámica del error esclavo – maestro. Ambas dinámicas se corresponderán con polinomios característicos de orden n .

Si se realizan cálculos en el primer determinante de la expresión (6.177), se obtiene el siguiente polinomio característico del esclavo:

$$\det[sI - D_s] = 0 \tag{6.178}$$

donde:

$$D_s = A_{11} + A_{12}H_{sm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ d_{s1} & d_{s2} & \cdots & d_{sn-1} & d_{sn} \end{bmatrix} \quad (6.179)$$

siendo:

$$d_{s1} = \frac{h_{m1}(a_{s0} - k_{s1} + Tr_{sn}r_{m1}) + h_{s1}(-r_{s1} - Tr_{sn}a_{m0} + Tr_{sn}k_{m1})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{m1}} \quad (6.180)$$

$$d_{s2} = \frac{-h_{m2}T^2r_{sn}r_{m1} + h_{m2}(a_{s1} - k_{s2} + Tr_{sn}r_{m2}) + h_{s2}(-r_{s2} + Tr_{s1} - Tr_{sn}a_{m1} + Tr_{sn}k_{m2})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{m2}} \quad (6.181)$$

...

$$d_{sn} = \frac{-h_{mn}T^2r_{sn}r_{mn-1} + h_{mn}(a_{sn-1} - k_{sn} + Tr_{sn}r_{mn}) + h_{sn}(-r_{sn} + Tr_{sn-1} - Tr_{sn}a_{mn-1} + Tr_{sn}k_{mn})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{mn}} \quad (6.182)$$

Si se compara el polinomio característico del esclavo, (6.178) – (6.182), con el polinomio característico del esclavo obtenido en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.79) – (6.83), puede observarse que la estructura de la matriz D_s es idéntica, difiriendo únicamente en que, ahora, los términos b_{m0} y b_{s0} de la ecuación diferencial del maestro y del esclavo no aparecen, y aparecen los términos h_{si} y h_{mi} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Por otra parte, si se realizan cálculos en el segundo determinante de la expresión (6.177), se obtiene el siguiente polinomio característico del error:

$$\det[sI - D_e] = 0 \quad (6.183)$$

donde:

$$D_e = (H_m A_{22} - H_s A_{12})H_m^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h_{m1}}{h_{m2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_{m2}}{h_{m3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{mn-1}}{h_{mn}} \\ d_{e1} & d_{e2} & \cdots & d_{en-1} & d_{en} \end{bmatrix} \quad (6.184)$$

siendo:

$$d_{e1} = \frac{h_{mn}(a_{m0} - k_{m1} + Tr_{mn}r_{s1}) + h_{sn}(r_{s1} + Tr_{sn}a_{m0} - Tr_{sn}k_{m1})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{m1}} \quad (6.185)$$

$$d_{e2} = \frac{-h_{mn}T^2r_{mn}r_{s1} + h_{mn}(a_{m1} - k_{m2} + Tr_{mn}r_{s2}) + h_{sn}(r_{s2} - Tr_{s1} + Tr_{sn}a_{m1} - Tr_{sn}k_{m2})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{m2}} \quad (6.186)$$

...

$$d_{en} = \frac{-h_{mn}T^2r_{mn}r_{sn-1} + h_{mn}(a_{mn-1} - k_{mn} + Tr_{mn}r_{sn}) + h_{sn}(r_{sn} - Tr_{sn-1} + Tr_{sn}a_{mn-1} - Tr_{sn}k_{mn})}{(-1 + T^2r_{sn}r_{mn})h_{mn}} \quad (6.187)$$

Si se compara ahora el polinomio característico del error, (6.183) – (6.187), con el polinomio característico del error obtenido en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.84) – (6.88), puede observarse que la estructura de la matriz D_e no es idéntica, ya que en (6.85) los términos por encima de la diagonal principal eran unos, mientras que ahora aparecen términos dependientes de h_{mi} ($i = 1, 2, \dots, n$). El resto de términos son similares, difiriendo únicamente en que los términos b_{m0} y b_{s0} de la ecuación diferencial del maestro y del esclavo no aparecen, y aparecen los términos h_{sn} y h_{mi} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Por tanto, a partir de (6.178) – (6.182), si se desea que el polinomio característico del esclavo sea $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} d_{s1} &= -p_0 \\ d_{s2} &= -p_1 \\ &\vdots \\ d_{sn} &= -p_{n-1} \end{aligned} \quad (6.188)$$

Del mismo modo, a partir de (6.183) – (6.187), si se desea que el polinomio característico del error sea $q(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_1s + q_0$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} d_{e1} \frac{h_{m1}}{h_{mn}} &= -q_0 \\ d_{e2} \frac{h_{m2}}{h_{mn}} &= -q_1 \\ &\vdots \\ d_{en} \frac{h_{mn}}{h_{mn}} &= -q_{n-1} \end{aligned} \quad (6.189)$$

Si se comparan las ecuaciones (6.188) y (6.189) con las que se obtuvieron en el caso de que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, (6.89) y (6.90), se puede comprobar que las ecuaciones (6.89) y (6.188) son idénticas, mientras que las ecuaciones (6.90) y (6.189) difieren en que, ahora, aparecen términos dependientes de h_{mi} ($i = 1, 2, \dots, n$), que antes no aparecían.

Por lo tanto mediante las ecuaciones (6.188) y (6.189) será posible fijar la dinámica del esclavo y la dinámica del error del sistema teleoperado. Estas $2n$ ecuaciones más las $n+1$ ecuaciones que hacen que el error evolucione como un sistema autónomo, ecuación expresada en (6.157) y las n ecuaciones correspondientes a la última fila de la matriz indicada en (6.158), forman un sistema de $3n+1$ ecuaciones que permite calcular los $3n+1$ parámetros que aparecen en el esquema de control del sistema teleoperado. Como se indicó en el apartado 6.2, para solucionar el sistema de ecuaciones será necesario conocer las ecuaciones diferenciales que modelan al maestro y al esclavo, el modelo del entorno, la constante de reflexión de esfuerzos y el retardo existente en la comunicación, además de indicar la dinámica deseada del esclavo y del error. Con los parámetros de control calculados se conseguirá que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardo, así como establecer la dinámica deseada del esclavo y del error. Hay que volver a reseñar que, a diferencia del caso en el que el maestro y el esclavo eran modelados por ecuaciones diferenciales que no contenían ceros, en este caso, para que el método de diseño sea válido es necesario que la matriz del esclavo C_s sea idéntica a la matriz de salida del maestro C_m , o que la relación entre ambas matrices satisfaga las condiciones indicadas en (6.164).

Este método generalizado presentado que considera que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales de orden n que contienen ceros, representa una novedad y una importante aportación de la Tesis. La importancia del método de diseño radica en que, para un maestro y un esclavo con un número cualquiera de polos y ceros, es posible, siempre que las matrices C_m y C_s cumplan determinadas condiciones, calcular el valor de los reguladores del sistema de control simplemente resolviendo un conjunto de ecuaciones.

6.4 Conclusiones

En este capítulo se ha generalizado el método de diseño de sistemas de control de teleoperación con retardos expuesto en el capítulo 3 al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n .

Se ha distinguido entre dos casos. El primero corresponde al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que no contienen ceros, mientras que el segundo corresponde al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que sí contienen ceros.

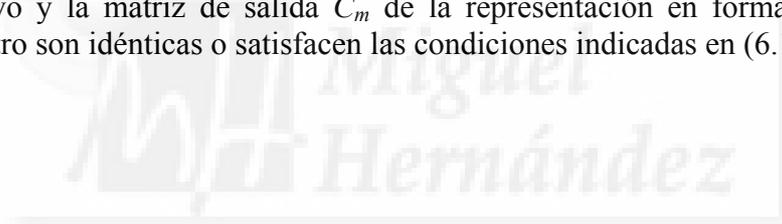
La razón de diferenciar entre estos dos casos se debe a que si se modela el maestro y el esclavo por ecuaciones diferenciales lineales que no contienen ceros, es posible generalizar el método de diseño y asegurar que la salida del esclavo seguirá a la del maestro, así como establecer la dinámica del esclavo y del error entre el maestro y el esclavo.

Sin embargo, si se modela el maestro y el esclavo por ecuaciones diferenciales lineales que contienen ceros sólo es posible generalizar el método de diseño si la matriz de salida C_s del esclavo cumple cierta relación con la matriz de salida C_m del maestro (son idénticas o satisfacen las condiciones indicadas en (6.164)).

Hay que destacar que las generalizaciones del método de diseño presentadas en este capítulo constituyen dos ideas originales de la presente Tesis. Con los métodos de diseño presentados será posible obtener los reguladores del esquema de control para que el esclavo siga al maestro, a pesar de la existencia de retardos, y además, se establezca la dinámica deseada del esclavo y la dinámica deseada del error, simplemente resolviendo un sistema de ecuaciones.

Las principales aportaciones expuestas en este capítulo, a modo de resumen, son:

- Esquema de control de un sistema teleoperado con retardos en la comunicación para un maestro y un esclavo modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n .
- Método de diseño que consigue que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos, y además es capaz de fijar las características dinámicas del error maestro – esclavo, así como del esclavo, en el caso de que el maestro y el esclavo sean modelados por ecuaciones diferenciales lineales cualesquiera que no contengan ceros.
- Método de diseño que logra que el esclavo siga al maestro a pesar de la presencia de retardos, y además es capaz de establecer las características dinámicas del error maestro – esclavo, así como del esclavo, si el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que contienen ceros y, la matriz de salida C_s de la representación en forma canónica controlable del esclavo y la matriz de salida C_m de la representación en forma canónica del maestro son idénticas o satisfacen las condiciones indicadas en (6.164).



Capítulo 7

Pruebas experimentales

7.1 Introducción

Para comprobar experimentalmente la validez del novedoso método de diseño de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión presentado en la Tesis, en este capítulo va a realizarse el control de un sistema teleoperado maestro – esclavo de un grado de libertad en el cual van a existir retardos en la comunicación entre el entorno local y el entorno remoto.

Para implementar el sistema de control se empleará un computador, por lo que será necesario utilizar una tarjeta de adquisición de datos para interactuar con el maestro y el esclavo. La tarjeta que se ha empleado es la *National Instruments 6024E*. Habitualmente la forma de llevar a cabo un control por computador es desarrollando una aplicación en la que se implementa el algoritmo de control. Sin embargo, puesto que el objetivo no es crear una aplicación de control específica del sistema teleoperado, sino más bien realizar numerosas pruebas en las que probar diferentes reguladores considerando distintas configuraciones (diferentes retardos, entornos, ...), se realizará el algoritmo de control directamente en *Simulink*.

Como es conocido, para diseñar el algoritmo de control de un sistema es necesario conocer el modelo matemático de dicho sistema. Por lo tanto el primer paso que deberá realizarse antes de proceder a implementar el control del sistema teleoperado será obtener el modelo matemático del maestro y del esclavo. Para obtener dichos modelos matemáticos se realizará una identificación del sistema maestro y del sistema esclavo por separado. Utilizando ambos modelos matemáticos se determinarán los reguladores a emplear aplicando el método de diseño presentado en la Tesis. Estos reguladores serán probados en primer lugar mediante simulación, de forma que cuando se verifique el funcionamiento simulado, se implementará el control en el sistema teleoperado real.

Este capítulo se va a estructurar del siguiente modo. En primer lugar se va a describir el entorno experimental utilizado para verificar el método de diseño. Este entorno experimental consta básicamente de un sistema teleoperado de un grado de libertad, de una tarjeta de adquisición de datos y de un computador en el que se implementará el control. Seguidamente se realizará la identificación del sistema teleoperado, obteniendo el modelo de estados del sistema maestro y del sistema esclavo. A continuación se modelará el sistema teleoperado con retardos completo, según el procedimiento explicado en el capítulo 3, y se obtendrán las ecuaciones de diseño del sistema de control. Tras hallar las ecuaciones de diseño, se calcularán los parámetros de regulación del sistema de control identificado, considerando diferentes configuraciones de retardo

y tipos de entorno, y se comprobará en simulación el funcionamiento de los distintos sistemas de control. Por último, se validará el método de diseño sobre el sistema teleoperado real. Para ello se efectuarán tres tipos de pruebas experimentales. En los dos primeros tipos de pruebas se simulará la fuerza ejercida por el operador mediante un escalón y una rampa, simulando asimismo la interacción del esclavo con un entorno. En el tercer tipo de pruebas no se simulará ni la fuerza ejercida por el operador ni la interacción del esclavo con el entorno, de forma que se considerará la fuerza real ejercida por un operador cualquiera así como distintos entornos de interacción reales.

7.2 Descripción del entorno experimental

El sistema teleoperado de un grado de libertad que va a utilizarse para verificar el novedoso método de control de sistemas teleoperados con retardos presentado en la Tesis se muestra en la Figura 7.1. Este sistema teleoperado ha sido desarrollado en el Área de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Miguel Hernández de Elche.

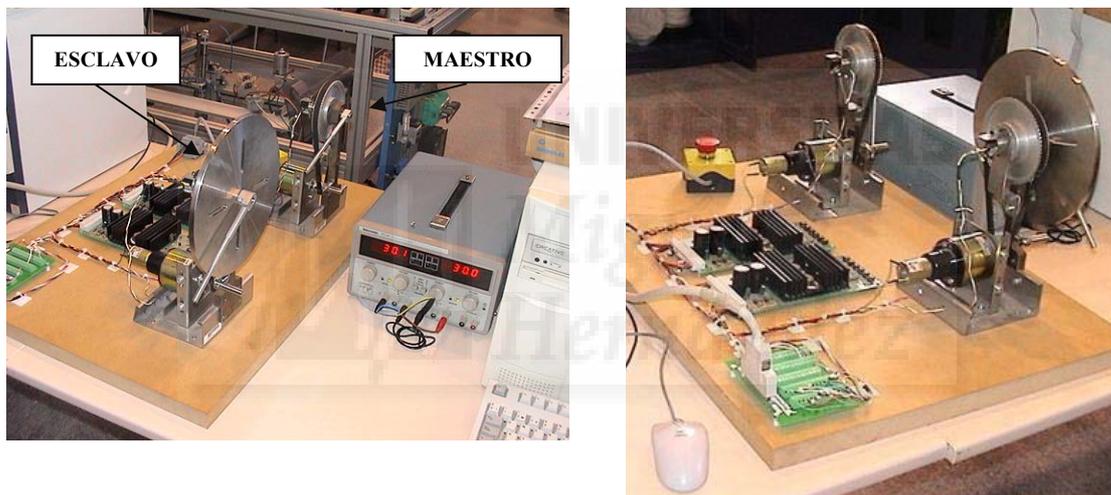


Figura 7.1. Sistema teleoperado experimental de un grado de libertad.

7.2.1 Descripción del sistema teleoperado

Como se ha comentado, el sistema teleoperado utilizado para validar experimentalmente el método de diseño presentado en la Tesis se compone de un maestro y de un esclavo de un único grado de libertad, es decir tanto el maestro como el esclavo sólo tienen una única articulación. La articulación del maestro y del esclavo tienen la misma longitud. La diferencia entre el maestro y el esclavo radica en que el esclavo posee un volante de inercia que no posee el maestro, ver Figura 7.1.

El manipulador maestro y el manipulador esclavo son controlados mediante motores DC (CC: corriente continua) sin escobillas (*brushless*) de *Premotec*. Las características técnicas de estos motores son las siguientes:

- Tensión nominal: 24 V DC
- Velocidad sin carga: 2300 rpm
- Velocidad nominal: 1600 rpm
- Par nominal: 12 Ncm
- Par pico: 27 Ncm

Estos motores proporcionan la velocidad de la articulación del maestro y del esclavo mediante tacómetros que llevan incorporados. El tacómetro proporciona un valor de tensión proporcional a la velocidad a la que gira cada articulación. Asimismo, los motores permiten leer la intensidad de la corriente que circula por ellos, suministrando un valor de tensión proporcional a la corriente.

Los ángulos de cada articulación son leídos mediante potenciómetros de *Spectrol*. El potenciómetro proporciona un valor de tensión proporcional al ángulo girado por la articulación.

Las señales de control de cada manipulador son enviadas al respectivo motor mediante un servosistema de cuatro cuadrantes (doble sentido de giro) *Kelvin CMC 24/2*. Este servosistema es utilizado como un amplificador lineal analógico. Permite generar señales de control al maestro y al esclavo entre -10 V y +10 V. El servosistema es alimentado por corriente continua: +33/0/-33 V. La máxima carga admisible es de 24 V – 2 A.

Para alimentar al sistema se ha empleado una fuente de alimentación *Tektronix* que proporciona hasta 30 V – 2 A.

7.2.2 Tarjeta de adquisición *National Instruments*

El control del sistema teleoperado va a realizarse mediante un computador, implementando el algoritmo de control en *Simulink*. Para que desde el computador se pueda interactuar con el sistema teleoperado, se ha utilizado una tarjeta de adquisición *National Instruments 6024E*. Las características técnicas de esta tarjeta de adquisición son las siguientes:

- Conexión a bus PCI.
- 16 canales de entrada analógica. El rango de tensiones que puede leerse por cada canal de entrada va desde -10 V hasta +10 V.
- 2 canales de salida analógica. El rango de tensiones de cada canal de salida comprende desde -10 V hasta +10 V.

Se van a emplear 6 canales de entrada de la tarjeta para leer los datos del sistema maestro – esclavo, y los 2 canales de salida para enviar la señal de control del maestro y del esclavo. En la Tabla 7.1 se muestran los canales de lectura que se emplearán para obtener los datos del maestro y del esclavo, indicando que parámetro se lee por cada canal y de dónde se realiza la lectura. Por otra parte, los canales que se utilizarán para enviar las señales de control al maestro y al esclavo se muestran en la Tabla 7.2.

Canal	Descripción	Origen
1	Posición del maestro	Potenciómetro
2	Velocidad del maestro	Tacómetro
3	Intensidad del maestro	Motor
4	Posición del esclavo	Potenciómetro
5	Velocidad del esclavo	Tacómetro
6	Intensidad del esclavo	Motor

Tabla 7.1. Canales de lectura de la tarjeta de adquisición.

Canal	Descripción
1	Señal de control del maestro
2	Señal de control del esclavo

Tabla 7.2. Canales de escritura de la tarjeta de adquisición.

7.3 Identificación del sistema teleoperado

Como ha sido citado en la introducción, para poder obtener los valores de los reguladores que se utilizarán en el esquema de control, es necesario realizar la identificación del maestro y del esclavo, es decir, hay que obtener el modelo matemático del maestro y del esclavo. Con los modelos identificados será posible analizar *a priori* el esquema de control antes de llevar a cabo el control real del sistema teleoperado.

Mediante el proceso de identificación se pretende caracterizar matemáticamente la función de transferencia del maestro y del esclavo analizando la respuesta obtenida de cada sistema al aplicar una tensión de control. Para realizar la identificación de cada sistema se ha optado por estudiar su respuesta en bucle abierto frente a una entrada en escalón. Puesto que cada sistema se corresponde a un motor de CC, se va a identificar la función de transferencia de un motor de CC en bucle abierto del maestro y del esclavo.

El esquema de control en posición de un motor de CC en bucle abierto se puede modelar tal como se muestra en la Figura 7.2 [Ogata-98], donde $u(t)$ es la tensión de referencia introducida, $\dot{\theta}(t)$ es la tensión proporcional a la velocidad angular, $\theta(t)$ es la tensión proporcional a la posición, y k_v es una constante que modela la relación entre la posición medida realmente en el motor y la posición que se obtiene al integrar la velocidad.

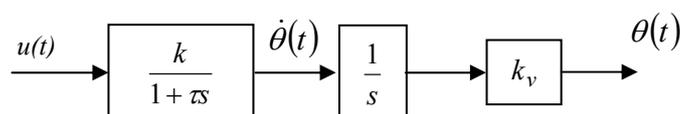


Figura 7.2. Esquema de control en posición de un motor de CC en bucle abierto.

7.3.1 Identificación en velocidad

Para identificar el sistema completo del maestro y del esclavo se determinará en primer lugar el sistema de primer orden cuya respuesta es la velocidad del motor. Es decir, se identificará la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k}{1 + \tau s} \quad (7.1)$$

donde k es la ganancia del sistema y se obtiene como el cociente del valor final alcanzado por la señal de salida y la magnitud del escalón aplicado al sistema; y la constante de tiempo τ corresponde al tiempo transcurrido desde el inicio del escalón hasta que la salida alcanza el 63%, aproximadamente, del valor final [Ogata-98].

Puesto que hay que identificar tanto el sistema maestro como el esclavo, será necesario obtener la función de transferencia $G_m(s)$ para el maestro y la función $G_s(s)$ para el esclavo:

$$G_m(s) = \frac{k_m}{1 + \tau_m s} \quad (7.2)$$

$$G_s(s) = \frac{k_s}{1 + \tau_s s} \quad (7.3)$$

Para identificar en velocidad al sistema maestro y al sistema esclavo se introducirán escalones de tensión entre 1 V y 5 V y se obtendrá la ganancia k y la constante de tiempo τ de cada sistema a partir de la velocidad leída del tacómetro para cada escalón. El rango de tensiones que puede proporcionar el tacómetro del maestro comprende desde -1.2 V hasta +1.2 V, mientras que el rango de tensiones que puede proporcionar el tacómetro del esclavo va desde -1 V hasta +1 V.

En la Tabla 7.3 se muestran los resultados obtenidos de ganancia y constante de tiempo en la identificación del sistema maestro. Como puede observarse sólo se introducen señales de control hasta 5 V, sin embargo el rango admisible está entre -10 V y +10 V. El introducir señales de control positivas o negativas únicamente influye en el sentido de giro del maestro. En este caso se ha optado por introducir señales de control positivas, que provocan que la posición del maestro vaya incrementándose. El no realizar la identificación del sistema maestro con señales de entrada mayores a 5 V se debe al diseño mecánico del sistema teleoperado. A causa de que el recorrido del maestro y del esclavo está limitado a una vuelta completa, cuanto mayor es el escalón de tensión introducido, antes llega el maestro al final de su recorrido, tal como puede apreciarse en la Figura 7.3. En esta figura puede observarse que si se introduce un escalón de 1 V ó 1.5 V, el maestro tarda aproximadamente 8.5 s en realizar el recorrido completo, sin embargo, si se aumenta el escalón de entrada hasta 2 V, tarda alrededor de 7 s. De este modo, si se introduce por ejemplo un escalón de 5 V, el maestro realiza su recorrido en aproximadamente 2 segundos, por lo que no existe apenas señal en régimen permanente para analizar.

V_{entrada}	V_{final}	$k_m = V_{\text{final}}/V_{\text{entrada}}$	τ_m
1	-0.0175169	-0.0175169	0.12
1.5	-0.06933019	-0.04622	0.14
2	-0.1232241	-0.061612	0.14
2.5	-0.17507	-0.070029	0.14
3	-0.224102	-0.0747	0.14
3.5	-0.2731375	-0.078039	0.14
4	-0.32576	-0.0814417	0.14
4.5	-0.37778	-0.083951	0.14
5	-0.425716	-0.085143	0.14

Tabla 7.3. Valores obtenidos en la identificación del maestro.

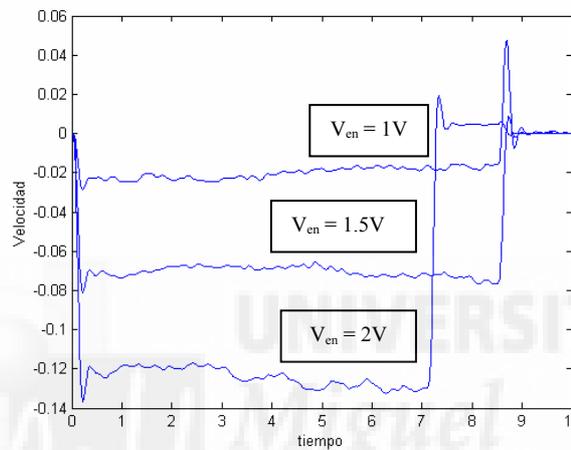


Figura 7.3. Velocidad del maestro ante entradas de tensión de 1 V, 1.5 V y 2 V.

En la Tabla 7.4 se muestran los resultados obtenidos de ganancia y constante de tiempo en la identificación del sistema esclavo. Como puede observarse los valores de ganancia y constante de tiempo son mayores en valor absoluto que en el caso del sistema maestro. La razón de que los valores del esclavo sean diferentes a los del maestro se debe a que, como se comentó en el apartado 7.2, el esclavo posee un volante de inercia que no tiene el maestro, ver Figura 7.1, lo que provoca que la dinámica del esclavo sea distinta a la del maestro.

V_{entrada}	V_{final}	$k_s = V_{\text{final}}/V_{\text{entrada}}$	τ_s
1	-0.056037	-0.056037	0.16
1.5	-0.111025	-0.0740168	0.17
2	-0.1639388	-0.081969	0.14
2.5	-0.215966	-0.0863867	0.17
3	-0.269218	-0.0897395	0.17
3.5	-0.3200126	-0.0914321	0.15
4	-0.37212846	-0.0930321	0.17
4.5	-0.4260931	-0.09468737	0.15
5	-0.477631	-0.095526	0.14

Tabla 7.4. Valores obtenidos en la identificación del esclavo.

Para modelar el sistema maestro se va a realizar una media aritmética de los valores de k_m y τ_m obtenidos en el proceso de identificación para las entradas en escalón de 2 V, 2.5 V y 3 V. Únicamente se ha considerado este rango de valores de tensión debido a que las ganancias correspondientes a estas entradas no varían demasiado entre si, y el recorrido que efectúa el maestro ante estas entradas no es mínimo. Los valores que se obtienen son $k_m = -0.0687803$ y $\tau_m = 0.14$. Por lo tanto la función de transferencia del maestro en velocidad es:

$$G_m(s) = \frac{k_m}{1 + \tau_m s} = \frac{-0.0687803}{1 + 0.14s} \quad (7.4)$$

En el caso de la identificación del esclavo se realizará una media entre los valores de k_s y τ_s obtenidos en el proceso de identificación para las entradas en escalón de 1.5 V, 2 V y 2.5 V. Los valores que se obtienen son $k_s = -0.0807908$ y $\tau_s = 0.16$. Por lo tanto la función de transferencia del esclavo en velocidad es:

$$G_s(s) = \frac{k_s}{1 + \tau_s s} = \frac{-0.0807908}{1 + 0.16s} \quad (7.5)$$

Hay que indicar que tanto en el maestro como en el esclavo, el comportamiento del sistema ante entradas pequeñas es no lineal, por lo tanto sería más adecuado modelar el maestro y el esclavo considerando valores de tensión entre 4 V y 6 V, donde los valores de k y τ serían más similares. Sin embargo, como se ha indicado, el considerar señales de control del orden de 5 V o mayores, conlleva a que el maestro o el esclavo realicen su recorrido completo en muy poco tiempo. Para que el maestro y el esclavo funcionaran con señales de control de tal orden y se solucionara el problema del poco tiempo empleado en realizar el recorrido, habría que modificar el diseño mecánico del sistema teleoperado, por ejemplo aplicando un reductor acoplado en el eje del maestro y otro aplicado en el eje del esclavo.

Tanto en la identificación en velocidad del maestro como del esclavo se observa que, al introducir señales de control positivas, el maestro y el esclavo van incrementando su posición, pero poseen velocidades negativas. Para que el incremento de posición corresponda a velocidades positivas, se multiplicará por -1 la velocidad leída en el maestro y en el esclavo. De esta forma se considerará que las funciones de transferencia del maestro y del esclavo vienen dadas respectivamente por:

$$G_m(s) = \frac{k_m}{1 + \tau_m s} = \frac{0.0687803}{1 + 0.14s} \quad (7.6)$$

$$G_s(s) = \frac{k_s}{1 + \tau_s s} = \frac{0.0807908}{1 + 0.16s} \quad (7.7)$$

7.3.2 Identificación en posición

Una vez que se ha identificado en velocidad el sistema maestro y el sistema esclavo, es necesario identificar la constante k_v del diagrama de bloques en posición del motor de

CC en bucle abierto, ver Figura 7.2. Esta constante modela la relación entre la posición medida realmente en el motor y la posición que se obtiene al integrar la velocidad, es decir, modela la constante del potenciómetro. Se calculará tanto la constante k_v del maestro (que se denominará k_{vm}) como la del esclavo (que se llamará k_{vs}). La posición del maestro y del esclavo se leerán, como fue comentado en el apartado 7.2, mediante potenciómetros. Los potenciómetros proporcionan una tensión proporcional al ángulo girado por cada articulación. El rango de tensiones correspondientes al ángulo que puede tomar el maestro va desde aproximadamente +2.50 V hasta alrededor de +2.99 V, mientras que el rango de tensiones proporcionales al ángulo del esclavo comprende desde aproximadamente +2.52 V hasta alrededor de +3.01 V.

Identificación en posición del maestro

Para realizar la identificación en posición del maestro, se ha leído la posición real del maestro mediante el potenciómetro y se ha comparado con la que se obtiene al integrar la velocidad que proporciona la función de transferencia (7.6), de forma que la constante k_{vm} del maestro es la relación entre ambas posiciones. Para que la posición inicial del maestro sea 0 V y al aplicar una señal de control positiva dicha posición vaya incrementándose, se restará a la posición leída del maestro la posición inicial en la que se encuentra el maestro:

$$posición_{utilizada} = posición_{leída} - posición_{inicial\ maestro} \quad (7.8)$$

Aplicando diversas señales de entrada al maestro y comparando la posición leída con la obtenida al integrar la velocidad proporcionada por la función de transferencia identificada, se ha comprobado que, para que ambas posiciones coincidan, es necesario que la constante k_{vm} sea aproximadamente:

$$k_{vm} = \frac{1}{1.85} \quad (7.9)$$

De este modo el esquema de control en posición del maestro en bucle abierto es el que se muestra en la Figura 7.4, donde $u_m(t)$ es la tensión de entrada al maestro.

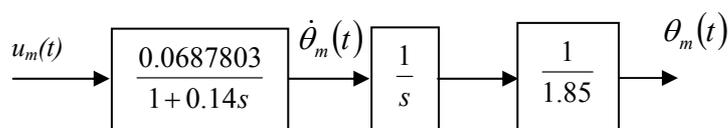


Figura 7.4. Esquema de control en posición del maestro en bucle abierto.

Identificación en posición del esclavo

Para identificar en posición el esclavo se ha procedido de forma análoga al caso anterior, de forma que se ha comparado la posición leída del potenciómetro del esclavo con la que se obtiene al integrar la velocidad que proporciona la función de transferencia (7.7), para obtener la constante k_{vs} del esclavo. Al igual que en el maestro, para que la posición inicial del esclavo sea 0 V y al aplicar una señal de control positiva dicha posición vaya incrementándose, se resta a la posición leída del esclavo la posición inicial en la que se encuentra el esclavo:

$$posición_{utilizada} = posición_{leída} - posición_{inicial\ esclavo} \quad (7.10)$$

En este caso, para que la señal que se obtiene al integrar la velocidad del esclavo coincida con la posición leída del potenciómetro, es necesario dividir dicha señal por 1.85, al igual que ocurría en el sistema maestro (esto es debido a que se ha utilizado el mismo sensor de posición en el maestro y en el esclavo). Por lo tanto la constante buscada es la misma que la utilizada en el maestro:

$$k_{vs} = \frac{1}{1.85} \quad (7.11)$$

En la Figura 7.5 se muestra el esquema de control en posición del esclavo en bucle abierto, donde $u_s(t)$ es la tensión de entrada del esclavo.

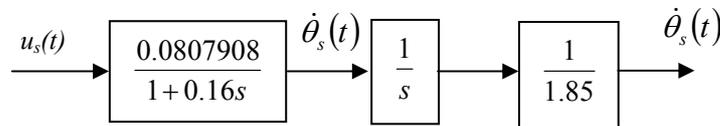


Figura 7.5. Esquema de control en posición del esclavo.

7.4 Modelado y diseño del sistema de control teleoperado con retardos

7.4.1 Modelado del sistema teleoperado

El método de diseño presentado en el capítulo 3 modela el sistema teleoperado con retardos en variables de estado. Por lo tanto se va a obtener la representación en variables de estado del sistema maestro y del sistema esclavo mostrados, respectivamente, en la Figura 7.4 y en la Figura 7.5. En ambos casos se van a elegir variables de estado con sentido físico, concretamente la posición y la velocidad. De esta forma, al implantar el esquema de control y conseguir que el estado del esclavo siga al estado del maestro, se logrará que la posición y la velocidad del esclavo sigan a la posición y a la velocidad del maestro.

A partir del diagrama de bloques del maestro de la Figura 7.4 puede obtenerse la representación en variables de estado con sentido físico. Considerando que las variables de estado son $x_{m1}(t) = \theta_m(t)$ y $x_{m2}(t) = \dot{\theta}_m(t)$, se obtienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_{m1}(t) = k_{vm} x_{m2}(t) \quad (7.12)$$

$$\dot{x}_{m2}(t) = -\frac{1}{\tau_m} x_{m2}(t) + \frac{k_m}{\tau_m} u_m(t) \quad (7.13)$$

Por tanto, el modelado en variables de estado con sentido físico del sistema maestro es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & k_{vm} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{\tau_m} \end{bmatrix} u_m(t) \\ y_m(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.14)$$

De forma simplificada se representará este sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (7.15)$$

De forma similar, a partir del diagrama de bloques del esclavo de la Figura 7.5 y considerando que las variables de estado son $x_{s1}(t) = \theta_s(t)$ y $x_{s2}(t) = \dot{\theta}_s(t)$, se obtiene el siguiente modelado en variables de estado con sentido físico del esclavo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & k_{vs} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_s}{\tau_s} \end{bmatrix} u_s(t) \\ y_s(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.16)$$

De forma simplificada se representará este sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Con los valores obtenidos en la identificación realizada en el apartado 7.3 se obtiene la siguiente representación en variables de estado del maestro y del esclavo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.54054 \\ 0 & -7.142857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.49128785 \end{bmatrix} u_m(t) \\ y_m(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.54054 \\ 0 & -6.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5049425 \end{bmatrix} u_s(t) \\ y_s(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.19)$$

El esquema de control que se va a implantar en el sistema teleoperado es el presentado en el capítulo 3 y que se muestra en la Figura 7.6.

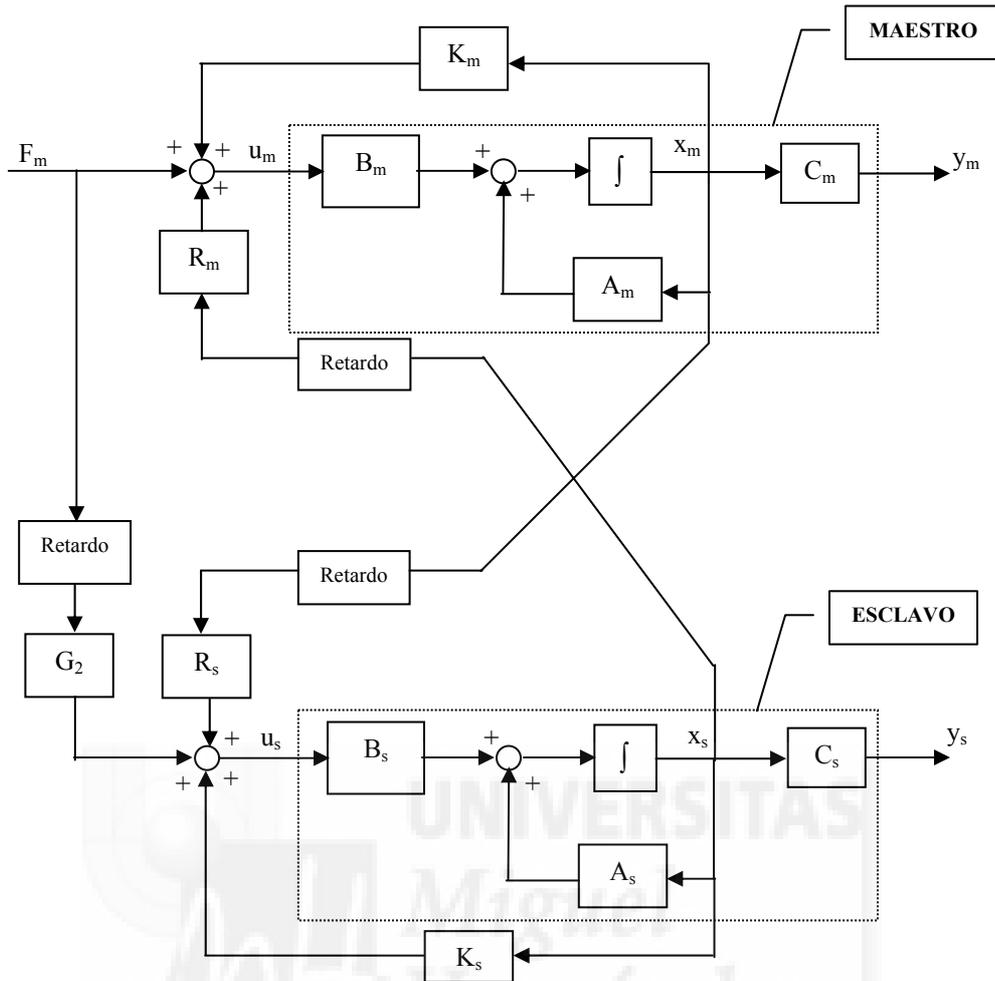


Figura 7.6. Sistema de control del sistema teleoperado.

Las matrices que aparecen en el modelo del sistema teleoperado tienen la siguiente estructura:

$$K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}] \quad (7.20)$$

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] \quad (7.21)$$

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2}] \quad (7.22)$$

$$R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}] \quad (7.23)$$

$$G_2 = g_2 \quad (7.24)$$

Como se indicó en el epígrafe 3.2.2 del capítulo 3, con la matriz K_s se puede modelar la interacción del esclavo con el entorno y mediante la matriz R_m es posible contemplar en el modelo la reflexión de fuerzas de contacto del esclavo con el entorno hacia el maestro. Al igual que en dicho epígrafe, se va a considerar que el entorno únicamente es modelado durante el contacto, como una rigidez de valor k_e y un rozamiento viscoso de valor b_e , de forma que la fuerza de reacción actuante sobre el esclavo vendrá dada por:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) + b_e \dot{\theta}_s(t) \quad (7.25)$$

De este modo, para incorporar en el modelo la interacción del esclavo con el entorno, la estructura de la matriz K_s será:

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] = [k'_{s1} - k_e \quad k'_{s2} - b_e] = [k'_{s1} \quad k'_{s2}] - [k_e \quad b_e] = K'_s - [k_e \quad b_e] \quad (7.26)$$

Y para realimentar la fuerza de contacto del esclavo hacia el maestro, la estructura de la matriz R_m será:

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2}] = [k_f k_e \quad k_f b_e] \quad (7.27)$$

donde k_f es la constante de reflexión de esfuerzos.

7.4.2 Diseño del sistema de control

El método de diseño del sistema teleoperado presentado en el capítulo 3 plantea una serie de ecuaciones mediante las que se consigue que el error entre el estado del esclavo y el estado del maestro converja a cero, es decir que el estado del esclavo siga al estado del maestro. Además, con dichas ecuaciones es posible fijar la dinámica deseada del esclavo y la dinámica deseada del error maestro – esclavo. Solucionando las ecuaciones de diseño del sistema de control se calculan los parámetros de regulación del sistema teleoperado con retardos:

- $G_2 = g_2$
- $R_s = [r_{s1} \quad r_{s2}]$
- $K_m = [k_{m1} \quad k_{m2}]$
- $K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] = [k'_{s1} - k_e \quad k'_{s2} - b_e]$

A continuación se van a obtener las ecuaciones de diseño considerando que la representación del maestro y del esclavo es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{m12} \\ 0 & a_{m22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{m2} \end{bmatrix} u_m(t) \\ y_m(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{s1}(t) \\ \dot{x}_{s2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{s12} \\ 0 & a_{s22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{s2} \end{bmatrix} u_s(t) \\ y_s(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.29)$$

donde $a_{m12} = k_{vm}$, $a_{m22} = -\frac{1}{\tau_m}$, $b_{m2} = \frac{k_m}{\tau_m}$, $a_{s12} = k_{vs}$, $a_{s22} = -\frac{1}{\tau_s}$, y $b_{s2} = \frac{k_s}{\tau_s}$.

Las siete ecuaciones necesarias para el diseño del esquema de control son las siguientes:

- Ecuaciones que hacen que el error se comporte como un sistema autónomo:

$$\begin{aligned} b_{s2}k_{s1} - b_{s2}Tb_{m2}r_{m1}r_{s2} - b_{m2}r_{m1} + b_{m2}Tr_{m2}b_{s2}k_{s1} + b_{s2}r_{s1} \\ - b_{s2}Tr_{s2}b_{m2}k_{m1} - b_{m2}k_{m1} + b_{m2}Tr_{m2}b_{s2}r_{s1} = 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} -T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m1}a_{s12} - a_{s22} - b_{s2}k_{s2} + b_{m2}r_{m2} - b_{m2}Tr_{m1}a_{s12} - b_{m2}Tr_{m2}a_{s22} \\ - b_{m2}Tr_{m2}b_{s2}k_{s2} - b_{s2}r_{s2} + b_{s2}Tr_{s1}a_{m12} + b_{s2}Tr_{s2}a_{m22} + b_{s2}Tr_{s2}b_{m2}k_{m2} \\ + T^2b_{m2}r_{m2}b_{s2}r_{s1}a_{m12} + a_{m22} + b_{m2}k_{m2} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$-b_{s2}g_2 + b_{s2}Tr_{s2}b_{m2} + b_{m2} - Tg_2b_{m2}r_{m2}b_{s2} = 0 \quad (7.32)$$

- Ecuaciones que fijan la dinámica del esclavo considerando que el polinomio característico deseado del esclavo es $p(s) = s^2 + p_1s + p_0$:

$$\frac{a_{s12}b_{s2}(-k_{s1} + Tr_{m1}b_{m2}r_{s2} - r_{s1} + Tr_{s2}b_{m2}k_{m1})}{-1 + T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m2}} = -p_0 \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} -T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m1}a_{s12} - a_{s22} - b_{s2}k_{s2} + Tb_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m2} \\ - b_{s2}r_{s2} + b_{s2}Tr_{s1}a_{m12} + b_{s2}Tr_{s2}a_{m22} + b_{s2}Tr_{s2}b_{m2}k_{m2} \\ -1 + T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m2} = -p_1 \end{aligned} \quad (7.34)$$

- Ecuaciones que fijan la dinámica del error considerando que el polinomio característico deseado del error es $q(s) = s^2 + q_1s + q_0$:

$$\frac{a_{m12}(-b_{m2}k_{m1} + b_{m2}Tr_{m2}b_{s2}r_{s1} + b_{s2}r_{s1} - b_{s2}Tr_{s2}b_{m2}k_{m1})}{-1 + T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m2}} = -q_0 \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} T^2b_{m2}r_{m2}b_{s2}r_{s1}a_{m12} + a_{m22} + b_{m2}k_{m2} - Tb_{s2}r_{m2}b_{m2}r_{s2} \\ - b_{s2}r_{s2} + b_{s2}Tr_{s1}a_{m12} + b_{s2}Tr_{s2}a_{m22} + b_{s2}Tr_{s2}b_{m2}k_{m2} \\ -1 + T^2b_{s2}r_{s2}b_{m2}r_{m2} = -q_1 \end{aligned} \quad (7.36)$$

7.5 Resultados en simulación

Antes de aplicar el control al sistema real se va a estudiar su comportamiento en simulación considerando distintas configuraciones. En cada configuración se asumirán unos valores determinados de ubicación de polos deseados, así como un tiempo de retardo y unas características dinámicas del entorno. Una vez comprobado el

funcionamiento satisfactorio en simulación del sistema de control, se procederá a implantar el esquema de control en el sistema teleoperado real.

En la Tabla 7.5 se muestran los parámetros de diseño considerados en cada configuración, junto con el valor de los reguladores obtenidos utilizando el método de diseño. En todos los casos se ha considerado que la constante de reflexión de esfuerzos k_f es 0.1 y que el entorno se caracteriza únicamente por la constante de rigidez k_e , de forma que el coeficiente de rozamiento viscoso b_e es 0. Además se ha supuesto que el retardo existente en la comunicación es de 0.1 segundos. En todas las configuraciones se consigue la estabilidad asintótica del sistema independientemente del retardo existente.

Configuración	Parámetros de diseño	Reguladores
1	Polos error: $\{-5, -5\}$ Polos esclavo: $\{-5, -5\}$ Entorno: $k_e = 1$ Nm/rad	$g_2 = 0.972958$ $K_m = [-94.240423 \ -5.810213]$ $K_s = [-91.497383 \ -7.431847]$ $K'_s = [-90.497383 \ -7.431847]$ $R_m = [0.1 \ 0]$ $R_s = [-0.097295 \ 0]$
2	Polos error: $\{-5, -5\}$ Polos esclavo: $\{-5, -5\}$ Entorno: $k_e = 10$ Nm/rad	$g_2 = 0.972958$ $K_m = [-95.140423 \ -5.761565]$ $K_s = [-90.621721 \ -7.47918]$ $K'_s = [-80.621721 \ -7.47918]$ $R_m = [1 \ 0]$ $R_s = [-0.972958 \ 0]$
3	Polos error: $\{-5, -5\}$ Polos esclavo: $\{-5, -5\}$ Entorno: $k_e = 100$ Nm/rad	$g_2 = 0.972958$ $K_m = [-104.140423 \ -5.275079]$ $K_s = [-81.865098 \ -7.95251]$ $K'_s = [18.134901 \ -7.95251]$ $R_m = [10 \ 0]$ $R_s = [-9.72958 \ 0]$
4	Polos error: $\{-5, -5\}$ Polos esclavo: $\{-10, -10\}$ Entorno: $k_e = 1$ Nm/rad	$g_2 = 0.547288$ $K_m = [-376.661693 \ -26.164879]$ $K_s = [-91.53995 \ -7.429546]$ $K'_s = [-90.53995 \ -7.429546]$ $R_m = [0.1 \ 0]$ $R_s = [-114.548077 \ -8.664352]$
5	Polos error: $\{-10, -10\}$ Polos esclavo: $\{-5, -5\}$ Entorno: $k_e = 1$ Nm/rad	$g_2 = 1.729703$ $K_m = [-94.240423 \ -5.810213]$ $K_s = [-366.205746 \ -27.240173]$ $K'_s = [-365.205746 \ -27.240173]$ $R_m = [0.1 \ 0]$ $R_s = [203.370761 \ 15.403293]$
6	Polos error: $\{-10, -10\}$ Polos esclavo: $\{-10, -10\}$ Entorno: $k_e = 1$ Nm/rad	$g_2 = 0.972958$ $K_m = [-376.661693 \ -26.164879]$ $K_s = [-366.28142 \ -27.236082]$ $K'_s = [-365.28142 \ -27.236082]$ $R_m = [0.1 \ 0]$ $R_s = [-0.097295 \ 0]$

Tabla 7.5. Reguladores utilizados con el sistema teleoperado identificado.

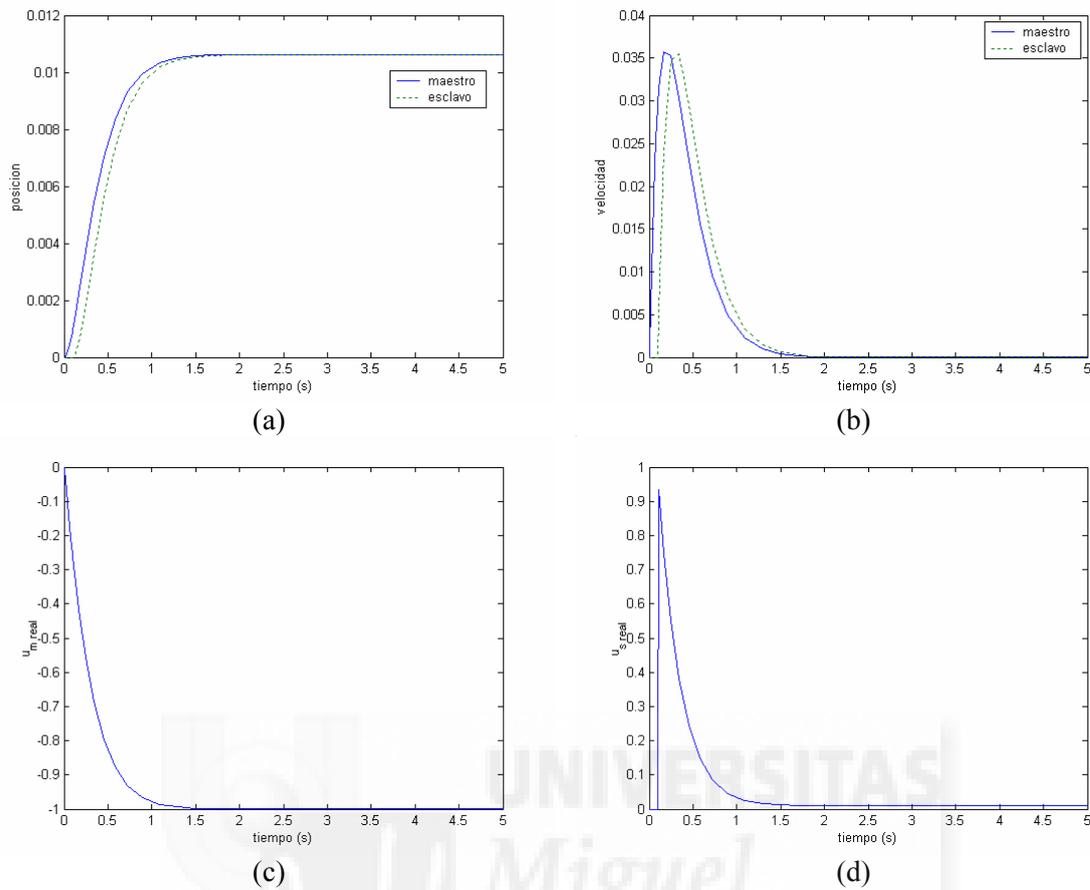


Figura 7.7. Simulación del sistema teleoperado considerando que todos los polos están en -5 , $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 1). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

En la Figura 7.7 se muestra la simulación del sistema teleoperado cuando el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, considerando que todos los polos se ubican en la posición -5 del plano s , que la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad y que existe un retardo de 0.1 segundos (configuración 1). Como puede comprobarse en (a) y en (b), la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$). En (c) y en (d) se muestran, respectivamente, la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$). Como se explicó en el apartado 4.2 del capítulo 4, en un sistema teleoperado real, cuando se alcance una posición de equilibrio, el motor del maestro deberá ejercer una fuerza/par igual y de sentido contrario a la fuerza que ejerce el operador para mantener esta posición de equilibrio y para que el operador sienta la fuerza de reacción en este punto. Asimismo el motor del esclavo deberá generar una fuerza/par igual a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno para mantener su posición de equilibrio. Por este motivo se indicó que la señal de control real del maestro y del esclavo venían dadas respectivamente por:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t - T) \quad (7.37)$$

$$\tilde{u}_s(t) = K'_s x_s(t) + R_s x_m(t - T) + G_2 F_m(t - T) \quad (7.38)$$

donde K'_s se obtiene a partir de (7.26). Posteriormente, en el epígrafe 7.6.1 se remarcará la diferencia entre la señal de control del maestro ($u_m(t)$) y del esclavo ($u_s(t)$) que aparecen en la Figura 7.6, con respecto a la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) que se aplicarían a un sistema teleoperado real.

En la Figura 7.8 se muestra la simulación del sistema teleoperado cuando el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, considerando que los polos del error se encuentran en la posición -5 del plano s , que los polos del esclavo se encuentran en la posición -10 del plano s , que la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad y que existe un retardo de 0.1 segundos (configuración 4). Como puede comprobarse en (a) y en (b), la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

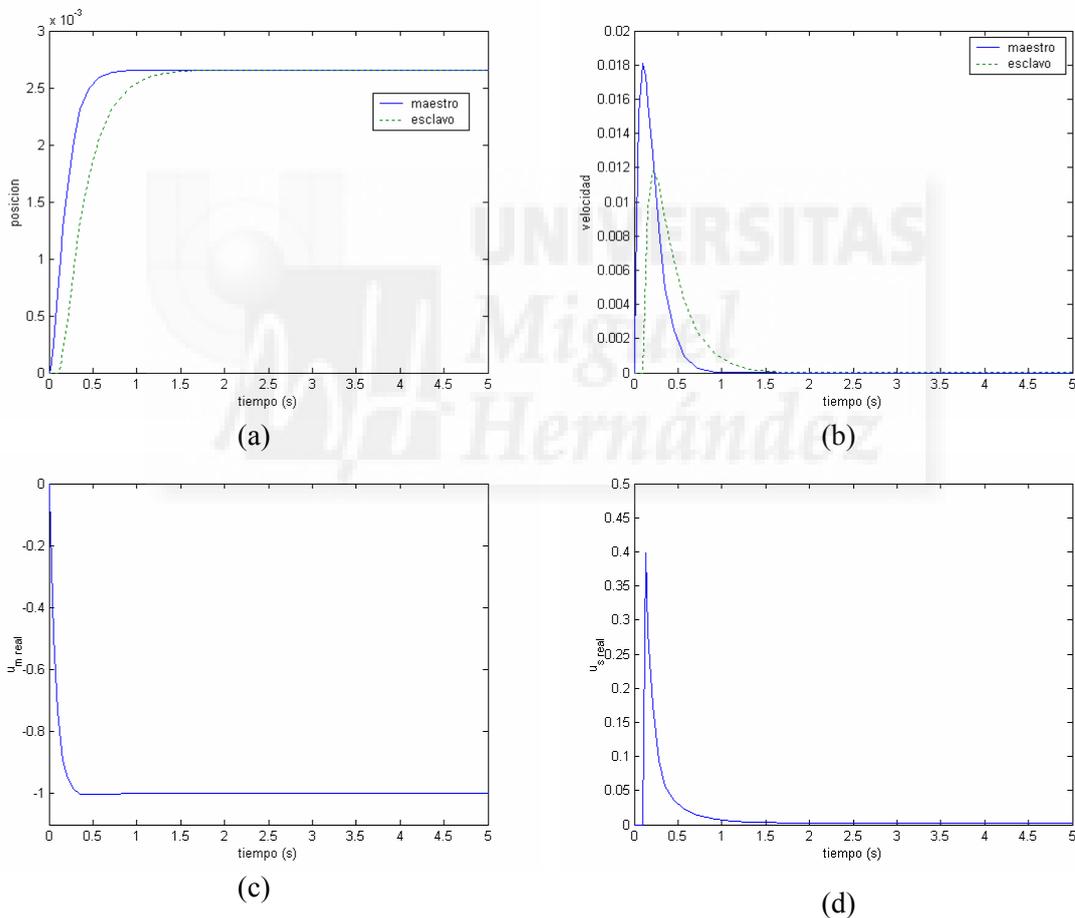


Figura 7.8. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error están en -5, los polos del esclavo están en -10, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 4). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

En la Figura 7.9 se muestra la simulación del sistema teleoperado cuando el operador ejerce una fuerza constante de 1 Nm, considerando que los polos del error se encuentran

en la posición -10 del plano s , que los polos del esclavo se encuentran en la posición -5 del plano s , que la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad y que existe un retardo de 0.1 segundos (configuración 5). Como puede comprobarse en (a) y en (b), la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

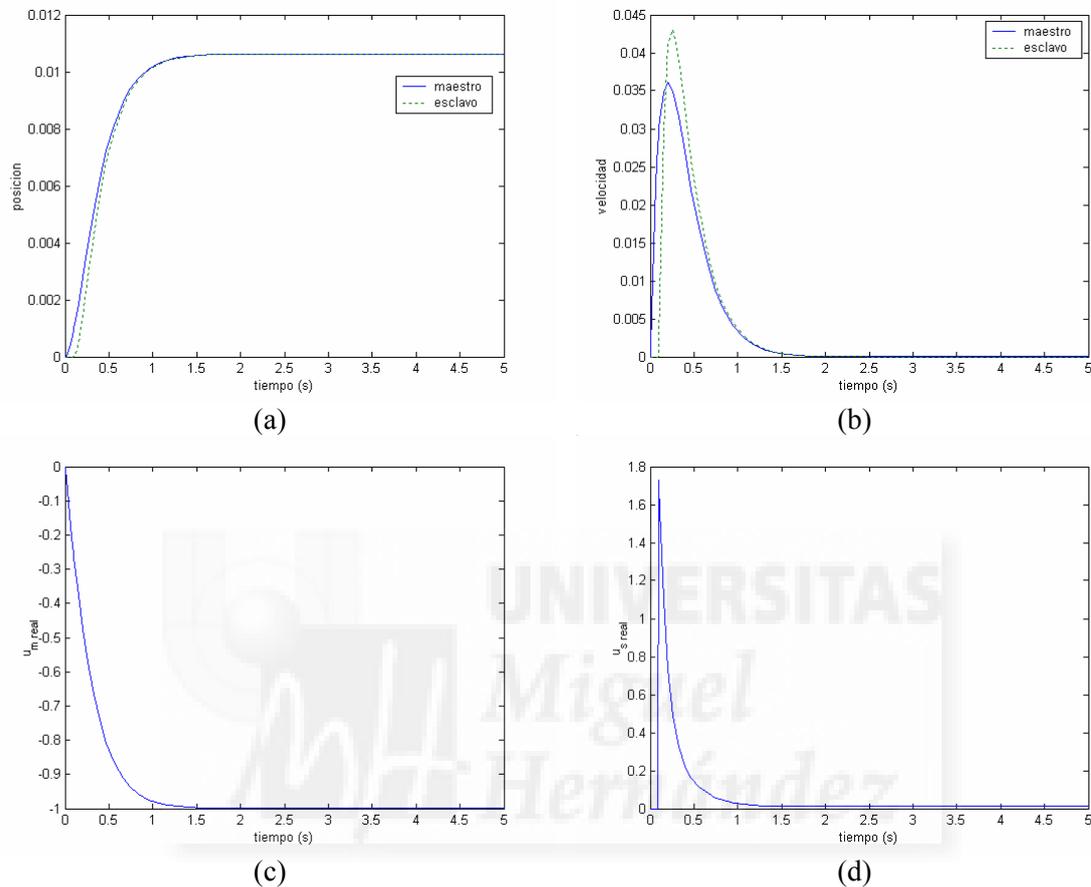


Figura 7.9. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error están en -10, los polos del esclavo están en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 5). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Si se considera que tanto los polos del error como los del esclavo se encuentran en la posición -10 del plano s , que la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad y que existe un retardo de 0.1 segundos (configuración 6), se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 7.10. Al igual que en las anteriores simulaciones, puede observarse en (a) y en (b) que la posición y velocidad del esclavo ($x_{s1}(t)$ y $x_{s2}(t)$) siguen respectivamente la posición y velocidad del maestro ($x_{m1}(t)$ y $x_{m2}(t)$).

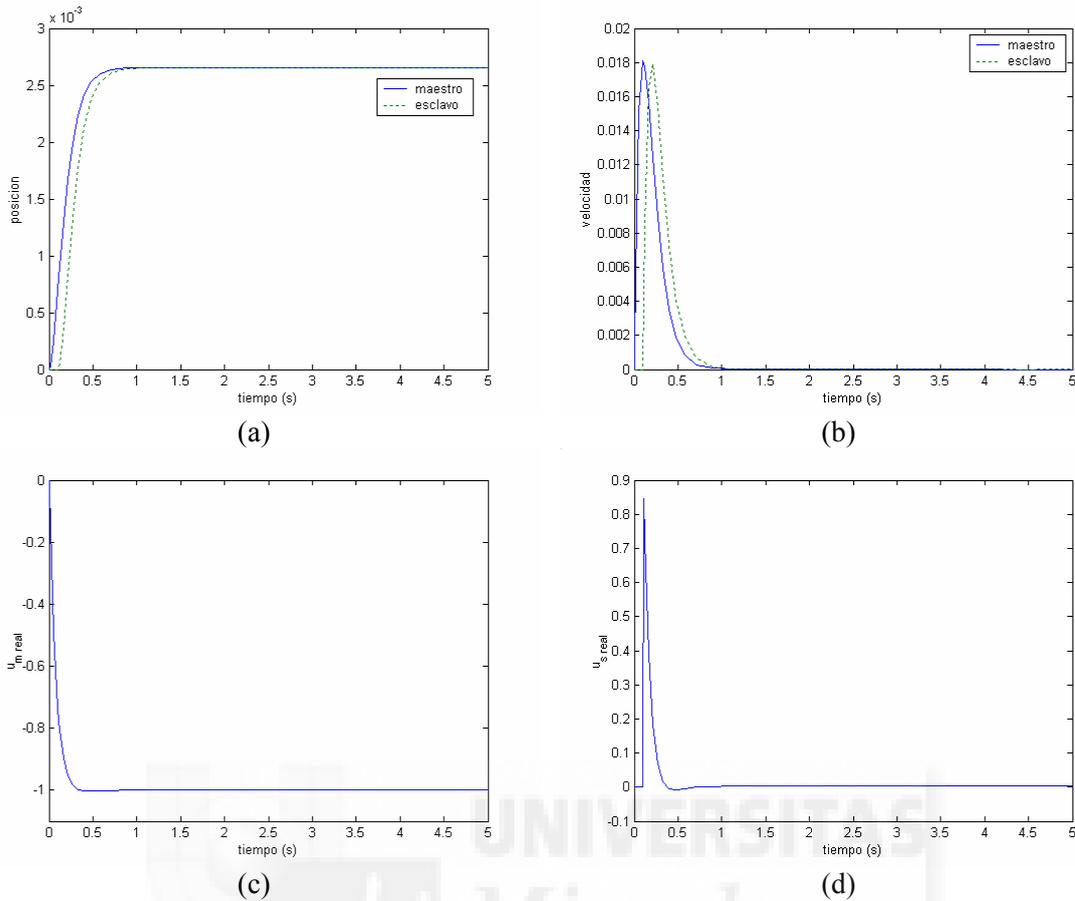


Figura 7.10. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error y del esclavo están en -10 , $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 6). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

A través de las distintas gráficas mostradas en este apartado se ha podido validar en simulación el funcionamiento satisfactorio de los sistemas de control diseñados. Si se comparan las respuestas, así como las señales de control de cada sistema, se puede comprobar, como ya se explicó en el apartado 4.4 del capítulo 4, que la ubicación seleccionada de los polos del esclavo y del error afecta al comportamiento dinámico del sistema teleoperado con retardos del siguiente modo:

- La posición final del sistema depende de la ubicación de los polos del esclavo, de forma que conforme se alejan los polos del origen se obtiene una posición final menor.
- La velocidad máxima del maestro disminuye al alejar del origen los polos del esclavo, no siendo influida por la ubicación de polos del error elegida.
- La velocidad máxima del esclavo disminuye al alejar del origen los polos del esclavo, mientras que aumenta al alejar del origen los polos del error.
- El tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo, así como el tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo, disminuyen al alejar tanto los polos del esclavo como los del error del origen.

- El valor máximo de la señal de control real del maestro (en valor absoluto) no es influida en gran medida por la ubicación de polos del esclavo y del error seleccionada.
- El valor máximo de la señal de control real del esclavo (en valor absoluto) depende tanto de los polos del esclavo como de los polos del error. Disminuye al alejar los polos del esclavo del origen, mientras que aumenta al alejar los polos del error del origen.

Tras comprobar en simulación el funcionamiento satisfactorio de los esquemas de control considerando diferentes configuraciones de los parámetros de diseño, se va a proceder a implantar dichos esquemas en el sistema teleoperado experimental de un grado de libertad.

7.6 Resultados reales

Tal como fue comentado en la introducción, se han implementado los esquemas de control del sistema teleoperado directamente en *Simulink*, de modo que desde dicho entorno es posible interactuar con el sistema teleoperado accediendo a los canales de lectura y escritura de la tarjeta de adquisición *National Instruments*. Se han realizado tres tipos de pruebas experimentales para verificar la validez del método de diseño con el sistema teleoperado real de un grado de libertad, ver Figura 7.11. Los tres tipos de pruebas realizadas son:

- Respuesta del sistema teleoperado real simulando la fuerza ejercida por el operador mediante un escalón y simulando también la interacción del esclavo con un entorno.
- Respuesta del sistema teleoperado real simulando la fuerza ejercida por el operador mediante una rampa y simulando también la interacción del esclavo con un entorno.
- Respuesta del sistema teleoperado real ante cualquier fuerza ejercida *realmente* por el operador cuando el esclavo interacciona con un entorno real.

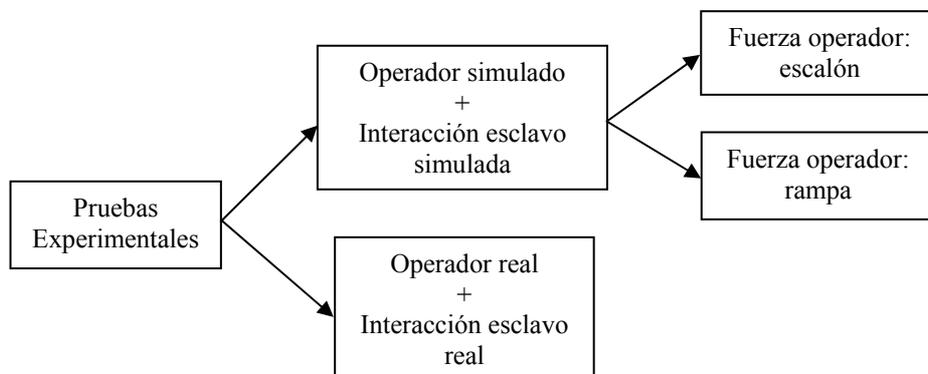


Figura 7.11. Tipos de pruebas experimentales realizadas para verificar el método de diseño.

Los dos primeros tipos de pruebas permiten validar los esquemas de control del sistema teleoperado ante retardos, pero en lugar de interactuar con un entorno real, se simula la interacción con un entorno mediante la matriz K_s y se realimenta la fuerza de interacción hacia el maestro usando la matriz R_m , tal como se indicó en el epígrafe 7.4.1. En estas pruebas se simula la fuerza que ejerce el operador mediante un escalón y mediante una rampa. Es decir, el operador no moverá directamente el maestro, sino que éste se moverá al aplicarle una señal en escalón o en rampa. Una vez validados los reguladores diseñados en las pruebas en las que se simula tanto el operador como el entorno con el que interactúa el esclavo, en el tercer tipo de pruebas se realiza un control del sistema teleoperado experimental con retardos pero considerando un operador real que ejerce una fuerza cualquiera, y considerando que el esclavo interactúa con un entorno real.

7.6.1 Respuesta del sistema teleoperado simulando la fuerza del operador mediante un escalón y simulando la interacción del esclavo con el entorno

En este epígrafe se van a mostrar los resultados experimentales obtenidos con el sistema teleoperado real cuando se ha simulado la fuerza ejercida por el operador mediante un escalón, y asimismo se ha simulado la interacción del esclavo con el entorno.

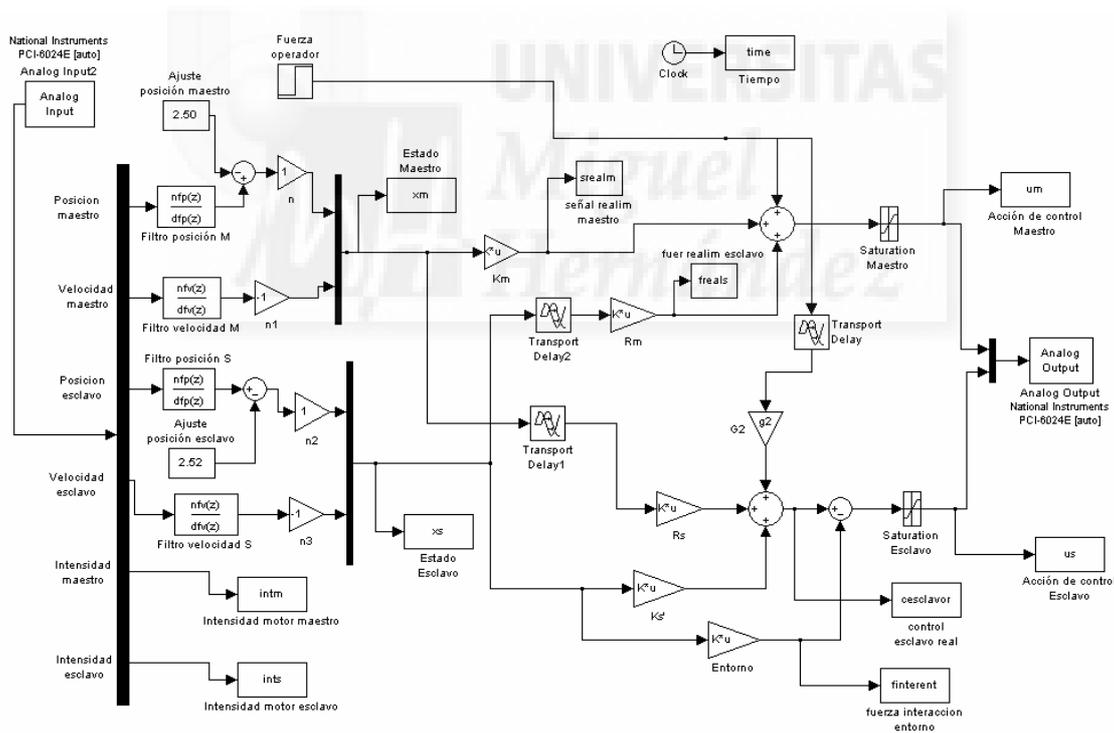


Figura 7.12. Esquema de control del sistema teleoperado con retardos simulando la fuerza del operador mediante un escalón y simulando la interacción del esclavo con el entorno.

Para controlar el sistema teleoperado experimental ante retardos considerando una entrada en escalón se ha implementado en *Simulink* el esquema que se muestra en la Figura 7.12. Este esquema lee la posición y velocidad del maestro y del esclavo, y se encarga de generar la señal de control del maestro y del esclavo, utilizando un periodo de muestreo de 0.01s. Como puede observarse, se ha utilizado el bloque *Transport*

Delay de *Simulink* para introducir retardos constantes en la transmisión entre el maestro y el esclavo. En este esquema puede comprobarse que se ha introducido como entrada un escalón que modela la fuerza que aplica el operador (bloque *Fuerza operador*). Por otra parte hay que indicar que los datos leídos del maestro y del esclavo (posición y velocidad) han sido filtrados utilizando el siguiente filtro digital de promedio móvil [Ogata-96]:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5} \quad (7.39)$$

donde $Y(z)$ representa la salida del filtro y $X(z)$ representa la entrada.

En el epígrafe 7.4.1 se mostró a través de las expresiones (7.26) y (7.27) cuál debía ser la estructura de las matrices K_s y R_m para contemplar en el modelo la interacción del esclavo con el entorno y realimentar la fuerza de contacto al maestro. Considerando que el entorno es modelado únicamente por una constante de rigidez k_e , la estructura de las matrices K_s y R_m en este caso será:

$$K_s = [k_{s1} \quad k_{s2}] = [k'_{s1} - k_e \quad k_{s2}] = [k'_{s1} \quad k_{s2}] - [k_e \quad 0] = K'_s - [k_e \quad 0] \quad (7.40)$$

$$R_m = [r_{m1} \quad r_{m2}] = [k_f k_e \quad k_f b_e] = [k_f k_e \quad 0] \quad (7.41)$$

La señal de control del maestro, $u_m(t)$, y del esclavo, $u_s(t)$, que se han empleado en el esquema de *Simulink* corresponden a las que aparecen en el modelo del sistema teleoperado con retardos mostrado en la Figura 7.6, es decir:

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) \quad (7.42)$$

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (7.43)$$

Se han utilizado estas señales de control ya que es necesario simular tanto la fuerza que ejerce el operador, como la interacción del esclavo con el entorno. Por este motivo, en la señal de control del maestro mostrada en (7.42) se contempla la fuerza ejercida por el operador, $F_m(t)$. Con la estructura de K_s indicada en (7.40) se logrará contemplar en el sistema teleoperado la fuerza interacción del esclavo con el entorno, ya que modelando la fuerza de interacción del esclavo con el entorno como:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) + b_e \dot{\theta}_s(t) = k_e x_{s1}(t) + b_e x_{s2}(t) = k_e x_{s1}(t) \quad (7.44)$$

se puede comprobar que la señal de control del esclavo considera la fuerza de interacción del esclavo con el entorno:

$$\begin{aligned} u_s(t) &= K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) = \\ &K'_s x_s(t) - f_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \end{aligned} \quad (7.45)$$

Por otra parte, con la estructura de R_m indicada en (7.41) se modela la realimentación de la fuerza de interacción del esclavo con el entorno hacia el maestro, ya que:

$$R_m x_s(t-T) = \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s(t-T) \\ \dot{\theta}_s(t-T) \end{bmatrix} = \quad (7.46)$$

$$k_f k_e \theta_s(t-T) = k_f f_s(t-T)$$

Es necesario aclarar en este momento que, a pesar que en este esquema de control se utilizan para controlar el sistema teleoperado la señal de control del maestro, $u_m(t)$, y del esclavo, $u_s(t)$, indicadas en (7.42) y (7.43) respectivamente, sin embargo, tal como se explicó en el apartado 4.2 del capítulo 4, la señal de control real del maestro y del esclavo vendrán dadas por:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) \quad (7.47)$$

$$\tilde{u}_s(t) = K'_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (7.48)$$

Es decir, en un sistema teleoperado real, cuando se alcance una posición de equilibrio, el motor del maestro deberá ejercer una fuerza/par igual y de sentido contrario a la fuerza que ejerce el operador para mantener esta posición de equilibrio y, además, para que el operador sienta la fuerza de reacción en este punto. Por este motivo en la expresión (7.47) no aparece la fuerza que ejerce el operador, $F_m(t)$.

Por otra parte, en un sistema teleoperado real no debe utilizarse la matriz K_s indicada en (7.40) para calcular la señal de control del esclavo, ya que la fuerza de reacción del esclavo con el entorno se produce realmente, de forma que no es necesario simularla. De este modo, en lugar de emplear la matriz K_s , se utilizará la matriz $K'_s = \begin{bmatrix} k'_{s1} & k'_{s2} \end{bmatrix}$ que puede obtenerse fácilmente a partir de (7.40): $K'_s = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_e & k_{s2} \end{bmatrix}$. Con esta señal de control, cuando se alcance la posición de equilibrio, el motor del esclavo generará una fuerza/par igual a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno para mantener esta posición de equilibrio.

A continuación se van a mostrar los resultados experimentales obtenidos considerando diferentes parámetros de diseño. A partir de los parámetros de diseño se calcularán los valores de los reguladores del sistema teleoperado, ver Tabla 7.5, y seguidamente, con los reguladores obtenidos, se probará experimentalmente el funcionamiento del sistema. En todos los experimentos efectuados se ha introducido al sistema una entrada en escalón de 5 V, es decir, se ha movido el maestro aplicándole una señal en escalón de 5 V. Además, en todos los casos se ha considerado que la constante de reflexión de esfuerzos k_f es 0.1.

- **Polos del error ubicados en la posición -10 del plano s y polos del esclavo ubicados en la posición -5 del plano s**

Si se considera un entorno modelado con una rigidez $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo en la comunicación de 0.1 s se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 7.13. Como puede observarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y

velocidad del maestro, a pesar de que exista un retardo en la comunicación de 0.1 s. Por otra parte puede apreciarse que, mientras que la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) en ningún momento se satura, la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) excede el límite máximo admisible (+10 V), de forma que se saturaría.

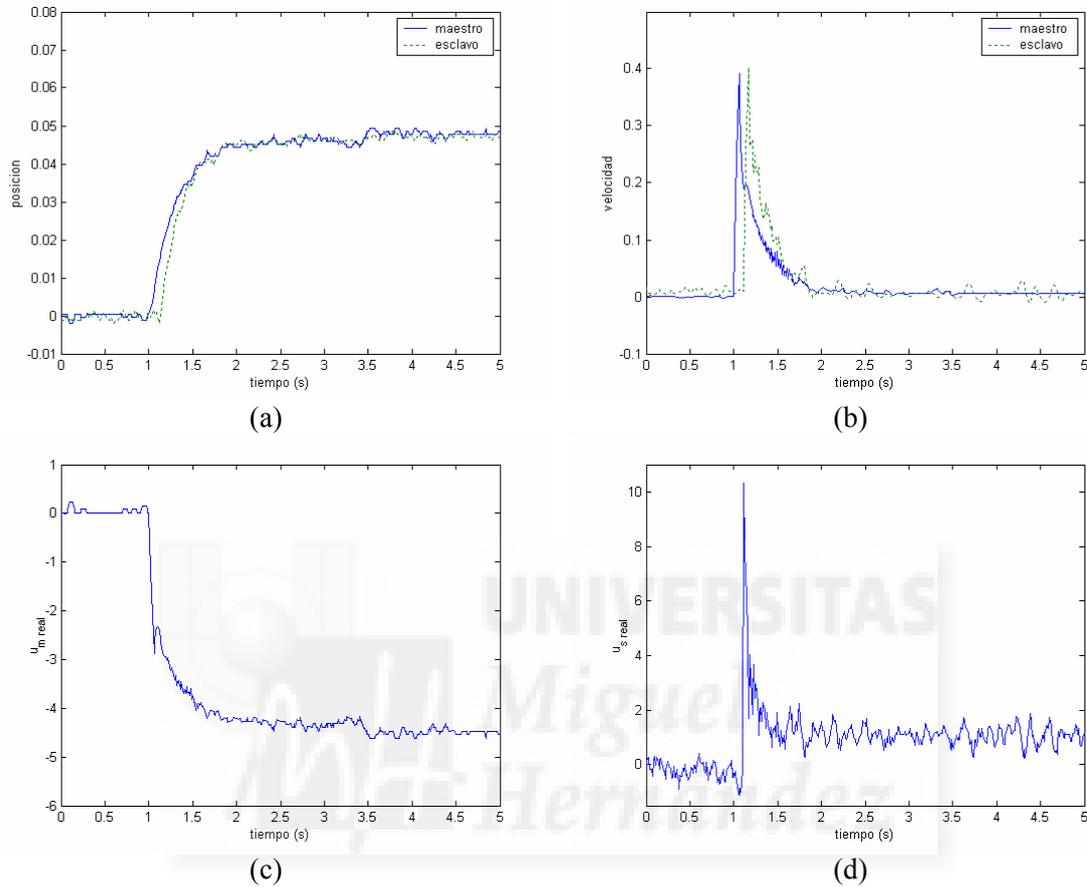


Figura 7.13. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error están en -10 y los del esclavo en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

- **Polos del error ubicados en la posición -5 del plano s y polos del esclavo ubicados en la posición -10 del plano s**

Considerando que, al igual que antes, el entorno es modelado por una rigidez $k_e = 1$ Nm/rad y que el retardo en la comunicación es de 0.1 s, se obtiene el comportamiento del sistema teleoperado que se muestra en la Figura 7.14. Como puede apreciarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro, a pesar del retardo existente en la comunicación. Además se puede observar que ni la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) ni la del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) exceden los valores máximos admisibles (-10 V, +10 V).

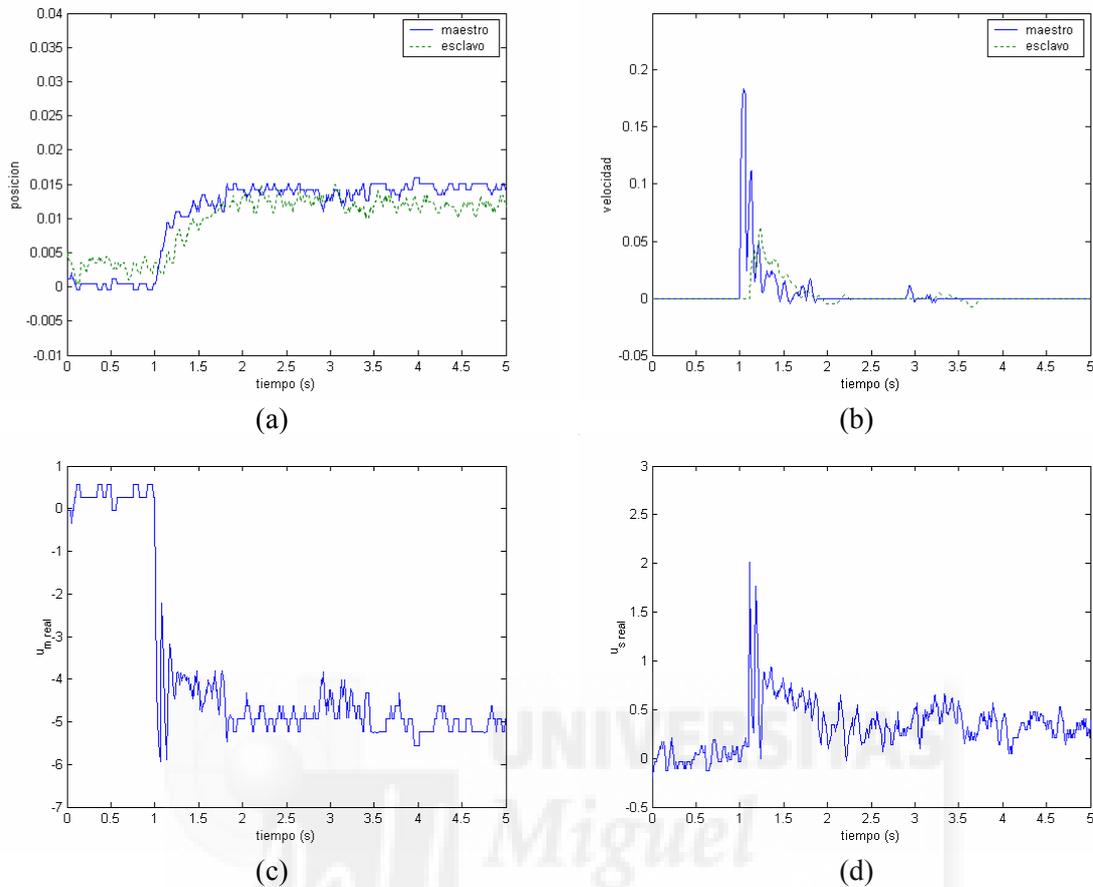


Figura 7.14. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error están en -5 y los del esclavo en -10 , $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

- **Polos del error y del esclavo en la posición -10 del plano s**

Considerando que el entorno es modelado por una rigidez $k_e = 1$ Nm/rad y que el retardo en la comunicación es de 0.1 s, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 7.15. En este caso el comportamiento del maestro y del esclavo es similar al obtenido cuando los polos del error se situaban en -5 y los del esclavo en -10 (Figura 7.14). Como puede comprobarse, la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro. Por otra parte, ni la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) ni la del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) exceden los valores máximos admisibles, aunque en este caso puede observarse que el valor máximo que alcanza la señal de control del esclavo es mayor que cuando se ubican los polos del error en -5 y los del esclavo en -10 .

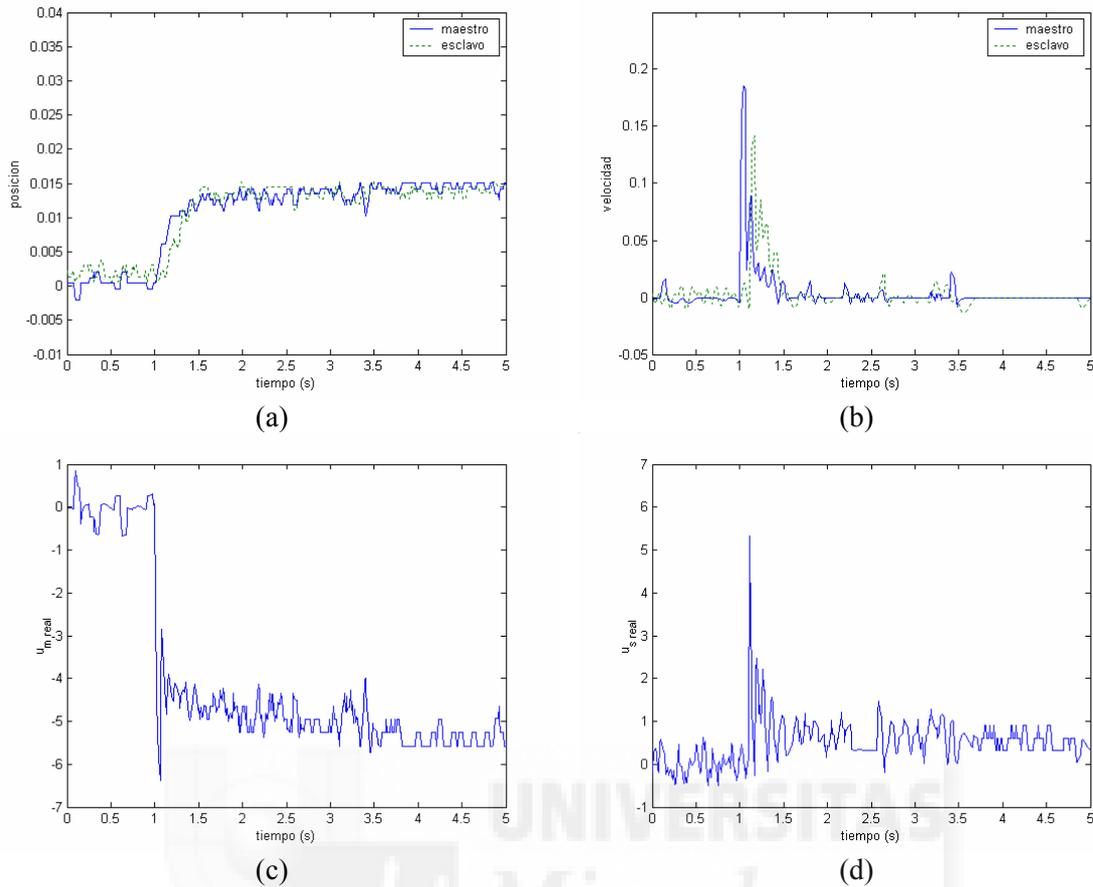


Figura 7.15. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error y del esclavo están en -10 , $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

- **Polos del error y del esclavo en la posición -5 del plano s**

Si se considera que el entorno es modelado por una rigidez $k_e = 1$ Nm/rad y que el retardo en la comunicación es de 0.1 s, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 7.16. En este caso el comportamiento del maestro y del esclavo es similar al obtenido cuando los polos del error se situaban en -10 y los del esclavo en -5 (Figura 7.13), de forma que la posición y velocidad del esclavo siguen la posición y velocidad del maestro. Sin embargo, a diferencia del caso en el que los polos del error se situaban en -10 y los del esclavo en -5 , en el que la señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) se saturaba, en este caso puede observarse que la señal de control real del esclavo no se satura.

Con las pruebas experimentales realizadas colocando los polos del esclavo y del error en diferentes ubicaciones, se ha podido comprobar que se obtienen resultados muy similares a los producidos en simulación, mostrados en el apartado 7.5. Se ha verificado que, cuando los polos del esclavo se ubican más alejados del origen (en la posición -10), la posición final que alcanza el maestro y el esclavo es menor que si se colocan más cerca del origen (en la posición -5). Por otra parte se ha comprobado que, para una determinada configuración de polos del esclavo, el valor máximo de la señal de control

del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) aumenta al alejar los polos del error, sin embargo, para una determinada ubicación de polos del error, disminuye al alejar los polos del esclavo. Por tanto, de los resultados experimentales obtenidos, se puede deducir que el mejor emplazamiento de los polos para efectuar el control del sistema teleoperado es ubicar tanto los polos del esclavo como los del error en la posición -5 del plano s . Esto se debe a que, al ubicar los polos del esclavo en -5 , la posición final que alcanza el maestro y el esclavo no es tan pequeña como la obtenida al ubicar los polos del esclavo en -10 . Por otra parte, considerando que los polos del esclavo se encuentran en -5 , si se ubican los polos del error en -10 , se ha comprobado que la señal de control real del esclavo se satura, mientras que si se ubican en -5 se encuentra dentro de los límites admisibles (-10 V, $+10$ V).

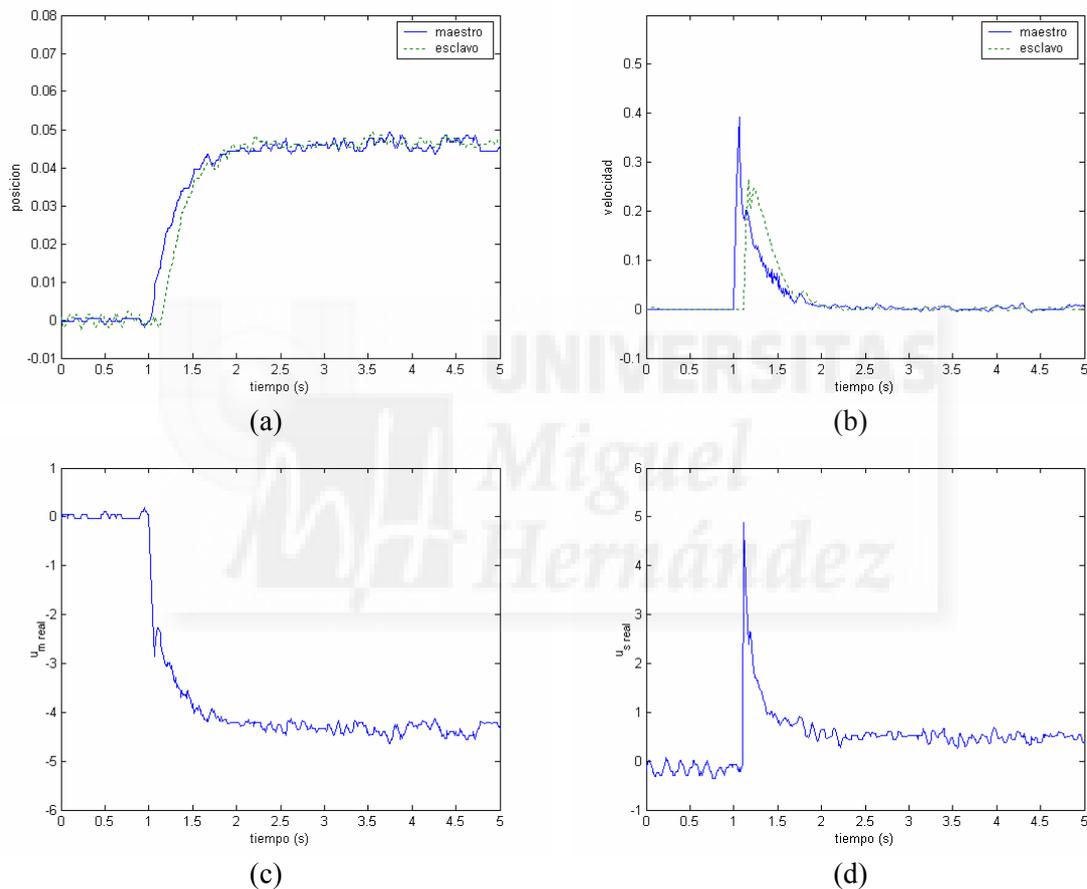


Figura 7.16. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error y del esclavo están en -5 , $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

Considerando la ubicación de polos del error y del esclavo en -5 , se han efectuado diversas pruebas experimentales para verificar el método de diseño aportado por la Tesis ante distintos tipos de entornos y diferentes tiempos de retardo. A partir de los tipos de entornos y de los tiempos de retardo se han diseñado los reguladores que hay que utilizar en el esquema de control. Los reguladores obtenidos para una determinada configuración de entorno y tiempo de retardo han sido probados, además de con un retardo real en la comunicación idéntico al considerado en el diseño, con retardos reales

mayores, ya que, como se explicó en el apartado 4.5 del capítulo 4, el método de diseño es robusto a variaciones en el tiempo de retardo, de forma que es posible utilizar los reguladores obtenidos mediante un determinado retardo de diseño para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es mayor. Hay que recordar que en dicho apartado, además, se comprobó que el método era robusto a ligeras variaciones en el resto de parámetros de diseño (entorno, maestro y esclavo). En la Tabla 7.6 se muestra a modo de resumen las distintas configuraciones de entorno, retardo de diseño y retardo real en la comunicación que han sido analizadas. Para todas las configuraciones de rigidez del entorno y retardo de diseño se han obtenido reguladores que hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo.

Rigidez entorno	$k_e = 1 \text{ Nm/rad}$					
	$k_e = 10 \text{ Nm/rad}$					
	$k_e = 100 \text{ Nm/rad}$					
Retardo diseño	T = 0.1 s			T = 0.5 s		
Retardo real	0.1 s	0.5 s	1 s	0.5 s	1 s	

Tabla 7.6. Configuraciones validadas experimentalmente.

En la Figura 7.16 se mostró el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno era $k_e = 1 \text{ Nm/rad}$, el retardo considerado en el diseño era de 0.1 s, y el retardo real coincidía con el de diseño. Como se ha indicado anteriormente, puesto que los reguladores obtenidos considerando una rigidez del entorno de $k_e = 1 \text{ Nm/rad}$ y un retardo de diseño de 0.1 s hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo, y, como se explicó en el capítulo 4, el método de control es robusto a variaciones en el retardo de diseño, se han empleado estos reguladores para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s y 1 s. En la Figura 7.17 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos, como puede apreciarse, la posición del esclavo sigue la posición del maestro a pesar de que el retardo real difiera del considerado para el diseño. De este modo, se valida experimentalmente la robustez del método de diseño a variaciones respecto al tiempo de retardo considerado para el diseño.

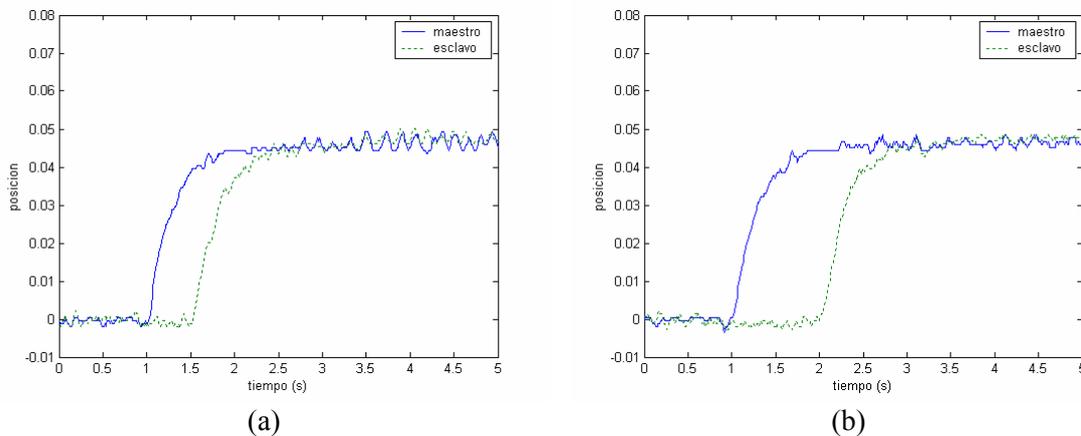


Figura 7.17. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1 \text{ Nm/rad}$, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

En la Figura 7.18 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 1$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos se consigue que la posición del esclavo siga a la del maestro. Además, como puede observarse en la Figura 7.18(b) pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Por otra parte si se compara la Figura 7.18 con la Figura 7.17, puede apreciarse que los resultados obtenidos son parecidos.

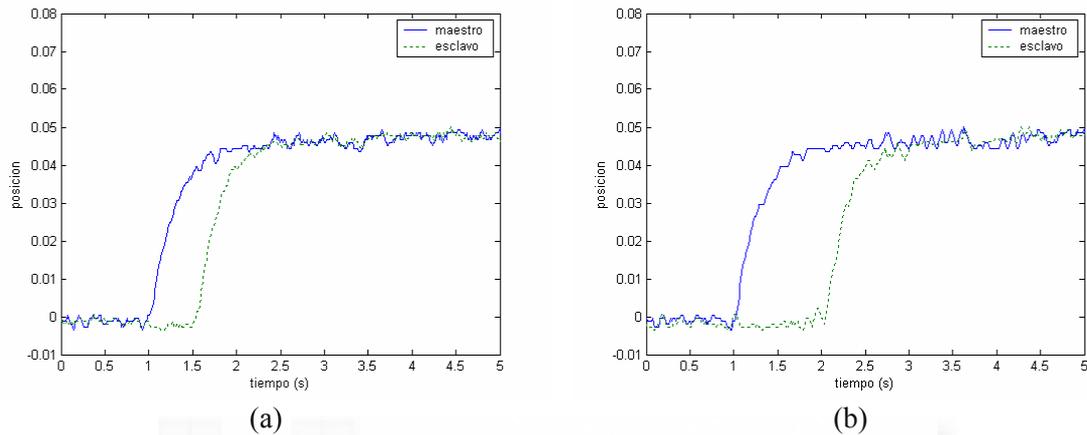


Figura 7.18. Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Tras haber validado el método de control cuando la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad, se van a mostrar a continuación los resultados obtenidos cuando la rigidez del entorno es $k_e = 10$ Nm/rad. En la Figura 7.19 se puede observar el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno es $k_e = 10$ Nm/rad, el retardo considerado en el diseño es de 0.1 s, y el retardo real coincide con el de diseño. Si se compara esta figura con la Figura 7.16, puede apreciarse que la evolución de la posición y de la velocidad, así como la señal de control del maestro es similar en ambos casos. Sin embargo, el valor final de la señal de control del esclavo aumenta ligeramente, puesto que en la Figura 7.16 alcanzaba un valor final inferior a 1 V, mientras que en este caso alcanza un valor final de aproximadamente 1 V.

En la Figura 7.20 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando los reguladores obtenidos considerando una rigidez del entorno de $k_e = 10$ Nm/rad y un retardo de diseño de 0.1 s son utilizados para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como era de esperar, en ambos casos, la posición del esclavo sigue la posición del maestro a pesar de que el retardo real difiera del considerado para el diseño.

En la Figura 7.21 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 10$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como puede observarse en la Figura 7.21(b) pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Si se compara la Figura 7.21 con la Figura 7.20, puede apreciarse que los resultados obtenidos son similares.

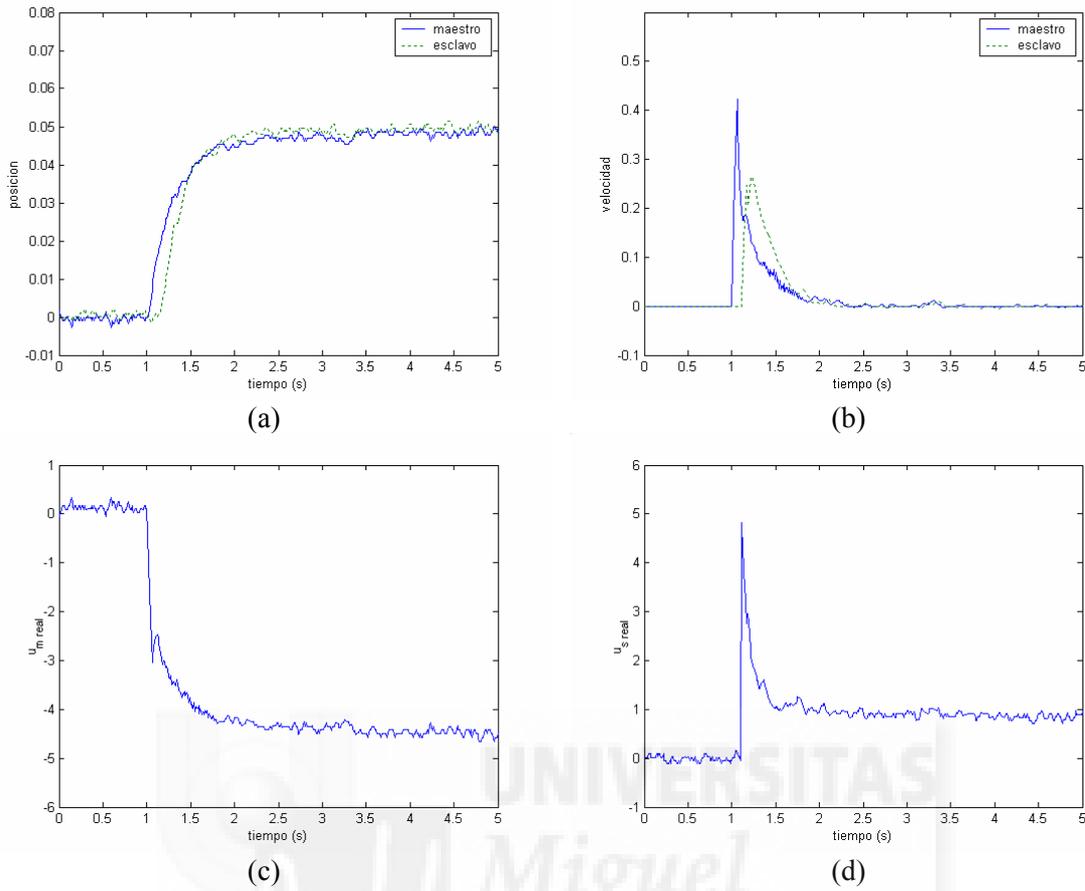


Figura 7.19. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

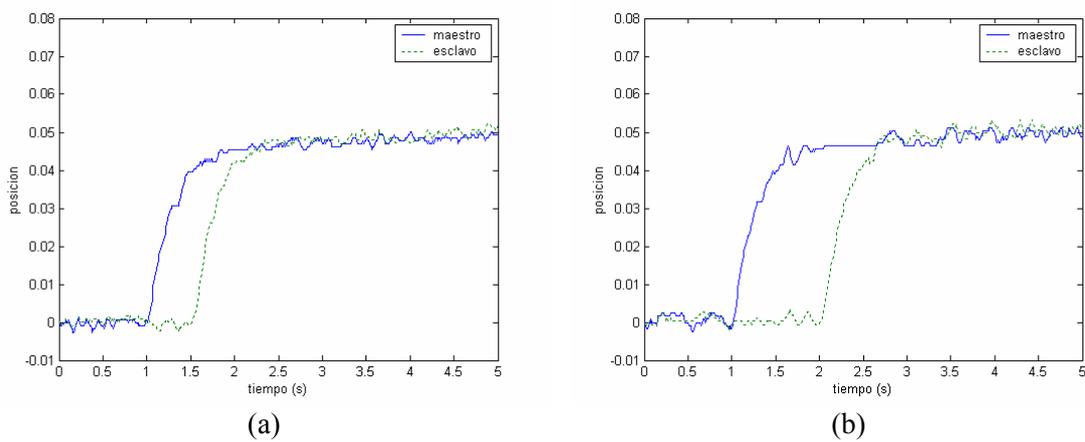


Figura 7.20. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

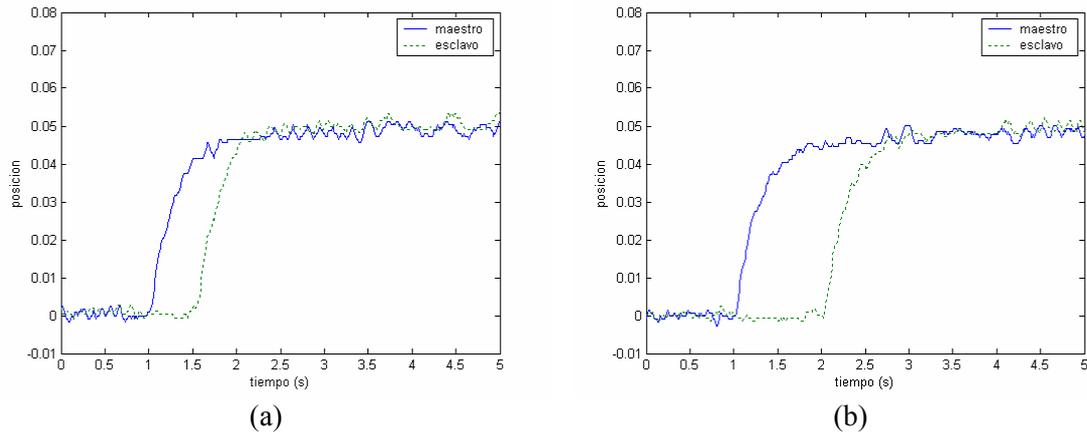


Figura 7.21. Posición del maestro ($x_{mi}(t)$) y del esclavo ($x_{sl}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Por último se van a mostrar los resultados obtenidos cuando el entorno es de rigidez $k_e = 100$ Nm/rad. En la Figura 7.22 se puede observar el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno es $k_e = 100$ Nm/rad, el retardo considerado en el diseño es de 0.1 s, y el retardo real coincide con el de diseño. Si se compara esta figura con la Figura 7.19, donde la rigidez del entorno era $k_e = 10$ Nm/rad, puede apreciarse que mientras que la evolución de la posición, de la velocidad y de la señal de control del maestro son similares, el valor final de la señal de control del esclavo ha experimentado un incremento importante, ya que, mientras que en la Figura 7.19 alcanzaba un valor final de aproximadamente de 1 V, ahora aumenta su valor final por encima de 5 V.

En la Figura 7.23 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando los reguladores obtenidos considerando una rigidez del entorno de $k_e = 100$ Nm/rad y un retardo de diseño de 0.1 s son utilizados para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como ocurría con los entornos considerados anteriormente, se consigue que la posición del esclavo siga la posición del maestro a pesar de que el retardo real difiera del considerado para el diseño.

En la Figura 7.24 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 100$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como se puede observar en la Figura 7.24(b), pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Si se compara la Figura 7.24 con la Figura 7.23, puede apreciarse que los resultados obtenidos son parecidos.

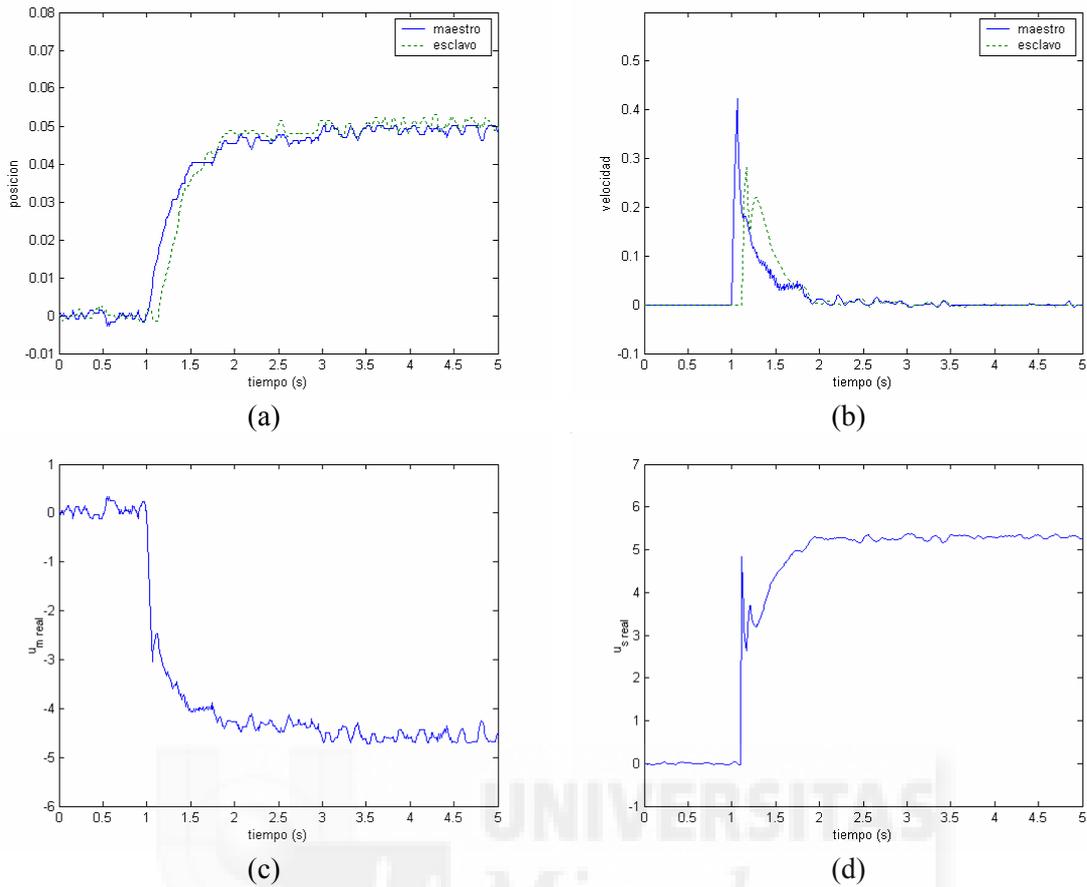


Figura 7.22. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

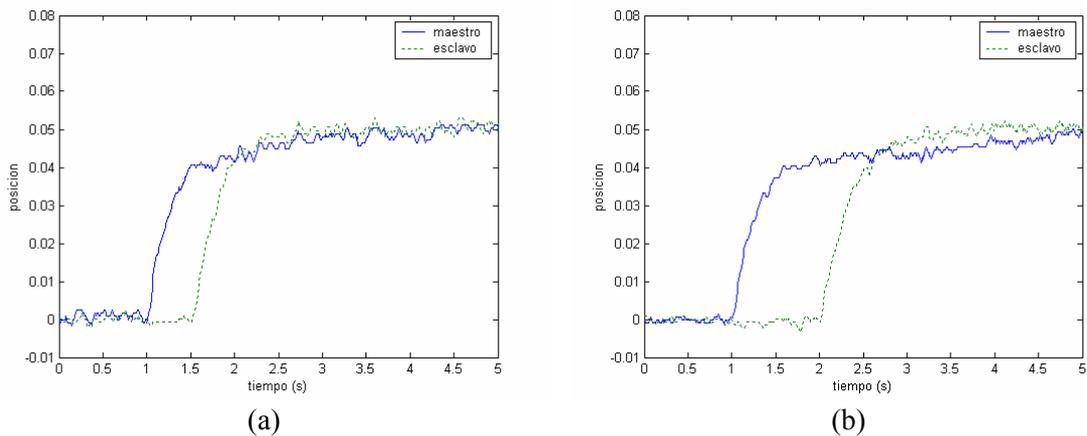


Figura 7.23. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

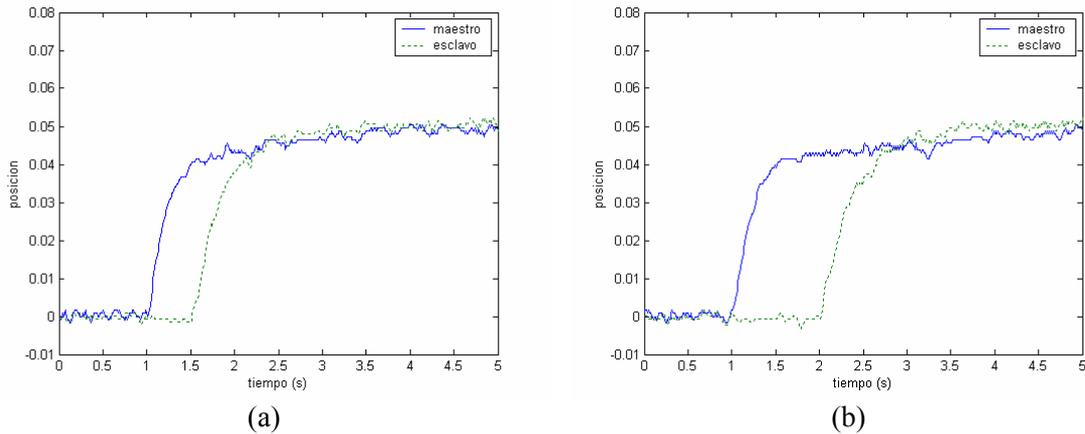


Figura 7.24. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Si se considerara que el esclavo interactúa con un entorno muy rígido ($k_e = 1000$ Nm/rad) se obtiene que, ubicando los polos del error y del esclavo en -5 , y suponiendo un retardo de diseño de 0.1 s, el sistema no es asintóticamente estable independientemente del retardo, sino que es asintóticamente estable sólo para retardos inferiores a 0.0104 s. Si, por ejemplo, se intenta controlar el esquema de control existiendo un retardo real en la comunicación de 0.5 segundos, se puede comprobar que el sistema muestra un comportamiento inestable, como puede observarse en la Figura 7.25.

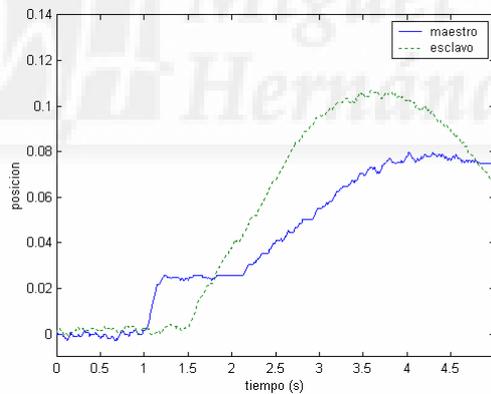


Figura 7.25. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1000$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s.

De los distintos resultados experimentales obtenidos controlando el sistema teleoperado real ante una entrada en escalón, se puede extraer las siguientes conclusiones:

- Los reguladores calculados según el procedimiento de diseño aportado por la Tesis considerando diferentes tiempos de retardo de diseño (0.1 s y 0.5 s) y distintos tipos de entorno ($k_e = 1, 10, 100$ Nm/rad), permiten controlar de forma satisfactoria el sistema teleoperado. Además, los reguladores obtenidos para cada configuración hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo.

- Como era de esperar, los resultados experimentales obtenidos son muy similares a los producidos en simulación considerando diferentes emplazamientos de los polos del error y del esclavo.
- De las distintas ubicaciones de los polos del esclavo y del error analizadas, se ha decidido colocar todos los polos en la posición -5 del plano s para controlar el sistema teleoperado, ya que, con dicha configuración, la posición final del maestro y del esclavo no alcanza un valor muy pequeño, y las señales de control del maestro y del esclavo se encuentran dentro de los límites admisibles.
- El método de control es robusto a variaciones en el retardo de diseño, puesto que ha sido posible controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación era superior al empleado en la etapa de diseño.
- En las distintas pruebas experimentales realizadas ubicando los polos del error y del esclavo en la posición -5 , se ha obtenido un comportamiento similar en la evolución de la posición y velocidad del maestro y del esclavo, así como en la señal de control del maestro. Sin embargo, como es lógico, conforme aumenta la rigidez del entorno se ha comprobado que aumenta el valor final de la señal de control del esclavo.
- En el caso de que aumente excesivamente la rigidez del entorno ($k_e = 1000$ Nm/rad), ubicando los polos del esclavo y del error en la posición -5 del plano s , el sistema sólo es asintóticamente estable para un retardo de tiempo muy pequeño, de forma que para cualquier retardo en la comunicación mayor a este valor, no es posible controlar el sistema teleoperado.

7.6.2 Respuesta del sistema teleoperado simulando la fuerza del operador mediante una rampa y simulando la interacción del esclavo con el entorno

Tras haber verificado en el epígrafe anterior el método de control en el sistema teleoperado cuando la fuerza ejercida por el operador es modelada mediante un escalón, se va a controlar ahora el sistema teleoperado cuando dicha fuerza es modelada mediante una rampa. El esquema empleado para controlar el sistema teleoperado es prácticamente el mismo mostrado en la Figura 7.12 con la salvedad de que el bloque *Fuerza operador* en lugar de corresponder a un escalón, corresponde a una rampa.

Al igual que en el epígrafe anterior se han realizado diversas pruebas para validar el método de control ante distintas configuraciones de entorno, retardo de diseño y retardo real en la comunicación, ver Tabla 7.6. En todas las pruebas se ha considerado que tanto los polos del esclavo como los del error se ubican en la posición -5 del plano s , y que la constante de reflexión de esfuerzos k_f es 0.1. A continuación se muestran los resultados experimentales obtenidos. Hay que destacar que en todos los casos se ha considerado que la fuerza ejercida por el operador es modelada mediante una rampa de pendiente unitaria.

En la Figura 7.26 se muestra el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno es $k_e = 1$ Nm/rad, el retardo considerado en el diseño es de 0.1 s, y el retardo real coincide con el de diseño. Como puede observarse, la posición del esclavo sigue a la posición del maestro a pesar de la existencia de un retardo en la comunicación de 0.1 s. La velocidad del esclavo no sigue exactamente a la velocidad del maestro, aunque toman valores similares. Es interesante observar como, conforme crece la fuerza

ejercida por el operador, aumenta (en valor absoluto) la señal de control del maestro ($\tilde{u}_m(t)$), mientras que la señal de control del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) permanece casi constante.

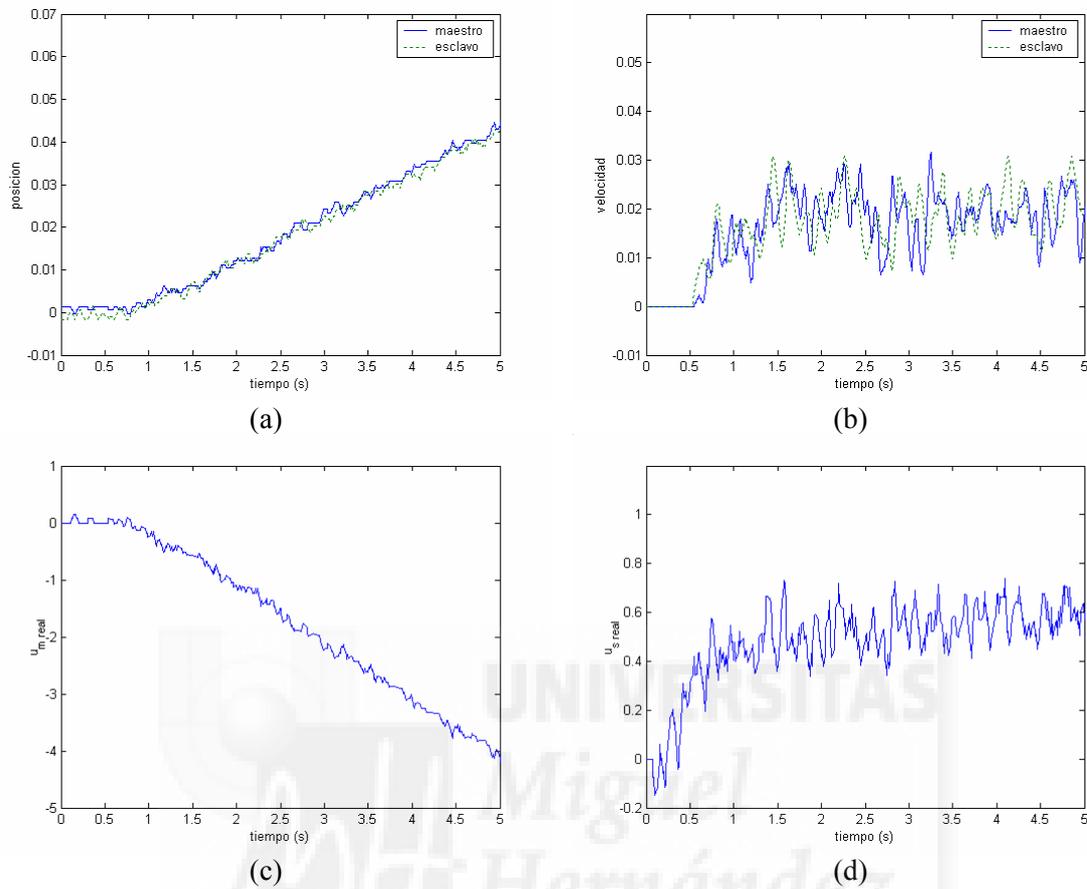


Figura 7.26. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

En la Figura 7.27 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando se utilizan los reguladores obtenidos considerando un retardo de diseño de 0.1 s para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como puede apreciarse, el esclavo sigue al maestro, pero existe un error de posición constante entre ambos. Este error aumenta conforme aumenta el retardo real en la comunicación.

En la Figura 7.28 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 1$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos se consigue que la posición del esclavo siga a la del maestro, aunque existe un error de posición constante. Además, como puede observarse en la Figura 7.28(b) pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Por otra parte, si se compara la Figura 7.28 con la Figura 7.27, puede apreciarse que los resultados obtenidos son

similares, observándose en ambos casos como al aumentar el retardo en la comunicación, aumenta el error de posición entre el maestro y el esclavo.

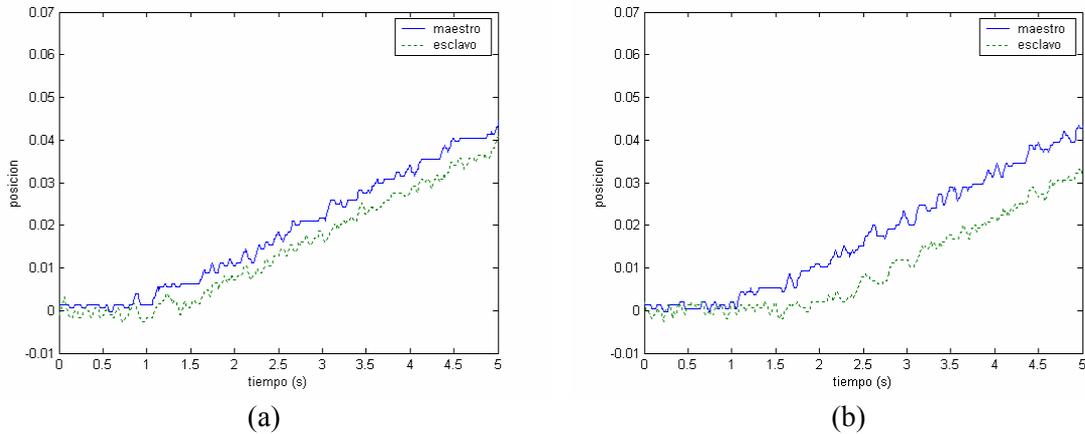


Figura 7.27. Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

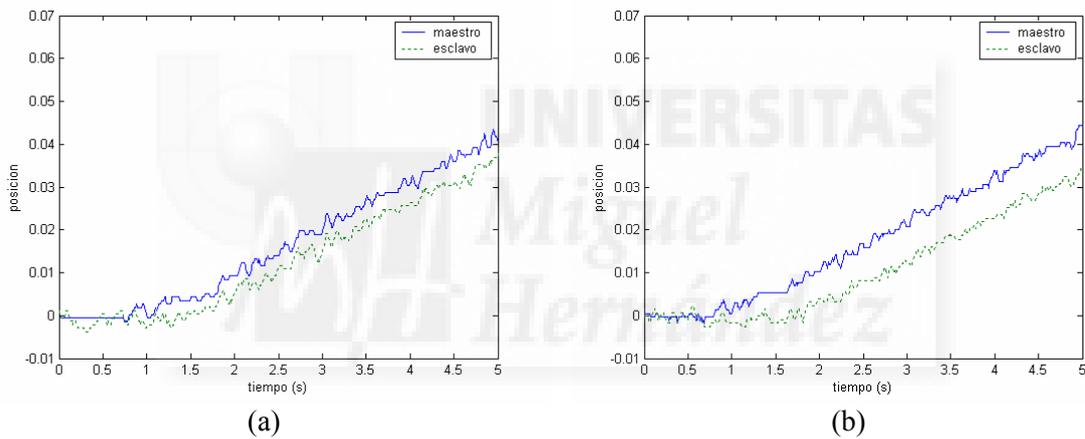


Figura 7.28. Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Se van a mostrar seguidamente los resultados experimentales obtenidos cuando la rigidez del entorno es de $k_e = 10$ Nm/rad. En la Figura 7.29 se puede observar el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno es $k_e = 10$ Nm/rad, el retardo considerado en el diseño es de 0.1 s, y el retardo real coincide con el de diseño. Si se compara esta figura con la Figura 7.26, puede apreciarse que la evolución de la posición y de la velocidad, así como la señal de control del maestro es similar en ambos casos. Sin embargo, la señal de control del esclavo aumenta ligeramente, puesto que en la Figura 7.26 alcanzaba un valor final inferior a 0.8 V, mientras que en este caso alcanza un valor final por encima de 0.8 V.

En la Figura 7.30 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando los reguladores obtenidos considerando una rigidez del entorno de $k_e = 10$ Nm/rad y un retardo de diseño de 0.1 s son utilizados para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos, la posición del esclavo sigue la posición del maestro a pesar de que el retardo real difiera

del considerado para el diseño. Sin embargo, existe un error de posición constante entre el maestro y el esclavo que aumenta cuando el retardo en la comunicación es mayor.

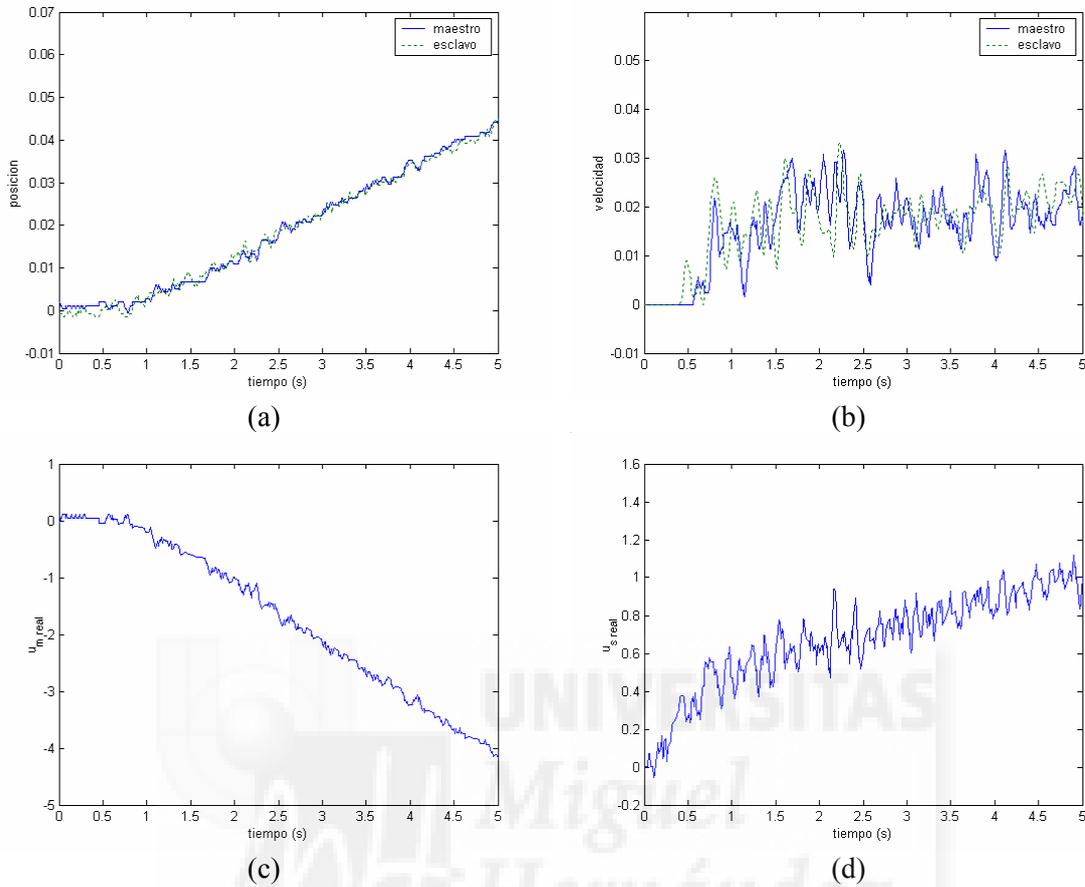


Figura 7.29. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

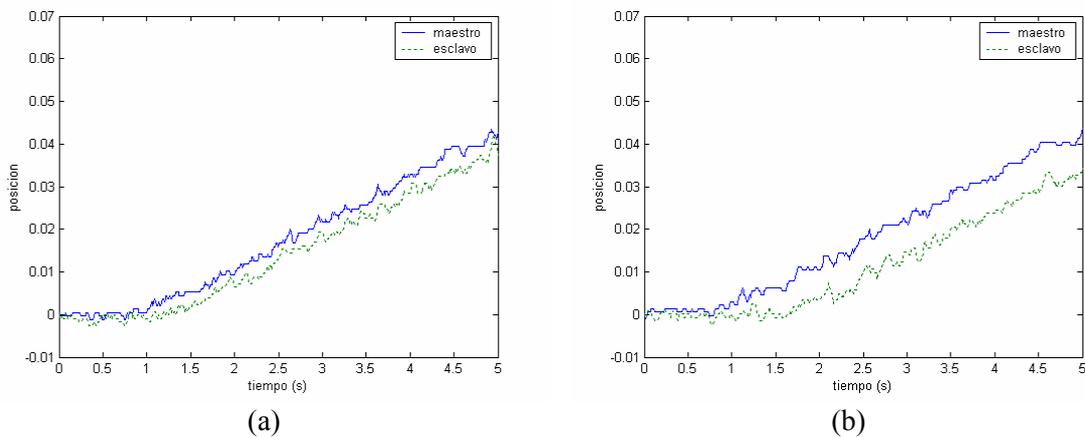


Figura 7.30. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

En la Figura 7.31 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 10$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como se aprecia en la Figura 7.31(b), pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Comparando la Figura 7.31 con la Figura 7.30, puede apreciarse que los resultados obtenidos son similares.

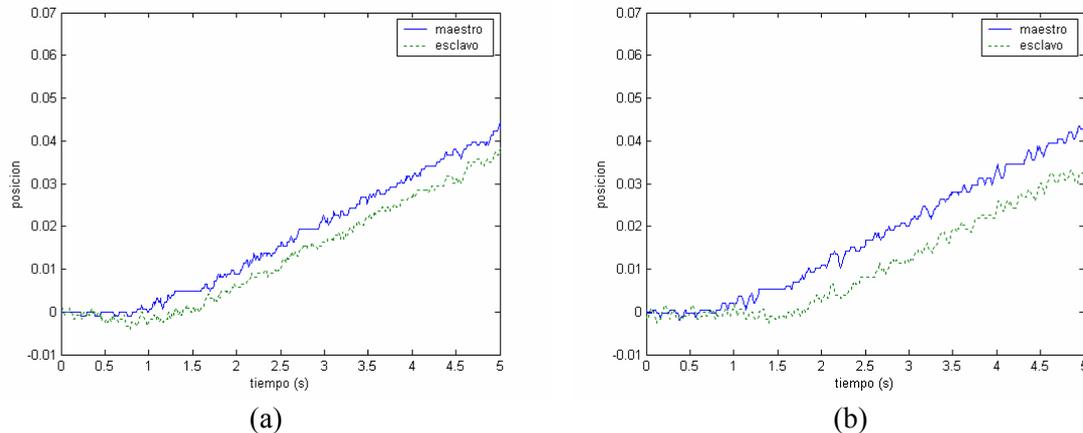


Figura 7.31. Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Por último se van a mostrar los resultados obtenidos cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 100$ Nm/rad. En la Figura 7.32 se puede observar el comportamiento del sistema teleoperado cuando la rigidez del entorno es $k_e = 100$ Nm/rad, el retardo considerado en el diseño es de 0.1 s, y el retardo real coincide con el de diseño. Si se compara esta figura con la Figura 7.29, donde la rigidez del entorno era $k_e = 10$ Nm/rad, puede apreciarse que, mientras que la evolución de la posición, de la velocidad y de la señal de control del maestro son similares, la señal de control del esclavo ha experimentado un incremento importante, ya que, mientras que en la Figura 7.29 alcanzaba un valor final de aproximadamente 1 V, ahora aumenta su valor final hasta 5 V.

En la Figura 7.33 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando los reguladores obtenidos considerando una rigidez del entorno de $k_e = 100$ Nm/rad y un retardo de diseño de 0.1 s son utilizados para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como ocurría con los entornos considerados anteriormente, se consigue que la posición del esclavo siga la posición del maestro, aunque existe un error de posición constante que aumenta conforme mayor es el retardo existente en la comunicación.

En la Figura 7.34 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando la rigidez del entorno viene dada por $k_e = 100$ Nm/rad, el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como se puede observar en la Figura 7.34(b), pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Si se compara la Figura 7.34 con la Figura 7.33, puede apreciarse que los resultados obtenidos son similares, existiendo un error de posición constante

entre el maestro y el esclavo que aumenta conforme crece el retardo existente en la comunicación.

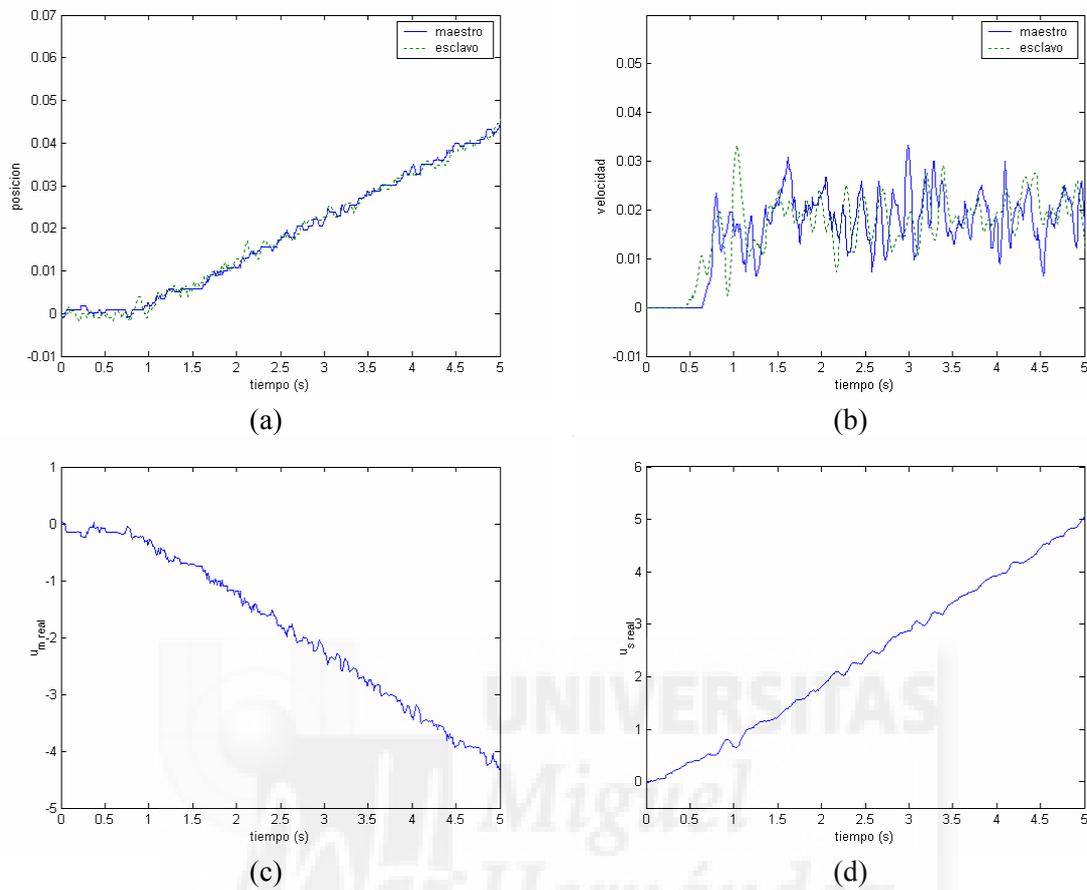


Figura 7.32. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).

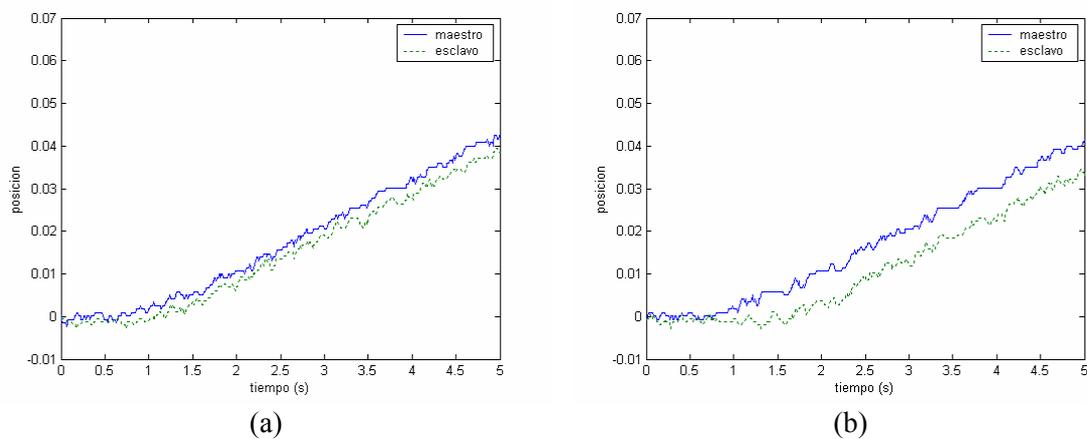


Figura 7.33. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

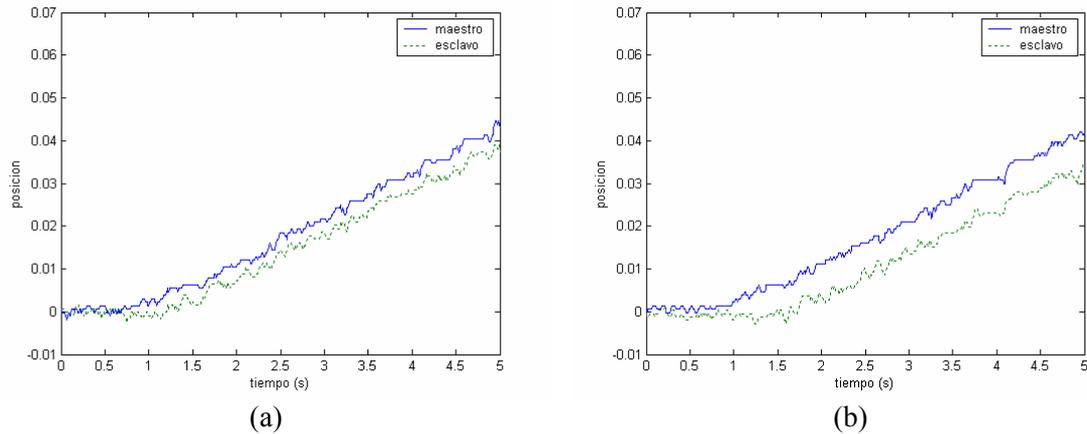


Figura 7.34. Posición del maestro ($x_{mI}(t)$) y del esclavo ($x_{sI}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

A partir de los resultados experimentales obtenidos cuando la fuerza ejercida por el operador es modelada mediante una entrada en rampa, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Mediante el método de diseño aportado por la Tesis es posible controlar de forma satisfactoria el sistema teleoperado, considerando distintos tiempos de retardo en la comunicación, así como diferentes tipos de entorno, cuando la fuerza ejercida por el operador es modelada como una rampa. Sin embargo, a diferencia del caso en que la fuerza del operador era modelada mediante una entrada en escalón, existe un error de posición constante entre el maestro y el esclavo, que crece conforme aumenta el tiempo de retardo en la comunicación.
- En las pruebas realizadas se ha comprobado que a pesar de que la posición del esclavo sigue a la del maestro, no ocurre lo mismo con la velocidad, ya que, aunque la velocidad del maestro y del esclavo toman valores similares, la velocidad del esclavo no sigue exactamente a la velocidad del maestro.
- En todos los casos se ha obtenido un comportamiento similar de la señal de control del maestro, sin embargo, como era de esperar, conforme aumenta la rigidez del entorno, ha aumentado la señal de control del esclavo.
- Al igual que ocurría en el epígrafe anterior, se ha verificado que el método de control es robusto a variaciones en el retardo de diseño, puesto que ha sido posible controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación era superior al empleado en la etapa de diseño.

7.6.3 Respuesta del sistema teleoperado ante una fuerza ejercida por el operador cualquiera y un entorno de interacción real

En los dos epígrafes anteriores se ha comprobado el funcionamiento del sistema teleoperado experimental considerando que la entrada al sistema no era una fuerza externa real ejercida por un operador, sino que la fuerza de entrada del operador ha sido simulada mediante un escalón o mediante una rampa. En ambos casos el esclavo no ha interactuado con un entorno real, sino que se ha simulado que el esclavo interactuaba con un entorno utilizando la estructura de la matriz K_s indicada en (7.40).

Además para realimentar la fuerza de interacción del esclavo con el entorno hacia el maestro se ha empleado la matriz R_m mostrada en (7.41).

En este epígrafe se van a mostrar los resultados experimentales obtenidos al controlar el sistema teleoperado ante retardos, cuando se considera la fuerza ejercida en la realidad por un operador cualquiera, y el esclavo interactúa con un entorno real, de forma que se realimenta hacia el maestro la fuerza de interacción real del esclavo. El esquema de *Simulink* que se ha utilizado para controlar el sistema experimental de forma real se muestra en la Figura 7.35.

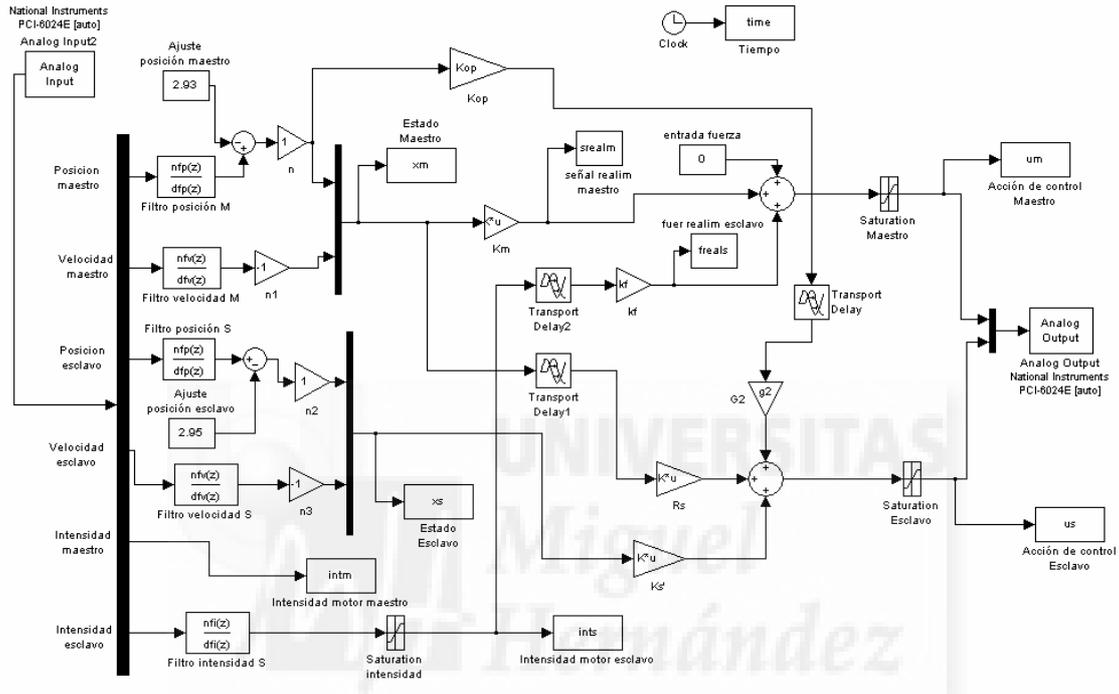


Figura 7.35. Esquema de control del sistema teleoperado considerando que la entrada al sistema es una fuerza real ejercida por el operador y que el esclavo interactúa con un entorno real.

En el esquema mostrado en la Figura 7.35 es necesario aclarar algunos aspectos. En primer lugar puede observarse que la señal de control del maestro y del esclavo no corresponden a las utilizadas en los dos epígrafes anteriores, indicadas en (7.42) y (7.43):

$$u_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) + F_m(t) \quad (7.49)$$

$$u_s(t) = K_s x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (7.50)$$

Como se recordó en el epígrafe 7.6.1, en un sistema teleoperado real, cuando se alcanza una posición de equilibrio, el motor del maestro debe ejercer una fuerza/par igual y de sentido contrario a la fuerza que ejerce el operador para mantener esta posición de equilibrio y para que el operador sienta la fuerza de reacción en este punto, de forma que la señal de control de entrada al maestro en un sistema real viene dada por:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + R_m x_s(t-T) \quad (7.51)$$

En el epígrafe 7.6.1, además, se indicó que la fuerza de interacción del esclavo, $f_s(t)$, considerando que el entorno era modelado únicamente mediante la constante de rigidez k_e , venía dada por:

$$f_s(t) = k_e \theta_s(t) = k_e x_{s1}(t) \quad (7.52)$$

De esta forma, utilizando la matriz R_m mostrada en (7.41) se consigue realimentar la fuerza de interacción del esclavo hacia el maestro:

$$\begin{aligned} R_m x_s(t-T) &= \begin{bmatrix} r_{m1} & r_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1}(t-T) \\ x_{s2}(t-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f k_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s(t-T) \\ \dot{\theta}_s(t-T) \end{bmatrix} = \\ &k_f k_e \theta_s(t-T) = k_f f_s(t-T) \end{aligned} \quad (7.53)$$

Sin embargo, en un funcionamiento real del sistema teleoperado en el que el esclavo interacciona con un entorno generándose una fuerza de interacción, no se utiliza la matriz R_m para modelar la realimentación de fuerzas, ya que al producirse realmente la fuerza de interacción del esclavo con el entorno, directamente se realimenta dicha fuerza de interacción considerando una determinada constante de reflexión de esfuerzos k_f . Por este motivo en un sistema teleoperado real, la señal de control de entrada al maestro no se calculará mediante la expresión (7.51), sino que se obtendrá como:

$$\tilde{u}_m(t) = K_m x_m(t) + k_f f_s(t-T) \quad (7.54)$$

Como puede observarse en la Figura 7.35 ésta ha sido la señal de control utilizada en el maestro. Para calcular esta señal, por tanto, es necesario leer la fuerza de interacción del esclavo con el entorno. Puesto que no se dispone de un sensor de fuerza/par en el esclavo, se ha considerado como fuerza de interacción del esclavo con el entorno, la corriente que circula por el motor del esclavo, ya que, en un motor de corriente continua, el par del motor es directamente proporcional a la intensidad que circula por su devanado. El motor del esclavo suministra un valor de tensión proporcional a la corriente que circula por él comprendido entre -0.176 V y +0.176V.

Por otra parte, como también se indicó en el epígrafe 7.6.1, para que cuando se alcance la posición de equilibrio, el motor del esclavo genere una fuerza/par igual a la fuerza de reacción del esclavo con el entorno, con la finalidad de mantener la posición de equilibrio, la señal de control de entrada al esclavo en un sistema real vendrá dada por:

$$\tilde{u}_s(t) = K_s' x_s(t) + R_s x_m(t-T) + G_2 F_m(t-T) \quad (7.55)$$

Como se puede observar en la Figura 7.35 ésta ha sido la señal de control empleada en el esclavo.

Como puede apreciarse en la expresión (7.55), para calcular la señal de control del esclavo $\tilde{u}_s(t)$ es necesario leer la fuerza ejercida por el operador ($F_m(t)$). A causa de que

no se dispone de un sensor de fuerza/par en el sistema experimental que permita leer la fuerza que ejerce el operador sobre el maestro, se ha calculado dicha fuerza como:

$$F_m(t) = K_{op} \theta_m(t) \quad (7.56)$$

donde se ha obtenido experimentalmente que la constante K_{op} debe tener el valor 100 Nm/rad. La razón del signo positivo se debe a que si se introduce una señal de control positiva, la posición del maestro irá incrementándose, de forma que cuanto mayor sea la posición, mayor fuerza estará aplicando el operador.

Es importante también aclarar que a la posición del maestro y del esclavo leídas por los potenciómetros se les resta una cantidad para que la posición del maestro y del esclavo, cuando el esclavo comienza su interacción con el entorno, sea 0 V.

Este esquema de control ha sido utilizado para controlar el sistema teleoperado real considerando diferentes tiempos de retardo y dos tipos de entorno con los que interacciona el esclavo. Los entornos con los que el esclavo ha colisionado corresponden a dos esponjas de diferente rigidez. Para comprobar, al igual que en los epígrafes anteriores, la robustez del método de diseño a variaciones en el tiempo de retardo considerado en el diseño, se han utilizado los reguladores obtenidos asumiendo un determinado tiempo de retardo para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real en la comunicación es mayor. En la Tabla 7.7 se muestran las distintas configuraciones de entorno, retardo de diseño y retardo real en la comunicación que han sido utilizadas para validar el método de control sobre el sistema teleoperado real.

Entorno	Esponja suave				
	Esponja rígida				
Retardo diseño	T = 0.1 s			T = 0.5 s	
Retardo real	0.1 s	0.5 s	1 s	0.5 s	1 s

Tabla 7.7. Configuraciones validadas experimentalmente.

Colisión del esclavo con la esponja suave

Como se ha comentado anteriormente, se ha considerado que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno corresponde a la intensidad de la corriente que circula por el motor del esclavo. Sin embargo, para calcular el valor de los reguladores según el novedoso método aportado por la Tesis, es necesario conocer la constante de rigidez k_e del entorno. Esta constante ha sido obtenida experimentalmente a partir de la intensidad del motor del esclavo y de la evolución de la posición del esclavo durante el contacto. La constante de rigidez identificada de la esponja suave ha sido $k_e = 11$ Nm/rad.

Asumiendo la constante de rigidez identificada de la esponja, que los polos del esclavo y del error se ubican siempre en la posición -5 del plano s , y que la constante de reflexión de esfuerzos k_f es 0.1, se han calculado los reguladores para controlar el sistema considerando los dos tiempos de retardo indicados en la Tabla 7.7. Los reguladores obtenidos para cada retardo de diseño hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo. Por lo que, gracias a la robustez del método de diseño, pueden utilizarse los reguladores calculados asumiendo un determinado tiempo de retardo para controlar el sistema cuando el tiempo de retardo real es mayor. A

continuación se muestran los resultados experimentales obtenidos para las distintas configuraciones de retardo de diseño y tiempo de retardo real en la comunicación consideradas.

En la Figura 7.36 se muestra la evolución de la posición y de la velocidad del maestro y del esclavo en el caso de que el retardo de diseño y el existente en la comunicación coinciden y valen 0.1 s. Si se observa la gráfica de la posición del maestro y del esclavo, Figura 7.36(a), puede observarse que el esclavo sigue al maestro hasta que el esclavo no puede continuar su avance a causa de la interacción con la esponja. A partir de ese momento (aproximadamente a los 2.5 s, 10.5 s y 18.5 s) el esclavo se detiene a pesar de que continúe el avance del maestro. En la parte final de dicha gráfica puede además observarse que, si no existe interacción del esclavo con el entorno, éste sigue correctamente al maestro. De ahora en adelante se mostrará en todas las gráficas, en sombreado, el intervalo de tiempo durante el cual el esclavo no puede continuar su avance a causa de su interacción con el entorno.

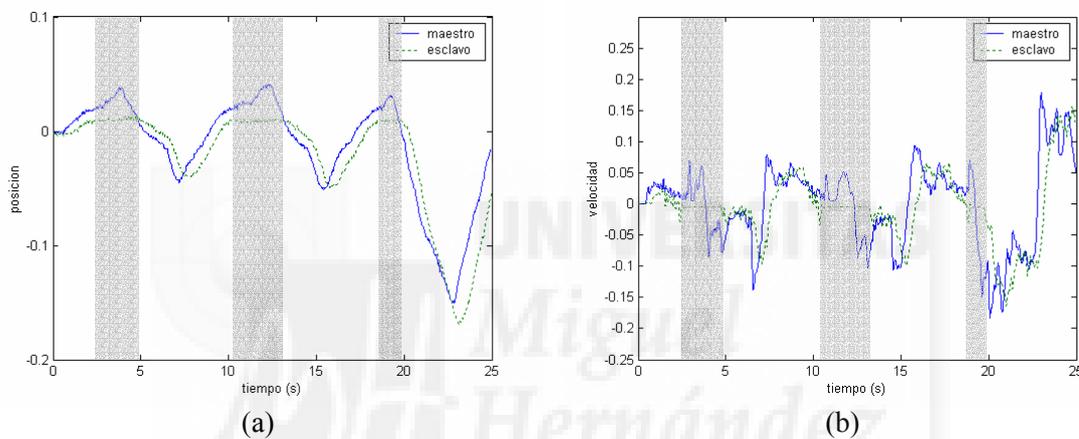


Figura 7.36. Comportamiento del sistema real considerando un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.1 s (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 7.37 se muestran las señales que afectan al control del manipulador maestro. En (a) se muestra la fuerza ejercida por el operador sobre el maestro. En (b) se muestra la señal de control que se aplica al maestro. Como puede apreciarse, la señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador para que, de este modo, el operador tenga constancia de las fuerzas ejercidas por el esclavo en el entorno remoto y detenga su avance. En (c) y en (d) se muestran, respectivamente, la señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$) y la fuerza realimentada del esclavo hacia el maestro ($k_f f_s(t-T)$). Ambos términos son utilizados para calcular la señal de control del maestro, ver (7.54). Como puede apreciarse, es la señal de realimentación del estado del maestro, la señal que logra efectivamente oponerse a la fuerza ejercida por el operador, ya que la fuerza de realimentación del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado. En (d) puede observarse que ha sido correcto considerar como fuerza de interacción del esclavo con el maestro la intensidad que circula por el motor del esclavo, ya que, en los instantes en los que el esclavo no puede seguir su avance debido a la interacción con el entorno, se realimenta la mayor fuerza de interacción.

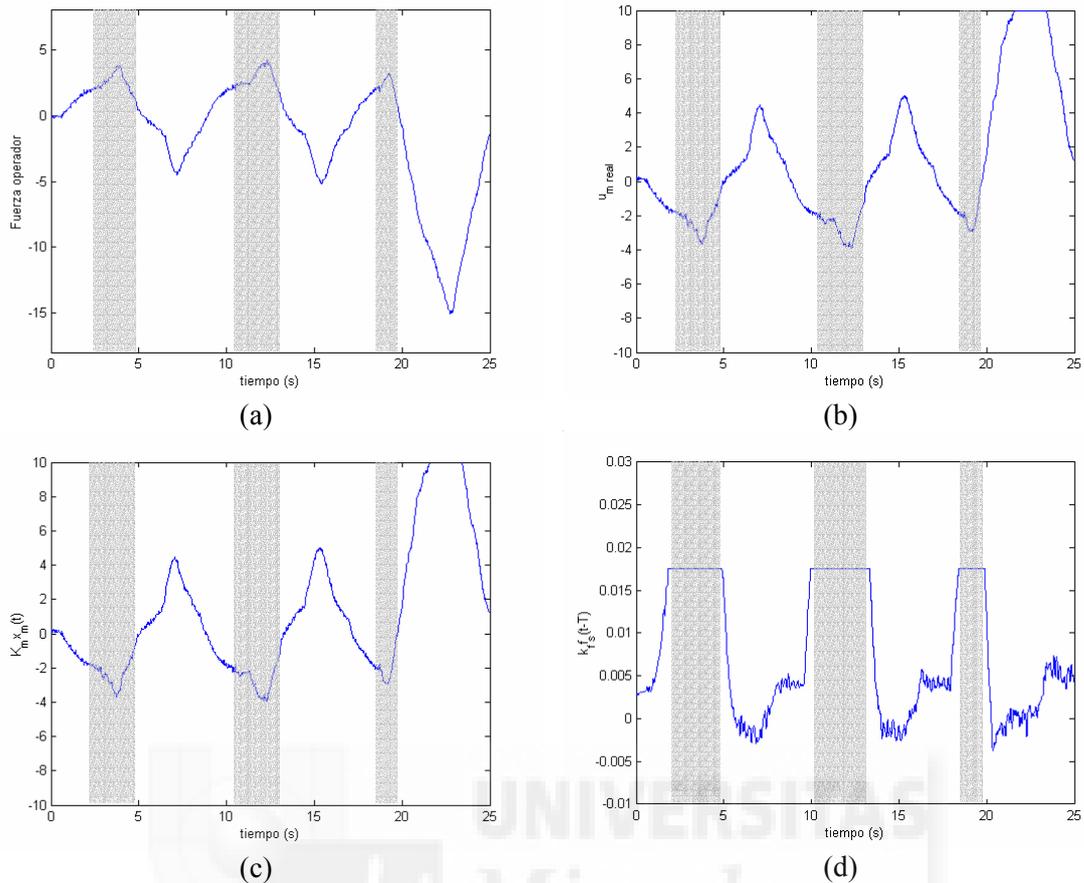


Figura 7.37. Señales implicadas en el control del maestro. (a) Fuerza ejercida por el operador ($F_m(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (c) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (d) Fuerza realimentada del esclavo ($k_f f_s(t-T)$).

En la Figura 7.38(a) se muestra la señal de control que se aplica al esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) y en la Figura 7.38(b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Como se puede apreciar, en los instantes en los que se aplica una mayor acción de control sobre el esclavo, la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es mayor. Estos instantes corresponden con el momento en el que el esclavo está colisionando con el entorno y no puede continuar su avance, ver Figura 7.36(a).

Como se ha podido comprobar a través de los distintos resultados experimentales obtenidos, el esquema de control permite controlar de forma satisfactoria el sistema teleoperado cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 s y coincide con el utilizado para diseñar los reguladores del sistema. A continuación, en la Figura 7.39, se muestran los resultados obtenidos cuando se utilizan los reguladores calculados mediante el retardo de 0.1 s para controlar el sistema cuando el retardo real existente en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como se puede apreciar, en ambos casos se logra un funcionamiento correcto del sistema teleoperado, de forma que el esclavo sigue al maestro hasta que no puede continuar su avance a causa de la interacción con el entorno. No obstante, a medida que crece el retardo existente en la comunicación, se puede observar un mayor error constante entre la posición del maestro y del esclavo. Además, cuando el retardo es de 1 s, el funcionamiento del sistema se degrada, siendo menos intuitivo para el operador el manejo del sistema teleoperado en comparación con

los anteriores casos en los que el retardo real de la comunicación era de 0.1 s y 0.5 s. Con estos resultados experimentales obtenidos se puede verificar la robustez del método de diseño ante variaciones del retardo real respecto al retardo utilizado en el diseño.

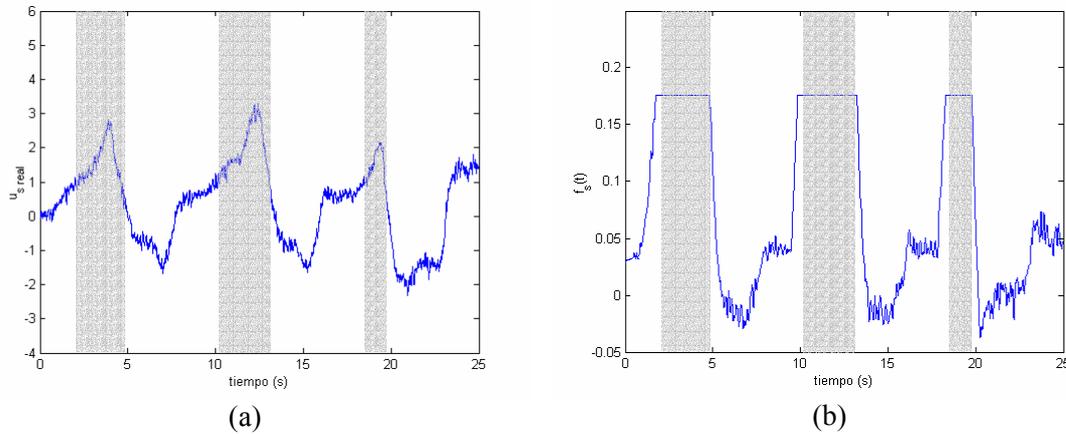


Figura 7.38. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

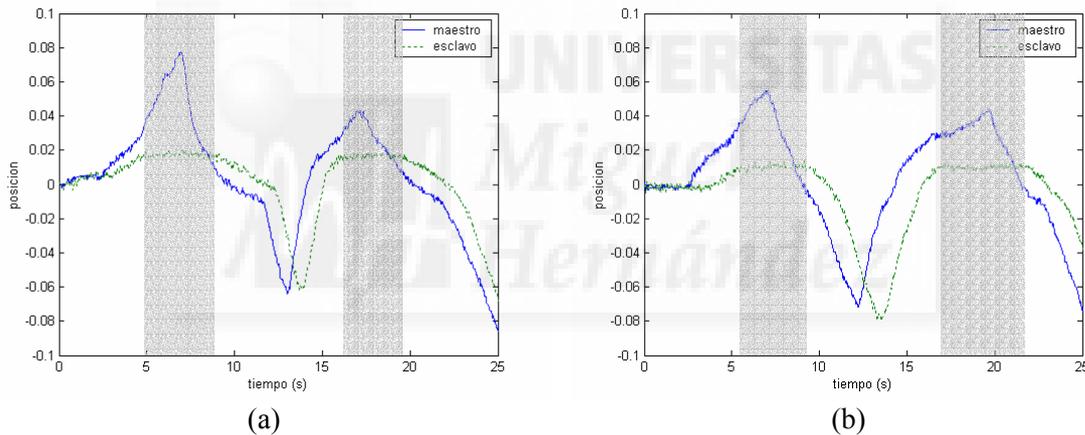


Figura 7.39. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

En la Figura 7.40 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos se logra que el esclavo siga al maestro hasta que el esclavo no pueda continuar su avance a causa de su interacción con el entorno. Como se puede observar en la Figura 7.40(b), pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Si se compara la Figura 7.40 con la Figura 7.39, puede apreciarse que los resultados obtenidos son similares, existiendo un error de posición constante entre el maestro y el esclavo que aumenta conforme crece el retardo existente en la comunicación. En el caso en que el retardo real en la comunicación es de 1 s, al igual que ocurría con los reguladores obtenidos asumiendo un retardo de 0.1 s, no se logra un funcionamiento intuitivo para el operador.

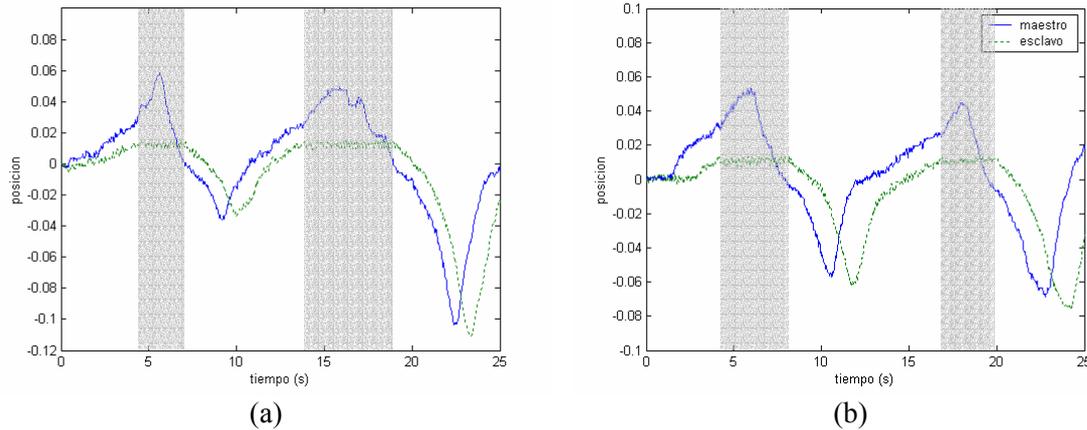


Figura 7.40. Posición del maestro ($x_{m_i}(t)$) y del esclavo ($x_{s_i}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

De los distintos resultados experimentales obtenidos considerando que el esclavo interactúa con una esponja suave, se puede concluir que el método de diseño aportado por la Tesis permite satisfactoriamente controlar el sistema teleoperado ante diferentes tiempos de retardo. Se ha comprobado como el esclavo sigue al maestro hasta que no puede continuar su avance a causa de su interacción con la esponja. Asimismo se ha observado como la señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador para que éste no siga ejerciendo fuerza sobre el maestro, y de este modo se detenga el maestro, y por lo tanto el esclavo. Además se ha verificado experimentalmente la robustez del método de diseño a variaciones en el tiempo de retardo considerado para calcular los valores de los reguladores, ya que ha sido posible emplear los reguladores obtenidos según un determinado retardo de diseño para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación era mayor.

Colisión del esclavo con la esponja rígida

Tras haber verificado el método de diseño en el caso de que el esclavo interactúa con una esponja suave, se va a validar el método de diseño cuando el esclavo interactúa con una esponja rígida. Como se indicó en el caso de la esponja suave, para obtener los reguladores aplicando el novedoso método aportado por la Tesis, es necesario conocer la constante de rigidez k_e del entorno. Esta constante ha sido obtenida experimentalmente a partir de la intensidad del motor del esclavo y de la evolución de la posición del esclavo durante el contacto. En este caso, la constante de rigidez identificada de la esponja rígida ha sido $k_e = 20$ Nm/rad.

Al igual que en el caso anterior, considerando la constante de rigidez identificada de la esponja, que los polos del esclavo y del error se ubican siempre en la posición -5 del plano s , y que la constante de reflexión de esfuerzos k_f es 0.1, se han calculado los reguladores para controlar el sistema según los dos tiempos de retardo indicados en la Tabla 7.7. Los reguladores obtenidos para cada retardo de diseño hacen al sistema asintóticamente estable independientemente del retardo. Por lo que, gracias a la robustez del método de diseño, pueden utilizarse los reguladores calculados asumiendo un determinado tiempo de retardo para controlar el sistema cuando el retardo real en la comunicación es mayor. Seguidamente se muestran los resultados experimentales

obtenidos para las distintas configuraciones de retardo de diseño y retardo real en la comunicación consideradas.

En la Figura 7.41 se muestra la evolución de la posición y de la velocidad del maestro y del esclavo en el caso de que el retardo de diseño y el existente en la comunicación coinciden y valen 0.1 s. Como puede observarse en la gráfica de la posición del maestro y del esclavo, Figura 7.41(a), el esclavo sigue al maestro hasta que el esclavo no puede continuar su avance a causa de la interacción con la esponja. A partir de ese momento el esclavo se detiene a pesar de que continúe el avance del maestro. En la parte final de dicha gráfica puede, además, observarse como si no existe interacción del esclavo con el entorno, éste sigue correctamente al maestro.

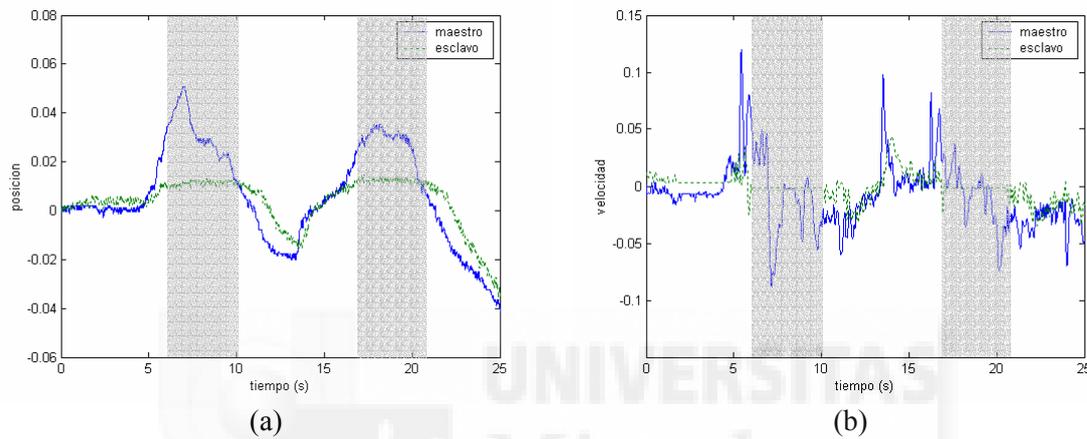


Figura 7.41. Comportamiento del sistema real considerando un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.1 s (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$).

En la Figura 7.42 se muestran las señales que afectan al control del maestro. En (a) se muestra la fuerza ejercida por el operador sobre el maestro. En (b) se muestra la señal de control que se aplica al maestro. Como puede apreciarse, la señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador para que, de este modo, el operador tenga constancia de las fuerzas ejercidas por el esclavo en el entorno remoto y detenga su avance. En (c) y en (d) se muestran los términos utilizados para calcular la señal de control del maestro (ver (7.54)): la señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$) y la fuerza realimentada del esclavo hacia el maestro ($k_f f_s(t-T)$). Como puede apreciarse, como ocurría en el caso de la esponja suave, es la señal de realimentación del estado del maestro la señal que logra oponerse a la fuerza ejercida por el operador, ya que la fuerza de realimentación del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado. En (d) puede observarse como se realimenta la mayor fuerza de interacción en los instantes en los que el esclavo no puede seguir su avance debido a la interacción con el entorno.

En la Figura 7.43(a) se muestra la señal de control que se aplica al esclavo ($\tilde{u}_s(t)$) y en la Figura 7.43(b) se muestra la fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$). Como se puede observar, en los instantes en los que se aplica una mayor acción de control sobre el esclavo, la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es mayor. Estos instantes corresponden con el momento en el que el esclavo está colisionando con el entorno y no puede continuar su avance, ver Figura 7.41(a).

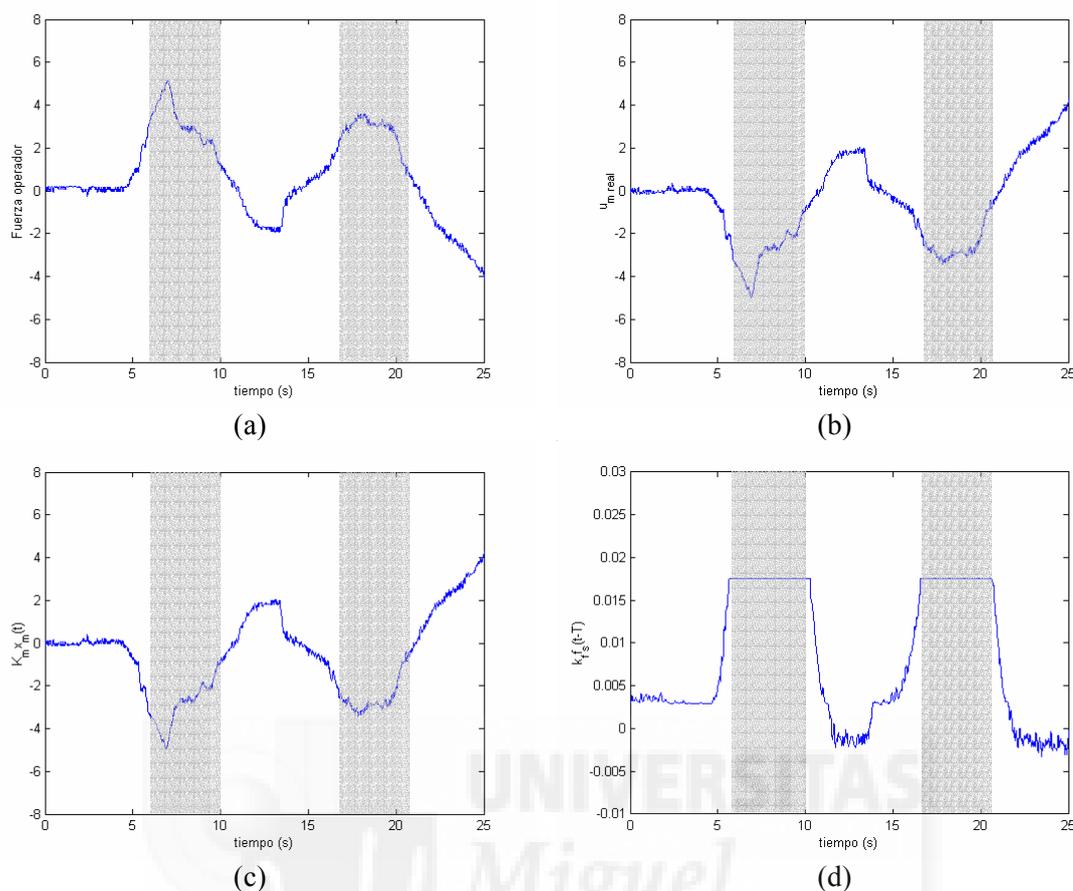


Figura 7.42. Señales implicadas en el control del maestro. (a) Fuerza ejercida por el operador ($F_m(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (c) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (d) Fuerza realimentada del esclavo ($k_f f_s(t-T)$).

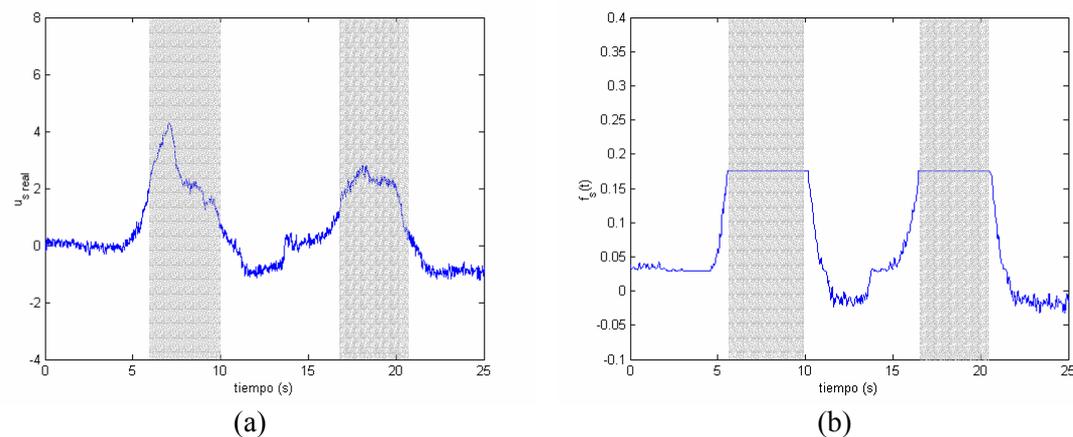


Figura 7.43. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).

Por tanto, a la vista de los resultados experimentales obtenidos, el esquema de control permite controlar de forma satisfactoria al sistema teleoperado cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 s y coincide con el utilizado para diseñar los reguladores del

sistema. A continuación, en la Figura 7.44, se muestran los resultados obtenidos cuando se utilizan los reguladores calculados mediante el retardo de 0.1 s para controlar el sistema cuando el retardo real existente en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). Como se puede apreciar, en ambos casos se logra un funcionamiento correcto del sistema teleoperado, de forma que el esclavo sigue al maestro hasta que no puede continuar su avance a causa de la interacción con el entorno. En ambos casos existe un error de posición constante entre el maestro y el esclavo, que aumenta a medida que crece el retardo existente en la comunicación. Además, cuando el retardo es de 1 s, el funcionamiento del sistema se degrada, siendo menos intuitivo para el operador el manejo del sistema teleoperado en comparación con los anteriores casos en los que el retardo real en la comunicación era de 0.1 s y 0.5 s. Es importante observar en ambas gráficas que, si el esclavo no interacciona con el entorno (parte final de las gráficas), el esclavo sigue al maestro a pesar del retardo. Con estos resultados experimentales obtenidos se puede verificar la robustez del método de diseño ante variaciones del retardo real respecto al retardo utilizado en el diseño.

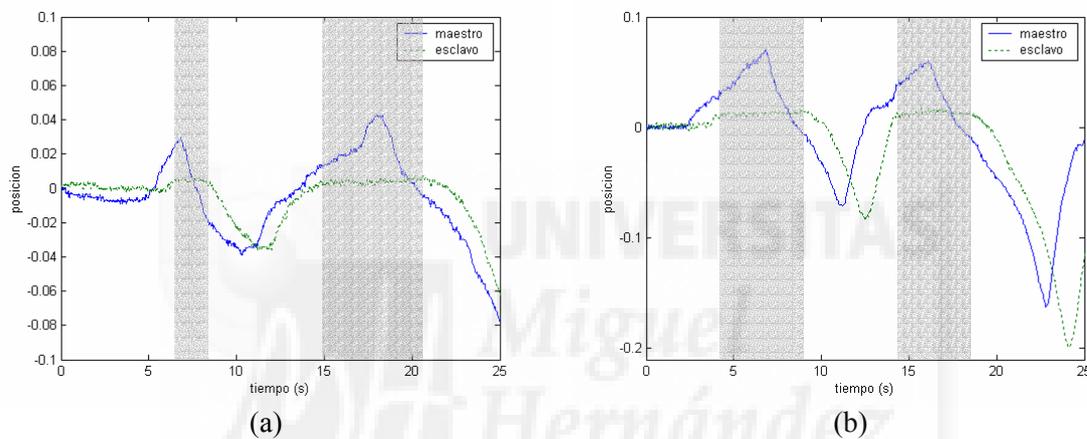


Figura 7.44. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Por último, en la Figura 7.45 se muestra la evolución de la posición del maestro y del esclavo cuando el retardo de diseño considerado es de 0.5 s y el retardo real en la comunicación es de 0.5 s (a) y de 1 s (b). En ambos casos se logra que el esclavo siga al maestro hasta que el esclavo no pueda continuar su avance a causa de su interacción con el entorno. Como se puede observar en la Figura 7.45(b), pueden utilizarse los reguladores obtenidos mediante el retardo de diseño de 0.5 s para controlar el sistema cuando el retardo real es de 1 s. Si se compara la Figura 7.45 con la Figura 7.44, puede apreciarse que los resultados obtenidos son similares, existiendo un error de posición constante entre el maestro y el esclavo que aumenta conforme crece el retardo existente en la comunicación. En el caso en que el retardo real en la comunicación es de 1 s, al igual que ocurría con los reguladores obtenidos asumiendo un retardo de 0.1 s, el manejo del sistema teleoperado no es intuitivo para el operador.

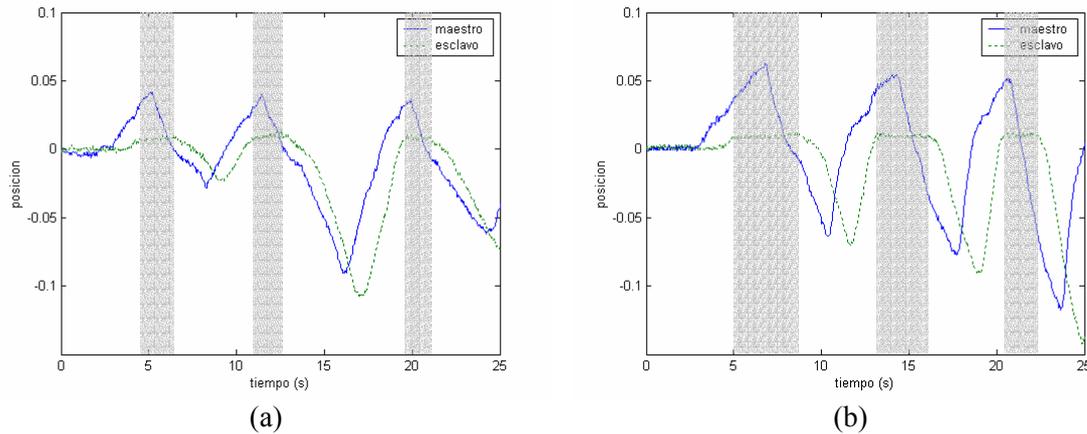


Figura 7.45. Posición del maestro ($x_{mi}(t)$) y del esclavo ($x_{sl}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).

Por tanto, a partir de los resultados experimentales obtenidos considerando que el esclavo interacciona con una esponja rígida, se puede concluir que, al igual que ocurría con la esponja suave, el método de diseño aportado por la Tesis permite satisfactoriamente controlar el sistema teleoperado ante diferentes tiempos de retardo. Se ha comprobado como el esclavo sigue al maestro hasta que no puede continuar su avance a causa de su interacción con la esponja. Asimismo se ha observado como la señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador para que éste no siga ejerciendo fuerza sobre el maestro y, de este modo, se detenga el maestro, y por lo tanto el esclavo. Además se ha verificado experimentalmente la robustez del método de diseño a variaciones en el tiempo de retardo considerado para calcular los valores de los reguladores, ya que ha sido posible emplear los reguladores obtenidos según un determinado retardo de diseño, para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación era mayor.

Si se comparan los resultados obtenidos en el caso de que el esclavo interacciona con la esponja rígida, con los que se obtuvieron en el caso de que el esclavo interaccionaba con la esponja suave, se puede comprobar que los resultados son similares. La principal diferencia se encuentra en que, en el caso de la esponja suave, el esclavo realiza un recorrido mayor mientras interacciona con el entorno, debido a que éste era de rigidez inferior.

A modo de resumen, las conclusiones que se pueden extraer de los resultados experimentales obtenidos al controlar el sistema teleoperado ante retardos cuando el operador ejerce una fuerza cualquiera sobre el maestro y el esclavo interacciona con los dos tipos de esponja son:

- El novedoso método de diseño aportado por la Tesis permite controlar de forma satisfactoria el sistema teleoperado considerando distintos tiempos de retardo en la comunicación, así como diferentes tipos de entorno.
- La posición del esclavo sigue a la del maestro mientras la interacción del esclavo con el entorno no impida el seguimiento en posición. Cuanto menor sea la rigidez del entorno, mayor recorrido de interacción realizará el esclavo.
- Existe un error de posición constante entre el maestro y el esclavo que se ve acentuado conforme aumenta el tiempo de retardo en la comunicación.

- La señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador para que éste no siga ejerciendo fuerza sobre el maestro y, de este modo, se detenga el maestro, y por lo tanto el esclavo.
- En los dos tipos de entornos considerados, de los dos términos utilizados para calcular la señal de control del maestro, es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza ejercida por el operador, ya que la fuerza realimentada del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado.
- En los instantes en los que el esclavo no puede continuar su interacción con el entorno, y el operador ejerce una mayor fuerza, se obtiene la mayor señal de control del esclavo.
- Se ha verificado que el método de control es robusto a variaciones en el retardo de diseño, puesto que ha sido posible controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación era superior al empleado en la etapa de diseño.
- Es válido considerar como fuerza de interacción del esclavo con el entorno la corriente que circula por el motor del esclavo, ya que se ha comprobado que cuando el esclavo no puede continuar el seguimiento del maestro a causa del entorno, se obtiene el valor mayor de corriente.

7.7 Conclusiones

En este capítulo se ha verificado experimentalmente el método de control presentado en la Tesis. Para ello se ha utilizado un sistema teleoperado desarrollado por el Área de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, compuesto por un maestro y un esclavo de un solo grado de libertad. El control del sistema teleoperado ha sido realizado mediante un computador, implementando el algoritmo de control directamente en *Simulink*. Para efectuar la comunicación del computador con el sistema teleoperado se ha utilizado una tarjeta de entrada/salida *National Instruments 6024E*.

Previamente a realizar el control del sistema teleoperado experimental, ha sido necesario identificar el mismo, es decir, se ha efectuado una identificación del maestro y del esclavo. A partir de la identificación, se ha planteado el modelo del sistema teleoperado en representación interna considerando todas las interacciones que pueden aparecer en el conjunto operador – maestro – esclavo – entorno, y se han obtenido las ecuaciones de diseño, cuya resolución conduce a la obtención de los reguladores del sistema teleoperado.

Una vez obtenidas las ecuaciones de diseño, en primer lugar se ha validado el método de control sobre el sistema teleoperado identificado en simulación, considerando distintos tipos de entorno, tiempos de retardos y ubicación de polos del esclavo y del error. Tras validar el método de control en simulación, se han presentado las pruebas experimentales sobre el sistema teleoperado real que han demostrado el correcto funcionamiento del método. Se han efectuado tres tipos de pruebas experimentales. Los dos primeros tipos de pruebas se han realizado simulando la interacción del esclavo con el entorno, y simulando la fuerza que ejerce el operador, respectivamente, mediante un escalón y una rampa. El tercer tipo de pruebas desarrolladas, corresponde a un

funcionamiento real del sistema teleoperado, considerando la fuerza real ejercida por un operador y que el esclavo interactúa con un entorno real. Para efectuar este tipo de pruebas se ha utilizado como entorno de interacción dos esponjas de distinta rigidez.

Las principales conclusiones que se pueden extraer de este capítulo son:

- El novedoso método de diseño de sistemas teleoperados con retardos presentado en el capítulo 3 de la Tesis ha sido verificado experimentalmente sobre un sistema teleoperado real de un grado de libertad de forma exitosa, considerando distintos tiempos de retardo en la comunicación, así como diferentes entornos con los que interactúa el esclavo.
- El método de diseño es robusto a variaciones en el tiempo de retardo de diseño. Es decir, pueden utilizarse los reguladores diseñados según un determinado tiempo de retardo, para controlar el sistema teleoperado cuando el retardo real existente en la comunicación es mayor. Esta característica había sido verificada en simulación en el capítulo 4, sin embargo, en este capítulo ha sido validada experimentalmente.
- Para las distintas configuraciones consideradas de rigidez del entorno y tiempo de retardo, se ha comprobado que el sistema es asintóticamente estable independientemente del retardo. Sin embargo, si la rigidez del entorno es muy elevada (por ejemplo $k_e = 1000$ Nm/rad), y se ubican los polos del error y del esclavo en -5 , el sistema sólo es asintóticamente estable para retardos inferiores a aproximadamente 0.01 s (considerando un retardo de diseño de 0.1 s).
- Cuando la fuerza ejercida por el operador es simulada mediante un escalón, se ha comprobado que a pesar de la existencia de retardos, el esclavo sigue al maestro anulándose el error de posición. Sin embargo, si la fuerza ejercida por el operador es simulada mediante una rampa, o no es simulada, sino que se tiene en cuenta la fuerza real ejercida por el operador, se ha comprobado que existe un error de posición entre el maestro y el esclavo constante que se acentúa conforme aumenta el tiempo de retardo en la comunicación.
- En un funcionamiento real del sistema teleoperado en el que el esclavo interactúa con un entorno, se ha comprobado que el esclavo sigue al maestro hasta que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno impida el seguimiento. La señal de control del maestro se opone a la fuerza ejercida por el operador con la finalidad de contrarrestarla y, de este modo, detener al maestro, y por lo tanto, al esclavo. En los dos tipos de entornos considerados (esponjas de diferente rigidez), de los dos términos utilizados para calcular la señal de control del maestro, se ha verificado que es la señal de realimentación del estado del maestro la que consigue anular la fuerza ejercida por el operador, ya que la fuerza realimentada del esclavo es despreciable frente a la señal de realimentación del estado.
- Si el retardo en la comunicación es elevado, por ejemplo de 1 s, el funcionamiento del sistema teleoperado se degrada, siendo poco intuitivo su manejo para un operador.

Por último hay que indicar que en todas las pruebas experimentales realizadas se ha considerado que el retardo existente en la comunicación era constante. Es decir, durante el control del sistema considerando un determinado tiempo de retardo, dicho tiempo de retardo no ha sufrido ninguna variación. Se han efectuado pruebas experimentales en las que se ha comprobado que el método de control aportado en la Tesis no es aplicable si

el retardo en la comunicación es variable. Esto corrobora el hecho de que los esquemas de control bilateral diseñados para retardos constantes no son aplicables cuando el retardo es variable [Kosuge-96a].





Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Conclusiones y aportaciones de la Tesis

En esta Tesis Doctoral se ha presentado un novedoso método de diseño y control de sistemas teleoperados con retardos en la transmisión basado en la convergencia de estados, válido para retardos constantes en la transmisión de hasta pocos segundos. El método de diseño considera que el esclavo puede interactuar con un entorno dinámico, de manera que la fuerza de interacción del esclavo con el entorno es realimentada al maestro, y que el retardo existente en la comunicación es constante. El método de diseño se basa en un nuevo modelado del sistema teleoperado en variables de estado en el dominio del tiempo en el que se han considerado todas las posibles interacciones que pueden existir entre el operador, el maestro, el esclavo y el entorno, que constituye una original aportación de la Tesis. El método proporciona un conjunto de ecuaciones cuya resolución permite obtener los valores de los reguladores del esquema de control del sistema teleoperado para que el estado del maestro y el del esclavo converjan, consiguiendo de este modo que el esclavo siga al maestro. Además el método de diseño es capaz de fijar el comportamiento dinámico de la convergencia entre el maestro y el esclavo (comportamiento dinámico del error), así como el comportamiento dinámico del esclavo.

Para deducir el método de diseño ha sido necesario obtener una representación en el espacio de estados del sistema teleoperado en la que no existieran términos retardados en el tiempo. Esto se ha logrado utilizando la aproximación de Taylor de primer orden para modelar el retardo. La aplicación de la expansión de Taylor para modelar el retardo en sistemas teleoperados también constituye otra gran aportación de la Tesis.

Es necesario resaltar la importancia del original método de diseño aportado por la Tesis. Por una parte, establece un procedimiento claro y conciso de cálculo de los parámetros de control, convirtiendo un problema de control en un mero problema algebraico de resolución de ecuaciones. Y por otra, no sólo consigue que el esclavo siga al maestro a pesar de la existencia de retardos, sino que, además, permite establecer las características dinámicas deseadas de la respuesta del esclavo, así como las características dinámicas deseadas de la convergencia entre el maestro y el esclavo.

A diferencia de otros métodos existentes de control de sistemas teleoperados con retardos que se basan en modelos simplificados del maestro y del esclavo, en esta Tesis, además de presentar el método de diseño y control particularizado al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por modelos simplificados correspondientes a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, se ha generalizado el método de

diseño por convergencia de estados al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales de orden n . En la generalización aportada se ha distinguido entre dos casos. El primero corresponde al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que no contienen ceros, mientras que el segundo corresponde al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales lineales que sí contienen ceros. La razón de diferenciar entre estos dos casos se ha debido a que, si se modela el maestro y el esclavo por ecuaciones diferenciales lineales que no contienen ceros, es posible generalizar el método de diseño y asegurar que la salida del esclavo siga a la del maestro, así como establecer la dinámica del esclavo y del error entre el maestro y el esclavo. Sin embargo, si se modela el maestro y el esclavo por ecuaciones diferenciales lineales que contienen ceros, sólo es posible generalizar el método de diseño si la matriz de salida del esclavo cumple cierta relación con la matriz de salida del maestro.

Hay que destacar que la generalización del método de diseño constituye una idea original y una gran aportación de la presente Tesis. Con la generalización del método de diseño será posible obtener los reguladores del esquema de control para que el esclavo siga al maestro, a pesar de la existencia de retardos, y además, establecer la dinámica deseada del esclavo y la dinámica deseada del error, simplemente resolviendo un sistema de ecuaciones, para cualquier sistema teleoperado en el que el maestro y el esclavo sean modelados por ecuaciones diferenciales lineales (y cumplan ciertas propiedades en el caso de que las ecuaciones diferenciales contengan ceros).

Puesto que el método de diseño aportado en la Tesis permite establecer la dinámica deseada del esclavo y del error maestro – esclavo, se ha presentado un exhaustivo análisis de la influencia del polinomio característico del esclavo y del error seleccionado en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado, con la finalidad de que pueda decidirse la ubicación de polos del esclavo y del error para que el comportamiento del sistema teleoperado sea el deseado.

Asimismo en la Tesis se ha demostrado la robustez del método de diseño y control a ligeras variaciones en los parámetros de diseño, de forma que se ha comprobado la validez del método cuando los parámetros reales del sistema teleoperado (retardo, entorno, maestro y esclavo) varían ligeramente respecto a los valores considerados para el diseño.

Por otra parte se ha estudiado la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos diseñado según el método presentado en la Tesis. Para efectuar el estudio se ha considerado el modelo de estado lineal del sistema teleoperado sin aproximar el retardo existente en la comunicación. La expansión de Taylor se utilizó para plantear las ecuaciones de diseño del sistema de control y poder obtener, solucionando estas ecuaciones, los reguladores del sistema. Pero, como es lógico, es necesario analizar la estabilidad del sistema real controlado por los reguladores calculados, no la estabilidad del sistema con la aproximación. Por este motivo se ha analizado la estabilidad asintótica del sistema teleoperado sin aproximar el retardo. En esta Tesis se ha optado por elegir los criterios propuestos por J.-H. Su *et al.* basados en el dominio frecuencial [Su-94] para efectuar el análisis de estabilidad. Del análisis realizado se ha obtenido de qué forma influyen los parámetros de diseño en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado, y además, se ha comprobado cómo pueden establecerse los parámetros de diseño para asegurar la estabilidad asintótica del sistema teleoperado con retardos.

Además en esta Tesis se ha verificado de forma exitosa, sobre un sistema teleoperado experimental de un grado de libertad desarrollado en el Área de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Miguel Hernández de Elche, el novedoso método de diseño y control por convergencia de estados, considerando diferentes tiempos de retardo así como distintos entornos de interacción.

Por último es necesario también remarcar que, puesto que en la Tesis se ha presentado un método de diseño y control que se enmarca dentro de los esquemas de control bilateral válidos para retardos de hasta pocos segundos, se ha aportado un completo estado del arte de estos esquemas, explicando con especial énfasis los esquemas ideados para trabajar cuando el retardo es constante, debido a que el novedoso método de diseño y control ha sido ideado para el caso en el que el retardo en la comunicación es constante.

8.2 Futuros trabajos

Como se indicó en el capítulo 2, en los sistemas teleoperados tradicionales la comunicación entre el maestro y el esclavo se realiza mediante un medio de transmisión privado, de forma que puede considerarse que el retardo existente en la comunicación es constante [Kosuge-96a]. En la actualidad, el desarrollo de las redes de computadores, como por ejemplo Internet, ha potenciado su uso como medio de transmisión en los sistemas teleoperados. En estos sistemas, el retardo existente en la comunicación no es constante, sino que varía en función de la carga de la red. Los esquemas de control bilateral que se utilizan cuando el retardo en la comunicación es constante no son aplicables cuando el retardo es variable. El método de diseño y control presentado en esta Tesis ha considerado que el retardo existente en la comunicación era constante. Por este motivo, sería importante en el futuro, considerando la misma metodología de diseño basada en la convergencia de estados entre el maestro y el esclavo, encontrar un procedimiento de diseño del sistema de control en el caso de que el retardo en la comunicación fuera variable.

Por otra parte, tal como se explica en [Lee-93], en el diseño de un esquema de control bilateral debe considerarse la dinámica del operador implicada en generar el comando de control a partir del estímulo visual y de fuerza. Esto se debe a que un esquema de control diseñado sin considerar la dinámica del operador puede volverse inestable cuando se introduce el operador en el bucle de control. En la deducción del nuevo método de diseño aportado en la Tesis no se ha considerado un modelo del operador en el bucle de control. Por esta razón, para que el sistema de control diseñado tuviera en cuenta el efecto de la dinámica del operador en el funcionamiento del sistema teleoperado, debería en el futuro obtenerse el método de diseño incorporando la dinámica del operador en el bucle de control.

En esta Tesis se ha efectuado un modelado del sistema teleoperado en representación interna en el dominio del tiempo, de forma que el diseño y control del sistema se realiza en el dominio del tiempo. Si el control de un sistema teleoperado se implementa en un computador, el control que se realiza es de tipo digital. En este caso debería considerarse un modelado híbrido en representación interna del sistema teleoperado, de

forma que existiera una parte en el dominio del tiempo (maestro y esclavo), y otra parte en el dominio discreto (controlador). A partir de esta representación híbrida debería transformarse la parte continua a discreta, ya que la transformación de un sistema continuo a discreto es exacta [Aracil-91], y obtener el método de diseño considerando el sistema teleoperado en discreto.

En el capítulo 6 se ha generalizado el método de diseño de sistemas teleoperados con retardos al caso en el que el maestro y el esclavo son modelados por ecuaciones diferenciales de orden n . En la generalización presentada se ha considerado que la ecuación diferencial del maestro y la del esclavo son del mismo orden. Por tanto debería estudiarse como generalizar el método de diseño en el caso de que el maestro y el esclavo fueran modelados por ecuaciones diferenciales de diferente orden.

Por último, tanto en el capítulo 3 como en el capítulo 6, se ha deducido el método de diseño considerando un manipulador maestro y un manipulador esclavo modelados por ecuaciones diferenciales lineales. El modelo dinámico de un manipulador no es lineal [Fu-88], de forma que para efectuar el diseño según el procedimiento aportado en la Tesis es preciso realizar en primer lugar una linealización del mismo. Sin embargo, puesto que la linealización es una aproximación en la vecindad de un punto de funcionamiento, un modelo lineal sólo puede predecir el comportamiento local del sistema no lineal en la vecindad de ese punto. Por este motivo, sería interesante en el futuro abordar el diseño del esquema de control del sistema teleoperado con retardos considerando un modelo no lineal del maestro y del esclavo, y aplicando la metodología de diseño utilizada en la Tesis basada en la convergencia de estados del maestro y del esclavo.



Bibliografía

- [Aiguo-96] S. Aiguo, Z. Qingjun and H. Weiyi, “Identification and Control of Bilateral Telerobot with Time Delay”, *Proceedings IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 1996, pp. 1353 – 1358.
- [Anderson-89] R. J. Anderson and M. W. Spong, “Bilateral Control of Teleoperators with Time Delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 5, May 1989, pp. 494 – 501.
- [Anderson-92] R. J. Anderson and M. W. Spong, “Asymptotic Stability for Force Reflecting Teleoperators with Time Delay”, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 2, April 1992, pp. 135 – 149.
- [Aracil-91] R. Aracil y A. Jiménez, *Sistemas Discretos de Control (Representación Externa)*, Sección de Publicaciones, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
- [Arcara-02] P. Arcara and C. Melchiorri, “Control Schemes for Teleoperation with Time Delay: A Comparative Study”, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 38, 2002.
- [Aström-84] K. J. Aström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.
- [Azuma-97] R. T. Azuma, “A Survey on Augmented Reality”, *Presence*, Vol. 6, No. 4, 1997.
- [Balas-91] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith, *μ -Analysis and Synthesis Toolbox: User’s Guide*, The Mathworks Inc., 1991.
- [Barrientos-97] A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer y R. Aracil, *Fundamentos de Robótica*, McGraw-Hill, Madrid, 1997.
- [Bejczy-90] A. K. Bejczy and W. S. Kim, “Predictive Displays and Shared Compliance Control for Time-Delayed Manipulation”, *Proceedings IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 1990.
- [Bejczy-94] A. K. Bejczy, P. Fiorini, W. S. Kim and P. Schenker, “Toward Integrated Operator Interface for Advanced Teleoperation under Time – Delay”, *Proceedings IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 1994.
- [Bellman-62] R. E. Bellman, “Vector Lyapunov Functions”, *SIAM J. Contr.*, Vol. 1, 1962, pp. 33 – 34.

[Bemporad-98] A. Bemporad, “Predictive Control of Teleoperated Constrained Systems with Unbounded Communication Delays”, *Proceedings 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida (USA), December 1998, pp. 2133 – 2138.

[Bergamasco-95] M. Bergamasco and G. M. Prisco, “An Experimental Approach to Virtual Surfaces Exploration Exploiting an Arm Exoskeleton as Haptic Interface”, *SPIE Proceedings in Telepresence and Telemanipulator Technologies II*, Philadelphia, October 1995.

[Bon-97] B. Bon and H. Seraji, “On-line Collision Avoidance for the Ranger Telerobotic Flight Experiment”, *ANS 7th Topical Meeting on Robotics and Remote Systems*, Augusta, 1997.

[Boyd-94] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, *SIAM*, Vol. 15, 1994.

[Brady-98] K. Brady and T.-J. Tarn, “Internet-Based Remote Teleoperation”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 1998, pp. 65 – 70.

[Buttolo-94] P. Buttolo, P. Braathen and B. Hannaford, “Sliding Control of Force Reflecting Teleoperation: Preliminary Studies”, *Presence*, Vol. 3, 1994, pp. 158 – 172.

[Caiti-96] A. Caiti, G. Cannata, G. Casalino and S. Reto, “The Local Force Control Loop Approach in Bilateral Control of Master-Slave Systems”, *Proceedings 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996, pp. 747 – 752.

[Chen-94a] J. Chen *et al.*, “A New Method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems”, *Proceedings 33rd IEEE CDC*, 1994, pp. 433 – 437.

[Chen-94b] J. Chen *et al.*, “On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay”, *Proceedings 1994 American Control Conference*, 1994, pp. 1929 – 1933.

[Colgate-94] J. E. Colgate and J. M. Brown, “Factors Affecting the Z-Width of a Haptic Display”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, USA, May 1994.

[Conway-90] L. Conway, R. Volz and M. Walker, “Teleautonomous Systems: Methods and Architectures for Intermingling Autonomous and Telerobotic Technology”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 2, April 1990, pp. 146 – 158.

[Dambrine-93] M. Dambrine and J. P. Richard, “Stability Analysis on Time-Delay Systems”, *Dyn. Syst. Appl.*, Vol. 2, 1993, pp. 405 – 414.

[Domínguez-02] S. Domínguez, P. Campoy, J. M. Sebastián y A. Jiménez, *Control en el Espacio de Estado*, Prentice-Hall, Madrid, 2002.

[Driver-62] R. D. Driver, “Existence and Stability of a Delay-Differential System”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 10, 1962, pp. 401 – 426.

- [El'sgol'ts-73] L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973.
- [Eusebi-98] A. Eusebi and C. Melchiorri, "Force Reflecting Telemanipulators with Time-Delay: Stability Analysis and Control Design", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 4, 1998.
- [Ferre-97] M. Ferre, "Diseño de Interfaces Avanzadas para Robots Teleoperados. Desarrollo de un Entorno de Teleoperación", *Tesis Doctoral*, DISAM, Universidad Politécnica de Madrid, 1997.
- [Ferrell-65] W. R. Ferrell, "Remote Manipulation with Transmission Delay", *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*, Vol. 6, 1965, pp. 24 – 32.
- [Ferrell-66] W. R. Ferrell, "Delayed Force Feedback", *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*, Vol. 8, 1966, pp. 449 – 455.
- [Francis-87] B. A. Francis, *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Fu-88] K. S. Fu, R. C. González y C. S. G. Lee, *Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [Funaya-93] K. Funaya and N. Takanasi, "Predictive Bilateral Master-Slave Manipulation with Statistical Environment Model", *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, Georgia, USA, May 1993, pp. 755 – 760.
- [Funda-91] J. Funda, "Teleprogramming: Toward Delay-Invariant Remote Manipulator", *Ph. D. Dissertation*, Univ. Penn., Philadelphia, USA, 1991.
- [Gajić-96] Z. Gajić and M. Lelić, *Modern Control Systems Engineering*, Prentice-Hall, Great Britain, 1996.
- [García-00] C. E. García, R. Carelli, J. F. Postigo and B. Morales, "Time Delay Compensation Control Structure for a Robotic Teleoperation System", *Proceedings 4th IFAC International Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications*, 2000.
- [Goertz-64] R. Goertz, "Manipulators Systems Development at ANL", *Proceedings 12th Conference on Remote Systems Technology*, ANS, 1964.
- [Götkas-97] F. Götkas, J. M. Smith and R. Bajcsy, "Telerobotics over Communication Network", *Proceedings 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, USA, December 1997, pp. 2399 – 2404.
- [Halanay-66] A. Halanay, *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1966.

[Hale-85] J. K. Hale *et al.*, “Stability in Linear Delay Equations”, *Journal Math. Anal. Appl.*, Vol. 105, 1985, pp. 533 – 555.

[Hale-93] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Hashtrudi-Zaad-96] K. Hashtrudi-Zaad and S. E. Salcudean, “Adaptive Transparent Impedance Reflecting Teleoperation”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, Minnesota, USA, 1996, pp. 1369 – 1374.

[Held-66] R. Held and N. I. Durlach, “Telepresence”, *Presence*, Vol. 1, No. 1, 1992.

[Held-92] R. Held, A. Efstathiou and M. Greene, “Adaptation to Displaced and Delayed Visual Feedback from the Hand”, *Journal Exp. Psych.*, Vol. 72, 1966, pp. 887 – 891.

[Hirzinger-89] G. Hirzinger, J. Heindl and K. Landzettel, “Predictor and Knowledge-Based Telerobotic Control Concepts”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automatics*, May 14-19, Scottsdale, Arizona, USA, 1989, pp. 1768 – 1777.

[Holland-75] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, Ann Arbor, Univ. Mich. Press, 1975.

[Huang-98] H.-P. Huang and Y.-F. Wei, “Control of Dexterous Hand Master with Force Feedback”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 1998, pp. 687 – 692.

[Janabi-95] F. Janabi-Sharifi, “Collision: Modeling, Simulation and Identification of Robotic Manipulators Interacting with Environments”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 1995.

[Kamen-80] E. W. Kamen, “On the Relationship between Zero Criteria for Two-Variable Polynomials and Asymptotic Stability of Delay Differential Equations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 25, 1980, pp. 983 – 984.

[Khalil-96] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (Third Edition)*, Prentice-Hall, USA, 1996.

[Khatib-86] O. Khatib, “Real Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots”, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, 1986.

[Kikuchi-98] J. Kikuchi, K. Takeo and K. Kosuge, “Teleoperation System via Computer Network for Dynamic Environment”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 1998, pp. 3534 – 3539.

[Kim-92] W. S. Kim, B. Hannaford and A. K. Bejczy, “Force – Reflection and Shared Compliant Control in Operating Telemanipulators with Time Delay”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 2, April 1992, pp. 176 – 185.

- [Kim-93] W. S. Kim, P. S. Schenker, A. K. Bejczy, S. Leake and S. Ollendorf, “An Advanced Operator Interface Design with Preview/Predictive Displays for Ground-Controlled Space Telerobotic Servicing”, *SPIE Proceedings*, Vol. 2057, Boston, Massachusetts, USA, September 1993.
- [Kolmanovskii-86] V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1986.
- [Kosuge-96a] K. Kosuge, H. Murayama and K. Takeo, “Bilateral Feedback Control of Telemanipulators via Computer Network”, *Proceedings IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1996, pp. 1380 – 1385.
- [Kosuge-96b] K. Kosuge, T. Itoh and T. Fukuda, “Scaled Telemanipulation with Communication Time Delay”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996, pp. 2019 – 2024.
- [Kosuge-97] K. Kosuge and H. Murayama, “Bilateral Feedback Control of Telemanipulators via Computer Network in Discrete Time Domain”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, April 1997, pp. 2219 – 2224.
- [Kuo-96] B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático (7ª edición)*, Prentice-Hall, Méjico, 1996.
- [Lakshmikantam-69] V. Lakshmikantam and S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Academic Press, New York, 1969.
- [Lawn-93] C. A. Lawn and B. Hannaford, “Performance Testing of Passive Communication and Control in Teleoperation with Time Delay”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993.
- [Lawrence-93] D. A. Lawrence, “Stability and Transparency in Bilateral Teleoperation”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993, pp. 624 – 637.
- [Lee-69] H. Lee and C. Hsu, “On the τ -decomposition Method of Stability Analysis for Retarded Dynamical Systems”, *SIAM J. Contr.*, Vol.7, 1969, pp. 242 – 259.
- [Lee-91] S. Lee and H. S. Lee, “Intelligent Control of Manipulators Interacting with an Uncertain Environment based on Generalized Impedance”, *Proceedings 6th IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, August 1991, pp. 61 – 66.
- [Lee-93] S. Lee and H. S. Lee, “Modeling, Design, and Evaluation of Advanced Teleoperator Control Systems with Short Time Delay”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, October 1993, pp. 607 – 623.
- [Lee-94a] S. Lee and H. S. Lee, “Design of Optimal Time Delayed Teleoperator Control System”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, California, USA, May 1994, pp. 3252 – 3258.

[Lee-94b] S. Lee and K. Jeong, “Design of Robust Time Delayed Teleoperator Control System”, *Proceedings IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, September 1994, pp. 1413 – 1420.

[Leung-95] G. M. H. Leung, B. A. Francis and J. Apkarian, “Bilateral Controller for Teleoperators with Time Delay via μ -Synthesis”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 1, February 1995, pp. 105 – 116.

[Li-95] X. Li and C. E. de Souza, “LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems”, *Proceedings 34th IEEE CDC*, 1995.

[Lozano-02] R. Lozano, N. Chopra and M. Spong, “Passivation of Force Reflecting Bilateral Teleoperators with Time Varying Delay”, *Proceedings of the 8th Mechatronics Forum International Conference*, Enschede, Netherlands, June 2002.

[Manorotkul-96] S. Manorotkul and H. Hashimoto, “Virtual Impedance with Position Error Correction for Teleoperator with Time Delay”, *Proceedings 4th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, 1996, pp. 524 – 528.

[Mori-81] T. Mori, *et al.*, “Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delay”, *International Journal of Control*, Vol. 34, 1981, pp. 1175 – 1184.

[Mori-85] T. Mori, “Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time-Delay Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, 1985, pp. 158 – 161.

[Mori-89] T. Mori and H. Kokame, “Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 27, 1989, pp. 460 – 462.

[Mosher-60] R. Mosher and B. Wendel, “Force Reflecting Electro-Hydraulic Servomanipulator”, *Electro-Technology*, 1966.

[Munir-01] S. Munir, “Internet-Based Teleoperation”, *PhD Thesis*, G. W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, 2001.

[Neimark-49] J. Neimark, “D-Subdivisions and Spaces of Quasi-Polynomials”, *Pr. Math. Mech.*, Vol. 13, 1949, pp. 349 – 380.

[Niculescu-97] S.-I. Niculescu, *Time-Delay Systems: Qualitative Aspects on the Stability and Stabilization*, Diderot Eds., Paris, 1997.

[Niculescu-98] S.-I. Niculescu, E. I. Verriest, L. Dugard and J.-M. Dion, “Stability of Linear Systems with Delayed State: a Guided Tour”, *Linear Time Delay Systems. A proceedings volume from the IFAC Workshop Grenoble, France*, 1998.

[Niemeyer-91] G. Niemeyer and J.-J. E. Slotine, “Stable Adaptive Teleoperation”, *IEEE Journal of Oceanographic Engineering*, Vol. 16, No. 1, 1991, pp. 152 – 162.

- [Niemeyer-96] G. Niemeyer, “Using Wave Variables in Time Delayed Force Reflecting Teleoperation”, *PhD Thesis*, MIT, Cambridge, USA, 1996.
- [Niemeyer-97] G. Niemeyer and J.-J. E. Slotine, “Designing Force Reflecting Teleoperators with Large Time Delays to Appear as Virtual Tools”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, USA, 1997, pp. 2212 – 2218.
- [Niemeyer-98] G. Niemeyer and J.-J. E. Slotine, “Towards Force-Reflecting Teleoperation over the Internet”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, 1998, pp. 1909 – 1915.
- [Noyes-84] M. V. Noyes, “Superposition of Graphics on Low Bit-Rate Video as an Aid to Teleoperation”, *S. M. Thesis*, Mass. Inst. Technol., Cambridge, Massachusetts, USA, 1984.
- [Nyquist-32] H. Nyquist, “Regeneration Theory”, *Bell System Technical Journal*, Vol. 11, No. 1, 1932, pp. 126 – 147.
- [Ñeco-01] R. P. Ñeco, “Técnicas de Procesamiento del Lenguaje Natural para la Teleoperación de Robots”, *Tesis Doctoral*, Universidad Miguel Hernández, 2001.
- [Oboe-97] R. Oboe and P. Fiorini, “A Design and Control Environment for Internet-Based Telerobotics”, *International Journal of Robotics Research*, November 1997.
- [Ogata-96] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto (2ª edición)*, Prentice-Hall, Méjico, 1996.
- [Ogata-98] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna (3ª edición)*, Prentice-Hall, Méjico, 1998.
- [Otsuka-95] M. Otsuka, N. Matsumoto, T. Idogaki, K. Kosuge and T. Itoh, “Bilateral Telemanipulator System with Communication Time Delay Based on Force-Sum-Driven Virtual Internal Models”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1995, pp. 344 – 350.
- [Park-99] J.-H. Park and H.-C. Cho, “Sliding-Mode Controller for Bilateral Teleoperation with Varying Time Delay”, *Proceedings IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Atlanta, USA, 1999, pp. 311 – 316.
- [Peñín-97] L. F. Peñín, M. Ferre, J. Fernández-Pello, R. Aracil and A. Barrientos, “Design Fundamentals of Master-Slave Systems with a Force-Position Bilateral Control Scheme”, *5th Symposium on Robot Control (SYROCO '97)*, Nantes, France, September 1997.
- [Peñín-98] L. F. Peñín, “Control Bilateral de Robots Teleoperados. Contribuciones en Reflexión de Fuerzas”, *Tesis Doctoral*, DISAM, Universidad Politécnica de Madrid, 1998.

- [Pesanti-59] P. Pesanti and G. Cherel, “French Master Slaves”, *Proceedings 7th HLE*, 1959.
- [Raju-89] G. J. Raju, G. C. Verghese and T. B. Sheridan, “Design Issues in 2-Port Network Models of Bilateral Remote Teleoperation”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1989.
- [Reinoso-01] O. Reinoso, J. M. Azorín, C. Fernández, R. P. Neco y R. Puerto, “Entorno de Teleoperación Robotizado para el Desarrollo de Tareas Remotas”, *Memorias X Simposio de Ingeniería Eléctrica (SIE 2001)*, Santa Clara, Cuba, 2001.
- [Sano-98] A. Sano, H. Fujimoto and M. Tanaka, “Gain-Scheduled Compensation for Time Delay of Bilateral Teleoperation Systems”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 1998, pp. 1916 – 1923.
- [Satche-49] M. Satche, “Stability on Linear Oscillating Systems with Constant Time Lag”, *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, Vol. 16, No. 4, 1949, pp. 419 – 420.
- [Sayers-94] C. P. Sayers and R. P. Paul, “An Operator Interface for Teleprogramming Employing Synthetic Fixtures”, *Presence*, 1994.
- [Sayers-95] C. P. Sayers, A. Lai and R. P. Paul, “Visual Imagery for Subsea Teleprogramming”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1995.
- [Sheridan-92] T. B. Sheridan, *Telerobotics and Human Supervisory Control*, The MIT Press, 1992.
- [Sheridan-93] T. B. Sheridan, “Space Teleoperation through Time Delay: Review and Prognosis”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, 1993, pp. 592 – 606.
- [Smith-58] O. J. M. Smith, *Feed-Back Control System*, McGraw-Hill, 1958.
- [Soeda-98] M. Soeda, K. Warwick, R. J. Craddock and T. Furuya, “Human-Computer Cooperative Teleoperation with Time Delay”, *Proceedings UKACC International Conference on CONTROL*, September 1998, pp. 1444 – 1449.
- [Stépán-89] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Function*, John Wiley & Sons, 1989.
- [Su-94] J.-H. Su, I.-K. Fong and C.-L. Tseng, “Stability Analysis of Linear Systems with Time Delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, 1994.
- [Su-95] J.-H. Su, “The Asymptotic Stability of Linear Autonomous Systems with Commensurate Delays”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, 1995, pp. 1114 – 1118.

- [Thowsen-81] A. Thowsen, “An Analytical Stability Test for a Class of Time-Delay Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 25, 1981, pp. 735 – 736.
- [Verriest-93] E. I. Verriest *et al.*, “Frequency Domain Robust Stability Criteria for Linear Delay Systems”, *Proceedings 32nd IEEE CDC*, 1993, pp. 3473 – 3478.
- [Vertut-85] J. Vertut and P. Coiffet, *Teleoperation and Robotics. Evolution and Development*, Kogan Page, Londres, 1985.
- [Walton-87] K. Walton and J. E. Marshall, “Direct Method for TDS Stability Analysis”, *Proc. Inst. Eng., Pt. D*, Vol. 134, No. 2, 1987, pp. 101–107.
- [Wang-92] S.-S. Wang, “Further Results on Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ”, *Systems and Control Letters*, Vol. 19, 1992, pp. 165 – 168.
- [Wang-95] W. J. Wang and R. J. Wang, “New Stability Criteria for Linear Time-Delay Systems”, *Control Theory and Advanced Tech.*, Vol. 10, 1995, pp. 1213 – 1222.
- [Wernli-82] R. L. Wernli, “Robotics Undersea”, *Mechanical Engineering Magazine*, August 1982.
- [Yamada-00] K. Yamada, T. Okuyama and Y. Funami, “A Design Method of Bilateral Control of Teleoperators with Time-Delay”, *Proceedings 6th International Conference on Control, Robotics and Vision*, Singapore, 2000.
- [Yamakita-95] M. Yamakita, M. Negi and K. Ito, “Experimental Study of Tele-Bilateral Impedance Control using Bilinear Model”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1995, pp. 634 – 640.
- [Yokokohji-94] Y. Yokokohji and T. Yoshikawa, “Bilateral of Master-Slave Manipulators for Ideal Kinesthetic Coupling-Formulation and Experiment”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 10, No. 5, October 1994, pp. 605 – 620.
- [Yokokohji-99] Y. Yokokohji, T. Imaida and T. Yoshikawa, “Bilateral Teleoperation under Time-Varying Communication Delay”, *Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1999, pp. 1854 – 1859.
- [Yokokohji-00] Y. Yokokohji, T. Imaida and T. Yoshikawa, “Bilateral Control with Energy Balance Monitoring under Time-Varying Communication Delay”, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, California, USA, April 2000, pp. 2684 – 2689.
- [Zhu-00] W. H. Zhu and S. E. Salcudean, “Stability-Guaranteed Teleoperation: An Adaptive Motion/Force Control Approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 11, November 2000, pp. 1951 – 1969.



Índice de figuras

Figura 2.1. Primer sistema teleoperado eléctrico (modelo E1), desarrollado por R. Goertz	7
Figura 2.2. Sistema teleoperado <i>Handyman</i> creado por R. Mosher	7
Figura 2.3. Elementos principales de un sistema teleoperado	9
Figura 2.4. Modelo de un sistema teleoperado de un único grado de libertad.....	11
Figura 2.5. Esquema de control bilateral posición – posición	11
Figura 2.6. Diagrama de bloques del esquema posición – posición	12
Figura 2.7. Esquema de control bilateral fuerza – posición.....	13
Figura 2.8. Diagrama de bloques del esquema fuerza – posición.....	14
Figura 2.9. Esquema de control bilateral presión – posición.....	14
Figura 2.10. Diagrama de bloques del esquema presión – posición.....	15
Figura 2.11. Vehículo espacial <i>Viking</i> enviado a Marte. (1) manipulador, (2) brazo con instrumentos meteorológicos.....	16
Figura 2.12. Arquitectura de un sistema teleoperado controlado mediante un visualizador predictivo con generación de fuerzas virtuales	20
Figura 2.13. Diagrama de bloques de un sistema teleoperado.....	21
Figura 2.14. Diagrama de bloques del esquema de control bilateral basado en pasividad	23
Figura 2.15. Sistema teleoperado basado en variables de onda.....	24
Figura 2.16. Esquema de control basado en variables de onda	25
Figura 2.17. Implementación del control acomodaticio compartido	26
Figura 2.18. Esquema de control acomodaticio con reflexión de fuerza (parte superior); esquema de control acomodaticio (parte inferior).....	27
Figura 2.19. Esquema general del sistema teleoperado	31
Figura 2.20. Diagrama de bloques de un sistema teleoperado de 1 GDL.....	33
Figura 3.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.....	40
Figura 3.2. Modelo simplificado de un robot de 1 GDL	42
Figura 3.3. Modelo de entorno tipo Kelvin	45
Figura 3.4. Esquema de control de un sistema teleoperado de 1 GDL.....	46
Figura 3.5. Planteamiento realizado en primer lugar para obtener las ecuaciones de diseño del esquema de control considerando la aproximación de Taylor de 2º orden (izquierda) y nuevo planteamiento para la obtención de las ecuaciones de diseño (derecha).....	77
Figura 4.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.....	83
Figura 4.2. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control maestro ($u_m(t)$); (d) Señal de control esclavo ($u_s(t)$).....	87
Figura 4.3. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$) ..	88
Figura 4.4. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	89
Figura 4.5. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).....	89
Figura 4.6. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$) ..	90
Figura 4.7. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	90

Figura 4.8. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	91
Figura 4.9. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$) .	91
Figura 4.10. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	92
Figura 4.11. Simulación del sistema teleoperado I considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	92
Figura 4.12. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	93
Figura 4.13. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	93
Figura 4.14. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	95
Figura 4.15. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	95
Figura 4.16. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	96
Figura 4.17. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	96
Figura 4.18. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	97
Figura 4.19. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	97
Figura 4.20. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	98
Figura 4.21. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	98
Figura 4.22. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	99
Figura 4.23. Simulación del sistema teleoperado II considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	100
Figura 4.24. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.1 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	101
Figura 4.25. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	102
Figura 4.26. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	102
Figura 4.27. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.1 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	103
Figura 4.28. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.5 s y un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$)	103
Figura 4.29. Términos de la señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$). (a) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (b) Fuerza de realimentación del esclavo ($R_m x_s(t-T)$)	104
Figura 4.30. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$)	104

Figura 4.31. Simulación del sistema teleoperado III considerando un retardo de 0.5 s y un entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s)). (a) Posición maestro ($x_{m1}(t)$) y esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad maestro ($x_{m2}(t)$) y esclavo ($x_{s2}(t)$).....	105
Figura 4.32. (a) Posición final del maestro y del esclavo en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Posición final del maestro y del esclavo en función de la ubicación de los polos del esclavo.....	111
Figura 4.33. (a) Velocidad máxima del maestro (parte superior) y velocidad máxima del esclavo (parte inferior) en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Velocidad máxima del maestro en función de la ubicación de los polos del esclavo	112
Figura 4.34. (a) Tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Tiempo de establecimiento del maestro en función de la ubicación de los polos del esclavo.....	112
Figura 4.35. (a) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la ubicación de los polos del esclavo	113
Figura 4.36. (a) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del esclavo.....	114
Figura 4.37. (a) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del esclavo; (b) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del esclavo	114
Figura 4.38. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo se sitúan en la posición -11. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{s1}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	115
Figura 4.39. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo se sitúan en la posición -21. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{s1}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	116
Figura 4.40. (a) Velocidad máxima del esclavo en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del error; (b) Velocidad máxima del esclavo en función de la ubicación de los polos del error	117
Figura 4.41. (a) Tiempo de establecimiento del maestro (parte superior) y del esclavo (parte inferior) en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del error; (b) Tiempo de establecimiento del esclavo en función de la ubicación de los polos del error	118
Figura 4.42. (a) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del error; (b) Tiempo de convergencia entre el maestro y el esclavo en función de la ubicación de los polos del error	118
Figura 4.43. (a) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del error; (b) Máximo de la señal de control real del maestro en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del error ...	119
Figura 4.44. (a) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la <i>frecuencia natural no amortiguada</i> (ω_n) del error; (b) Máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función de la ubicación de los polos del error	119
Figura 4.45. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del error se sitúan en la posición -21. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{s1}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	120
Figura 4.46. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -5. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	122
Figura 4.47. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando los polos del esclavo y del error se ubican en la posición -18. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	123

Figura 4.48. Tiempo de establecimiento del maestro (a) y del esclavo (b) en función del retardo existente en la comunicación	124
Figura 4.49. Tiempo de convergencia en función del retardo existente en la comunicación	125
Figura 4.50. Valor máximo de la señal de control real del esclavo en valor absoluto en función del retardo existente en la comunicación	125
Figura 4.51. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando el retardo en la comunicación es de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	126
Figura 4.52. Comportamiento del sistema teleoperado I cuando el retardo en la comunicación es de 1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	126
Figura 4.53. (a) Error de posición entre el maestro y el esclavo en función de la constante de rigidez del entorno (k_e); (b) posición del maestro (parte superior) y posición del esclavo (parte inferior)	127
Figura 4.54. Tiempo de establecimiento del maestro en función de la constante de rigidez del entorno (k_e)	128
Figura 4.55. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un entorno de rigidez (a) $k_e = 80$ Nm/rad; (b) $k_e = 120$ Nm/rad	128
Figura 4.56. Velocidad máxima del maestro (a) y velocidad máxima del esclavo (b) en función de la inercia del maestro	129
Figura 4.57. (a) Tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del maestro; (b) Tiempo de convergencia en función de la inercia del maestro	130
Figura 4.58. Valor máximo de la señal de control real del maestro (a) y del esclavo (b) en función de la inercia del maestro	130
Figura 4.59. Velocidad máxima del esclavo en función de la inercia del esclavo	131
Figura 4.60. (a) Tiempo de establecimiento del maestro y del esclavo en función de la inercia del esclavo; (b) Tiempo de convergencia en función de la inercia del esclavo	132
Figura 4.61. Valor máximo de la señal de control real del maestro (a) y del esclavo (b) en función de la inercia del esclavo	132
Figura 5.1. Modelado del sistema teleoperado con retardos en la transmisión	138
Figura 5.2. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s))	149
Figura 5.3. Comportamiento del sistema teleoperado I en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 2 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	150
Figura 5.4. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s))	150
Figura 5.5. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.5 s. (a) Entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)); (b) Entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s))	151
Figura 5.6. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado I cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es muy rígido ($k_e = 2000$ Nm/rad, $b_e = 20$ Nm/(rad/s))	151
Figura 5.7. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado II cuando el retardo es de 0.1 s. (a) Entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)); (b) Entorno rígido ($k_e = 100$ Nm/rad, $b_e = 1$ Nm/(rad/s))	152
Figura 5.8. Comportamiento del sistema teleoperado II en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 3 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)	152
Figura 5.9. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado II cuando el retardo es de 0.5 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s))	153
Figura 5.10. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) con un retardo de diseño de 0.5 s y un retardo real de 0.5 s; (b) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) con un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.5 s	154
Figura 5.11. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado III cuando el retardo es de 0.1 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s))	155

Figura 5.12. Comportamiento del sistema teleoperado III en un entorno suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)) y con un retardo real de 1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$) y del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	156
Figura 5.13. Función $\psi(\theta)$ para el sistema teleoperado III cuando el retardo es de 0.5 s y el entorno es suave ($k_e = 10$ Nm/rad, $b_e = 0.1$ Nm/(rad/s)).....	156
Figura 5.14. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema en función de: (a) la ubicación media de los polos del esclavo en valor absoluto; (b) la ubicación de los polos del esclavo.....	161
Figura 5.15. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II en función de: (a) la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) del error; (b) la ubicación de los polos del esclavo.....	163
Figura 5.16. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III en función del retardo de diseño.....	166
Figura 5.17. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II en función de la constante de reflexión de esfuerzos (k_f).....	170
Figura 5.18. Retardo máximo que asegura la estabilidad asintótica del sistema teleoperado III en función de la constante de reflexión de esfuerzos (k_f). (a) Entorno suave; (b) Entorno rígido.....	170
Figura 5.19. (a) Máximo valor de k_f que asegura la estabilidad asintótica independiente del retardo en función de la rigidez del entorno; (b) Máximo valor de k_f que asegura la estabilidad asintótica hasta un determinado tiempo de retardo en función de la rigidez del entorno.....	171
Figura 6.1. Modelado de sistema teleoperado con retardos en la transmisión.....	176
Figura 7.1. Sistema teleoperado experimental de un grado de libertad.....	212
Figura 7.2. Esquema de control en posición de un motor de CC en bucle abierto.....	214
Figura 7.3. Velocidad del maestro ante entradas de tensión de 1 V, 1.5 V y 2 V.....	216
Figura 7.4. Esquema de control en posición del maestro en bucle abierto.....	218
Figura 7.5. Esquema de control en posición del esclavo.....	219
Figura 7.6. Sistema de control del sistema teleoperado.....	221
Figura 7.7. Simulación del sistema teleoperado considerando que todos los polos están en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 1). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	225
Figura 7.8. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error están en -5, los polos del esclavo están en -10, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 4). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	226
Figura 7.9. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error están en -10, los polos del esclavo están en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 5). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	227
Figura 7.10. Simulación del sistema teleoperado considerando que los polos del error y del esclavo están en -10, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s (configuración 6). (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	228
Figura 7.11. Tipos de pruebas experimentales realizadas para verificar el método de diseño.....	229
Figura 7.12. Esquema de control del sistema teleoperado con retardos simulando la fuerza del operador mediante un escalón y simulando la interacción del esclavo con el entorno...	230

Figura 7.13. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error están en -10 y los del esclavo en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 233

Figura 7.14. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error están en -5 y los del esclavo en -10, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 234

Figura 7.15. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error y del esclavo están en -10, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 235

Figura 7.16. Comportamiento del sistema real considerando que los polos del error y del esclavo están en -5, $k_e = 1$ Nm/rad y un retardo de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 236

Figura 7.17. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 237

Figura 7.18. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 238

Figura 7.19. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 239

Figura 7.20. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 239

Figura 7.21. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 240

Figura 7.22. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 241

Figura 7.23. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 241

Figura 7.24. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 242

Figura 7.25. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1000$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s..... 242

Figura 7.26. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 244

Figura 7.27. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 245

Figura 7.28. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 1$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 245

Figura 7.29. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$)..... 246

Figura 7.30. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 246

Figura 7.31. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 10$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b)..... 247

Figura 7.32. Comportamiento del sistema real considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.1 s. (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$); (c) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (d) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$).....	248
Figura 7.33. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	248
Figura 7.34. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando $k_e = 100$ Nm/rad, un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	249
Figura 7.35. Esquema de control del sistema teleoperado considerando que la entrada al sistema es una fuerza real ejercida por el operador y que el esclavo interactúa con un entorno real.....	250
Figura 7.36. Comportamiento del sistema real considerando un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.1 s (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$).....	253
Figura 7.37. Señales implicadas en el control del maestro. (a) Fuerza ejercida por el operador ($F_m(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (c) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (d) Fuerza realimentada del esclavo ($k_{fs}(t-T)$).....	254
Figura 7.38. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).....	255
Figura 7.39. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	255
Figura 7.40. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	256
Figura 7.41. Comportamiento del sistema real considerando un retardo de diseño de 0.1 s y un retardo real de 0.1 s (a) Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$); (b) Velocidad del maestro ($x_{m2}(t)$) y del esclavo ($x_{s2}(t)$).....	257
Figura 7.42. Señales implicadas en el control del maestro. (a) Fuerza ejercida por el operador ($F_m(t)$); (b) Señal de control real del maestro ($\tilde{u}_m(t)$); (c) Señal de realimentación del estado del maestro ($K_m x_m(t)$); (d) Fuerza realimentada del esclavo ($k_{fs}(t-T)$).....	258
Figura 7.43. (a) Señal de control real del esclavo ($\tilde{u}_s(t)$); (b) Fuerza de interacción del esclavo con el entorno ($f_s(t)$).....	258
Figura 7.44. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.1 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	259
Figura 7.45. Posición del maestro ($x_{m1}(t)$) y del esclavo ($x_{s1}(t)$) considerando un retardo de diseño de 0.5 s, y un retardo real de 0.5 s (a) y 1 s (b).....	260



Índice de tablas

Tabla 2.1. Variables y parámetros del sistema teleoperado.....	21
Tabla 4.1. Parámetros considerados de cada sistema teleoperado.....	85
Tabla 4.2. Parámetros utilizados para modelar los distintos tipos de entorno	85
Tabla 4.3. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado I en función del retardo y el entorno considerado.....	86
Tabla 4.4. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado II en función del retardo y el entorno considerado	94
Tabla 4.5. Reguladores obtenidos para el sistema teleoperado III en función del retardo y el entorno considerado	100
Tabla 4.6. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado I	106
Tabla 4.7. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado I	106
Tabla 4.8. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado II.....	107
Tabla 4.9. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado II.....	107
Tabla 4.10. Valores finales alcanzados por el maestro y el esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado III.....	108
Tabla 4.11. Valores máximos en valor absoluto de la señal de control del maestro y del esclavo en función del retardo y del entorno para el sistema teleoperado III	108
Tabla 4.12. Influencia de los polos del esclavo y del error en los parámetros que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema teleoperado.....	122
Tabla 4.13. Influencia de los parámetros de diseño en el comportamiento dinámico del sistema teleoperado	134
Tabla 5.1. Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia.....	142
Tabla 5.2. Métodos de análisis de estabilidad basados en el dominio del tiempo	145
Tabla 5.3. Parámetros considerados de cada sistema teleoperado.....	148
Tabla 5.4. Parámetros utilizados para modelar los distintos tipos de entorno	148
Tabla 5.5. Dependencia de la ubicación media de los polos del esclavo del retardo de diseño en la estabilidad asintótica del sistema teleoperado II cuando el entorno es rígido	167
Tabla 5.6. Retardo máximo admisible por el sistema teleoperado III asegurando la estabilidad asintótica en función del tipo de entorno	168
Tabla 7.1. Canales de lectura de la tarjeta de adquisición	214
Tabla 7.2. Canales de escritura de la tarjeta de adquisición	214
Tabla 7.3. Valores obtenidos en la identificación del maestro	216
Tabla 7.4. Valores obtenidos en la identificación del esclavo.....	216
Tabla 7.5. Reguladores utilizados con el sistema teleoperado identificado.....	224
Tabla 7.6. Configuraciones validadas experimentalmente	237
Tabla 7.7. Configuraciones validadas experimentalmente	252

